T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYONLARIN 2×2 REEL MATRİS TEMSİLİ VE UYGULAMALARI

Aslı AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2020
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Aslı AYDIN tarafından hazırlanan "Split Kuaterniyonların Bazı Matris Temsilleri ve Uygulamaları" adlı tez çalışması /…/… tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Unvanı Adı SOYADI	…………………..
Danışman	
Doç Dr. Melek ERDOĞDU	…………………..
Üye	
Unvanı Adı SOYADI	…………………..
Üye	
Unvanı Adı SOYADI	…………………..
Üye	
Unvanı Adı SOYADI	…………………..

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…/20.. gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Aslı AYDIN

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SPLİT KUATERNİYONLARIN 2×2 REEL MATRİS TEMSİLİ VE UYGULAMALARI

Aslı AYDIN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

2020, 51 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Gülşah AYDIN ŞEKERCİ

Bu tezde split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsili ve split kuaterniyonların idempotent, nilpotent ve sıfır bölenleri incelenmiştir; öncelikle split kuaterniyonlar tanıtılmış, split kuaterniyonların reel matris temsili verilmiştir. Daha sonra reel matris temsili sınıflandırılmıştır. Bununla birlikte split kuaterniyonların idempotent ve nilpotent elemanları reel matris temsili yardımıyla elde edilmiştir. Ardından split kuaterniyonun sağ sıfır bölenleri, sol sıfır bölenleri ve sıfır bölenleri bulunmuştur. Son olarak ise, elde edilen yeni gelişmeler doğrultusunda ortaya çıkan sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İdempotent split kuaterniyonlar, Nilpotent split kuaterniyonlar, Sıfır bölen split kuaterniyonlar, Split kuaterniyonlar.

ABSTRACT

MS THESIS

2×2 REAL MATRIX REPRESENTATION OF SPLIT QUATERNIONS AND THEIR APPLICATIONS

Aslı AYDIN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE MATHEMATİCS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2020, 51 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU
Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Asst. Prof. Dr. Gülşah AYDIN ŞEKERCİ

In this thesis, 2×2 real matrix representations of split quaternions and idempotent, nilpotent and zero divisors of the set of split quaternions are examined. First, split quaternnions are introduced, complex and real matrix representations of split quaternions are given. Then, real matrix representation of split quaternions classified. In addition, idempotent and nilpotent elements of split quaternions are obtained with the help of real matrix representation. After that, right zero divisors, left zero divisors and zero divisors of split quaternions are found. Finally, the results, which are obtained in the view of new developments, are stated.

Keywords: Idempotent split quaternions, Nilpotent split quaternions, Zero divisor split quaternions, Split quaternions.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Melek ERDOĞDU'ya ve ilgisini, önerilerini göstermekten kaçınmayan Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca yardımını hiç esirgemeyen değerli arkadaşlarım Beyza URLU ve Oğuzhan ÖZKER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürler ederim.

Aslı AYDIN
KONYA-2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
H	:	Kuaterniyonlar kümesi
$\widehat{H}$	:	Split kuaterniyonlar kümesi
$\langle\, ,\rangle_L$	:	Lorentz çarpımı
$\times_L$	:	Lorentz vektörel çarpımı
I_n	:	$n \times n$ boyutlu birim matris
$M_{2\times 2}(\widehat{H})$	:	2×2 boyutlu split kuaterniyon matrisler kümesi
$S(q)$	:	q split kuaterniyonun skaler kısmı
$V(q)$	:	q split kuaterniyonun vektörel kısmı
$\bar{q}$	:	q split kuaterniyonun eşleniği
$\lVert q \rVert$	:	q split kuaterniyonun normu
q^{-1}	:	q split kuaterniyonun tersi
I_q	:	q split kuaterniyonun karakteri
q^{τ}	:	q split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsili
$detA$	:	A matrisinin determinantı
$\det(q^{\tau})$	:	q split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsilinin determinantı
λ_1, λ_2	:	q split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsilinin özdeğerleri
$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$	:	q split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsilinin özvektörleri
trA	:	A matrisinin izi
Δ_A	:	A matrisinin karakteristik polinomunun diskriminantı
$\alpha, \beta, \varphi, \lambda, h, t$	:	Reel değerli parametreler

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar; İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından, 1843 yılında yeni bir sayı sistemi olarak tanıtılmıştır. Kuaterniyonlar kümesi

$$\mathrm{H} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanmış olup burada, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ve $ij = -ji = k, jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ eşitlikleri ile tanımlıdır ve değişmeli olmayan cebirlerin en önemli üyesidir.

Hamiltonun kuaterniyonları keşfetmesinden kısa bir süre sonra, James Cockle split kuaterniyonlar kümesini

$$\widehat{\mathrm{H}} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlamış olup burada, $i^2 = -1$, $j^2 = k^2 = 1$ ve $ij = -ji = k$, $jk = -kj = -i$, $ki = -ik = j$ eşitlikleri ile tanımlıdır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş kısmında kuaterniyon kümesi ve split kuaterniyon kümelerinin tarihine değinilmiştir ve tanımları verilmiştir.

İkinci bölümde, kuaterniyon kümesi ve split kuaterniyon kümeleri ile ilgili daha önce yapılmış olan çalışmalar hakkında bilgiler, bazı kaynaklardan alıntı yapılarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde, split kuaterniyon kümesi üzerinde temel işlemler verilmiş ve daha sonrasında bir split kuaterniyonun eşleniği, normu ve tersi tanımlanmıştır. Son olarak, bir split kuaterniyonun karakterine değinilmiştir.

Dördüncü bölümde, split kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsili verilmiş ve sonrasında bir split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsili verilmiştir. İlk olarak bir reel matrisin determinantının durumlarına göre reel matrisin karakteri belirlenmiştir.

Sonrasında, bir split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsilinin determinantının nasıl bulunacağı verilmiştir. Elde ettiğimiz bilgiler ışığında bir split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsilinin karakterini belirleyip ek olarak bulduğumuz karaktere göre bir split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsilinin tersinin özel durumları belirtilmiştir. Ardından, bir split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsilinin öz değerleri ve öz vektörleri elde edilmiştir. Ayrıca, bir split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsilinin karakteristik polinomunun diskriminantının durumlarına bakarak bir split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsili sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaya ek olarak split kuaterniyonun karakterini ve vektörel kısmının karakterini göz önüne alarak tüm durumları gösteren bir tablo oluşturulmuştur. Daha sonra, idempotent split kuaterniyonlar 2×2 reel matris temsili yardımıyla elde edilmiştir ve split kuaterniyonlar kümesindeki idempotent elemanların nasıl olması gerektiği sonucuna varılmıştır. Nilpotent split kuaterniyonlar 2×2 reel matris temsili yardımıyla elde edilmiştir ve split kuaterniyonlar kümesindeki nilpotent elemanların nasıl olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Ardından, her iki durum için de örnekler verilmiştir. Son olarak bir split kuaterniyonun sağ ve sol sıfır bölenlerinin karakterizasyonu 2×2 reel matris temsili yardımıyla belirlenmiş ve her durum için örnek verilmiştir. Bir split kuaterniyonun hem sağ sıfır böleni hem sol sıfır böleni olan sıfır bölen split kuaterniyonu 2×2 reel matris temsili yardımıyla elde edilmiştir. Ek olarak, sağ sıfır bölen, sol sıfır bölen ve sıfır bölen split kuaterniyonların karakterleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, elde edilen sonuçlar bir arada verilmiştir.

Son olarak; bu çalışmada orijinal olarak 2×2 reel matris sınıflandırılmasından yararlanılarak split kuaterniyon 2×2 reel matris tesmsiline ilişkin sonuçlar matrisleri tablo halinde verilmiştir. Daha sonra split kuaterniyonların nilpotent elemanları ve idempotent elemanları ifade edilmiştir. Ayrıca split kuaterniyonların sağ sıfır bölen elemanları, sol sıfır bölen elemanları ve sıfır bölen elemanları elde edilmiştir.

2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

Kuaterniyonlarla ilgili birçok çalışma vardır. Kuaterniyonların polar formu, kuaterniyonların karesi ve kuaterniyonların n. dereceden kökü gibi kavramlara (Girard; 2007)'de yer verilmiştir. Ayrıca, (Hacısalihoğlu; 1983)'de reel kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonları detaylı olarak incelemiştir ve birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme operatörü ve kayma operatörünü ifade etmiştir. Kuaterniyonlar kümesi değişmeli olmadığının bir sonucu olarak bir kuaterniyon matrisinin özdeğerleri teorisi, kuaterniyonlar üzerindeki matrislerle ilgili ilgi çekici konulardan biri haline gelmiştir. Topolojik yaklaşımla bir kuaterniyonik matris için sağ özdeğerler konusu (Baker; 1999)'da tartışılmıştır. Ek olarak, matris cebiri ile basit ortogonal Clifford cebiri arasındaki izomorfizm, reel, kompleks ve kuaterniyonlar üzerindeki matrislerin üstelinin hesaplanmasında kullanılmıştır (Ablamowicz; 1998).

