T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MULTİSET DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Nihal DEMİR SAĞOL

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2024
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Nihal DEMİR SAĞOL tarafından hazırlanan "Multiset Dizilerinin İdeal Yakınsaklığı Üzerine " adlı tez çalışması 26/07/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Fatih NURAY	
Danışman Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ	
Üye Prof. Dr. Uğur ULUSU	
Üye Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Ümit KARABIYIK	

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…/20.. gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Nihal DEMİR SAĞOL

26.07.2024

ÖZET

DOKTORA TEZİ

MULTİSET DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Nihal DEMİR SAĞOL

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ

2024, 52 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ
Prof. Dr. Fatih NURAY
Prof. Dr. Uğur ULUSU
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Ümit KARABIYIK

Beş bölümden oluşan bu tez çalışmasında multiset dizilerinin ideal yakınsaklığı üzerine çalışılmıştır. Birinci bölüm olan giriş bölümünde, tez konusu ile ilgili kaynak araştırması ile tezin amacı verilmiştir. Tez çalışmasında gerekli olacak temel tanımlar, örnekler ve teoremler ikinci bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde multiset dizilerinin ideal yakınsaklığı kavramı tanımlanmıştır. Bunun için multisetler üzerinde yeni bir metrikten söz edilerek, multiset dizilerinin yakınsaklığı, ideal yakınsaklığı ve multiset dizilerinin ideal yakınsaklığına dair bazı cebirsel ve topolojik özellikler incelenmiştir. Ayrıca multiset dizilerinin $I^* -$ yakınsaklığı tanımı verilmiştir. Dördüncü bölüm multiset dizilerinin $I -$ lacunary istatistiksel yakınsaklığı kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde multiset dizilerinin $I -$ lacunary istatistiksel yakınsaklığı, kuvvetli $I -$ lacunary toplanabilirliği, $I -$ istatistiksel yakınsaklığı ve $I -$ istatistiksel Cesàro toplanabilirliği tanımları verilerek aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu tanımlar ile ilişkili teoremler elde edilmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçlar ve önerilere beşinci bölümde yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İdeal, İdeal Yakınsaklık, Multiset, Multiset Dizisi, Lacunary Dizisi, Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

ON THE İDEAL CONVERGENCE OF MULTİSET SEQUENCES

Nihal DEMİR SAĞOL

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATİCS

Advisor: Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ

2024, 52 Pages

Jury
Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ
Prof. Dr. Fatih NURAY
Prof. Dr. Uğur ULUSU
Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Assist. Prof. Dr. Ümit KARABIYIK

In this thesis study consisting of five chapters, ideal convergence of multiset sequences has been studied. In the introduction section, which is the first section, the source research related to the thesis topic and the aim of the thesis are given. The basic definitions, examples and theorems that will be required in the thesis study are given in the second section. In the third section, the concept of ideal convergence of multiset sequences is defined. For this, a new metric on multisets is introduced and some algebraic and topological properties of convergence, ideal convergence and ideal convergence of multiset sequences are analyzed. Also, the definition of $I^{*}-$convergence of multiset sequences is given. The fourth chapter is devoted to $I-$lacunary statistical convergence of multiset sequences. In this chapter, the definitions of $I-$lacunary statistical convergence, $I-$strong lacunary summability, $I-$statistical convergence and $I-$statistical Cesàro summability of multiset sequences are given and their relations are analyzed. Theorems related to these definitions are obtained. The results and recommendations obtained from the study are included in the fifth chapter.

Keywords: Ideal, Ideal Convergence, Multiset, Multiset Sequence, Lacunary Sequence, Lacunary Statistical Convergence.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' na Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Doktora eğitimim süresince bilgi birikimini sabır ve hoşgörüyle benimle paylaşan, yakın ilgisini ve desteğini esirgemeyen, yanında çalışmaktan büyük mutluluk duyduğum değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ' e saygılarımı ve en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi bu süreçte de yanımda olarak bana destek veren Aileme sevgilerimi ve sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Nihal DEMİR SAĞOL
KONYA-2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$2^{\mathbb{N}}$	: Doğal sayıların tüm alt kümeleri
$d(K)$	: K kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta(K)$	: K kümesinin doğal yoğunluğu
$\lvert K \rvert$	: K kümesinin eleman sayısı
I	: İdeal
$F(I)$	: I ideali tarafından üretilen süzgeç
Λ_x	: Limit noktaları kümesi
Γ_x	: Yığılma noktaları kümesi
$I(\Lambda_x)$	: I -limit noktaları kümesi
$I(\Gamma_x)$	: I -yığılma noktaları kümesi
w	: Tüm reel veya kompleks terimli diziler
c	: Yakınsak diziler kümesi
S	: İstatistiksel yakınsak diziler kümesi
$S(I)$	: I -istatistiksel yakınsak diziler kümesi
θ	: Lacunary dizisi
S_θ	: Lacunary istatistiksel diziler kümesi
$S_\theta(I)$	: I -lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi
N_θ	: Kuvvetli lacunary toplanabilir diziler kümesi
$N_\theta(I)$	: Kuvvetli I -lacunary toplanabilir diziler kümesi
$\sigma(I)$	: I -istatistiksel Cesàro toplanabilir diziler kümesi
$m\mathbb{R}$	: Reel multiset

Kısaltmalar

(h.h.i.)	: Hemen hemen her i
$st-\lim$	: İstatistiksel limit
I -lim sup	: I -limit supremum
I -lim inf	: I -limit infimum
mset	: Multiset

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Araştırması

Klasik küme teorisinde elemanların kümede yalnızca bir kez yazılabildiği bilinmektedir. Ancak günlük hayatta bir elemanın birden fazla kez tekrar ettiği ve tekrar sayısının çok önemli olduğu birçok yapı bulunmaktadır. Elemanlarının sonlu kez olmak koşuluyla birden fazla kez tekrar edebildiği kümeler olan multisetler oldukça ilgi çekici yapılardır. Hayatın birçok alanında multisetleri görebilmek mümkündür. Örneğin,
Telefon numaraları: 05357597…
Bilgisayar kodları: 1110001101101…
Su molekülü: H_2O
Denklemlerin çakışık kökleri: $(x-3)^2$
Örneklerde de görüldüğü üzere, aynı rakamlar veya aynı moleküller farklı roller oynamaktadır ve bu elemanların bir kez yazılması durumunda problemler ortaya çıkacaktır. Bu nedenle multiset kümeleri matematik, istatistik, fizik, felsefe, mantık, dil bilimi, bilgisayar bilimi vb. alanlarda oldukça ilgi çekici bir çalışma alanıdır.

Multisetlerin uzun yıllardır "bags", "occurrence set", "sample", "weighted set", "heap", "bunch", "fireset" gibi farklı isimler altında çalışıldığı görülmektedir (Syropoulos, 2001). Multisetler hakkında ilk kez bilgi veren kişi 1888 yılında yayınladığı "The nature and meaning of numbers" isimli makalesinde Richard Dedekind' dir (Syropoulos, 2001) ve bu kümeler için "multiset" sözcüğünü ilk kez N. G. De Burjin ifade etmiştir (Blizard, 1991). Burjin' in multisetlere olan ilgisi bir sayının bölenleri kümesinin kombinatoryal özellikleri üzerine yaptığı çalışmalardan kaynaklanmaktadır. Buna göre bir sayı veya bu sayının bölenlerinden herhangi birisi, çoklu asal çarpanlar kümesi olarak ifade edilebilmektedir. Blizard 1991 yılında yayınladığı "The development of multiset theory" isimli makalesinde multiset teorisinin gelişimi ile ilgili oldukça geniş bir çalışma yapmıştır. Buna göre multiset (multiple membership set) elemanlarının tekrar etmesine izin verilen kümelerdir. Örneğin $[a,a,a,b,c,c]$ multisetinde a elemanı üç kez, b elemanı bir kez ve c elemanı iki kez tekrar etmektedir. Elemanların sırası ise göz ardı edilmektedir. Yani $[a,b,a,c,a,c]$ veya $[a,c,a,c,a,b]$ multisetleri örnekte verilen multiset ile aynı kümeyi ifade etmektedir. Ayrıca bu multisetler $[a,b,c]_{3,1,2}$, $[c,a,b]_{2,3,1}$ veya $[b,c,a]_{1,2,3}$ şeklinde de ifade edilebilmektedir.

Knuth 1981 yılındaki çalışmasında multisetlerin matematikte ne kadar çok görülse de elemanlarının tekrarlarını dikkate almanın henüz standart bir yolunun olmadığını ifade etmektedir. Buna ek olarak Meyer ve McRobie (1982) multisetler için yeterli gösterim ve terminoloji eksikliğinin mantık ve felsefenin gelişiminde bir engel olduğundan bahsetmektedirler.

N. J. Wildberger "A new look at multisets" isimli makalesinde bir yapıda bulunan elemanların karşımıza üç farklı durum çıkardığını ifade etmektedir. Bu durumları elemanların farklı olması, aynı olmasına rağmen ayrı varlıklar olması ya da çakışan ve özdeş yapılar olması şeklinde açıklamaktadır (Wildberger, 2003). Örneğin bir su molekülünü oluşturan atomlar incelendiğinde, molekülün iki hidrojen bir oksijen atomundan oluştuğu görülmektedir. Hidrojenler sırasıyla H^1 ve H^2 ve oksijen O ile sembolize edildiğinde H^1 ve O nun farklı yapılar, H^1 ve H^2 nin aynı ancak ayrı yapılar ve H^1 ve H^1 in ise çakışan ve özdeş yapılar olduğunu söylemek mümkündür. Bu farklılıklar multiset teorisi çalışmalarının ortaya çıkmasına yol açmıştır. Bu gibi durumları ayırt edecek daha somut ve genel kurallar aydınlatılmayı beklemektedir.

Küme teorisi, multiset teorisinin özel bir durumu olarak Cerf ve arkadaşları (1971) tarafından tanıtılmıştır. Multiset teorisinde, klasik küme teorisinden daha zengin bir altyapı ve kavram çeşitliliği sunulmaktadır ki bu da günlük hayat ile verilerin matematiksel kullanımı arasındaki farkı azaltmaya yardımcı olacaktır. Yani günlük hayatın matematiğe aktarımını kolaylaştıracaktır ve aynı zamanda günlük yaşamda sıklıkla kullanılan çok çeşitli durumları matematiksel bir konsept dahilinde anlamamıza yardımcı olacaktır. Bununla birlikte teorilerdeki incelik düzeyini de artıracaktır. Bu çalışmalardan çıkarılabilecek önemli sonuçlardan bir tanesi hem klasik anlamda hem de klasik olmayan küme teorilerinin türetilebileceğini göstermektedir.

Son yıllarda klasik olmayan küme teorilerinin çoğaldığı görülmektedir. Bu teoriler arasında Zadeh' in bulanık küme teorisi (1965), kuantum küme teorisi (Takeuti, 1981), Boolean ve Heyting değerli küme teorisi (2011), Vopĕnka' nın alternatif küme teorisi (1989), Church' ün evrensel küme teorisi (1974), Pawlak' ın kaba küme teorisi (2002), sezgiselci ve yapısalcı küme teorisi (Aczel, 1986) vb. gösterilebilir. Multiset teorisi de dahil olmak üzere bu çalışmaların tamamı aslında klasik küme teorisinin bazı durumlarda yetersiz kaldığını göstermektedir. Yalnız burada bu yeni teorilerin amacı klasik küme teorisinin yerini almaktan ziyade, onu tamamlamak veya belirli bir açıdan genelleştirmektir. Klasik Cantorian küme teorisi güvenli bir küme teorisi için en iyi aday olarak görülmektedir. Buna alternatif olarak ise Category teorisi güçlü bir aday olarak görünmektedir (Blizard, 1981).

Resmi olarak ilk kez Fast ve Steinhaus tarafından 1951 yılında tanımlanan istatistiksel yakınsaklığın temeli doğal yoğunluk kavramına dayanır. Bu kavram Fast ve Steinhaus tarafından reel sayı dizileri için tanımlanmış, her iki matematikçi birbirinden bağımsız olarak bu kavramın farklı temel özelliklerini incelemiştir. Daha sonra reel ve kompleks diziler için Buck (1953) ve Schoenberg (1959) tarafından çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramının farklı özelliklerini araştıran ve bu yöntemi bir toplanabilme yöntemi olarak ortaya koyan kişi 1959' da yine Schoenberg olmuştur. Akabinde dizi uzayı açısından daha detaylı incelenerek Fridy (1985), Salat (1980), Tripathy (1997) ve birçok kişi tarafından toplanabilme teorisi ile ilişkilendirilmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı herhangi bir lokal konveks topolojik vektör uzayındaki diziler için Maddox (1998) tarafından verilmiştir. Topolojik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ise Maio ve Kočinac (2008) tarafından tanımlanmıştır. İstatistiksel yakınsaklığın tanımlanması ve bazı özelliklerinin çalışılmasının ardından Fridy (1993) istatistiksel limit noktalarını tanımlamıştır. Fridy' nin çalışmasından sonra, 1997' de Fridy ve Orhan tarafından limit superior ve limit inferior kavramları istatistiksel yakınsaklık için ele alınmıştır. Birçok alanda kendisine uygulama alanı bulan istatistiksel yakınsaklığın kullanıldığı bazı alanlar Freedman ve Sember tarafından çalışılan toplanabilme teorisi (1981), Erdös ve Tenenbaum tarafından çalışılan sayılar teorisi (1989), Miller tarafından çalışılan ölçüm teorisi (1995) ve Zygmund tarafından çalışılan trigonometrik seriler (1979) olarak sıralanabilir.

