T.C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI 3-UZAYINDA TZITZEICA EĞRİLERİ

Özgül ÖZERDEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2018

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Özgül Özerdem tarafından hazırlanan "Minkowski 3-Uzayında Tzitzeica Eğrileri" adlı tez çalışması 21/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Nesip AKTAN	
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARALI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Özgül ÖZERDEM
21.06.2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI 3-UZAYINDA TZITZEICA EĞRİLERİ

Özgül ÖZERDEM

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Ögr. Üyesi Melek ERDOĞDU

2018, 51 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

Bu tezde, Minkowski 3-uzayında null olmayan, null ve pseudo null Tzitzeica eğrileri çalışılmıştır. Gerekli alt yapıyı oluşturmak için Öklid uzayı, Öklid uzayında regüler eğri ve Frenet formülleri ifade edilmiş ve Minkowski 3- uzayı tanıtılmıştır. Konuya dair daha önce yapılmış çalışmalar incelenmiş ve gerekli literatür özeti verilmiştir. Ardından Minkowski 3-uzayında; null olmayan, null ve pseudo null eğriler tanımlanmış ve sırasıyla Frenet formülleri ifade edilmiştir. Ayrıca; her üç durum için Tzitzeica eğrileri ele alınmıştır. Tzitzeica eğrisi olma şartı yeniden ifade edilmiştir. Minkowski 3-uzayındaki bazı özel eğriler için Tzitzeica eğrisi olup olmadığı araştırılmıştır. Son olarak null olmayan eğriler için Tzitzeica eğri denklemi elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-Uzayı, Null Eğri, Null Olmayan Eğri, Pseudo-null Eğri, Tzitzeica Eğrisi.

ABSTRACT

MS

TZITZEICA CURVES IN MINKOWSKI 3-SPACE

Özgül ÖZERDEM

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assist. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2018, 51 Pages

Jury
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Assist. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU
Assist. Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

In this Thesis; non-null, null and pseudo-null Tzitzeica curves are studied in Minkowski 3-space. To devetop the necessary underground; Euclidean space; the reguler curves in Euclidean space and their Frenet formulas stated and Minkowski 3-space is introduced. The previous works are investigated and the necessary abstract of literature is given. Then; non-null and pseudo-null curves are introduced and their Frenet formulas are stated, respectively. Moreover; Tzitzeica curves are examined for each three cases. The condition of being Tzitzeica curve is reformulazed. It is analyzed that some special curves in Minkowski 3-space Tzitzeica curve or not. Finally, Tzitzeica curve equation is obtained for non-null curves.

Keywords: Minkowski 3-Space, Null Curve, Non-null Curve, Pseudo-null Curve, Tzitzeica Curve

ÖNSÖZ

Çalışmalarım süresince değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük ilgiyle faydalı olmak için elinden gelenin fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güleryüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, mesleki hayatımda da örnek alacağım değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU' ya sonsuz teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayatımın her döneminde olduğu gibi bu çalışmam süresince de yanımda olup desteğini esirgemeyen değerli aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Özgül ÖZERDEM
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0$	:	Sıfırdan farklı reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
α	:	Regüler eğri
T	:	α eğrisinin teğet vektör alanı
N	:	α eğrisinin asli normal vektör alanı
B	:	α eğrisinin binormal vektör alanı
κ	:	α eğrisinin eğrilik fonksiyonu
τ	:	α eğrisinin burulma fonksiyonu
f_i	:	Reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyon
E_1^3	:	3-boyutlu Minkowski uzayı
$\langle \quad \rangle_L$	:	Lorentz çarpımı
$\Vert \quad \Vert$	:	Vektörün normu
$d(s)$	:	Bir eğrinin oskülatör düzleminin orijine olan uzaklık fonksiyonu

1. GİRİŞ

1.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı

Bu kısımda n-boyutlu Öklid uzayına dair temel bilgilere değinilecektir. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere; $\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n)\}$, eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n) \tag{1.1}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n) \tag{1.2}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur (O'Neill, 1983).