Kuaterniyon cebirinin aksine, split kuaterniyonlar kümesi sıfır bölen, sıfırdan farklı idempotent eleman ve nilpotent eleman içerir (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Özdemir; 2009). Minkowski 3 uzayındaki dönme dönüşümleri, kuaterniyonlar kullanılarak Öklid dönüşümlerini ifade etme gibi split kuaterniyonlarla ifade edilebildiğinden, (Özdemir ve Ergin; 2006) ve (Kula ve Yaylı; 2007) gibi split kuaterniyonların geometrik uygulamaları üzerine çalışmalar vardır. Ayrıca (Atasoy ve ark.; 2017)'de Cayley–Dickson temsilinden esinlenerek split ve dual split kuaterniyonların yeni bir farklı kutup gösterimine yer vermişlerdir. Bu yeni kutupsal form gösteriminde, split bir kuaterniyon bir çift karmaşık sayı ile temsil edilmiş ve bir dual split kuaterniyon, Cayley-Dickson formundaki gibi bir çift karmaşık sayı ile temsil edilmiştir. Bir diğer taraftan, split kuaterniyon matrisleri ve kompleks adjoint matris (Alagöz ve ark.; 2012)'de tanıtılmıştır. Kompleks matris kullanılarak bir split kuaterniyon matrisin özdeğeri (Erdoğdu ve Özdemir; 2013)'de tartışılmıştır. Bunun yanında, kompleks split kuaterniyonlar ve onların matrisleri (Erdoğdu ve Özdemir; 2013)'de araştırılmıştır. Dahası (Antonuccia; 2015)'de Lorentziyen dönüşümüyle 2×2 boyutunda split kuaterniyon üniter matris temsil edilmiştir. Ek olarak, dual split kuaterniyonlar üzerindeki matrisler ve onların split kuaterniyon matris temsilleri (Erdoğdu ve Özdemir; 2015)'de incelenmiştir. Daha sonra, (Erdoğdu ve Özdemir; 2017)'de split kuaterniyon matrisinin üstelinin hesaplanması için iki farklı metot verilmiştir. İlk metot split kuaterniyonun kompleks adjoint matrisi yardımı ile üstel hesaplanırken ikinci metot olarak split kuaterniyonun karakteri yardımı ile üstel hesaplama verilmiştir. Daha sonra, (Tütüncü; 2019)'da split kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsilini kullanarak split kuaterniyonların kuvvet fonksiyonunu elde etmek için yeni bir metot vermiş ve split kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsili yardımı ile split kuaterniyonların üstel fonksiyonunu elde edebilmek için yeni bir yöntem sunmuştur. Ayrıca, split kuaterniyonik çatılar kullanılarak hareketli ve sabit birim Lorentziyen kürelerin oluşturduğu Lorentziyen küresel hareket (Samancı; 2018)'de incelenmiştir. (Elmas; 2018) split kuaterniyonlar için bir dönme matrisi tanımlamış, daha sonra kuaterniyonlar ve split kuaterniyonlar için şekil operatörünü bulmuş, asli eğrilik ve asli doğrultmanları verilmiştir. Son olarak, (Ni ve ark.; 2019)'da yaptıkları çalışmalarında elde ettikleri τ dönüşümü sayesinde split kuaterniyonlar kümesinden 2×2 reel matris kümesine bir izomorfizma tanımlamışlardır.

3. SPLİT KUATERNİYONLARDA TEMEL İŞLEMLER

Bu kısımda; tezin ana konusunu teşkil eden split kuaterniyonlara dair temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir.

3.1. Temel Kavramlar

Split kuaterniyonlar kümesi

$$\widehat{H} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{3.1}$$

olmak üzere her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ şeklinde verilen split kuaterniyonu

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 ij \tag{3.2}$$

$$q = q_0 + q_1 i + (q_2 + q_3 i) j \tag{3.3}$$

$$q = c_1 + c_2 j \tag{3.4}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $c_1 = q_0 + q_1 i$ ve $c_2 = q_2 + q_3 i$ birer kompleks sayıdır (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Özdemir; 2009, Erdoğdu; 2015).

Tanım 3.1. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonun skaler kısmı

$$S(q) = q_0 \tag{3.5}$$

olarak tanımlanmıştır. Özel olarak $S(q) = 0$ ise q'ya pür (püre) split kuaterniyon adı verilir (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Erdoğdu; 2015).

Tanım 3.2. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonun vektörel kısmı

$$V(q) = q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{3.6}$$

olarak tanımlanmıştır (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Erdoğdu; 2015).

3.2. Split Kuaterniyonların Toplamı

Tanım 3.2.1. $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ iki split kuaterniyon olmak üzere bu iki split kuaterniyonun toplamı

$$p + q = (S(p) + S(q)) + (V(p) + V(q)) \tag{3.7}$$

$$p + q = (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Erdoğdu; 2015).

3.3. Split Kuaterniyonların Çarpımı

Tanım 3.3.1. $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ iki split kuaterniyon olmak üzere bu iki split kuaterniyonun çarpımı

$$pq = S(p)S(q) + \langle V(p), V(q)\rangle_L + S(p)V(q) + S(q)V(p) + V(p) \times_L V(q) \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} pq &= (p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + (p_1q_0 + p_0q_1 - p_2q_3 + p_3q_2)i \\ &\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 - p_1q_3 + p_3q_1)j + (p_0q_3 + p_3q_0 - p_2q_1 + p_1q_2)k \end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak tanımlıdır. Burada $\langle \quad , \quad \rangle_L$ ve $\times_L$ sırasıyla Lorentz iç ve vektör çarpımını temsil ediyor olup, $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için

$$\langle u, v\rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \,, \tag{3.11}$$

$$u \times_L v = \begin{vmatrix} -i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada bahsi geçen Lorentz iç çarpımı ile donatılmış Öklid uzayına Minkowski 3-uzayı adı verilir. Ayrıca pür split kuaterniyonlar kümesi Minkowski 3-uzayı ile özdeştirilebilir (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Özdemir; 2009, Erdoğdu; 2015).

3.4. Split Kuaterniyonun Skaler İle Çarpımı

Tanım 3.4.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu ile $\lambda \in \mathbb{R}$ skalerinin çarpımı

$$\lambda q = q\lambda = (\lambda q_0) + (\lambda q_1)i + (\lambda q_2)j + (\lambda q_3)k \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Erdoğdu; 2015).

3.5. Split Kuaterniyonun Eşleniği

Tanım 3.5.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonunun eşleniği

$$\bar{q} = S(q) - V(q) = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Erdoğdu; 2015).

3.6. Split Kuaterniyonun Normu

Tanım 3.6.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonun normu

$$N_q = \|q\| = \sqrt{|q\bar{q}|} = \sqrt{|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2|} \tag{3.15}$$

olarak tanımlanmıştır. Eğer $N_q = 1$ ise q'ya birim split kuaterniyon adı verilir (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Erdoğdu; 2015).

3.7. Split Kuaterniyonun Tersi

Tanım 3.7.1. Eğer $N_q \neq 0$ ise $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonun tersi vardır ve

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{(N_q)^2} \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Erdoğdu; 2015).

3.8. Split Kuaterniyonun Karakteri

Tanım 3.8.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu için

$$I_q = q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \tag{3.17}$$

değeri q split kuaterniyonunun karakterini belirler. Eğer $I_q < 0$ ise q split kuaterniyonuna spacelike (uzayımsı), eğer $I_q > 0$ ise q split kuaterniyonuna timelike (zamanımsı), eğer $I_q = 0$ ise q split kuaterniyonuna lightlike (ışığımsı veya null) adı verilir (Kula ve Yaylı; 2007, Özdemir ve Ergin; 2006, Özdemir; 2009, Erdoğdu; 2015).

4. SPLİT KUATERNİYONLARIN REEL MATRİS TEMSİLİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde; ilk olarak bir split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsili ve sınıflandırılmasına yer verilmiştir. Daha sonra split kuaterniyonların idempotent elemanları ve nilpotent elemanları elde edilmiştir. Son olarak split kuaterniyonların sağ sıfır bölen elemanları, sol sıfır bölen elemanları ve sıfır bölen elemanları verilmiştir.

4.1. 2×2 Reel Matris Temsili ve Sınıflandırılması

Tanım 4.1.1. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ için

$$q^\tau = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

matrisine q'nun 2×2 boyutulu reel matris temsili adı verilir (Ni ve ark.; 2019).