İstatistiksel yakınsaklık klasik anlamdaki yakınsaklığı daha genel bir bakış açısından incelemeye olanak sağlamaktadır. Bu yakınsaklık türünün temelini oluşturan yoğunluk kavramı oldukça geniş bir kavramdır ve çeşitli tanımlamalarla ele alınmıştır. Doğal yoğunluk aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini ifade etmek üzere, $K \subset \mathbb{N}$ olsun ve $|K|$ ifadesi K kümesinin eleman sayısını göstersin. O halde, $K_i = \{i \leq n : i \in K\}$ olarak tanımlandığında, K kümesinin doğal yoğunluğu

$$d(K)=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{i}|K_i|$$

şeklinde belirtilir. Bu tanım doğrultusunda istatistiksel yakınsak kavramı şu şekilde ifade edilmektedir:

Reel veya kompleks sayıların bir $x=(x_i)$ dizisi için $\forall\varepsilon>0$ olduğunda,

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\{i\le n : |x_i-L|\ge\varepsilon\right|=0$$

sağlanacak şekilde bir L sayısı bulunabilirse $x=(x_i)$ dizisinin L ye istatistiksel yakınsak olduğu söylenir. Bu durum $st-\lim x_i=L$ ile sembolize edilir (Fridy, 1985). Bu tanım şu şekilde de açıklanabilir: Eğer L sayısının herhangi bir $\varepsilon>0$ komşuluğunda $x=(x_i)$ dizisinin sonsuz çoklukta elemanı bulunmasına rağmen bu elemanların indislerinin oluşturduğu kümenin doğal yoğunluğu sıfır oluyorsa bu dizi L ye istatistiksel yakınsaktır. Sonlu kümelerin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu bilindiğinden, istatistiksel yakınsaklığın klasik yakınsaklığı da içeren bir yakınsaklık türü olduğu söylenebilir. Yani yakınsak her dizi istatistiksel yakınsak iken yakınsak bir dizinin istatistiksel yakınsak olduğunu söylemek her zaman doğru olmaz.

Bu tez çalışmasının en önemli kavramlarından birisi olan $I-$yakınsaklık, 2000 yılında Kostyrko, Šalát ve Wilezyński tarafından metrik uzaylarda tanımlanmıştır. Bu kavram, pozitif tamsayılar kümesi $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinden oluşturulan bir I ideali yardımıyla tanımlanır. Bu yakınsaklık türü, bilinen yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın yanı sıra daha birçok yakınsaklık türünü genelleştirmektedir. Bunun anlamı, seçilen ideale göre farklı yakınsaklık türlerinin elde edilmesidir. I ideali şu şekilde ifade edilebilir:

$I\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ kümesi boştan farklı bir küme olmak üzere eğer;

$\emptyset\in I$;

A ve $B\in I$ iken $A\cup B\in I$

$A\in I$ ve $B\subseteq A$ iken $B\in I$

özellikleri sağlanıyorsa I ailesine $\mathbb{N}$ kümesinin alt kümelerinin bir ideali denir. $I\neq 2^{\mathbb{N}}$ olması durumunda ideale gerçek ideal denir. Bunun yanında eğer I ideali $\mathbb{N}$ kümesinin her sonlu alt kümesini içeriyorsa uygun ideal olarak adlandırılır. $I-$yakınsaklık konusunda sıklıkla kullanılan önemli kavramlardan birisi de süzgeç kavramıdır.

$F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ kümesi boştan farklı bir küme olmak üzere,

$\emptyset \notin F$;

$A, B \in F$ olduğunda $A \cap B \in F$;

$A \in F$ ve $A \subseteq B$ olduğunda $B \in F$

özellikleri sağlanıyorsa F kümesine $\mathbb{N}$ kümesinin alt kümelerinin bir süzgeci denir. İdealin duali olarak düşülebilen süzgeç kavramı ile ideal arasındaki bağıntı şu şekilde ifade edilebilir. $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ise $F(I) = \{K \subseteq \mathbb{N} : K = \mathbb{N} \backslash A,\ A \in I\}$ kümesi $\mathbb{N}$ de süzgeçtir. $I-$yakınsaklık ile ilgili temel tanımların ardından ideal yakınsaklığın tanımı şu şekilde yapılmaktadır. $x = (x_i)$ bir reel sayı dizisi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : |x_i - L| \geq \varepsilon\} \in I$ oluyorsa $x = (x_i)$ dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına $I-$yakınsaktır denir $I - \lim x = L$ şeklinde gösterilir (Kostyrko ve ark., 2000).

İdeal yakınsaklık ile yakından ilişkili diğer bir kavram I^*-yakınsaklık adı verilen yakınsaklık türüdür. Bu kavram yine Kostyrko, Šalát ve Wilezyński tarafından tanımlanmış ve (AP) özelliği yardımıyla bu iki yakınsaklık türü arasındaki ilişkiler incelenmiştir. I^*-yakınsak olan bir dizinin $I-$yakınsak olduğu fakat bu ifadenin tersinin doğru olması için bazı özel şartların sağlanması gerektiği söylenebilir (Kostyrko ve ark., 2000).

İstatistiksel yakınsaklığa dair önemli kavramlardan birisi olan istatistiksel limit noktaları Fridy tarafından 1993' te tanımlanmıştır. Bu çalışmanın ardından istatistiksel limit inferior ve istatistiksel limit superior ifadeleri Fridy ve Orhan (1997) tarafından açıklanmıştır. Bu çalışmalardan yararlanarak Demirci (2001) $I-$limit superior ve $I-$limit inferior üzerine çalışmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklığın tanımlanmasının ardından Savaş ve Das (2011) istatistiksel yakınsaklık ve $I-$yakınsaklığı bir araya getirerek $I-$istatistiksel yakınsaklık kavramını ifade etmişlerdir. Bu tanıma göre, reel ya da kompleks sayıların $x = (x_i)$ dizisi için her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ olduğunda,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\left|\{i \leq n : |x_i - L| \geq \varepsilon\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

oluyorsa L sayısına dizinin $I-$istatistiksel limiti denir. O halde, $x = (x_i)$ dizisinin L sayısına $I-$istatistiksel yakınsak olduğu söylenir.

Matematiksel teoriler çalışılırken bazı özel diziler ile çalışılması farklı sonuçlar ortaya çıkarmış ve bu sonuçlar ilgi çekici bulunmuştur. Bu dizilere örnek olarak lacunary dizileri verilebilir. Lacunary dizileri, negatif olmayan tam sayıların $\theta=(k_r)$ şeklinde artan bir tamsayı dizisidir ve aynı zamanda;

$k_0=0$;

$r\to\infty$ için $h_r=k_r-k_{r-1}\to\infty$

şartlarını sağlar. Bu dizinin elemanlarından oluşan $J_r=(k_{r-1},k_r]$ aralığı çalışmalarda eleman seçimi açısından önemli olacaktır. (Freedman ve ark., 1978). 1993 yılında Fridy ile Orhan' ın ele aldığı lacunary istatistiksel yakınsaklıkta, istatistiksel yakınsaklıkta ele alınan $\{k:k\le n\}$ kümesinin elemanları yerine $\{k:k_{r-1}<k\le k_r\}$ aralığındaki elemanlar seçilerek yakınsaklık kavramı çalışılmıştır. Bir diğer çalışma olan $I-$lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ise Das, Savaş ve Ghosal (2011) tarafından verilmiştir. Savaş ve Das' ın (2010) çalışmalarının çizgisinde ilerleyen bu çalışma iyi bilinen iki toplanabilme yönteminin idealler kullanılarak sunulmasından oluşmaktadır.

$\theta=(k_r)$ dizisi bir lacunary dizisi ve I uygun bir ideal olmak üzere, $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall\delta>0$ sayıları için,

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\left|\{i\in I_r:|x_i-L|\ge\varepsilon\}\right|\ge\delta\right\}\in I$$

oluyorsa $x=(x_i)$ dizisi L sayısına $I-$lacunary istatistiksel yakınsaktır.

Bilindiği üzere, reel ve kompleks sayı dizilerinin yanı sıra daha birçok dizi çeşidi bulunmaktadır ve küme dizileri son zamanlarda en çok ele alınan dizi çeşitlerindendir. Küme dizilerinin yakınsaklığı Wijsman (1964, 1966), Effros (1965), Salinetti ve Wets (1979), Beer (1985, 1994, 2002), Lucchetti (1985), Baronti ve Papini (1986), De Blasi ve Myjak (1986), Lechicki ve Levi (1987) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Baronti ve Pappini (1986)' nin çalışmasında küme dizileri için üç farklı yakınsaklık türü tanımlanmış ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu tanımlar Haussdorff yakınsaklık, Wijsman yakınsaklık ve Kuratowski yakınsaklık olarak söylenebilir. Reel veya kompleks sayı dizileri için tanımlanmış olan çeşitli kavram ve teoremler küme dizilerinin yakınsaklığına genişletilmeye devam edilmiştir. Bu konudaki önemli kaynaklardan bir tanesi Nuray ve Rhoades (2012) tarafından tanımlanan küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığına dair yapılan çalışmadır. Bu çalışmada küme dizilerinin Kuratowski istatistiksel yakınsaklığı, Wijsman istatistiksel yakınsaklığı ve Haussdorff istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış ve bazı temel teoremler ele alınmıştır. Ulusu ve Nuray (2012) küme dizilerinin Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığını tanımlamışlardır. Küme dizilerinin Wijsman $I-$yakınsaklık ve Wijsman I^*-yakınsaklığı Kişi ve Nuray tarafından 2013 yılında ele alınmıştır. Ulusu ve Dündar (2013) ise küme dizilerinin $I-$lacunary istatistiksel yakınsaklığı üzerine çalışmalar yapmıştır. Ulusu ve Dündar bu çalışmada küme dizilerinin Wijsman $I-$ istatistiksel yakınsaklığı, Wijsman $I-$lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve Wijsman kuvvetli $I-$lacunary yakınsaklık kavramları tanımlanmış ve bu tanımların aralarındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Küme dizileri ile ilgili bu bilgiler ışığında multiset dizilerinin yakınsaklığı da 2020 yılında Pachilangode ve John tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada yakınsaklığı oluşturabilmek için bir mset metrik uzay tanımlanmış ve Wijsman yakınsaklık ve Hausdorff yakınsaklık kavramları multiset dizileri için çalışılmıştır. Buna göre, (M,d_M) bir mset metrik uzay ve $M_i \subseteq M \quad (i=1,2,3,...)$ olmak üzere, $\{M_i\}$ dizisi için $\forall x \in M$ olduğunda $\lim_{i\to\infty} d_M(x,M_i)=d_M(x,A)$ oluyorsa bu multiset dizisi $A\subseteq M$ multisetine Wijsman yakınsak; $\forall x \in M$ için, $\lim_{i\to\infty} \sup_{x\in M} \left|d_M(x,M_i)-d_M(x,A)\right|=0$ oluyorsa ise $A\subseteq M$ multisetine Hausdorff yakınsaktır denir.

Ayrıca bu çalışmada, bu tanımların ardından multiset dizilerinin Wijsman istatistiksel yakınsaklığı ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklığı da Pachilangode ve John tarafından çalışılmıştır.

2021 yılında Debnath ve Debnath multiset dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını reel sayılar için tanımlamışlar ve bunun için özel bir metrik kullanmayı tercih etmişlerdir. $mx=(x_i/c_i)$ bir multiset dizisi olduğunda, $\forall \varepsilon>0$ için,

$$I(\varepsilon)=\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right\}$$

kümesi sıfır doğal yoğunluğa sahipse, başka bir ifadeyle,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|i\leq n:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right|=0$$

olacak şekilde bir $l/c\in m\mathbb{R}$ varsa, $mx=(x_i/c_i)$ dizisi l/c ye istatistiksel yakınsaktır şeklinde ifade edilmiştir (Debnath ve Debnath, 2021).

1.2. Tezin Amacı

Multisetleri eleman kabul ederek tanımlanan multiset dizileri ile ilgili çalışmalar henüz başlangıç aşamasındadır. 2020 yılında Pachilangode ve John tarafından bu dizilerin yakınsaklığı “Convergence of multiset sequences” makalesinde incelenmiştir. 2021 yılında Debnath ve Debnath, “Statistical convergence of multisequences on $\mathbb{R}$” makalesinde multiset dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını inceleyerek daha geniş bir yakınsaklık türü üzerine çalışmışlardır. Bu tez çalışmasında daha önce multiset dizileri için tanımlanmış olan bu yakınsaklık türlerini de içine alan ve daha genel bir yakınsaklık türü olan ideal yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Küme dizilerinden farklı olarak, elemanları tekrar edebilen multiset dizileri kullanılarak, küme dizileri ve multiset dizilerinin benzer ve farklı yönlerinin ortaya çıkarılması ve bu alandaki çalışmalara yeni bir bakış açısı geliştirilmesi hedeflenmektedir.

2. TEMEL TANIMLAR, ÖRNEKLER VE TEOREMLER

Tez çalışması için gerekli ve önemli olan bazı tanımlar, örnekler ve teoremler bu bölümde ifade edilmiştir.

Tanım 2.1. (Bir Dizinin Yakınsaklığı) $x=(x_i)$ reel dizisi ve $x_0\in\mathbb{R}$ sayısı verilsin. Her $\varepsilon>0$ için $i>i_0$ olduğunda $|x_i-x_0|<\varepsilon$ şeklinde bir $i_0(\varepsilon)$ sayısı varsa bu dizi x_0 sayısına yakınsaktır veya x_0 sayısı bu dizinin limitidir denir. Bu durum genellikle $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_0$ veya $x_i\to x_0$ ile gösterilir (Çallıalp ve Canoğlu, 2014).

Teorem 2.1. Yakınsak bir $x=(x_i)$ dizinin limiti tektir (Çallıalp ve Canoğlu, 2014).