Teorem 4.1.1. Herhangi bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ split kuaterniyonu için

$$^\tau : \widehat{H} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \tag{4.2}$$

$$q \to q^\tau = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanan $\widehat{H}$'den $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$'ye izomorfik bir dönüşümdür. Burada $\widehat{H}$ split kuaterniyonlar kümesini, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$'de $\mathbb{R}$'deki 2×2 boyutlu matrisler kümesini temsil etmektedir (Ni ve ark.; 2019) .

İspat. Herhangi bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ için $^\tau$ dönüşümünün tanımına göre $q^\tau = A$ eşitliğini sağlayan tek reel matrisin

$$A = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

olduğunu biliyoruz. Tersine herhangi bir $A = (a_{ij})_{2x2}$ için sadece tek bir $q \in \widehat{H}$ vardır öyleki $q^\tau = A$ eşitliğini sağlar. Burada

$$q = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} + \frac{a_{21}-a_{12}}{2} i + \frac{a_{11}-a_{22}}{2} j + \frac{a_{21}+a_{12}}{2} k \in \widehat{H} \qquad (4.5)$$

olarak bulunur.

Biliyoruz ki τ dönüşümü $\widehat{H}$'den $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$'ye birebir dönüşümdür. O zaman herhangi $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \ \in \widehat{H}$ ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \ \in \widehat{H}$ için Tanım 4.1.1.'e göre

$$p^\tau = \begin{bmatrix} p_0 + p_2 & -p_1 + p_3 \\ p_1 + p_3 & p_0 - p_2 \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

ve

$$q^\tau = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

elde ederiz. Bu sayede aşağıdaki eşitlikleri kolayca gösterebiliriz

$$(p+q)^\tau = ((p_0+q_0) + (p_1+q_1)i + (p_2+q_2)j + (p_3+q_3)k)^\tau \qquad (4.8)$$

$$(p+q)^\tau = \begin{bmatrix} p_0 + q_0 + p_2 + q_2 & -p_1 - q_1 + p_3 + q_3 \\ p_1 + q_1 + p_3 + q_3 & p_0 + q_0 - p_2 - q_2 \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

$$(p+q)^\tau = p^\tau + q^\tau \qquad (4.10)$$

$$(pq)^\tau = ((p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2)i + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)j + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)k)^\tau \qquad (4.11)$$

$$(pq)^\tau = \begin{bmatrix} (p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1) & -(p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2) + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0) \\ (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2) + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0) & (p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) - (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1) \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

$$(pq)^{\tau} = \begin{bmatrix} p_0 + p_2 & -p_1 + p_3 \\ p_1 + p_3 & p_0 - p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$(pq)^{\tau} = p^{\tau} q^{\tau} \, . \tag{4.14}$$

Artık $^{\tau}$ dönüşümünün $\widehat{H}$'den $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$'ye izomorfik bir dönüşüm olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 4.1.2 Herhangi bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$(\lambda q)^{\tau} = \lambda q^{\tau} \, . \tag{4.15}$$

İspat. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ alalım.

$$(\lambda q)^{\tau} = (\lambda q_0 + \lambda q_1 i + \lambda q_2 j + \lambda q_3 k)^{\tau} \tag{4.16}$$

$$(\lambda q)^{\tau} = \begin{bmatrix} \lambda q_0 + \lambda q_2 & -\lambda q_1 + \lambda q_3 \\ \lambda q_1 + \lambda q_3 & \lambda q_0 - \lambda q_2 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$$(\lambda q)^{\tau} = \lambda \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$(\lambda q)^{\tau} = \lambda q^{\tau} \tag{4.19}$$

olduğu görülür ve ispat biter.

Teorem 4.1.3. Herhangi bir null olmayan $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu için aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$(q^{\tau})^{-1} = (q^{-1})^{\tau} \, . \tag{4.20}$$

İspat. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ herhangi bir null olmayan split kuaterniyon olsun. Bu durumda

$$(q^{\tau})^{-1} = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.21}$$

$$(q^{\tau})^{-1} = \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \begin{bmatrix} q_0 - q_2 & q_1 - q_3 \\ -q_1 - q_3 & q_0 + q_2 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$(q^{\tau})^{-1} = (q^{-1})^{\tau} \tag{4.23}$$

elde edilir ve ispat biter.

Tanım 4.1.2. A, 2×2 boyutlu reel matris olsun. Eğer $detA < 0$ ise A matrisine spacelike, eğer $detA > 0$ ise A matrisine timelike, eğer $detA = 0$ ise A matrisine lightlike (null) adı verilir (Özdemir; 2018) .

Önerme 4.1.1. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ için

$$\det(q^{\tau}) = I_q = q\bar{q} \tag{4.24}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ için

$$q^{\tau} = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

şeklindedir. q^{τ}'nun determinantına bakarsak

$$\det(q^{\tau}) = (q_0 + q_2)(q_0 - q_2) - (-q_1 + q_3)(q_1 + q_3) \tag{4.26}$$

$$\det(q^{\tau}) = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = q\bar{q} = I_q \tag{4.27}$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.1.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ olsun. $q \in \widehat{H}$ timelike ise q^τ matrisi timelike, $q \in \widehat{H}$ spacelike ise q^τ matrisi spacelike, $q \in \widehat{H}$ lightlike (null) ise q^τ matrisi lightlike (null)'dur.

İspat. Tanım 4.1.2. ve Önerme 4.1.1.'e göre ispat açıktır.

Sonuç 4.1.2. Herhangi bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ için $q \in \widehat{H}$ birim timelike ise

$$(q^\tau)^{-1} = \begin{bmatrix} q_0 - q_2 & q_1 - q_3 \\ -q_1 - q_3 & q_0 + q_2 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

$q \in \widehat{H}$ birim spacelike ise

$$(q^\tau)^{-1} = \begin{bmatrix} -q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

şeklinde bulunur. $q \in \widehat{H}$ lightlike (null) ise q^τ'nun tersi yoktur.

İspat. Önerme 4.1.1.'e göre ispat açıktır.

Önerme 4.1.2. Herhangi bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonuna karşılık gelen q^τ reel matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = q_0 + \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{4.30}$$

ve

$$\lambda_2 = q_0 - \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{4.31}$$

şeklindedir. Ayrıca bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} q_2 + \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ q_1 + q_3 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

ve

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} q_2 - \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ q_1 + q_3 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

olarak bulunur.

İspat. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ için

$$q^\tau = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu matrisin karakteristik denkleminin köklerinden q^τ'nun özdeğerleri

$$\lambda_1 = q_0 + \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{4.35}$$

ve

$$\lambda_2 = q_0 - \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{4.36}$$

olarak bulunur. Daha sonra bulduğumuz özdeğerleri $(q^\tau - \lambda I_{2\times 2})\vec{v} = 0$ denkleminde yerine yazdığımızda özvektörleri sırasıyla

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} q_2 + \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ q_1 + q_3 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

ve

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} q_2 - \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ q_1 + q_3 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.1.3. A, 2×2 boyutlu reel matris ve $\Delta_A = (trA)^2 - 4detA$, A matrisinin karakteristik polinomunun diskriminantı olsun. Eğer $\Delta_A > 0$ ise A matrisine hiperbolik, eğer $\Delta_A < 0$ ise A matrisine eliptik, eğer $\Delta_A = 0$ ise A matrisine parabolik denir (Özdemir; 2018) .

Aşağıdaki tablo ile q split kuaterniyonunun karakteri ile q^τ matrisinin sınıfı arasındaki ilişkiyi ortaya koyulmuştur.

q	$V(q)$	I_q	q^τ
timelike	Spacelike	pozitif	timelike ve hiperbolik
	Timelike	pozitif	timelike ve eliptik
	Null	pozitif	timelike ve parabolik
spacelike	Spacelike	negatif	spacelike ve hiperbolik
null	Spacelike	0	null ve hiperbolik
	Timelike	0	null ve eliptik
	Null	0	null ve parabolik

Tablo 4.1. q split kuaterniyonu ile q^τ matrisinin sınıflandırılması.

Sonuç 4.1.3. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ olsun. Eğer $V(q)$ spacelike ise q^τ hiperbolik, eğer $V(q)$ timelike ise q^τ eliptik, eğer $V(q)$ lightlike (null) ise q^τ parabolik matristir.

4.2. Split Kuaterniyonların İdempotent Elemanlarının Elde Edilmesi

Tanım 4.2.1. R birimli bir halka olsun. Bir $x \in R$ için $x^2 = x$ oluyor ise x elemanına idempotent denir (Çevik; 2014) .

Teorem 4.2.1. $q \in \widehat{H}$ ve $q \neq 1$ olmak üzere $q^2 = q$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlar

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sinh(\beta)i + \frac{1}{2}cos(\alpha)cosh(\beta)j + \frac{1}{2}sin(\alpha)cosh(\beta)k \tag{4.39}$$

veya

$$q = \frac{1}{2} + \varphi i \pm \frac{1}{2} j + \varphi k \tag{4.40}$$

şeklinde yazılabilir. Burada α, β ve φ keyfi reel parametrelerdir.

İspat. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ alalım. $q^2 = q$ olsun. O halde $(q^\tau)^2 = q^\tau$ ‘dur. Buradan

$$\begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 2q_0 q_2 = q_0 + q_2 \tag{4.42}$$

$$2q_0(q_1 + q_3) = q_1 + q_3 \tag{4.43}$$

$$-2q_0(q_1 - q_3) = -q_1 + q_3 \tag{4.44}$$

$$q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 2q_0 q_2 = q_0 - q_2 \tag{4.45}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.43) ve (4.44) eşitliklerinden $q_1 \neq \pm q_3$ ise $q_0 = \frac{1}{2}$ ‘dır. Bu değer (4.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \frac{1}{4} \tag{4.46}$$

elde edilir. Ardından

$$q_0 = \frac{1}{2}, \ q_1 = \frac{1}{2} sinh(\beta), \ q_2 = \frac{1}{2} cos(\alpha) cosh(\beta), \ q_3 = \frac{1}{2} sin(\alpha) cosh(\beta) \tag{4.47}$$

olarak bulunur. Değerler q split kuaterniyonunda yerine yazılırsa

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sinh(\beta)i + \frac{1}{2}cos(\alpha)cosh(\beta)j + \frac{1}{2}sin(\alpha)cosh(\beta)k \tag{4.48}$$

olduğu görülür. Eğer $q_1 = q_3 \neq 0$ ise (4.42) eşitliğinden

$$q_0 + q_2 = 1 \tag{4.49}$$

veya

$$q_0 + q_2 = 0 \tag{4.50}$$

olduğu görülür. (4.43) eşitliğinden

$$q_0 = \frac{1}{2} \tag{4.51}$$

ve son olarak (4.45) eşitliğinden

$$q_0 - q_2 = 1 \tag{4.52}$$

veya

$$q_0 - q_2 = 0 \tag{4.53}$$

olarak bulunur. Bu eşitlikler yardımı ile $q_0 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$ veya $q_0 = \frac{1}{2}, q_2 = -\frac{1}{2}$ ve $q_1 = q_3 = \varphi$ olarak elde edilir. Bu değerler q split kuaterniyonunda yerine yazılırsa

$$q = \frac{1}{2} + \varphi i \pm \frac{1}{2}j + \varphi k \tag{4.54}$$

olduğu görülür. Burada α, β ve φ keyfi reel parametrelerdir.

Sonuç 4.2.1. Split kuaterniyonlar kümesindeki idempotent elemanlar ya $q = 1$'dir ya da null split kuaterniyonlardır.

İspat. Teorem 4.2.1'e göre $q \in \widehat{H}$ için $q^2 = q$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlar

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sinh(\beta)i + \frac{1}{2}cos(\alpha)cosh(\beta)j + \frac{1}{2}sin(\alpha)cosh(\beta)k \tag{4.55}$$

ve

$$q = \frac{1}{2} + \varphi i \pm \frac{1}{2}j + \varphi k \tag{4.56}$$

şeklindedir. İdempotent split kuaterniyonların karakterine bakıldığında

$$I_q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 0 \tag{4.57}$$

olduğundan idempotent split kuaterniyonların null olduğu görülür.

Örnek 4.2.1. $q = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{4}k \in \widehat{H}$ olmak üzere;

$$(q^\tau)^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = q^\tau \tag{4.58}$$

olduğundan $q^2 = q$ eşitliğini sağlanır. O halde q bir idempotent split kuaterniyondur.

Sonuç 4.2.2. $q^2 = q$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlar

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sinh(\beta)i + \frac{1}{2}cos(\alpha)cosh(\beta)j + \frac{1}{2}sin(\alpha)cosh(\beta)k \tag{4.59}$$

veya

$$q = \frac{1}{2} + \varphi i \pm \frac{1}{2}j + \varphi k \tag{4.60}$$

şeklinde yazılabilir. İdempotent split kuaterniyonların vektörel kısımları sırasıyla

$$V(q) = \frac{1}{2}sinh(\beta)i + \frac{1}{2}cos(\alpha)cosh(\beta)j + \frac{1}{2}sin(\alpha)cosh(\beta)k \tag{4.61}$$

ve

$$V(q) = \varphi i \pm \frac{1}{2}j + \varphi k \tag{4.62}$$

şeklindedir. İdempotent split kuaterniyonların vektörel kısımlarının her iki durumda;

$$\langle V(q), V(q)\rangle_L = \frac{1}{4} \tag{4.63}$$

eşitliğini sağladığı görülür. Bu sonuca bakarak idempotent split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilleri null ve hiperboliktir.

4.3. Split Kuaterniyonların Nilpotent Elemanlarının Elde Edilmesi

Tanım 4.3.1. R birimli bir halka olsun. Bir $x \in R$ için $x^n = 0$ olacak şekilde en az bir tane $n \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, x elemanına nilpotent eleman denir (Çevik; 2014).

Teorem 4.3.1. $q \in \widehat{H}$ ve $q \neq 0$ olmak üzere $q^2 = 0$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlar

$$q = ai + acos(\beta)j + asin(\beta)k \tag{4.64}$$

şeklinde yazılabilir. Burada β ve a keyfi reel parametrelerdir.

İspat. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{H}$ alalım. $q^2 = 0$ olsun. O halde $(q^\tau)^2 = 0$ ‘dır. Buradan

$$\begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

olduğu görülür. Bu matris eşitliğinden

$$q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 2q_0q_2 = 0 \quad (4.66)$$

$$q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 2q_0q_2 = 0 \quad (4.67)$$

$$2q_0(q_1 + q_3) = 0 \quad (4.68)$$

$$-2q_0(q_1 - q_3) = 0 \quad (4.69)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.66) ve (4.67) eşitliklerinden

$$q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0 \quad (4.70)$$

ve

$$2q_0q_2 = 0 \quad (4.71)$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.68) ve (4.69) eşitliklerinden

$$2q_0q_3 = 0 \quad (4.72)$$

ve

$$2q_0q_1 = 0 \quad (4.73)$$

olarak bulunur. $q_0 = 0$ olarak alınırsa (4.70) eşitliğinden

$$q_1^2 = q_2^2 + q_3^2 \quad (4.74)$$

elde edilir. O halde $q_1 = a$, $q_2 = acos(\beta)$ ve $q_3 = asin(\beta)$ olarak bulunur. $q_0 \neq 0$ ise (4.71), (4.72) ve (4.73) eşitliklerinden

$$q_1 = 0, \quad (4.75)$$

$$q_2 = 0 \tag{4.76}$$

ve

$$q_3 = 0 \tag{4.77}$$

elde edilir. Bulunan q_1, q_2 ve q_3 değerleri (4.70) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$q_0 = 0 \tag{4.78}$$

elde edilir. Bu durum $q \neq 0$ kabulü ile çelişir. O halde bulunan diğer değerler q split kuaterniyonunda yerine yazılırsa

$$q = ai + acos(\beta)j + asin(\beta)k \tag{4.79}$$

elde edilir. Burada β ve a keyfi reel parametrelerdir. Ayrıca q split kuaterniyonunun karakterine bakılırsa

$$I_q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 0 \tag{4.80}$$

olduğu görülür. O halde q split kuaterniyonunun karakteri null'dur.

Sonuç 4.3.1. Split kuaterniyonlar kümesindeki nilpotent elemanlar null pure split kuaterniyonlardır.

Örnek 4.3.1. $q = 2i + \sqrt{3}j + k \in \widehat{H}$ için $a = 2$ ve $\beta = 30^{\circ}$ olduğu görülür. $q^2 = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$(q^{\tau})^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

olduğunu da görülür.

Sonuç 4.3.2. $q^2 = 0$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı split kuaterniyonların

$$q = ai + acos(\beta)j + asin(\beta)k \tag{4.82}$$

şeklinde olduğundan,

$$\langle V(q), V(q)\rangle_L = 0 \tag{4.83}$$

olduğu görülür. Bu durumda nilpotent split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsili null ve paraboliktir.

4.4. Split Kuaterniyonların Sağ Sıfır Bölen Elemanları

Tanım 4.4.1. R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olmak üzere $ba = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ var ise a elemanına sağ sıfır bölen denir (Taşçı; 2018).

Teorem 4.4.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ sıfırdan farklı bir split kuaterniyon olmak üzere $qp = 0$ eşitliğini sağlayan $p \in \widehat{H}$ sıfırdan farklı split kuaterniyonları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

1. $q_1 \neq q_3$ ve $q_1, q_3 \neq 0$ ise

$$p = t - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}h + \left(-h - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}t\right)i + (t + \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}h)j + (h - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}t)k \tag{4.85}$$

2. $q_1 = q_3 \neq 0$ olmak üzere

a) $q_0 = q_2$ ise

$$p = h + ti - hj + tk \tag{4.86}$$

b) $q_0 = -q_2$ ise

$$p = t - \frac{q_0}{q_1}h + (h + \frac{q_0}{q_1}t)i + (t - \frac{q_0}{q_1}h)j + (h - \frac{q_0}{q_1}t)k \quad (4.87)$$

3. $q_1 = q_3 = 0$ olmak üzere

a) $q_0 = q_2$ ise

$$p = h + ti - hj + tk \quad (4.88)$$

b) $q_0 = -q_2$ ise

$$p = t - hi + tj + hk \quad (4.89)$$

şeklindedir. Burada h ve t birer reel keyfi parametredir.