Tanım 2.2. (Sınırlı Dizi) $x=(x_i)$ reel dizisi verilsin. $\forall i\in\mathbb{N}$ için $|x_i|\le K$ şartını sağlayacak şekilde reel sayıların bir $K>0$ sayısı varsa $x=(x_i)$ dizisi sınırlıdır (Çallıalp ve Canoğlu, 2014).

Tanım 2.3. **(Yığılma noktası)** $A\subset\mathbb{R}$ kümesi ve $a\in\mathbb{R}$ sayısı verilsin. O halde, a nın her ε komşuluğunda A kümesine ait a dan farklı en az bir eleman bulunuyorsa a noktası bu kümenin bir yığılma noktasıdır (Çallıalp ve Canoğlu, 2014).

Tanım 2.4. (Metrik ve Metrik Uzay) Boştan farklı bir X kümesi üzerinde $d: X\times X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. d fonksiyonu için, $x,y,z\in X$ olmak üzere,

$M1)\; d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y,$

$M2)\; d(x,y)=d(y,x),$

$M1)\; d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X uzayında bir metrik denir. Bu metrik ile elde edilen metrik uzay (X,d) şeklinde ifade edilir. Burada şartları metrik aksiyomlarıdır (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.1. $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $d(x,y)=|x-y|$ olsun. Bu fonksiyon reel sayılarda bir metrik belirtir ve mutlak değer metriği olarak adlandırılır (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.2. $d:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ şeklindeki fonksiyon bir metrik belirtir ve Öklid metriği olarak adlandırılır (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.3. Boştan farklı bir X kümesi verilsin ve $x,y\in X$ olmak üzere,

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y \text{ ise}\\ 1, & x\neq y \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir metrik belirtir ve bu metrik ayrık metrik olarak adlandırılır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.5. (Doğal Yoğunluk) $A\subset\mathbb{N}$ kümesi verilsin $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere A kümesinin karakteristik fonksiyonu χ_A şeklinde gösterilsin. Bu durumda,

$$d_n(A)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_A(k)$$

olmak üzere,

$$d(A)=\lim_{n\to\infty}d_n(A)$$

Limitine A kümesinin asimptotik yoğunluğu denir (Fast, 1951).

Örnek 2.4. $K_1=\left|\left\{k^2:k\in\mathbb{N}\right\}\right|$ kümesi için $\delta(K_1)=0$ dır.

Örnek 2.5. $K_2=\left|\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}\right|$ kümesi için $\delta(K_2)=\frac{1}{2}$ dir.

Örnek 2.6. $\delta(\mathbb{N})=1$ dir.

Örnek 2.7. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi için, bu kümenin her bir sonlu alt kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır.

Tanım 2.6. (İstatistiksel Yakınsaklık) Her $\varepsilon>0$ için, $x=(x_i)$ reel sayı dizisi için aşağıda tanımlanan limit sıfır oluyorsa yani,

$$d\left(\left\{i\le n:|x_i-L|\ge\varepsilon\right\}\right)=0$$

ise bu dizi $L \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır. Bu durum $st - \lim x_i = L$ şeklinde ifade edilir. İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi çoğunlukla S simgesi ile gösterilir. Doğal yoğunluk tanımı kullanılarak bu tanım,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left| i \le n : |x_i - L| \ge \varepsilon \right| = 0$$

şeklinde de ifade edilebilir (Fast, 1951).

Örnek 2.8. $x = (x_i)$ dizisi,

$$x_i = \begin{cases} \sqrt{i}, \; i = m^2 \\ 2, \; i \ne m^2 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $(x_i) = (1,2,2,2,2,2,2,2,3,2,2,..)$ şeklinde olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\{i : |x_i - 2| \ge \varepsilon\} = \{1,9,16,...\}$ şeklinde olup $st - \lim x_i = 2$ dir.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere, istatistiksel yakınsak olan $x = (x_i)$ dizisi yakınsaklık şartını sağlamaz.

Bilindiği üzere yakınsak her dizi sınırlıdır. Bunun yanında, istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekte görülebilir.

Örnek 2.9. $x = (x_i)$ dizisi,

$$x_i = \begin{cases} \sqrt{i}, \; i = m^2 \\ 10, \; i \ne m^2 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $st - \lim x_i = 10$ olmasına rağmen $x = (x_i)$ dizisi üstten sınırsızdır.

Teorem 2.2. $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu d olmak üzere, $x = (x_i)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{i\to\infty} y_i = L$ ve $d\left(\{n \in N \;:\; x_i \ne y_i\}\right) = 0$ sağlanacak şekilde bir $y = (y_i)$ dizisinin var olmasıdır (Fast, 1951).

Tanım 2.7. (İstatistiksel Limit Noktası) Reel sayıların bir $x = (x_i)$ dizisi ve bir L reel sayısı verilsin.

$$\lim_{i\to\infty} x_{m_i} = L \text{ ve } d(M) \neq 0$$

şelinde bir $M = \{m_1 < m_2 < ...\}$ kümesi mevcutsa L sayısına $x = (x_i)$ dizisinin istatistiksel limit noktası denir (Fridy, 1993).

Tanım 2.8. (İstatistiksel Yığılma Noktası) Bir reel $x = (x_i)$ dizisi verilmiş olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$d(\{i \in N \ : \ |x_i - \gamma|\}) \neq 0$$

ise γ sayısına $x = (x_i)$ dizisinin istatistiksel yığılma noktası denir (Fridy, 1993).

Teorem 2.3. Sınırlı bir $x = (x_i)$ sayı dizisi istatistiksel yığılma noktasına sahiptir (Fridy, 1993).

Tanım 2.9. (Lacunary Dizisi) Negatif olmayan tam sayıların $\theta = (k_r)$ şeklinde artan bir tamsayı dizisi verilsin. Eğer bu dizi için $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ oluyorsa $\theta = (k_r)$ dizisi lacunary dizisidir. Burada $J_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $q_r = \dfrac{k_r}{k_{r-1}}$ şeklinde tanımlanır (Freedman ve ark., 1978).

Örnek 2.10. $\theta = (r^2)$ dizisi bir lacunary dizisi tanımlar.

Örnek 2.11. $\theta = (2^r - 1)$ dizisi bir lacunary dizisi tanımlar.

Örnek 2.12. $\theta = (r)$ dizisi bir lacunary dizisi tanımlamaz. Çünkü $k_0 = 0$ olduğu halde $h_r = k_r - k_{r-1} = 0$ dir.

Tanım 2.10. (Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $x = (x_i)$ reel sayı dizisi için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| i \in J_r : |x_i - L| \geq \varepsilon \right| = 0$$

limiti sıfır oluyorsa $x = (x_i)$ dizisinin L sayısına lacunary istatistiksel yakınsak olduğu söylenir. Bu durum çoğunlukla $S_\theta - \lim x_i = L$ biçiminde; lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi ise S_θ şeklinde gösterilir (Fridy ve Orhan, 1993).

Tanım 2.11. (Kuvvetli Cesáro Toplanabilir Diziler) İstatistiksel yakınsaklık ile yakından alakalı olan ve kuvvetli Cesáro toplanabilir diziler,

$$|\sigma_1| := \left\{ x \ : \ \text{bazı } L \text{ sayıları için, } \lim_n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - L| \right) = 0 \right\}$$

şeklinde ifade edilir (Fridy ve Orhan, 1993).

Tanım 2.12. (Lacunary Toplanabilirlik) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun.

$x = (x_i)$ reel sayı dizisi için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i\in J_r} x_i = L$$

olacak şekilde bir L sayısı var ise, $x = (x_i)$ dizisi L sayısına lacunary toplanabilirdir denir (Mursaleen ve Alotaibi, 2011).

Tanım 2.13 (Kuvvetli Lacunary Toplanabilirlik) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere $x = (x_i)$ reel sayı dizisi için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i\in J_r} |x_i - L| = 0$$

şartı sağlanacak şekilde bir L sayısı var ise bu durumda bu dizi L ye kuvvetli lacunary toplanabilirdir denir (Freedman ve ark., 1978).
Kuvvetli lacunary toplanabilir dizilerin uzayı

$$N_\theta = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_i - L| = 0 \right\}$$

şeklinde ifade edilir (Freedman ve ark., 1978).

Tanım 2.14. (İdeal) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ ailesi için eğer, $\varnothing \in I$, her $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$ ve her $A \in I$ ve her $B \subseteq A$ için $B \in I$ oluyorsa I ailesine ideal adı verilir. $\mathbb{N} \notin I$ oluyorsa bu ideal gerçek ideal; I bir gerçek ideal olduğunda $\forall n$ doğal sayısı için $\{n\} \in I$ sağlanıyorsa bu ideal uygun ideal olarak adlandırılır (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.15. (Gerçek İdeal) $\mathbb{N}$ pozitif sayılar kümesi olmak üzere I ideali verilsin. Eğer $I \neq 2^{\mathbb{N}}$ oluyorsa bu ideal gerçek ideal olarak adlandırılır (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.16. (Uygun İdeal) $\mathbb{N}$ pozitif sayılar kümesi olmak üzere I gerçek ideali verilsin. Eğer $\mathbb{N}$ kümesinin tüm sonlu alt kümeleri I ideali tarafından içeriliyorsa yani her $x \in \mathbb{N}$ için $\{x\} \in I$ oluyorsa I bir uygun idealdir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.17. (Süzgeç) $F \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi için, $\varnothing \notin F$, her $A, B \in F$ için $A \cap B \in I$ ve her $A \in F$ ve her $B \supseteq A$ için $B \in F$ oluyorsa F ailesine I ideali ile ilgili süzgeç denir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.18. ($I-$Yakınsaklık) $x = (x_i)$ reel sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$A_\varepsilon = \{i \in \mathbb{N} : |x_i - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi I idealine ait oluyorsa bu dizi L reel sayısına $I-$yakınsaktır denir. Bu durum genellikle $I - \lim x = L$ şeklinde gösterilir (Kostyrko ve ark., 2000).

Örnek 2.13. I_f kümesi,

$$I_f = \{A \subset \mathbb{N} : A \ \text{ sonlu}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu küme uygun ideal özelliklerini sağlar ve bu idealin kullanılması durumunda bilinen yakınsaklık elde edilir yakınsaktır (Kostyrko ve ark., 2000).

Örnek 2.14. I_d kümesi,

$$I_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda I_d bir uygun idealdir ve I_d-yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.19. ($I-$Sınırlılık) $x = (x_i)$ reel değerli bir dizi olmak üzere,

$$M = \{i \in \mathbb{N} : |x_i| \geq M\} \in I$$

olacak şekilde bir M pozitif sayısı varsa, $x = (x_i)$ dizisi $I-$sınırlıdır denir.

Tanım 2.20. ($I-$Limit Noktası) $x=(x_i)$ reel değerli bir dizi ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_i}=\lambda$ olacak şekilde bir $M=\{m_1,m_2,...\}\notin I$ kümesi varsa λ sayısı $x=(x_i)$ dizisinin $I-$limit noktasıdır denir (Demirci, 2001).

Tanım 2.21. ($I-$Yığılma Noktası) Reel sayıların bir $x=(x_i)$ dizisi verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için, $\{i\in\mathbb{N}:|x_i-L|\geq\varepsilon\}\in I$ ise L sayısı bu dizinin $I-$yığılma noktasıdır (Demirci, 2001).

$x=(x_i)$ dizisinin tüm $I-$limit noktaları kümesi $I(\Lambda_x)$ ve tüm $I-$yığılma noktaları kümesi $I(\Gamma_x)$ ile gösterilir. I uygun bir ideal olmak üzere herhangi bir $x=(x_i)$ dizisi için $I(\Lambda_x)\subset I(\Gamma_x)$ dir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.22. ($I-$lim sup ve $I-$lim inf) $x=(x_i)$ reel sayı dizisi olmak üzere,

$$B_x=\{b\in\mathbb{R}:\{i\in\mathbb{N}:x_i>b\}\notin I\}$$

ve

$$A_x=\{a\in\mathbb{R}:\{i\in\mathbb{N}:x_i<a\}\notin I\}$$

olmak üzere,

$$I-\limsup x=\begin{cases}\sup B_x, & B_x\neq\phi \ \ ise\\ -\infty, & B_x\neq\phi \ \ ise\end{cases}$$

ve

$$I-\liminf x=\begin{cases}\inf A_x, & A_x\neq\phi \ \ ise\\ +\infty, & A_x=\phi \ \ ise\end{cases}$$

dir.

Tanım 2.23. (I^*-Yakınsaklık) $x=(x_i)$ bir dizi, I aşikar olmayan bir ideal olmak üzere, $\{m_1<m_2<...\}\in F(I)$ ve $\lim\limits_{i\to\infty} x_{m_i}=L$ şartları sağlanırsa $x=(x_i)$ dizisi L sayısına I^*-*yakınsaktır* ve $I^*-\lim\limits_{i\to\infty} x_i=L$ şeklinde gösterilir (Kostyrko ve ark., 2000).

Teorem 2.4. $I\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideali verilsin. Eğer $I^*-\lim\limits_{n\to\infty} x_n=L$ ise $I-\lim\limits_{n\to\infty} x_n=L$ dir

(Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.24. (*(AP)* Özelliği) $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideali verilmiş olsun. Eğer I idealine ait ayrık $\{A_1, A_2, ...\}$ kümelerinin her sayılabilir ailesi için $A_i \Delta B_i \ (i = 1, 2, ...)$ sonlu ve $i \in \mathbb{N}$ için $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in I$ olacak şekilde $\{B_1, B_2, ...\}$ kümelerinin sayılabilir bir ailesi varsa I ideali (AP) koşulunu sağlar denir (Kostyrko ve ark., 2000).