İspat. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ sıfırdan farklı split kuaterniyon olsun öyle ki $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \neq 0$ olmak üzere $qp = 0$ olsun. Aşağıdaki alt durumlar söz konusudur.

1. $q_1 \neq q_3$ olsun. $qp = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2 , \quad (4.90)$$

$$y = -p_1 + p_3 , \quad (4.91)$$

$$z = p_1 + p_3 , \quad (4.92)$$

$$w = p_0 - p_2 \quad (4.93)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$(q_0 + q_2)x + (-q_1 + q_3)z = 0 \tag{4.95}$$

$$(q_0 + q_2)y + (-q_1 + q_3)w = 0 \tag{4.96}$$

$$(q_1 + q_3)x + (q_0 - q_2)z = 0 \tag{4.97}$$

$$(q_1 + q_3)y + (q_0 - q_2)w = 0 \tag{4.98}$$

homojen lineer denklem sistemleri elde edilir. Bu sistem matris formunda

$$\begin{bmatrix} q_0 + q_2 & 0 & -q_1 + q_3 & 0 \\ 0 & q_0 + q_2 & 0 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & 0 & q_0 - q_2 & 0 \\ 0 & q_1 + q_3 & 0 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.99}$$

şeklinde ifade edilir. $qp = 0$ eşitliğini sağlayan p'yi bulmak için $p \neq 0$ olmalıdır. O halde q^{-1} yoktur. q^{-1} olmadığından q null'dur.

$$I_q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 0 \tag{4.100}$$

olmalıdır. Buradan $q_0^2 = -q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ olduğu görülür. Katsayılar matrisinin çakışık özdeğerleri

$$\lambda_1 = q_0 + \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 2q_0 \neq 0 \tag{4.101}$$

ve

$$\lambda_2 = q_0 - \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 0 \tag{4.102}$$

olarak bulunur. Katsayılar matrisinin özdeğerlerinden ikisi sıfırdır. Ayrıca özvektörleri ise lineer bağımsızdır. Yani bu matris rankı 2 olan bir köşegen matrise benzerdir. Buna göre denklem sisteminin iki parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır. $x = 2t$ ve $y = 2h$ parametreler olmak üzere (4.95) ve (4.96) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$z = -\frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}2t \tag{4.103}$$

ve

$$w = -\frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}2h \tag{4.104}$$

olduğu görülür. Teorem 4.1.1. kullanılarak

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = t - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}h\ , \tag{4.105}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = -h - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}t\ , \tag{4.106}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = t + \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}h\ , \tag{4.107}$$

ve

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = h - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}t \tag{4.108}$$

olarak bulunur ki

$$p = t - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}h + \left(-h - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}t\right)i + \left(t + \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}h\right)j + \left(h - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)}t\right)k \tag{4.109}$$

dır.

2. $q_1 = q_3 \neq 0$ olmak üzere.

a) $q_0 = q_2$ ise $qp = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2 \,, \tag{4.110}$$

$$y = -p_1 + p_3 \,, \tag{4.111}$$

$$z = p_1 + p_3 \,, \tag{4.112}$$

$$w = p_0 - p_2 \tag{4.113}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 2q_0 & 0 \\ 2q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.114}$$

şeklindedir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$2q_0 x = 0 \tag{4.115}$$

$$2q_0 y = 0 \tag{4.116}$$

$$2q_1 x = 0 \tag{4.117}$$

$$2q_1 y = 0 \tag{4.118}$$

eşitlikleri elde edilir. $q_1 = q_3 \neq 0$ olduğundan dolayı

$$x = y = 0 \tag{4.119}$$

olur. $z = 2t$ ve $w = 2h$ keyfi reel parametreler olmak üzere, Teorem 4.1.1. sayesinde p split kuaterniyonunun elemanları

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = h \ , \tag{4.120}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = t \ , \tag{4.121}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = -h \ , \tag{4.122}$$

ve

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = t \tag{4.123}$$

olarak bulunur. O halde

$$p = h + ti - hj + tk \tag{4.124}$$

şeklinde yazılabilir.

b) $q_0 = -q_2$ ise $qp = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2 \ , \tag{4.125}$$

$$y = -p_1 + p_3 \ , \tag{4.126}$$

$$z = p_1 + p_3 \ , \tag{4.127}$$

$$w = p_0 - p_2 \tag{4.128}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2q_1 & 2q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.129}$$

şeklindedir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$2q_1x + 2q_0z = 0 \tag{4.130}$$

$$2q_1y + 2q_0w = 0 \tag{4.131}$$

eşitlikleri elde edilir. $z = 2h$ ve $w = 2t$ keyfi reel parametreleri olmak üzere,

$$x = -2\frac{q_0}{q_1}h \tag{4.132}$$

ve

$$y = -2\frac{q_0}{q_1}t \tag{4.133}$$

bulunur. Teorem 4.1.1.'i kullanarak

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = t - \frac{q_0}{q_1}h\ , \tag{4.134}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = h + \frac{q_0}{q_1}t\ , \tag{4.135}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = t + \frac{q_0}{q_1}h, \tag{4.136}$$

ve

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = h - \frac{q_0}{q_1}t \tag{4.137}$$

elde edilir. Bu durumda

$$p = t - \frac{q_0}{q_1}h + (h + \frac{q_0}{q_1}t)i + (t - \frac{q_0}{q_1}h)j + (h - \frac{q_0}{q_1}t)k \tag{4.138}$$

şeklinde ifade edilir.

3. $q_1 = q_3 = 0$ olsun.

a) $q_0 = q_2$ ise $qp = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2 \ , \tag{4.139}$$

$$y = -p_1 + p_3 \ , \tag{4.140}$$

$$z = p_1 + p_3 \ , \tag{4.141}$$

$$w = p_0 - p_2 \tag{4.142}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 2q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.143}$$

şeklindedir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$2q_0 x = 0 \tag{4.144}$$

$$2q_0 y = 0 \tag{4.145}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$x = y = 0 \tag{4.146}$$

olur. $z = 2t$ ve $w = 2h$ keyfi reel parametreler olmak üzere, Teorem 4.1.1.'i kullanarak

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = h \ , \tag{4.147}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = t \ , \tag{4.148}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = -h\,, \tag{4.149}$$

ve

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = t \tag{4.150}$$

olarak bulunur. O halde

$$p = h + ti - hj + tk \tag{4.151}$$

şeklinde ifade edilir.

b) $q_0 = -q_2$ ise $qp = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2\,, \tag{4.152}$$

$$y = -p_1 + p_3\,, \tag{4.153}$$

$$z = p_1 + p_3\,, \tag{4.154}$$

$$w = p_0 - p_2 \tag{4.155}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.156}$$

şeklindedir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$2q_0 z = 0 \tag{4.157}$$

$$2q_0 w = 0 \tag{4.158}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$z = w = 0 \tag{4.159}$$

olduğu görülür. $x = 2t$ ve $y = 2h$ keyfi reel parametreler olmak üzere, Teorem 4.1.1. yardımıyla

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = t\,, \tag{4.160}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = -h\,, \tag{4.161}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = t\,, \tag{4.162}$$

ve

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = h \tag{4.163}$$

olarak bulunur. Sonuçta

$$p = t - hi + tj + hk \tag{4.164}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.4.1. $q = 10i + 6j + 8k \in \widehat{H}$ için Teorem 4.4.1'e göre $qp = 0$ eşitliğini sağlayan kuaterniyonlardan biri $p = 9 + 7i - 3j + 11k$'dır. Gerçekten

$$qp = (10i + 6j + 8k)(9 + 7i - 3j + 11k) \tag{4.165}$$

$$\begin{aligned} qp = {} & (-70 - 18 + 88) + (90 - 66 - 24)i + (-110 + 54 + 56)j \\ & +(-30 - 42 + 72)k \end{aligned} \tag{4.166}$$

$$qp = 0 \tag{4.167}$$

olduğu görülür.

Örnek 4.4.2 $q = 2 + 4i + 2j + 4k \in \widehat{H}$ için Teorem 4.4.1'e göre $qp = 0$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlardan biri $p = 5 + 2i - 5j + 2k$'dır. Bu durumda

$$(qp)^\tau = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.168}$$

olduğu da görülür.

Örnek 4.4.3. $q = 7 + 5i - 7j + 5k \in \widehat{H}$ için Teorem 4.4.1'e göre $qp = 0$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlardan biri $p = \frac{1}{5} + \frac{31}{5}i - \frac{29}{5}j - \frac{11}{5}k$'dır.

$$(qp)^\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{28}{5} & -\frac{42}{5} \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.169}$$

olduğundan $qp = 0$ eşitliği görülür.

Örnek 4.4.4. $q = 5 + 5j \in \widehat{H}$ için Teorem 4.4.1'e göre $qp = 0$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlardan biri $p = 2 + 3i - 2j + 3k$'dır. Gerçekten

$$qp = (5 + 5j)(2 + 3i - 2j + 3k) \tag{4.170}$$

$$qp = (10 - 10) + (15 - 15)i + (-10 + 10)j + (15 - 15)k \tag{4.171}$$

$$qp = 0 \tag{4.172}$$

elde edilir.

Örnek 4.4.5. $q = 7 - 7j$ split kuaterniyonu Teorem 4.4.1.'e göre $qp = 0$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlardan biri $p = 2 - 3i + 2j + 3k$'dır. Bununla birlikte

$$(qp)^{\tau}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 6\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \tag{4.173}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak $qp=0$'dır.

4.5. Split Kuaterniyonların Sol Sıfır Bölen Elemenları

Tanım 4.5.1. R bir halka ve $0\neq a\in R$ olmak üzere $ab=0$ olacak şekilde $0\neq b\in R$ var ise a elemanına sol sıfır bölen denir (Taşçı; 2018).

Teorem 4.5.1. $q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ sıfırdan farklı bir split kuaterniyon olmak üzere $pq=0$ eşitliğini sağlayan $p\in\widehat{H}$ sıfırdan farklı split kuaterniyonları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

1. $q_1\neq -q_3$ ve $q_1,q_3\neq 0$ ise

$$p=t-\frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)}h+\left(h+\frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)}t\right)i+\left(t+\frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)}h\right)j+\left(h-\frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)}t\right)k \tag{4.174}$$

2. $q_1=-q_3\neq 0$ olmak üzere

a) $q_0=q_2$ ise

$$p=h-ti-hj+tk \tag{4.175}$$

b) $q_0=-q_2$ ise

$$p=h+\frac{q_0}{q_1}t\ +\left(-t+\frac{q_0}{q_1}h\right)i+\left(-h+\frac{q_0}{q_1}t\right)j+\left(t+\frac{q_0}{q_1}h\right)k \tag{4.176}$$

3. $q_1=-q_3=0$ olmak üzere

a) $q_0=q_2$ ise

$$p = h - ti - hj + tk \tag{4.177}$$

b) $q_0 = -q_2$ ise

$$p = t + hi + tj + hk \tag{4.178}$$

şeklindedir. Burada h ve t birer reel keyfi parametredir.

İspat. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ sıfırdan farklı split kuaterniyon olsun öyle ki $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \neq 0$ olmak üzere $pq = 0$ olsun. Aşağıdaki alt durumlar söz konusudur.

1. $q_1 \neq -q_3$ olsun. $pq = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2 \, , \tag{4.179}$$

$$y = -p_1 + p_3 \, , \tag{4.180}$$

$$z = p_1 + p_3 \, , \tag{4.181}$$

$$w = p_0 - p_2 \tag{4.182}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.183}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$(q_0 + q_2)x + (q_1 + q_3)y = 0 \tag{4.184}$$

$$(-q_1 + q_3)x + (q_0 - q_2)y = 0 \tag{4.185}$$

$$(q_0 + q_2)z + (q_1 + q_3)w = 0 \tag{4.186}$$

$$(-q_1 + q_3)z + (q_0 - q_2)w = 0 \tag{4.187}$$

homojen lineer denklem sistemleri elde edilir. Bu sistem matris formunda aşağıdaki şekilde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} q_0 + q_2 & q_1 + q_3 & 0 & 0 \\ -q_1 + q_3 & q_0 - q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_0 + q_2 & q_1 + q_3 \\ 0 & 0 & -q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.188}$$

Katsayılar matrisinin çakışık özdeğerleri

$$\lambda_1 = q_0 + \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{4.189}$$

ve

$$\lambda_2 = q_0 - \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{4.190}$$

olduğu için iki parametreye sonsuz çözüm vardır. $x = 2t$ ve $z = 2h$ keyfi reel parametreler olmak üzere (4.184) ve (4.185) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$y = -\frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)}2t \tag{4.191}$$

ve

$$w = -\frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)}2h \tag{4.192}$$

olarak bulunur. Teorem 4.1.1. yardımıyla

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = t - \frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)}h\,, \tag{4.193}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = h + \frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)}t\,, \tag{4.194}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = t + \frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)} h \ , \tag{4.195}$$

ve

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = h - \frac{(q_0+q_2)}{(-q_1+q_3)} t \tag{4.196}$$

olarak bulunur ki

$$p = t - \frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)} h + (h + \frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)} t) i + (t + \frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)} h) j + (h - \frac{(q_0+q_2)}{(q_1+q_3)} t) k \tag{4.197}$$

şeklinde ifade edilir.

2. $q_1 = q_3 \neq 0$ olsun.

a) $q_0 = q_2$ ise $pq = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2 \ , \tag{4.198}$$

$$y = -p_1 + p_3 \ , \tag{4.199}$$

$$z = p_1 + p_3 \ , \tag{4.200}$$

$$w = p_0 - p_2 \tag{4.201}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2q_0 & -2q_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.202}$$

şeklindedir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$2q_0 x = 0 \tag{4.203}$$

$$-2q_1x = 0 \tag{4.204}$$

$$2q_1z = 0 \tag{4.205}$$

$$-2q_1z = 0 \tag{4.206}$$

eşitlikleri elde edilir. $q_1 = -q_3 \neq 0$ olduğundan dolayı

$$x = z = 0 \tag{4.207}$$

olur. $y = 2t$ ve $w = 2h$ keyfi reel parametreler olmak üzere, Teorem 4.1.1. yardımıyla

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = h\ , \tag{4.208}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = -t\ , \tag{4.209}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = -h\ , \tag{4.210}$$

ve

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = t \tag{4.211}$$

ve

$$p = h - ti - hj + tk \tag{4.212}$$

olarak bulunur.

b) $q_0 = -q_2$ ise $pq = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2 \,, \tag{4.213}$$

$$y = -p_1 + p_3 \,, \tag{4.214}$$

$$z = p_1 + p_3 \,, \tag{4.215}$$

$$w = p_0 - p_2 \tag{4.216}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2q_1 \\ 0 & 2q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.217}$$

şeklindedir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$-2q_1x + 2q_0y = 0 \tag{4.218}$$

$$-2q_1z + 2q_0w = 0 \tag{4.219}$$

eşitlikleri elde edilir. $y = 2t$ ve $w = 2h$ keyfi reel parametreler olmak üzere,

$$x = 2\frac{q_0}{q_1}t \tag{4.220}$$

ve

$$w = 2\frac{q_0}{q_1}h \tag{4.221}$$

olarak bulunur. Teorem 4.1.1. sayesinde

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = h + \frac{q_0}{q_1}t \,, \tag{4.222}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = -t + \frac{q_0}{q_1}h \,, \tag{4.223}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = -h + \frac{q_0}{q_1} t \ , \tag{4.224}$$

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = t + \frac{q_0}{q_1} h \tag{4.225}$$

ve

$$p = h + \frac{q_0}{q_1} t \ + (-t + \frac{q_0}{q_1} h)i + (-h + \frac{q_0}{q_1} t)j + (t + \frac{q_0}{q_1} h)k \tag{4.226}$$

olarak bulunur.