$I-$yakınsaklık ve I^*-yakınsaklık kavramları arasındaki ilişki incelenirken (AP) özelliğinden yararlanılmaktadır. Buna göre $x = (x_i)$ dizisi I^*-yakınsak ise $I-$ yakınsaktır fakat tersinin doğru olabilmesi için I idealinin (AP) koşulunu sağlaması gerekmektedir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.25. ($I-$İstatistiksel Yakınsaklık) $x = (x_i)$ dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall \delta > 0$ için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \{ i \le n : |x_i - L| \ge \varepsilon \} \right| \ge \delta \right\}$$

kümesi I idealine ait oluyorsa $x = (x_i)$ dizisi L sayısına $I-$istatistiksel yakınsak bir dizidir denir (Savaş ve Das, 2011).

Tanım 2.26. ($I-$Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık) $\theta = (k_r)$ dizisi bir lacunary dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall \delta > 0$ için,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \{ i \in J_r : |x_i - L| \ge \varepsilon \} \right| \ge \delta \right\} \in I$$

şeklinde bir L sayısı varsa $x = (x_i)$ dizisi L sayısına $I-$ lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $I - S_\theta - \lim x_i = L$ şeklinde veya $x_i \to L(S_\theta(I))$ gösterilir. $I-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\theta(I)$ ile gösterilir (Das ve ark., 2011).

Tanım 2.27. (Kuvvetli $I-$ Lacunary Yakınsaklık) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $I-$ uygun ideali verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{i \in J_r} |x_i - L| \ge \varepsilon \right\} \in I$$

şeklinde bir L sayısı varsa $x=(x_i)$ dizisi L sayısına kuvvetli $I-$ lacunary yakınsaktır denir ve $I-N_\theta-\lim x_i=L$ şeklinde veya $x_i\to L(N_\theta(I))$ gösterilir. $I-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $N_\theta(I)$ ile gösterilir.

Tanım 2.28. (Cesàro Toplanabilirlik) $x=(x_i)$ reel ya da kompleks terimli dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=L$$

şeklinde bir L sayısı varsa $x=(x_i)$ dizisi L sayısına $x=(x_i)$ dizisi L sayısına Cesàro toplanabilirdir denir (Volkov, 2001).

Tanım 2.29. ($I-$Cesàro Toplanabilirlik) $x=(x_i)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi ve $I-$ uygun bir ideal olmak üzere, her $\varepsilon>0$ için,

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-L|\geq\varepsilon\right\}\in I$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa bu durumda $x=(x_i)$ dizisi L sayısına $I-$ Cesàro toplanabilirdir denir ve bu durum $x_i\to L(\sigma(I))$ şeklinde gösterilir. $I-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi genellikle $\sigma(I)$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 2.30. (Multiset) Elemanları tekrar edebilen nesneler koleksiyonuna multiset denir. Diğer bir ifade ile elemanları sonlu sayıda tekrar eden kümelerdir (Syropoulos, 2001). X bir küme ve $\mathbb{N}_0$ negatif olmayan tam sayılar kümesi olmak üzere elemanları X kümesinden alınan bir A multiseti, $C_A:X\to\mathbb{N}_0$ fonksiyonu ile ifade edilebilir (Pachilangode and John, 2020).

$\forall x\in X$ için, $C_A(x)$ ifadesi x elemanının A multisetindeki tekrar sayısını gösteren karakteristik değeri veya sayı değeridir. Eğer tüm $x\in X$ elemanları için $C_A(x)=0$ veya $C_A(x)=1$ ise bu durumda A multiseti bir küme ifade eder. Multisetler kısaca mset şeklinde de yazılır (Pachilangode and John, 2020).

Tanım 2.31. (Reel Multiset) Elemanları reel sayılardan alınan bir multiset reel multiset olarak adlandırılır ve $m\mathbb{R} = \{x_i / c_i : x_i \in \mathbb{R} \ \ ve \ \ c_i \in \mathbb{N}\}$ ile sembolize edilir.

Tanım 2.32. (Küme Dizisi) Tüm terimleri küme olan diziler küme dizileri olarak bilinirler. Küme dizisi $\mathbb{N}_0$ pozitif tam sayılar kümesi ve $P(X)$ ise boş olmayan bir X kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $\mathbb{N}_0 \to P(X)$ şeklinde bir fonksiyondur.

Örnek 2.15. $A_i = \{1, 2, ..., i\}$ olmak üzere $\{A_i\}$ bir küme dizisidir.

Tanım 2.33. (Multiset Dizisi) Tüm elemanları multiset olan diziler multiset dizileri olarak bilinirler. Tanım kümesi doğal sayılar ve değer kümesi $m\mathbb{R}$ olan fonksiyona bir multiset dizisi denir. Multiset dizisi, $mx : \mathbb{N} \to m\mathbb{R}$ şeklinde sembolize edilir.
$\mathbb{R}$ reel sayılar, $\mathbb{N}_0$ pozitif tam sayılar, $x = (x_i)$ bir dizi, $mx = (x_i / c_i)$ bir multiset dizisi olmak üzere, $mx = \{x_i / c_i : x_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{N}_0\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.16. $N_i = \{1/1, 2/2, ..., i/i\}$ olmak üzere $\{N_i\}$ bir multiset dizisidir. Bu multiset dizisinde n. terim $\dfrac{n(n+1)}{2}$ eleman içerir (Pachilangode ve John, 2020).

Örnek 2.17. n bir pozitif tam sayı ve bu tam sayının çarpanlarından oluşan $\{F_n\}$, 1 sayısıda dâhil olmak üzere, bu çarpanların bir multiseti olsun. O halde $\{F_n\}$ bir multiset dizisidir. Örneğin,

$F_1 = \{1\}$

$F_2 = \{1, 2\}$

$F_3 = \{1, 3\}$

$F_4 = \{1, 2, 2\}$

$F_{36} = \{1, 2, 2, 3, 3\}$

$\{F_n\} = \{F_1, F_2, F_3, ..., F_n, ...\}$

olarak ifade edilebilir (Pachilangode ve John, 2020).

Tanım 2.34. (Multiset Dizilerinin Wijsman Yakınsaklığı) (M,d_M) bir mset metrik uzay ve $M_i \subseteq M \quad (i=1,2,3,...)$ olmak üzere, $\{M_i\}$ dizisi için $\forall x \in M$ olduğunda $\lim\limits_{i\to\infty} d_M(x,M_i)=d_M(x,A)$ oluyorsa bu multiset dizisi $A \subseteq M$ multisetine Wijsman yakınsaktır (Pachilangode ve John, 2020).

Tanım 2.35. (Multiset Dizilerinin Hausdorff Yakınsaklığı) (M,d_M) bir mset metrik uzay ve $M_i \subseteq M \quad (i=1,2,3,...)$ olmak üzere, $\{M_i\}$ dizisi için $\forall x \in M$ için $\lim\limits_{i\to\infty} \sup_{x\in M} \left|d_M(x,M_i)-d_M(x,A)=0\right|$ oluyorsa ise $A \subseteq M$ multisetine Hausdorff yakınsaktır denir (Pachilangode ve John, 2020).

Tanım 2.36. (Multiset Dizilerinin Wijsman İstatistiksel Yakınsaklığı) (M,d_M) bir mset metrik uzay ve $M_i \subseteq M \quad (i=1,2,3,...)$ olsun. $\forall x \in M$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{i \le n : \left|d_M(x,M_i)-d_M(x,A)\right| \ge \varepsilon\right\}=0$ oluyorsa $\{M_i\}$ mset dizisi $A \subset M$ multisetine Wijsman istatistiksel yakınsaktır (Pachilangode ve John, 2020).

Tanım 2.37. (Multiset Dizilerinin Hausdorff İstatistiksel Yakınsaklığı) (M,d_M) bir mset metrik uzay ve $M_i \subseteq M \quad (i=1,2,3,...)$ olsun. $\forall x \in M$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{i \le n : \sup_{x\in M}\left|d_M(x,M_i)-d_M(x,A)\right| \ge \varepsilon\right\}=0$ oluyorsa $\{M_i\}$ multiset dizisi $A \subset M$ multisetine Hausdorff istatistiksel yakınsaktır (Pachilangode ve John, 2020).

Tanım 2.38. (Multiset Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı) $mx=(x_i/c_i)$ bir multiset dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$I(\varepsilon)=\left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2} \ge \varepsilon\right\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|i \le n : \sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2} \ge \varepsilon\right|=0$$

olacak şekilde bir $l/c \in m\mathbb{R}$ varsa, $mx = (x_i / c_i)$ dizisi l/c ye istatistiksel yakınsaktır (Debnath ve Debnath, 2021).

Örnek 2.18. $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi,

$$x_i = \begin{cases} i, \ i = n^2; \ n = 1,2,3,... \\ 1, \ i \neq n^2 \end{cases} \qquad c_i = \begin{cases} 1, \ i = n^3; \ n = 1,2,3,... \\ 5, \ i \neq n^3 \end{cases}$$

olarak verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| i \leq n : \sqrt{(x_i - 1)^2 + (c_i - 5)^2} \geq \varepsilon \right|$$

= Karesel veya kübik tam sayıların ya da her ikisinin yoğunluğu

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{6}} \right) = 0$$

olur ki buradan $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi $1/5$ e istatistiksel yakınsar (Debnath ve Debnath, 2021).

Tanım 2.39. (Multiset Dizilerinin İstatistiksel Sınırlılığı) $mx = (x_i / c_i)$ bir multiset dizisi olsun. Eğer,

$$\delta\left(\left\{ i : \sqrt{x_i^2 + (c_i - 1)^2} > M \right\} \right) = 0$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa, $mx = (x_i / c_i)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır (Debnath ve Debnath, 2021).

3. MULTİSET DİZİLERİNİN $I-$YAKINSAKLIĞI

3.1. Multiset Dizilerinin İdeal Yakınsaklığı

Bu bölümde multiset dizilerinin reel sayılarda ideal yakınsaklığı tanımlanacak ve multiset dizilerinin ideal yakınsaklığının bazı cebirsel ve topolojik özellikleri incelenecektir.

(X,d) bir metrik uzay ve M, (X,d) metrik uzayında bir multiset olsun. M multisetinin tekrarlı elemanları nedeniyle d metriği M üzerinde çok işlevsel değildir. Bunun için M üzerinde yeni bir d_M metriği tanımlanması ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Buna göre,

$$d_M : M \times M \to \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad d_M(x,y) = d_M(x_i/c_i,\, y_i/d_i) = \sqrt{(x_i - y_i)^2 + (c_i - d_i)^2}$$

olmak üzere (M, d_M) nin bir metrik uzay oluşu Minkowski Eşitsizliği yardımıyla görülebilir.

Tanım 3.1.1. (Multiset Dizilerinin Yakınsaklığı)

Herhangi bir $x = (x_i)$ reel dizisi için yakınsaklık tanımının $\forall \varepsilon > 0$ için $i > i_0$ olduğunda $d(x_i, l) < \varepsilon$ şeklinde bir i_0 var olması şeklinde tanımlandığı bilinmektedir. Bu tanım $mx = (x_i/c_i)$ multiset dizisi için bu yeni metrikle birlikte, $\forall \varepsilon > 0$ için $i > i_0$ olduğunda,

$$d_M(x_i/c_i,\, l/c) = \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} < \varepsilon$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.2. (Multiset Dizilerinin İdeal Yakınsaklığı)

$mx = (x_i/c_i)$ bir multiset dizisi ve $l/c \in m\mathbb{R}$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon \right\} \in I$$

oluyorsa, $mx = (x_i/c_i)$ multiset dizisi l/c sayısına ideal yakınsaktır denir ve $I - \lim mx = l/c$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.1.1 Yakınsak multiset dizileri aynı zamanda ideal yakınsaktır.

İspat: $mx=(x_i/c_i)$ multiset dizisi l/c sayısına yakınsak olsun. Bu durumda $x=(x_i)$ dizisi l sayısına, $c=(c_i)$ dizisi ise c sayısına yakınsar. Yakınsak olan her sayı dizisi aynı zamanda ideal yakınsak olacağından, $x=(x_i)$ dizisi l sayısına, $c=(c_i)$ dizisi ise c sayısına ideal yakınsar. Böylece $\forall\varepsilon>0$ için,

$$A=\{i\in\mathbb{N}:|x_i-l|\geq\varepsilon\}\in I_f \quad \text{ve} \quad A^{'}=\{i\in\mathbb{N}:|c_i-c|\geq\varepsilon\}\in I_f$$

olur. Bilindiği üzere,

$$\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\leq\sqrt{(x_i-l)^2}+\sqrt{(c_i-c)^2}$$

$$=|x_i-l|+|c_i-c|$$

dir. $\forall i\in A\cap A^{'}$ için,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right\}\subseteq\{i\in\mathbb{N}:|x_i-l|\geq\varepsilon\}\cup\{i\in\mathbb{N}:|c_i-c|\geq\varepsilon\}$$

olur. İdeal tanımının ikinci özelliğine göre, yukarıdaki ifadenin sağ tarafı ideale aittir. Yine idealin üçüncü özelliğinden,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right\}\in I$$

olur ki ispat tamamlanır.

Bu durum aşağıdaki basit örnekle pekiştirilebilir.

Örnek 3.1.1. Bir $mx=(\frac{1}{i}/1)$ multiset dizisi verilsin. Bu dizi daha açık olarak,

$$mx=(\frac{1}{i}/1)=(1/1,\frac{1}{2}/1,\frac{1}{3}/1,\ldots,\frac{1}{n}/1,\ldots)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right)_{1,1,1,\ldots,1,\ldots}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$x_i=\frac{1}{i} \quad \text{ve} \quad c_i=1$$

dir. O halde,

$A=\left\{i\in\mathbb{N}:\left|\frac{1}{i}-0\right|\geq\varepsilon\right\}\in I_f$ ve $A^{'}=\{i\in\mathbb{N}:|c_i-1|\geq\varepsilon\}=\varnothing\in I_f$ olur. $\forall i\in A\cap A^{'}$

için,

$$\left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - 0)^2 + (c_i - 1)^2} \geq \varepsilon\right\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} : |x_i - 0| \geq \varepsilon\} \cup \{i \in \mathbb{N} : |c_i - 1| \geq \varepsilon\}$$

olup,

$$\left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - 0)^2 + (c_i - 1)^2} \geq \varepsilon\right\} \in I_f$$

elde edileceğinden $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi ideal yakınsaklıktır.

Aşağıdaki örnekte ideal yakınsak olan her multiset dizisinin aynı zamanda yakınsak olmayabileceği gösterilmiştir.

Örnek 3.1.2. Bir $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi,

$$x_i = \begin{cases} 0, & i = n^2 \\ 1, & i \neq n^2 \end{cases} \qquad c_i = \begin{cases} 1, & i = n^2 \\ 3, & i \neq n^2 \end{cases}$$

olarak verilsin. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için,

$A = \{i \in \mathbb{N} : |x_i - 1| \geq \varepsilon\} \in I_d$ ve $A' = \{i \in \mathbb{N} : |c_i - 3| \geq \varepsilon\} \in I_d$ olur.

$$\sqrt{(x_i - 1)^2 + (c_i - 3)^2} \leq \sqrt{(x_i - 1)^2} + \sqrt{(c_i - 3)^2} = |x_i - 1| + |c_i - 3|$$

dir. $\forall i \in A \cap A'$ için,

$$\left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - 1)^2 + (c_i - 3)^2} \geq \varepsilon\right\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} : |x_i - 1| \geq \varepsilon\} \cup \{i \in \mathbb{N} : |c_i - 3| \geq \varepsilon\}$$

olur. Son ifadenin sağ tarafı idealin elemanı olarak verildiğinden sol tarafı da ideale ait olacaktır. Bu halde, $mx = (x_i / c_i)$ dizisi $1/3$ e ideal yakınsaktır. Ancak $(x_i / c_i) = (0/1, 1/3, 1/3, 0/1, 1/3, ...)$ şeklindeki $mx = (x_i / c_i)$ dizisi için $\forall \varepsilon > 0$ olduğunda $d_M(x_i / c_i, 1/3) = \sqrt{(x_i - 1)^2 + (c_i - 3)^2} < \varepsilon$ olacak şekilde bir i_0 sayısı yoktur. Bu nedenle $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi $I-$yakınsak olmasına rağmen yakınsak değildir.

Teorem 3.1.2. Bir multiset dizisinin $I-$limiti tektir.

İspat: Kabul edelim ki $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisinin (l_1 / c_1) ve (l_2 / c_2) gibi iki tane $I-$limiti olsun. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - l_1)^2 + (c_i - c_1)^2} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I \quad \text{ve} \quad \left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - l_2)^2 + (c_i - c_2)^2} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I$$

olur. $F(I)$, I tarafından üretilen süzgeç olmak üzere,

$$A_1(\varepsilon)=\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l_1)^2+(c_i-c_1)^2}<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\in F(I)$$

ve

$$A_2(\varepsilon)=\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l_2)^2+(c_i-c_2)^2}<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\in F(I)$$

dır. Ayrıca

$$A_1(\varepsilon)=\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l_1)^2+(c_i-c_1)^2}<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\in F(I)$$

ise,

$$A_1(\varepsilon)=\left\{i\in\mathbb{N}:|x_i-l_1|<\frac{\varepsilon}{4},|c_i-c_1|<\frac{\varepsilon}{4}\right\}\in F(I)$$

ve

$$A_2(\varepsilon)=\left\{i\in\mathbb{N}:|x_i-l_2|<\frac{\varepsilon}{4},|c_i-c_2|<\frac{\varepsilon}{4}\right\}\in F(I)$$

dir.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(l_1-l_2)^2+(c_1-c_2)^2} &= \sqrt{\left[(l_1-l_2+x_i-x_i)\right]^2+\left[(c_1-c_2+c_i-c_i)\right]^2} \\
&\le \sqrt{\left[(l_1-x_i)+(x_i-l_2)\right]^2}+\sqrt{\left[(c_1-c_i)+(c_i-c_2)\right]^2} \\
&= |l_1-x_i+x_i-l_2|+|c_1-c_i+c_i-c_2| \\
&\le |l_1-x_i|+|x_i-l_2|+|c_1-c_i|+|c_i-c_2| \\
&< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

$\forall i\in A_1(\varepsilon)\cap A_2(\varepsilon)$ için $\sqrt{(l_1-l_2)^2+(c_1-c_2)^2}<\varepsilon$ olur. Böylece, $(l_1-l_2)^2+(c_1-c_2)^2=0$ yani $l_1=l_2$ ve $c_1=c_2$ olur ve böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.3. (Multiset Dizilerinin İdeal Sınırlılığı)

Bir $mx=(x_i/c_i)$ multiset dizisi olsun. Eğer

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>M\right\}\in I$$

olacak şekilde bir M pozitif sayısı var ise, $mx=(x_i/c_i)$ multiset dizisi $I-$sınırlıdır denir.

Örnek 3.1.2. Bir $mx=(x_i/c_i)$ multiset dizisi

$$x_i=\begin{cases} i, & i=n^2,\ n=1,2,3,...\\ 1, & diğer\ \ durumlar\end{cases} \quad ve \quad c_i=\begin{cases} i, & i=n^3,\ n=1,2,3,...\\ 5, & diğer\ \ durumlar\end{cases}$$

olarak verilsin. O halde,

$$\sqrt{|x_i|^2+|c_i-1|^2} \quad\leq\quad \sqrt{(x_i)^2}+\sqrt{(c_i-1)^2}=|x_i|+|c_i-1|$$

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i)^2}+\sqrt{(c_i-1)^2}\geq M\right\} \subseteq \left\{i\in\mathbb{N}:|x_i|\geq M\right\}\cup\left\{i\in\mathbb{N}:|c_i-1|\geq M\right\}$$

ifadenin sağ tarafı ideale ait olduğundan $mx=(x_i/c_i)$ dizisi ideal sınırlıdır.

Teorem 3.1.3. İdeal yakınsak bir multiset dizisi aynı zamanda ideal sınırlıdır.

İspat: $mx=(x_i/c_i)$ multiset dizisi l/c sayısına ideal yakınsak olsun. O halde $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right\}\in I$$

olur ki bu da

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}<\varepsilon\right\}\in F(I)$$

demektir. Buradan,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:|x_i-l|<\varepsilon,\ |c_i-c|<\varepsilon\right\}\in F(I)$$

$$\left\{i\in\mathbb{N}:l-\varepsilon<x_i<l+\varepsilon,\ c-\varepsilon<c_i<c+\varepsilon\right\}\in F(I)$$

ifadeleri elde edilir. Buradan,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:x_i<M',\ c_i<M'\right\}\in F(I),\ M'=\max\left(l+\varepsilon,c+\varepsilon\right)$$

$$\left\{i\in\mathbb{N}:x_i^2+c_i^2<2M'^2\right\}\in F(I)\Rightarrow\left\{i\in\mathbb{N}:x_i^2+(c_i-1)^2<2M'^2\right\}\in F(I)$$

olur. $M^2=2M'^2$ denirse,

$$\left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{x_i^2 + \left(c_i - 1\right)^2} < M \right\} \in F(I)$$

ve dolayısıyla

$$\left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{x_i^2 + \left(c_i - 1\right)^2} \geq M \right\} \in I$$

elde edilir ki bu durumda $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi ideal sınırlıdır.

Sonuç 3.1.1. Yukarıdaki önermenin tersi doğru olmayabilir.

Örnek 3.1.2. Bir $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi,

$mx = (5/1, 10/2, 5/1, 10/2, \ldots)$

şeklinde tanımlansın. Yani,

$$x_i = \begin{cases} 5, & i \text{ } tek \text{ } sayı \\ 10, & i \text{ } çift \text{ } sayı \end{cases} \quad ve \quad c_i = \begin{cases} 1, & i \text{ } tek \text{ } sayı \\ 2, & i \text{ } çift \text{ } sayı \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda $mx = (x_i / c_i)$ dizisi için,

$$\left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{x_i^2 + \left(c_i - 1\right)^2} \geq 11 \right\} = \varnothing \in I$$

olacağından $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi ideal sınırlıdır. Diğer yandan ideal yakınsak olmadığı şu şekilde gösterilebilir.

Bu dizinin ya $5/1$ e ya da $10/2$ ye ideal yakınsak olması beklenir. Fakat her iki durumda da

$$\left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{\left(x_i - 5\right)^2 + \left(c_i - 1\right)^2} \geq \varepsilon \right\} \notin I$$

ve

$$\left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{\left(x_i - 10\right)^2 + \left(c_i - 2\right)^2} \geq \varepsilon \right\} \notin I$$

dır.

Tanım 3.1.4. (Multiset Dizilerinin İdeal Limit Noktası)

$\left(m\mathbb{R}, d_M\right)$ bir metrik uzay $mx = (x_i / c_i) \in m\mathbb{R}$ olsun. $M \notin I$ ve $\lim\limits_{k \to \infty} \left(x_{i_k} / c_{i_k} \right) = \xi / f$ olacak şekilde bir $M = \{ i_1 < i_2 < \ldots \} \subset \mathbb{N}$ kümesi varsa, $\xi / f \in m\mathbb{R}$ sayısına $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisinin bir $I-$limit noktasıdır denir.

$mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisinin tüm $I-$limit noktaları kümesi $I\left(\Lambda_{mx}\right)$ şeklinde sembolize edilir.

Tanım 3.1.5. (Multiset Dizilerinin İdeal Yığılma Noktası)

$(m\mathbb{R}, d_M)$ bir metrik uzay ve $mx = (x_i / c_i) \in m\mathbb{R}$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - \gamma)^2 + (c_i - c)^2} < \varepsilon \right\} \in F(I)$$

oluyorsa, bu durumda $\gamma / c \in m\mathbb{R}$ sayısına, $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisinin bir $I-$yığılma noktasıdır denir.

$mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisinin tüm $I-$yığılma noktaları kümesi $I(\Gamma_{mx})$ şeklinde sembolize edilir.

Teorem 3.1.4. I, uygun bir ideal olmak üzere, her $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi için $I(\Lambda_{mx}) \subset I(\Gamma_{mx})$ olur.

İspat: $\xi / f \in I(\Lambda_{mx})$ olsun. O halde $\lim_{k \to \infty} d_M\left(x_{i_k} / c_{i_k}\right) = \xi / f$ yani $\lim_{k \to \infty}\left(\sqrt{\left(x_{i_k} - \xi\right)^2 + \left(c_{i_k} - f\right)^2}\right) = 0$ olacak şekilde bir $M = \{i_1 < i_2 < \ldots\} \notin I$ kümesi vardır. $\delta > 0$ olsun. Yakınsaklık tanımı gereğince öyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $k > k_0$ olduğunda $\sqrt{\left(x_{i_k} - \xi\right)^2 + \left(c_{i_k} - f\right)^2} < \delta$ dır. Böylece $\left(i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - \xi)^2 + (c_i - f)^2} < \delta\right) \supset M \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_{k_0}\}$ ve böylece $\left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - \xi)^2 + (c_i - f)^2} < \delta\right\} \notin I$ elde edilir ki bu da $\xi / f \in I(\Lambda_{mx})$ anlamına gelir.

Tanım 3.1.6. (Multiset Dizilerinin $I-$Limit Supremum ve $I-$Limit İnfimumu)

$mx = (x_i / c_i)$ bir multiset dizisi olmak üzere,

$$B_{mx} = \left\{ b / c \in m\mathbb{R} : \left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{x_i^2 + (c_i - 1)^2} > \sqrt{b^2 + (c - 1)^2} \right\} \notin I \right\}$$

ve

$$A_{mx} = \left\{ a / c \in m\mathbb{R} : \left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{x_i^2 + (c_i - 1)^2} < \sqrt{a^2 + (c - 1)^2} \right\} \notin I \right\}$$

olmak üzere,

$$I - \limsup mx = \begin{cases} \sup B_{mx}, & B_{mx} \neq \phi \;\; ise \\ -\infty, & B_{mx} = \phi \;\; ise \end{cases}$$

ve

$$I-\liminf mx=\begin{cases}\inf A_{mx}, & A_{mx}\neq\phi \ \ ise\\ +\infty, & A_{mx}=\phi \ \ ise\end{cases}$$

dir.

Teorem 3.1.5. $mx=(x_i/c_i)$ bir multiset dizisi olsun. Eğer $b/c=I-\limsup mx$ sonlu ise, $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>\sqrt{(b-\varepsilon)^2+(c-1)^2}\right\}\notin I$$

ve

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>\sqrt{(b+\varepsilon)^2+(c-1)^2}\right\}\in I$$

olur.

Teorem 3.1.6. $mx=(x_i/c_i)$ bir multiset dizisi olsun. Eğer $a/d=I-\liminf mx$ sonlu ise, $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}<\sqrt{(a+\varepsilon)^2+(d-1)^2}\right\}\notin I$$

ve

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}<\sqrt{(a-\varepsilon)^2+(d-1)^2}\right\}\in I$$

olur.

Teorem 3.1.7. $m\mathbb{R}$ de tanımlı bir $mx=(x_i/c_i)$ multiset dizisi için,

$$I-\liminf mx\leq I-\limsup mx$$

dır.