3. $q_1 = q_3 = 0$ olmak üzere

a) $q_0 = q_2$ ise $pq = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2 \ , \tag{4.227}$$

$$y = -p_1 + p_3 \ , \tag{4.228}$$

$$z = p_1 + p_3 \ , \tag{4.229}$$

$$w = p_0 - p_2 \tag{4.230}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.231}$$

şeklindedir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$2q_0 x = 0 \tag{4.232}$$

$$2q_0z = 0 \tag{4.233}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$x = z = 0 \tag{4.234}$$

olduğu görülür. $y = 2t$ ve $w = 2h$ keyfi reel parametreler olmak üzere, Teorem 4.1.1. kullanılarak

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = h\ , \tag{4.235}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = -t\ , \tag{4.236}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = -h\ , \tag{4.237}$$

ve

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = t \tag{4.238}$$

olarak bulunur ki

$$p = h - ti - hj + tk \tag{4.239}$$

olduğu görülür.

b) $q_0 = -q_2$ ise $pq = 0$ eşitliği yardımıyla split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilini kullanarak aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir. Burada

$$x = p_0 + p_2\ , \tag{4.240}$$

$$y = -p_1 + p_3\ , \tag{4.241}$$

$$z = p_1 + p_3 \ , \tag{4.242}$$

$$w = p_0 - p_2 \tag{4.243}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.244}$$

şeklindedir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$2q_0 y = 0 \tag{4.245}$$

$$2q_0 w = 0 \tag{4.246}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$y = w = 0 \tag{4.247}$$

olur. $x = 2t$ ve $z = 2h$ keyfi reel parametreler olmak üzere, Teorem 4.1.1.'i kullanılarak

$$p_0 = \frac{x+w}{2} = t \ , \tag{4.248}$$

$$p_1 = \frac{z-y}{2} = h \ , \tag{4.249}$$

$$p_2 = \frac{x-w}{2} = t \ , \tag{4.250}$$

ve

$$p_3 = \frac{z+y}{2} = h \tag{4.251}$$

olarak bulunur ki

$$p = t + hi + tj + hk \tag{4.252}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.5.1. $q = 10i + 6j + 8k \in \widehat{H}$ için, Teorem 4.5.1.'e göre $pq = 0$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlardan biri $p = \frac{1}{2} + \frac{11}{6}i + \frac{3}{2}j + \frac{7}{6}k$'dır. Ayrıca

$$(pq)^{\tau} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{12}{8} \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 18 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.253}$$

olduğu da görülebilir.

Örnek 4.5.2. $q = 2 + 4i + 2j + 4k \in \widehat{H}$ için, Teorem 4.5.1.'e göre $pq = 0$ eşitliğini sağlayan split kuaterniyonlardan biri $p = 1 - 2i - j + 2k$'dır. Gerçekten

$$pq = (1 - 2i - j + 2k)(2 + 4i + 2j + 4k) \tag{4.254}$$

$$pq = (2 + 8 - 2 - 8) + (4 - 4 - 4 + 4)i + (2 - 8 - 2 + 8)j + (-4 - 4 + 4 + 4)k \tag{4.255}$$

$$pq = 0 \tag{4.256}$$

elde edilir.

Örnek 4.5.3. $q = 5 + 10i - 5j - 10k \in \widehat{H}$ için, Teorem 4.5.1.'e göre $pq = 0$ eşitliğini sağlayan kuaterniyonlardan biri $p = 8 - i - 4j + 7k$'dır. Bununla birlikte

$$(pq)^{\tau} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.257}$$

olduğu da görülür

Örnek 4.5.4. $q = 5 + 5j \in \widehat{H}$ için, Teorem 4.5.1.'e göre $pq = 0$ eşitliğini sağlayan kuaterniyonlardan biri $p = 3 - 2i - 3j + 2k$'dır. Gerçekten

$$pq = (3 - 2i - 3j + 2k)(5 + 5j\ ) \tag{4.258}$$

$$pq = (15 - 15) + (10 - 10)i + (15 - 15)j + (10 - 10)k \tag{4.259}$$

$$pq = 0 \tag{4.260}$$

olduğu görülür.

Örnek 4.5.5. $q = 7 - 7j \in \widehat{H}$ için, Teorem 4.5.1.'e göre $pq = 0$ eşitliğini sağlayan kuaterniyonlardan biri $p = 2 + 3i + 2j + 3k$'dır. O halde

$$(pq)^{\tau} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.261}$$

olarak elde edilir.

4.6. Split Kuaterniyonların Sıfır Bölen Elemanları

Tanım 4.6.1. R bir halka ve $0 \neq \alpha \in R$olmak üzere $ab = ba = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ var ise a elemanına sıfır bölen denir (Taşçı; 2018).

Teorem 4.6.1. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ sıfırdan farklı bir split kuaterniyon olmak üzere $qp = pq = 0$ eşitliğini sağlayan $p \in \widehat{H}$ sıfırdan farklı split kuaterniyonu

$$p = \alpha \bar{q} \tag{4.262}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada α keyfi reel parametredir.

İspat. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ve $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ sıfırdan farklı split kuaterniyonları için $qp = pq = 0$ olsun. Bu durumda $qp = pq$ eşitliğinden q veya p split kuaterniyonlarının vektörel kısımları orantılı olmalıdır ya da q veya p den en az biri reel sayı olmalıdır. q ve p split kuaterniyonları null olması ve kabul gereği sıfırdan farklı olması gerektiğinden her ikisi de reel sayı değildir. q veya p split kuaterniyonlarının vektörel kısımları orantılıdır. O halde $V(p) = \lambda V(q)$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ reel parametresi vardır. Sonuç olarak $p = p_0 + \lambda(q_1 i + q_2 j + q_3 k)$ şeklinde ifade edebiliriz. Teorem 4.1.1. sayesinde

$$(qp)^\tau = (pq)^\tau = 0 \tag{4.263}$$

olduğundan

$$(qp)^\tau = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 + \lambda q_2 & -\lambda q_1 + \lambda q_3 \\ \lambda q_1 + \lambda q_3 & p_0 - \lambda q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.264}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$p_0 q_0 + p_0 q_2 - \lambda q_1^2 + \lambda q_2^2 + \lambda q_3^2 + \lambda q_0 q_2 = 0 \tag{4.265}$$

$$-p_0 q_1 + p_0 q_3 - \lambda q_0 q_1 + \lambda q_0 q_3 = 0 \tag{4.266}$$

$$p_0 q_1 + p_0 q_3 + \lambda q_0 q_1 + \lambda q_0 q_3 = 0 \tag{4.267}$$

$$p_0 q_0 - p_0 q_2 - \lambda q_1^2 + \lambda q_2^2 + \lambda q_3^2 - \lambda q_0 q_2 = 0 \tag{4.268}$$

homojen lineer denklem sistemleri elde edilir. Denklemler düzenlenir ve $detq^\tau = 0$ eşitliği kullanılırsa

$$(q_0 + q_2)(\lambda p_0 + q_0) = 0 \tag{4.269}$$

$$(q_3 - q_1)(\lambda p_0 + q_0) = 0 \tag{4.270}$$

$$(q_3 + q_1)(\lambda p_0 + q_0) = 0 \tag{4.271}$$

$$(q_0 - q_2)(\lambda p_0 + q_0) = 0 \tag{4.272}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.269) eşitliğinin sağlanması için $q_0 = \pm q_2$ olacak şekilde iki farklı durum vardır. İlk durum olarak $q_0 = q_2$'ye kabul edilirse $detq^{\tau} = 0$ eşitliğinden $q_1 = \pm q_3$ olması gerektiği görülür. Eğer $q_1 = q_3$ ise (4.269) ve (4.272) denklemlerinin ortak çözümü ile

$$\lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{4.273}$$

ve

$$p_0 = -\lambda q_0 \tag{4.274}$$

olarak bulunur. Eğer $q_1 = -q_3$ ise, (4.269) ve (4.271) denklemleri ortak çözülür ise

$$\lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{4.275}$$

ve

$$p_0 = -\lambda q_0 \tag{4.276}$$

elde edilir. İkinci durum olarak $q_0 = -q_2$ kabul edilirse $detq^{\tau} = 0$ eşitliğinden, $q_1 = \pm q_3$ olması gerektiği görülür. Eğer $q_1 = q_3$ ise (4.270) ve (4.272) denklemlerinin ortak çözümü ile

$$\lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{4.277}$$

ve

$$p_0 = -\lambda q_0 \tag{4.278}$$

olarak bulunur. Eğer $q_1 = -q_3$ ise, (4.270) ve (4.271) denklemlerinin ortak çözümü ile

$$\lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{4.279}$$

ve

$$p_0 = -\lambda q_0 \tag{4.280}$$

elde edilir. Bu sayede $(qp)^{\tau} = 0$ eşitliğini sağlan p split kuaterniyonunu

$$p = -\lambda q_0 + \lambda(q_1 i + q_2 j + q_3 k) \tag{4.281}$$

$$p = \alpha\bar{q} \tag{4.282}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$(pq)^{\tau} = \begin{bmatrix} p_0 + \lambda q_2 & -\lambda q_1 + \lambda q_3 \\ \lambda q_1 + \lambda q_3 & p_0 - \lambda q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.283}$$

eşitliği ele alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$p_0q_0 + p_0q_2 - \lambda q_1^2 + \lambda q_2^2 + \lambda q_3^2 + \lambda q_0q_2 = 0 \tag{4.284}$$

$$-p_0q_1 + p_0q_3 - \lambda q_0q_1 + \lambda q_0q_3 = 0 \tag{4.285}$$

$$p_0q_1 + p_0q_3 + \lambda q_0q_1 + \lambda q_0q_3 = 0 \tag{4.286}$$

$$p_0q_0 - p_0q_2 - \lambda q_1^2 + \lambda q_2^2 + \lambda q_3^2 - \lambda q_0q_2 = 0 \tag{4.287}$$

homojen lineer denklem sistemleri elde edilir. Denklemler düzenlenir ve $detq^{\tau} = 0$ eşitliği kullanılırsa