İspat: İlk olarak $I-\limsup mx=-\infty$ durumunu dikkate alalım. Bu durum $B_{mx}=\phi$ anlamına gelir. Tanım da dikkate alınırsa, her $b/c\in m\mathbb{R}$ için,

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>\sqrt{b^2+(c-1)^2}\right\}\in I$$

ve dolayısıyla

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}\leq\sqrt{b^2+(c-1)^2}\right\}\in F(I)$$

olduğu görülür.

Burada her $\alpha/\beta\in m\mathbb{R}$ için,

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}<\sqrt{\alpha^2+(\beta-1)^2}\right\}\notin I$$

olduğundan $I-\liminf mx=-\infty$ elde edilir. Dolayısıyla $I-\liminf mx\le I-\limsup mx$ olduğu görülür.

Şimdi $I-\limsup mx=+\infty$ olması durumunu göz önüne alalım. Bu durumda eşitsizlik sağlanacaktır.

Son olarak $I-\limsup mx=\beta/c$ sonlu ve $I-\liminf mx=\alpha/d$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon>0$ verildiğinde, $(\beta+\varepsilon)/c\in A_{mx}$ ve dolayısıyla $\sqrt{\alpha^2+(d-1)^2}<\sqrt{(\beta+\varepsilon)^2+(c-1)^2}$ olduğu gösterilirse istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

$I-\limsup mx=\beta/c$ olduğundan

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>\sqrt{(\beta+\varepsilon)^2+(c-1)^2}\right\}\in I$$

dir. Bu durum

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}\le\sqrt{(\beta+\varepsilon)^2+(c-1)^2}\right\}\in F(I)$$

yani

$$\left\{i:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}<\sqrt{(\beta+\varepsilon)^2+(c-1)^2}\right\}\in F(I)$$

anlamına gelir. O halde $(\beta+\varepsilon)/c\in A_{mx}$ sağlanır. Tanımdan $I-\liminf mx=\alpha/d$ dir ve $\sqrt{\alpha^2+(d-1)^2}\le\sqrt{(\beta+\varepsilon)^2+(c-1)^2}$ sonucuna ulaşırız ki burada ε keyfi olduğu için $\sqrt{\alpha^2+(d-1)^2}\le\sqrt{\beta^2+(c-1)^2}$ olup istenilen sonuç yani $I-\liminf mx\le I-\limsup mx$ elde edilir.

Teorem 3.1.8. $m\mathbb{R}$ de tanımlı ideal sınırlı bir $mx=(x_i/c_i)$ multiset dizisinin ideal yakınsak olması için gerek ve yeter şart $I-\liminf mx=I-\limsup mx$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki sınırlı $mx=(x_i/c_i)$ dizisi ideal yakınsak olsun. $I-\liminf mx=I-\limsup mx$ olduğunu göstermek için $I-\liminf mx\le I-\limsup mx$ ve $I-\liminf mx\ge I-\limsup mx$ olduğu gösterilmelidir.
$I-\liminf mx\le I-\limsup mx$ durumu bir önceki teoremden bilinmektedir.
$I-\liminf mx\ge I-\limsup mx$ durumu ise sınırlılık ve yakınsaklık özellikleri kullanılarak gösterilecektir.

$I-\liminf mx = a/c_1$ ve $I-\limsup mx = b/c_2$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $I-\lim mx = l/c$ olduğu kabulünden yola çıkıldığında

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right\}\in I$$

ve dolayısıyla

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}<\varepsilon\right\}\in F(I)$$

olur. Buna göre,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:|x_i-l|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}=\varepsilon_1,\ |c_i-c|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}=\varepsilon_1\right\}\in F(I)$$

ifadeleri sağlanır. Böylece

$$\{i\in\mathbb{N}:|x_i-l|\geq\varepsilon_1,\quad |c_i-c|\geq\varepsilon_1\}\in I$$

ve

$$\{i\in\mathbb{N}:|x_i-l|>\varepsilon_1,|c_i-c|>\varepsilon_1\}\in I$$

olur. Böylece,

$$\{i\in\mathbb{N}:x_i>l+\varepsilon_1,\ c_i-1>c+\varepsilon_1-1\}\in I$$

olur ve buradan

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>\sqrt{(l+\varepsilon_1)^2+(c+\varepsilon_1-1)^2}\right\}\in I$$

bulunur. O halde,

$$\sqrt{b^2+(c_2-1)^2}<\sqrt{(l+\varepsilon_1)^2+(c+\varepsilon_1-1)^2}$$

yani

$$\sqrt{b^2+(c_2-1)^2}\leq\sqrt{l^2+(c-1)^2}$$

olup $I-\limsup mx\leq I-\lim mx$

elde edilir. Ayrıca,

$$\{i\in\mathbb{N}:x_i<l-\varepsilon_1,c_i-1<c-1-\varepsilon_1\}\in I$$

yani

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}<\sqrt{(l-\varepsilon_1)^2+(c-\varepsilon_1-1)^2}\right\}\in I$$

ifadelerinden

$$\sqrt{(l-\varepsilon_1)^2+(c-\varepsilon_1-1)^2}<\sqrt{a^2+(c-1)^2}$$

ve

$$\sqrt{l^2+(c-1)^2}\leq\sqrt{a^2+(c-1)^2}$$

elde edilir ki $I-\lim mx \leq I-\liminf mx$ eşitsizliği bulunur. Buradan $I-\liminf mx = I-\limsup mx$ sonucuna ulaşılır.

$(\Leftarrow)$ Şimdi kabul edelim ki $a/c_1=b/c_2$ ve $l/c=a/c_1=b/c_2$ olsun. Bu durumda $I-\limsup mx = l/c$ dir. $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>\sqrt{(l+\varepsilon_1)^2+(c-1)^2}\right\}\in I$$

dir. Bu durumda,

$$\sqrt{(l+\varepsilon_1)^2+(c-1)^2}<\sqrt{l^2+(c-1)^2}+\varepsilon^{'}$$

olacak şekilde sıfırdan büyük bir $\varepsilon^{'}$ reel sayısı bulmak mümkündür. Yani, $\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>\sqrt{l^2+(c-1)^2}+\varepsilon^{'}\right\}\in I$

olur. Buradan yine $I-\limsup mx = l/c$ dir.

Böylece $\forall\varepsilon_2>0$ için,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>\sqrt{(l-\varepsilon_2)^2+(c-1)^2}\right\}\in I$$

dir. Benzer şekilde

$$\sqrt{(l-\varepsilon_2)^2+(c-1)^2}=\sqrt{l^2+(c-1)^2}-\varepsilon^{''}$$

yani

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}<\sqrt{l^2+(c-1)^2}-\varepsilon^{''}\right\}\in I$$

olacak şekilde sıfırdan büyük bir $\varepsilon^{''}$ reel sayısı bulunabilir. $\varepsilon=\max\left(\varepsilon^{'},\varepsilon^{''}\right)$ alınırsa,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{x_i^2+(c_i-1)^2}>\sqrt{l^2+(c-1)^2}+\varepsilon\right\}\in I$$

olur ve

$$\left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{x_i^2 + (c_i - 1)^2} < \sqrt{l^2 + (c-1)^2} - \varepsilon\right\} \in I$$

dır ki $I - \lim mx = l / c$ elde edilir.

3.2. Multiset Dizilerinin I^* − Yakınsaklığı

Tanım 3.2.1. $mx = (x_i / c_i) \in m\mathbb{R}$ bir multiset dizisi olmak üzere,

$\{m_1 < m_2 < ... < m_i < ...\} \in F(I)$ ve $\lim_{i\to\infty} x_{m_i} / c_{m_i} = l / c$ şartları sağlanırsa $mx = (x_i / c_i)$ dizisi l / c sayısına I^* −yakınsaktır ve $I^* - \lim_{i\to\infty} mx = l / c$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.2.1. Bir $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi l / c sayısına I^* − yakınsak ise, aynı zamanda l / c sayısına I − yakınsaktır.

İspat: $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisinin l / c sayısına I^* − yakınsak olduğunu kabul edelim. O halde

$H = \mathbb{N} \setminus M$ ve $\lim_{i\to\infty} d_M\left(x_{m_i} / c_{m_i}, l / c\right) = 0$

olacak şekilde bir $H \in I$ kümesi vardır. $\varepsilon > 0$ olmak üzere, alt dizinin yakınsaklığından dolayı $\forall i > i_0$ için,

$$\lim_{i\to\infty} d_M\left(x_{m_i} / c_{m_i}, l / c\right) = \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır. H kümesi ve yakınsaklık tanımı birlikte düşünüldüğünde,

$$\left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{m_1 < m_2 < ... < m_{i_0}\right\}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafı ideale ait olduğundan ispat elde edilmiş olur.

Örnek 3.2.1. Bir $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi $(x_i / c_i) = (0/1, 2/1, 2/1, 0/1, 2$ olarak verilsin. Bu durumda,

$\left\{i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - 2)^2 + (c_i - 1)^2} \geq \varepsilon\right\}$ kümesi, $\{1, 4, 9, ...\} \in I_d$ dir. Burada $\left(x_{i_k} / c_{i_k}\right) = (2/1, 2/1, 2/1, ...)$ olsun. Bu multiset dizisi $2/1$ e yakınsar. Aynı zamanda bu elemanların indisleri kümesi $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10...\} \in F(I_d)$ olduğundan bu dizi $2/1$ sayısına I^* − yakınsaktır.

Bir sonraki teoreme göre, eğer I idealinin (AP) özelliği varsa $I-$ yakınsaklık ile I^*- yakınsaklık çakışır. O halde bir sonraki tanımda (AP) özelliği verilecektir.

Tanım 3.2.2. (*(AP)* Özelliği)

$I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun bir ideal olsun. I ya ait ayrılabilir $\{A_1, A_2, \ldots\}$ kümeleri için $j \in \mathbb{N}$ için $A_j \Delta B_j$ sonlu bir küme ve $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$ şartlarını sağlayan sayılabilir kümelerin bir $\{B_1, B_2, \ldots\}$ ailesi varsa I idealinin (AP) koşulunu sağladığı söylenir. Burada $A_j \Delta B_j = (A_j \setminus B_j) \cup (B_j \setminus A_j)$ dir.

Teorem 3.2.2. $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun bir ideal olsun. Eğer I, (AP) özelliğine sahipse $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi için $I - \lim\limits_{i\to\infty} mx = l/c$ olduğunda aynı zamanda $I^* - \lim\limits_{i\to\infty} mx = l/c$ sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki I ideali (AP) özelliğine sahip ve $I - \lim mx = l/c$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$A_\varepsilon = \left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon \right\} \in I$$

dır. I idealinin (AP) özelliği var olduğundan ayrık, sayılabilir $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ kümeler dizisi oluşturulmalıdır. $i \geq 2$ için,

$$A_1 = \left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq 1 \right\}$$

ve

$$A_i = \left\{ i \in \mathbb{N} : \frac{1}{i} \leq \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} < \frac{1}{i-1} \right\}$$

olsun. Yani,

$$A_1 = \left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq 1 \right\},$$

$$A_2 = \left\{ i \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} \leq \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} < 1 \right\},$$

$$A_3 = \left\{ i \in \mathbb{N} : \frac{1}{3} \leq \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} < \frac{1}{2} \right\}$$

…

…

$$A_i = \left\{ i \in \mathbb{N} : \frac{1}{i} \leq \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} < \frac{1}{i-1} \right\}$$

şeklindedir ve bu kümelerin ayrık olduğu görülmektedir. (AP) özelliğinden dolayı $j \in \mathbb{N}$ için $i \neq j$ olduğunda $A_j \Delta B_j$ sonlu ve $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$ olacak şekilde $\{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$ vardır. $M = \mathbb{N} \setminus B \in F(I)$ olsun. $i \in M$ ler için,

$$\lim_{\substack{i \to \infty \\ i \in M}} mx_i = l / c$$

yani $\forall \varepsilon > 0$ ve $i > i_0$ için,

$$\sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} < \varepsilon$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\eta > 0$ olacak şekilde $i \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{i+1} < \eta$ seçelim.

$$\left\{ i \in \mathbb{N} : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \eta \right\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{i+1} A_j$$

dir. $j = 1, 2, \ldots, i+1$ için $A_j \Delta B_j$ sonlu olduğundan,

$$\left(\bigcup_{j=1}^{i+1} B_j \right) \cap \left(i \in \mathbb{N} : i > i_0 \right)$$

dır. $i > i_0$ ve $i \in M = \mathbb{N} \setminus B$ olsun. $i \notin B$ olduğundan $i \notin \bigcup_{j=1}^{i+1} B_j$ ve dolayısıyla $i \notin \bigcup_{j=1}^{i+1} A_j$ olur. O halde $i > i_0$ için,

$$\sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} < \frac{1}{i+1} < \eta$$

olur ki buradan teorem ispatlanır.

Teorem 3.2.3. Bir $mx = (x_i / c_i)$ multiset dizisi için $I - \lim_{i \to \infty} mx = l / c$ olduğunda aynı zamanda $I^* - \lim_{i \to \infty} mx = l / c$ oluyorsa I ideali (AP) özelliğine sahiptir.