$$(q_0 + q_2)(\lambda p_0 + q_0) = 0 \tag{4.288}$$

$$(q_3 - q_1)(\lambda p_0 + q_0) = 0 \tag{4.289}$$

$$(q_3 + q_1)(\lambda p_0 + q_0) = 0 \tag{4.290}$$

$$(q_0 - q_2)(\lambda p_0 + q_0) = 0 \tag{4.291}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.288) eşitliğinin sağlanması için $q_0 = \pm q_2$ kabul edilirse, o iki farklı durum vardır. İlk durum olarak $q_0 = q_2$ ve $detq^{\tau} = 0$ eşitliğinden $q_1 = \pm q_3$ olması gerektiği görülür. Eğer $q_1 = q_3$ ise (4.288) ve (4.291) denklemlerinin ortak çözümü ile

$$\lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{4.292}$$

ve

$$p_0 = -\lambda q_0 \tag{4.293}$$

olarak bulunur. Eğer $q_1 = -q_3$ ise, (4.288) ve (4.290) denklemlerinin ortak çözümü ile

$$\lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{4.294}$$

ve

$$p_0 = -\lambda q_0 \tag{4.295}$$

elde edilir. İkinci durum olarak $q_0 = -q_2$'ye ele alınırsa, $det q^\tau = 0$ eşitliğinden $q_1 = \pm q_3$ olması gerektiği görülür. Eğer $q_1 = q_3$ ise (4.289) ve (4.291) denklemlerinin ortak çözümü ile

$$\lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{4.296}$$

ve

$$p_0 = -\lambda q_0 \tag{4.297}$$

olarak bulunur. Eğer $q_1 = -q_3$ ise, (4.289) ve (4.290) denklemlerinin ortak çözümü ile

$$\lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{4.298}$$

ve

$$p_0 = -\lambda q_0 \tag{4.299}$$

elde edilir. Bu sayede $(pq)^\tau = 0$ eşitliğini sağlan p split kuaterniyonu

$$p = -\lambda q_0 + \lambda(q_1 i + q_2 j + q_3 k) \tag{4.300}$$

$$p = \alpha \bar{q} \tag{4.301}$$

olarak bulunur. Burada $\alpha = -\lambda$ keyfi reel parametredir.

Sonuç 4.6.1. $pq = 0$ veya $qp = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı q split kuaterniyonunun null olması gerektiğinden

$$q = acos(x) + asin(x)i + acos(y)j + asin(y)k \tag{4.302}$$

şeklinde olduğu görülür. q'nun vektörel kısmı

$$V(q) = asin(x)i + acos(y)j + asin(y)k \tag{4.303}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\langle V(q), V(q)\rangle_L = a^2cos^2(x) \tag{4.304}$$

olarak bulunur. Bu sonuç sayesinde sıfır bölen split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsillerinin null parabolik veya null hiperbolik olduğu görülür.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada ilk olarak, bir q split kuaterniyonunun 2×2 reel matris temsilinin determinantının, I_q değerine eşit olduğu gösterilmiştir. Sonrasında, bu değeri ele alarak q split kuaterniyonunun 2×2 reel matris temsilinin karakteri sınıflandırılmıştır. Ek olarak, birim q split kuaterniyonunun karakterini göz önünde bulundurarak 2×2 reel matris temsilinin tersine yer verilmiştir. Bununla birlikte I_q'nun aldığı pozitif, negatif ve sıfır değerleri ve vektörel kısmının karakterini ele alarak (Tablo 4.1.) split kuaterniyonunun 2×2 reel matris temsili tablo yardımı ile sınıflandırılmıştır.

Ardından $q^2 = q$ eşitliğini sağlayan (idempotent) split kuaterniyonlar incelenmiştir. İdempotent split kuaterniyonların $q = 1$ ya da null split kuaterniyonlar olduğu bulunmuştur. Ek olarak, idempotent split kuaterniyonların vektörel kısımlarının karakteri incelenerek idempotent split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsilinin null ve hiperbolik olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

$q^2 = 0$ eşitliğini sağlayan (nilpotent) split kuaterniyonlar ele alınmıştır. Nilpotent split kuaterniyonların null split kuaterniyonlar olması gerektiği belirlenmiştir ve nilpotent split kuaterniyonların vektörel kısımlarının karakterini inceleyerek nilpotent split kuaterniyonların; 2×2 reel matris temsilinin null ve parabolik olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

$qp = 0$ olacak şekilde q split kuaterniyonun özel durumları ele alınarak q split kuaterniyonun sağ sıfır böleni olan p split kuaterniyonu elde edilmiştir. Daha sonra, $pq = 0$ olacak şekilde q split kuaterniyonun özel durumları ele alınarak q split kuaterniyonun sol sıfır böleni olan p split kuaterniyonu elde edilmiştir. Son olarak, herhangi bir q split kuaterniyonun hem sağ sıfır böleni hem de sol sıfır böleni olan p split kuaterniyonu, q split kuaterniyonu cinsinden elde edilmiştir. Ek olarak, sıfır bölen ele alınan q split kuaterniyonun vektörel kısmının karakterine bakarak, sıfır bölen q split kuaterniyonun 2×2 reel matris temsilinin null parabolik ya da null hiperbolik olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

6. KAYNAKLAR

Ablamowicz, R., 1998, Matrix exponential via clifford algebras, *J. Nonlinear Math. Phys.*, (5), 294–313.

Alagöz, Y., Oral, K.H. and Yüce, S., 2012, Split quaternion matrices, *Miskolc Math. Notes*, 13, 223–232.

Antonuccio, F., 2015, Split-quaternions and the dirac equations, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 25, 13–29.

Atasoy, A., Ata, E., Yaylı, Y. and Kemer, Y., 2017, A new polar representation for split and dual split quaternions, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 27, 2307-2319.

Baker, A., 1999, Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach, *Linear Algebra Appl.*, 286, 303–309.

Çevik, A., S., 2014, Cebire Giriş, Ankara/ Türkiye; Nobel Yayınevi, 3, 163-208.

Elmas, N., 2018, Minkowski 3-uzayında split kuaterniyonların geometrisi: dönmeler ve asli eğrilikler, Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Denizli, 29-66.

Erdoğdu, M. and Özdemir, M., 2013, On eigenvalues of split quaternion matrices, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 23, 615–623.

Erdoğdu, M. and Özdemir, M., 2013, On complex split quaternion matrices, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 23, 625–638.

Erdoğdu, M., 2015, Split kuaterniyon matrisleri, Doktora Tezi, *Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Antalya, 15-41.

Erdoğdu, M. and Özdemir, M., 2015, Split quaternion matrix representation of dual split quaternions and their matrices, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 25, 787–798.

Erdoğdu, M. And Özdemir, M., 2017, On exponential of split quaternionic matrices, *Appl. Mathematics and Computation*, 315, 468-476.

Girard, P. R., 2007, Quaternions, clifford algebra and relativistic physics, Birkhauser Verlag AG, Basel, 1-17.

Hacısalihoğlu, H., 1983, Hareketler geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi, Ankara/Türkiye; Gazi yayınları, 2, 22-98.

Herstein, I., N., 1975, Topics in algebra, John WILEY and Sons, United States of America, 2nd edition, 294.

Kula, L. and Yaylı, Y., 2007, Split quaternions and rotations in semi euclidean space, *J. Kor. Math. Soc.*, 44,1313–1327.

Ni, Q., Ding, J., Cheng, X. and Jiao, Y., 2019, 2×2 Matrix representation forms and inner relationships of split quaternions, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 34, 1-12.

Özdemir, M. and Ergin, A.A., 2006, Rotations with unit timelike quaternions in minkowski 3-space, *J. Geometry Phys.*, 56, 322–336.

Özdemir, M., 2009, The roots of a split quaternion, *Appl. Math. Lett.*, 22, 258–263.

Özdemir, M., 2018, Introduction to hybrid numbers, *Adv.Appl.Clifford Algebras*, 28, 1-11.

Samancı, H., K., 2018, Split kuaterniyon ve Lorentziyen küresel hareket, *Karaelmas Fen ve Müh. Derg.*, 8(2), 551-554.

Taşçı, D., 2018, Soyut Cebir, Ankara/Türkiye; Gazi Kitapevi, 3, 296.

Tütüncü, S., 2019, Split kuaterniyonlarda bazı fonksiyonlar üzerine, Yüksek Lisans Tezi, *Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, 23-49.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Aslı AYDIN
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Konya / 07.02.1996
Telefon	**:**	0 554 609 46 90
e-mail	**:**	feronia766@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Açık Öğretim Lisesi, Selçuklu, Konya**	**2014**
Üniversite	:	**Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya**	**2018**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2018-	**Yüzdeyüz Özel Öğretim Kursu**	**Uzman Öğretmen (Matematik)**