İspat: l/c sayısı $m\mathbb{R}$ kümesinin bir yığılma noktası olsun. O halde $I-\lim_{i\to\infty} mx = l/c$ olacak şekilde bir $mx=(x_i/c_i)$ dizisi vardır ve

$$\lim_{i\to\infty} d_M\left(x_i/c_i, l/c\right)=\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}$$

dizisi sıfıra azalan bir dizidir. $n\in\mathbb{N}$ için,

$$\lim_{i\to\infty} d_M\left(y_i/d_i, l/c\right)=\sqrt{\left(y_i-l\right)^2+\left(d_i-c\right)^2}=\varepsilon_i$$

ve $\{A_i\}$ ailesi I nın boştan farklı ayrık kümeler ailesi olsun. $i\in a_j$ için $mz=(z_i/t_i)$ olarak seçildiğinde,

$$A(\delta)=\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{\left(z_i-l\right)^2+\left(t_i-c\right)^2}\geq\delta\right\}\subseteq A_1\cup A_2 ... A_m$$

olur. $A(\delta)\in I$ ve $I-\lim_{i\to\infty} mx_i = l/c$ olduğundan $I-\lim_{i\to\infty} mx_i = l/c$ elde edilir. Böylece $M=\mathbb{N}\setminus B=\{m_1<m_2<...\}$ olduğunda $I-\lim_{i\to\infty} mx_{i_m}=l/c$ sağlanacak şekilde bir $B\in I$ kümesi bulunabilir. $B_j=A_j\cap B,\ j\in\mathbb{N}$ olmak üzere her j sayısı için $B_j\in I$ ve ayrıca $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\in I$ dır. $I-\lim_{i\to\infty} mx_i=l/c$ olduğu bilindiğinden A_j kümesinin M kümesi ile sadece sonlu sayıda ortak elemanının olduğu söylenebilir. Böylece $A_j\subset\left(A_j\cap B\right)\cup\left\{m_1,m_2,...,m_{i_0}\right\}$ olacak şekilde $i_0\in\mathbb{N}$ vardır.

$$A_j\Delta B_j=A_j\setminus B\subset\left\{m_1,m_2,...,m_{i_0}\right\}$$

olduğundan $A_j\Delta B_j$ kümesi sonludur ve $j\in\mathbb{N}$ keyfi olduğundan (AP) özelliği sağlanır.

Teorem 3.2.4. $(m\mathbb{R},d_M)$ bir metrik uzay ve $mx=(x_i/c_i)$, $(m\mathbb{R},d_M)$ metrik uzayında bir multiset dizisi olsun. Eğer $m\mathbb{R}$ kümesinin yığılma noktası yoksa, her uygun I ideali için $I-$ yakınsaklık ve I^*- yakınsaklık çakışır.

İspat: Kabul edelim ki $m\mathbb{R}$ kümesinin yığılma noktası olmasın. Teorem 3.2.1. den bilindiği üzere, $I^*-\lim_{i\to\infty} mx=\gamma\ /$ olduğunda $I-\lim_{i\to\infty} mx=\gamma/c$ dir. O halde ispat için $I-\lim_{i\to\infty} mx=\gamma/c$ olduğunda $I^*-\lim_{i\to\infty} mx=\gamma/c$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi

$I-\lim\limits_{i\to\infty} mx=\gamma/c$ olduğunu kabul edelim. $m\mathbb{R}$ kümesinin bir yığılma noktası olmadığı için,

$$B(\gamma/c,\delta)=\left\{mx\in m\mathbb{R}:\sqrt{\left(x_i-\gamma\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}<\delta\right\}=\left\{\gamma/c\right\}$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Kabulümüzden dolayı

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{\left(x_i-\gamma\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\geq\delta\right\}\in I$$

olur. Buradan

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\sqrt{\left(x_i-\gamma\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}<\delta\right\}=\left\{i\in\mathbb{N}:x_i/c_i=\gamma/c\right\}\in F(I)$$

ve

$$I^*-\lim\limits_{i\to\infty} mx=\gamma/c$$

elde edilir.

4. MULTİSET DİZİLERİNİN I — LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Çalışmanın bu bölümünde multiset dizilerinin $I-$lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımlanacak ve multiset dizilerinin $I-$lacunary istatistiksel yakınsaklığı ile ilgili bazı özellikler incelenecektir.

Tanım 4.1. (Multiset Dizilerinin $I-$Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı)

$mx=(x_i/c_i)$ bir multiset dizisi ve $I\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Her $\varepsilon>0$ için,

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\left|i\in J_r:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\geq\varepsilon\right|\geq\delta\right\}\in I$$

oluyorsa $mx=(x_i/c_i)$ dizisi l/c sayısına $I-$lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $mx\to l/c\left(S_\theta\left(I\right)\right)$ şeklinde gösterilir.

$I-$lacunary istatistiksel yakınsak tüm multiset dizilerinin kümesi $S_\theta^{l/c}\left(I\right)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2. Multiset Dizilerinin Kuvvetli $I-$Lacunary Toplanabilirliği

$mx=(x_i/c_i)$ bir multiset dizisi, $I\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Her $\varepsilon>0$ için,

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\geq\varepsilon\right\}\in I$$

oluyorsa $mx=(x_i/c_i)$ dizisi l/c sayısına kuvvetli $I-$lacunary toplanabilirdir denir ve $mx\to l/c\left(N_\theta\left(I\right)\right)$ şeklinde gösterilir.

Kuvvetli $I-$lacunary toplanabilir tüm multiset dizilerinin kümesi $N_\theta{}^{l/c}(I)$ şeklinde sembolize edilir.

Tanım 4.3. (Multiset Dizilerinin $I-$ İstatistiksel Yakınsaklığı)

$mx=(x_i/c_i)$ bir multiset dizisi, $I\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Her $\varepsilon>0$ için,

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\left|\left\{i\leq n:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in I$$

oluyorsa $mx=(x_i/c_i)$ dizisi l/c sayısına $I-$istatistiksel yakınsaktır denir ve $mx \to l/c\left(S(I)\right)$ şeklinde gösterilir.

$I-$İstatistiksel yakınsak tüm multiset dizilerinin kümesi $S^{l/c}(I)$ şeklinde sembolize edilir.

Tanım 4.4. (Multiset Dizilerinin $I-$ Cesàro Toplanabilirliği)

$mx=(x_i/c_i)$ bir multiset dizisi ve $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere her $\varepsilon>0$ için,

$$\left\{ n\in\mathbb{N} : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2} \ge \varepsilon \right\} \in I$$

oluyorsa $mx=(x_i/c_i)$ dizisine l/c sayısına $\sigma^{l/c}(I)$ toplanabilirdir denir ve $mx \to l/c\ (\sigma\ (I))$ şeklinde gösterilir.

$\sigma^{l/c}(I)$ toplanabilir tüm multiset dizilerinin kümesi $\sigma^{l/c}(I)$ şeklinde sembolize edilir.

Sonraki teoremlerde bu kümeler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Teorem 4.1. $mx=(x_i/c_i)$, $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, $mx \in N_{\theta}^{l/c}(I)$ olduğunda $mx \in S_{\theta}^{l/c}(I)$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $mx \in N_{\theta}^{l/c}(I)$ olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2} \ge \sum_{\substack{i\in J_r \\ \sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\ge\varepsilon}} \sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}$$

$$\ge \varepsilon\left|\left\{ i\in J_r : \sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2} \right\}\right|$$

sağlanır ve

$$\frac{1}{\varepsilon h_r}\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2} \ge \frac{1}{h_r}\left|\left\{ i\in J_r : \left|\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right| \ge \varepsilon \right\}\right|$$

dır. Böylece $\forall\delta>0$ için,

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\left|\left\{i\in J_r:\left|\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$

$$\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\geq\varepsilon\delta\right\}\in I$$

olur ki buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.2. Eğer $mx=(x_i/c_i)$ multiset dizisi sınırlı ise, $mx\in S_\theta^{l/c}(I)$ olduğunda $mx\in N_\theta^{l/c}(I)$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $mx\in S_\theta^{l/c}(I)$ ve $mx=(x_i/c_i)$ sınırlı olsun. O halde $\forall i\in\mathbb{N}$ için $\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\leq B$ olacak şekilde bir B sayısı vardır.

Ayrıca $c,c_0\in\mathbb{N}_0$ ve $x_i\to l$ olduğundan,

$$\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-1\right)^2}\leq\sqrt{x_i^2+\left(c_i-1\right)^2}\leq B$$

dir.

Her $\varepsilon>0$ için,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}=\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{i\in J_r\\ \left|\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}}}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}$$

$$+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{i\in J_r\\ \left|\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}}}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}$$

$$\leq\frac{B}{h_r}\left|\left\{i\in J_r:\left|\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|+\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece,

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\geq\varepsilon\right\}$$

$$\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\left|\left\{i\in J_r:\left|\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2M}\right\}\in I$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. Eğer $\liminf_r q_r>1$ ise $mx\in S^{l/c}(I)$ olduğunda $mx\in S_\theta^{l/c}(I)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $\liminf_r q_r>1$ olsun. O halde yeterince büyük r ler için $q_r>1+\lambda$ olacak şekilde $\lambda>0$ vardır ve

$$\frac{h_r}{i_r}\geq\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

sağlanır.

$mx\in S^{l/c}(I)$ olduğunda, $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\frac{1}{k_r}\left|\left\{i\leq k_r:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\frac{1}{k_r}\left|\left\{i\in J_r:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{h_r}\left|\left\{i\in J_r:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. Böylece $\forall\delta>0$ için,

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\left|\left\{i\in J_r:\left|\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$

$$\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{i_r}\left|\left\{i\leq i_r:\left|\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\frac{\delta\lambda}{(1+\lambda)}\right\}\in I$$

olur ki buradan teoremin ispatı elde edilir.

Teorem 4.4. $\theta=(k_r)$, $\limsup_r q_r<\infty$ koşulunu sağlayan bir lacunary dizisi ve I bir uygun ideal olsun. Bu durumda $mx\in S_\theta^{l/c}(I)$ olduğunda $mx\in S^{l/c}(I)$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $\limsup_r q_r<\infty$ ve $mx\in S_\theta^{l/c}(I)$ olsun. O halde tüm $r\in\mathbb{N}$ ler için $q_r<K$ olacak şekilde bir $K>0$ sayısı vardır. Her $\varepsilon,\delta,\eta>0$ için,

$$C=\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\left|\left\{i\in J_r:\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2}\geq\varepsilon\right\}\right|<\delta\right\}$$

ve

$$T=\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\left|\left\{i\le n:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\ge\varepsilon\right\}\right|<\eta\right\}$$

kümeleri tanımlanabilir. Burada $C\in F(I)$ olduğu açıkça görülmektedir. $T\in F(I)$ olduğu gösterilirse, teoremin ispatı elde edilir. O halde, $\forall j\in C$ için,

$$A_j=\frac{1}{h_j}\left|\left\{i\in J_j:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\ge\varepsilon\right\}\right|$$

diyelim. Bazı $r\in C$ ler için $k_r<n<k_r$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ seçildiğinde,

$$\frac{1}{n}\left|\left\{i\le n:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\ge\varepsilon\right\}\right|$$

$$\le\frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{i\le n:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\ge\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{i\le J_1:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\ge\varepsilon\right\}\right|+\ldots+\frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{i\le J_r:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\ge\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\qquad\frac{k_r}{k_{r-1}}\frac{1}{h_1}\left|\left\{i\le J_1:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\ge\varepsilon\right\}\right|$$

$$+\ldots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}\frac{1}{h_r}\left|\left\{i\le J_r:\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\ge\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{k_r}{k_{r-1}}A_1+\frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}A_2+\ldots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}A_r$$

$$\le\sup_{j\in C}A_j\,\frac{k_r}{k_{r-1}}$$

$$<K\delta$$

olur. $\eta=\delta K$ seçilerek, $\cup\left\{n:k_{r-1}<n<k_r,r\in C\right\}\subset T$ ve $C\in F(I)$ göz önünde bulundurulduğunda, $T\in F(I)$ elde edilir.

Teorem 4.5. $\theta=(k_r)$, $\liminf_r q_r > 1$ koşulunu sağlayan bir lacunary dizisi ve I bir uygun ideal olsun. Bu durumda $mx \in \sigma^{l/c}(I)$ olduğunda $mx \in N_\theta^{l/c}(I)$ dır.

İspat: $\liminf_r q_r > 1$ olduğunda, yeterince büyük bir r için $q_r \geq 1+\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı vardır. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan $\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\lambda}{\lambda}$ ve $\frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\lambda}$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ için, $E = \left\{ k_r \in \mathbb{N} : \frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \right\}$ kümesi tanımlansın. Buradan $E \in F(I)$ olduğu kolaylıkla görülmektedir. $\forall i_r \in E$ içi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{i\in J_r}\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2} &= \frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{k_r}\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2} - \frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2} \\
&= \frac{k_r}{h_r}\frac{1}{k_r}\sum_{k=1}^{k_r}\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2} - \frac{k_{r-1}}{h_r}\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2} \\
&\leq \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)\varepsilon - \frac{1}{\lambda}\varepsilon'
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\eta = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)\varepsilon - \frac{1}{\lambda}\varepsilon'$ seçildiğinde,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{i\in J_r}^{k_r}\sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2} < \eta \right\} \in F(I)$$

elde edilir ki buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.6. $\theta=(k_r)$, $\limsup_r q_r < \infty$ koşulunu sağlayan bir lacunary dizisi ve I bir uygun ideal olsun. Bu durumda $mx \in N_\theta^{l/c}(I)$ olduğunda $mx \in \sigma^{l/c}(I)$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ ve $mx \in N_\theta^{l/c}(I)$ olsun. O halde tüm $r \in \mathbb{N}$ ler için $q_r < K$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı vardır. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$L=\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}<\varepsilon_1\right\}$$

ve

$$R=\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}<\varepsilon_2\right\}$$

kümeleri ve $\forall j\in L$ için,

$$D_j=\frac{1}{h_j}\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}<\varepsilon_1$$

olarak tanımlansın. O halde $L\in F(I)$ olduğu açıkça görülmektedir. $r\in L$, $k_{r-1}<n<k_r$ için,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}$$

$$\leq\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}$$

$$=\frac{1}{k_{r-1}}\left(\sum_{i\in J_1}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}+\sum_{i\in J_2}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}+\ldots+\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right)$$

$$=\frac{k_1}{k_{r-1}}\left(\frac{1}{h_1}\sum_{i\in J_1}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right)+\frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}\left(\frac{1}{h_2}\sum_{i\in J_2}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right)+$$

$$\ldots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}\left(\frac{1}{h_r}\sum_{i\in J_r}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right)$$

$$=\frac{k_1}{k_{r-1}}D_1+\frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}D_2+\ldots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}D_r$$

$$\leq\left(\sup_{j\in T}D_j\right)\frac{k_r}{k_{r-1}}$$

$$<\varepsilon_1 K$$

elde edilir. $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 K$ olarak seçildiğinde, $L \in F(I)$ ve $\cup\{n : k_{r-1} < n < k_r, r \in L\} \subset R$ oluşu ve $\theta = (k_r)$ ile ilgili kabul göz önüne alındığında $R \in F(I)$ elde edilir ki ispat tamamlanır.

Teorem 4.7. $mx = (x_i / c_i)$, $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere $mx \in \sigma^{l/c}(I)$ olduğunda $mx \in S^{l/c}(I)$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $mx \in \sigma^{l/c}(I)$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1 \\ \sqrt{(x_i-l)^2+(c_i-c)^2} \geq \varepsilon}}^{n}\sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2}$$

$$\geq \varepsilon \frac{1}{n}\left|\left\{i \leq n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\right\}\right|$$

dır. Böylece $\forall \delta > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\left|\left\{i \leq n : \sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\}$$

$$\subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - l)^2 + (c_i - c)^2} \geq \varepsilon\delta\right\} \in I$$

olur. İfadenin sağ tarafının ideale ait olduğu bilindiğinden sol tarafın da ideale ait olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.8. $mx = (x_i / c_i)$ sınırlı bir multiset dizisi ve $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, $mx \in S^{l/c}(I)$ olduğunda $mx \in \sigma^{l/c}(I)$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $mx = (x_i / c_i)$ sınırlı bir multiset dizisi ve $mx \in S^{l/c}(I)$ olsun. Bu durumda $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{x_i^2 + (c_i - 1)^2} \leq B$ olacak şekilde negatif olmayan bir B reel sayısı vardır. Teorem 4.2.' den yararlanarak,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ \left|\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right|\geq\varepsilon}}^{n}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ \left|\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right|<\varepsilon}}^{n}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}$$

$$\leq B\frac{1}{n}\left|\left\{i\leq n:\left|\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right|\geq\varepsilon\right\}\right|+\varepsilon.$$

elde edilir. Böylece,

$$\left\{i\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\geq\varepsilon\right\}\subseteq\left\{i\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\left|\left\{i\in\mathbb{N}:\left|\sqrt{\left(x_i-l\right)^2+\left(c_i-c\right)^2}\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\frac{\varepsilon}{B}\right\}\in I$$

olup ispat tamamlanır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında multiset dizilerinin ideal yakınsaklığı tanımlanmış ve bu kavrama dair bazı cebirsel ve topolojik özellikler incelenmiştir. Analizde çok önemli bir yeri olan ideal yakınsaklık kavramının multiset dizilerine uygulanması, bununla ilgili teoremlerin ve örneklerin incelenmesi bu konuda daha önce yapılan çalışmaları geneller niteliktedir. Aynı zamanda multiset dizilerinin ideal yakınsaklığı multiset dizileri ve bilinen küme dizileri açısından benzer ve farklı yönlerin ortaya çıkarılmasını sağlamaktadır. Multiset dizilerinin tekrarlı elemanları sebebiyle bilgisayar bilimlerinde de fazlaca kullanılması, ideal yakınsaklık kavramının bu alanla da ilişkilendirilmesi anlamında bu tezi daha önemli hale getirmektedir. Ayrıca multisetler elemanları tekrar edebilen kümeler olması nedeniyle günlük hayatın matematiğe aktarılması ve daha iyi ifade edilebilmesi açısından oldukça önemlidir.

5.2 Öneriler

Bu çalışmada kullanılan ideal yakınsaklık kavramı yerine daha farklı yakınsaklık türleri kullanılarak nasıl sonuçlar elde edilebileceği incelenebilir. Ayrıca multisetlerde elemanların sıralaması önemli değildir. Hem sıralamanın hem de sayının önemli olduğu farklı çalışmalar yapılabilir. Ayrıca elemanların sonsuz sayıda tekrar edebilmesi durumu üzerine de çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

Aczel, P., 1986, The type theoretic interpretation of constructive set theory: inductive definitions, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 114, 17-49.

Baronti, M. and Papini P., 1986, Convergence of sequences of sets, In: Micchelli, C. A., Pai., D. V., Methods of functional analysis in approximation theory, ISNM 76, Birkhauser-Verlag, Basel, 133-155.

Bayraktar, M., 2006, Fonksiyonel Analiz, *Gazi Kitabevi, Ankara*, Türkiye.

Beer, G., 1985, On convergence of closed sets in a metric space and distance functions, *Bull. Aust. Math. Soc*., 31, 421-432.

Beer, G., 1994, Wijsman convergence of convex sets under renorming, *Nonlinear Anal. Theor. Meth. App.*, 22, 207-216.

Beer, G., 1994, Wijsman convergence: A surwey, *Set-Valued Var. Anal*., 2, 77-94.

Beer, G., 2002, On the compactness theorem for sequences of closed sets, *Mathematica Balkanica*, 16, 327-338.

Bell, J. L., 2011, Set theory: Boolean-valued models and independence proofs, 47, OUP Oxford.

Bilizard, W. D., 1991, The development of multiset theory, *Modern Logic*, 1, 319-352.

Buck, R. C., 1953, Generalized asymptotic density, *Amer. J. Math.*, 75-335.

Cerf, V., Fernandez, E., Gostelow K. and Volausky, S., 1971, Formal control and low properties of a model of computation, Report ENG 7178, Computer Science Department, University of California, Los Angeles, CA, December, P-81.

Church, A., 1974, Set theory with a universal set, In Proceedings of the Tarski Symposium, 25, 297-308. Proc. Symposia Pure Math, XXV, AMS, Providence RI.

Çallıalp, F. ve Canoğlu, 2014, A., Matematik Analiz I-II, *Birsen Yayın Dağıtım*, İstanbul, Türkiye.

Das, P., Savaş, E. and Ghosal, S., 2011, On generalizations of certain summability methods using ideals, *Applied Mathematics Letters*, 24(9), 1509-1514.

Debnath, S. and Debnath, A., 2021, Statistical Convergence of multisequences on R, *Applied Sciences*, 23, 17-28.

De Blasi, F. S. and Myjak, J., 1986, Weak convergence of convex sets in Banach spaces, *Arch. Math.*, 47, 448-456.

Demirci, K., 2001, $I-$limit superior and limit inferior, *Mathematical Communications 6*, 165-172.

Effros, E. G., 1965, Convergence of closed subsets in a topological space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16, 929-931.

Erdös, P. and Tenenbaum, G., 1989, Sur les densites de certaines suites d'entiers, *Proceedingsof the London Math.Soc.*,59(3), 438-438.

Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, *Coll. Math.*, 2, 241-244.

Fridy, J. A., 1985, On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301-313.

Fridy, J. A., 1993, Statistical limit points, *Proceedings of the American Mathematical Society,* 118(4), 1187-1192.

Fridy, J. A. and Orhan, C., 1993, Lacunary statistical convergence, *Pasific Journal of Mathematics*, 160(1), 43-51.

Fridy, J. A. and Orhan, C., 1997, Statistical limit superior and limit inferior, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125 (12), 3625-3631.

Freedman, A. R., Sember J. J. and Raphael, M., 1978, Some Cesàro type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 37, 508-520.

Freedman, A. R. and Sember, I.J., 1981, Densities and summability, *Pacific Journal of Math.*, 95(2), 293-305.

Kişi, Ö. and Nuray, F., 2013, New convergence definitions for sequences of sets, *Abstract and Applied Analysis*, 1-6.

Knuth, D. E., 1981, The art of computer programming, Seminumerical Algorithms, 2, Seminumerical Algorithms, Addison Wesley, Massachusetts.

Kostyrko, P., Šalát, T. and Wilezyński, W., 2000, $I-$Convergence, *Real Analyssis Exchange*, 26(2), 669-680.

Lechicki, A. and Levi, S., 1987, Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space, *Bull. Un. Mat. Ital.*, 7, 439-452.

Lucchetti, R., Convergence of sets and projections, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 4, 477-483.

Maddox, I. J., 1988, Statistical convergence in a locally convex sequence space, *Math. Proc. Camp. Phil. Soc.*, 104, 141-145.

Maddox, I. J.,1970, Elements of functional analysis, *Cambridge University Press.*

Maio G. D. And Kočinac L. D. R., 2008, Statistical convergence in topology, Topology and its Applications, 156(1), 28-45.

Meyer, R. K. and McRobie M. A., 1982, Multisets and relevant implication I and II, Australasian Journal of Philosophy, 60, 107-139 and 261-285.

Miller, H. I., 1995, A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, *Trans. of the Amer. Math. Soc*., 347(5), 1811-1819.

Mursaleen, M. and Alotaibi, A., 2011, Statistical lacunary summabilityand a Korovkin type approximation theorem, *Ann. Univ. Ferrara*, 57, 373-381.

Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. L., 1991, An introduction to the theory of numbers, John Wiley and Sons, Inc, Fifth edition, New York.

Nuray, F. and Rhoades, B. E., 2012, Statistical convergence of sequences of sets, Fasc. Math., 49, 87-99.

Pachilangode, S. and John, S. J., 2021, Convergence of multiset sequences, *Journal of New Theory*, 34, 20-27.

Pawlak, Z., 2002, Rough set theory and its applications, *Journal of Telecommunications and Information Technology*, 7-10.

Salat, T., 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slow*., 30, 139-150.

Salat, T., Tripathy, B.C., Ziman, M., 2004, On some properties of *I*-convergence, *Tatra Mt. Math. Publ*, 28, 279-286.

Salinetti, G. and Wets R. G-B., 1979, Convergence of sequences of closed sets, *Topology Proceedings*, 4, 149-158.

Savaş E. and Das, P., 2010, A generalized statistical convergence via ideals, *Applied Mathematics Letters*, 826-830.

Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinarieet la convergence asymptotique, *Collog. Math.*, 2, 73-74.

Schoenberg, I. J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, *The Amer. Math. Monthly*, 66(5), 361-375.

Syropoulos, A., 2001, Mathematics of multisets, Multisets Processing, Lecture Notes in Computer Science 2235, 347-358.

Takeuti, G., 1981, Quantum set theory, Current Issues in Quantum Logic, In: Beltrametti E. G., van Fraassen, B. C. (Eds.), Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3228-2_19.

Tripathy, B. C., 1997, On statistically convergent and statistically bounded sequences, *Bull. Cal. Math. Soc.*, 20, 31-33.

Ulusu, U. and Nuray, F., 2012, Lacunary statistical convergence of sequence of sets, Progress in Applied Applied Mathematics, 4(2), 99-109.

Ulusu, U., Dündar, E., 2014, $I-$lacunary statistical convergence of sequences of sets, *Filomat*, 28(8), 1567-1574.

Volkov, I. I., 2001, Cesàro summation methods, In: Hazewinkel, M., (Eds.), Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.

Vopěnka, P., 1989, What is the alternative set theory all about, In: Mlček, J., Benešová, M., Vojtášková, B., (Eds.), Proceedings of the 1st Symposium Mathematics in the Alternative Set Theory, Association of Slovak Mahematicians and Physicists, 28-40.

Wijsman, R. A., 1964, Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, *Bull. Amer. Math. Soc*. 70, 186-188.

Wijsman, R. A., 1966, Convergence of sequences of Convex sets, Cones and Functions II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol 123, no:1, 32-45.

Wildberger, N. J., 2003, A new look at multisets, School of Mathematics, UNSW Sydney 2052.

Yalçınkaya, İ., 2015, Analiz III (Diziler ve Seriler), *Dizgi Ofset, Konya*, Türkiye.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, Information and Control, 8 (3), 338-353.

Zygmund, A., 1979, Trigonometric Series, *Cambridge University Press, Cambridge*, UK.

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

Gümüş, H., Demir, N., 2018, A New Type of Generalization on W-Asymptotically J-Statistical Equivalance with the Number of α, Axioms, 7 (3), 54.

Demir, N., Gümüş, H., 2022, Rough Statistical Convergence for Difference Sequences, Kragujevac Journal of Mathematics, 46 (5), 733-742. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır.)

Demir, N., Gümüş, H., 2020 , Rough Convergence for Difference Sequences, New Trends in Mathematical Sciences, 8 (2), 22-28. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır.)

Gümüş, H., Demir, N., 2021, Rough İdeal Convergence for Difference Sequences, Konuralp Journal of Mathematics, 9 (1), 209-216.

Demir, N., Gümüş, H., 2023, Ideal Convergence of Multiset Sequences, Filomat, 37 (30), 10199-10207. (Doktora tezinden yapılmıştır.)

Gümüş, H., Güleç, H. H., Demir, N.,2026, A Study on Lacunary Statistical Convergence of Multiset Sequences, Kragujevac Journal of Mathematics, 50(4), 567-578.

Demir, N., Gümüş, H., A Study on $I-$Lacunary Statistical Convergence of Multiset Sequences, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, basımda. (Doktora tezinden yapılmıştır.)

Gümüş, H., Demir, N., $I-$Limit Points and $I-$Cluster Points of Multiset Sequences, yayına gönderildi. (Doktora tezinden yapılmıştır.)