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$< p, q >= \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \tag{1.3}$$

eşitliğiyle tanımlanan $< , >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(p, q) \to < p, q > \tag{1.4}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ uzayının **doğal iç çarpımı** veya **Öklid iç çarpımı** denir. $p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|p\| = \sqrt{< p, p >} \tag{1.5}$$

diyelim. $\| \quad \|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere

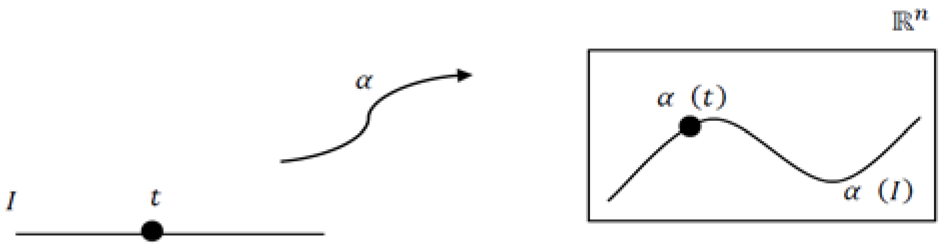
$$p \to \|p\| \tag{1.6}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. O halde $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı normlu vektör uzayıdır.

$$d(p,q) = \|p-q\| \tag{1.7}$$

biçiminde tanımlanan $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına **Öklid uzayı** denir. Bu uzay kimi zaman E^n ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.1 I, $\mathbb{R}$' nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir **eğri** denir (O'Neill, 2006).



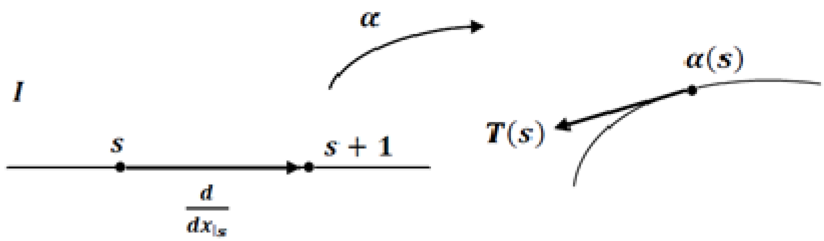
Şekil 1.1 $\mathbb{R}^n$'de bir eğri

Tanım 1.1.2 $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ ise α eğrisine **düzenli eğri (regüler eğri)** denir. Eğer $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine **birim hızlı eğri** adı verilir (O'Neill, 2006).

Tanım 1.1.3 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s) \tag{1.8}$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir (O'Neill, 2006).



Şekil 1.2 $\mathbb{R}^3$'de bir eğrinin birim teğet vektörü

T; I aralığının her bir s noktasına, $\alpha(s)$ noktasındaki $T(s)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre T; α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, α eğrisinin **birim teğet vektör alanı** denir. Kısaca $T = \alpha'$ olarak yazılır (O'Neill, 2006)

$T(\mathrm{s})$ vektörü; $\alpha(s)$ noktasında $T_{\alpha(s)}(\mathbb{R}^3)$ vektör uzayının bir alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzay, 1 boyutlu bir alt vektör uzaydır. Geometrik olarak, $\alpha(s)$ noktasından geçen ve $T(s)$ vektörüne paralel olan bir doğrudur. Bu doğruya, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet uzayı denir ve $T_{\alpha(s)}\big(\alpha(I)\big)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.5 $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\kappa: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| \tag{1.9}$$

fonksiyonuna, α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** adı verilir (O'Neill, 2006).

Tanım 1.1.6 $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

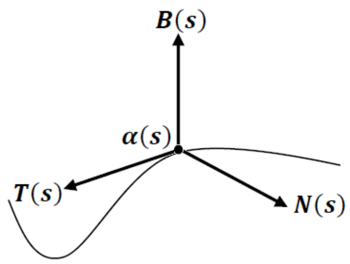
$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) \tag{1.10}$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **asli normali** denir. N vektör alanına, α eğrisinin **asli normal vektör alanı** adı verilir (O'Neill, 2006).

Tanım 1.1.7 $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s) \tag{1.11}$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **binormali** denir. B vektör alanına, α eğrisinin **binormal vektör alanı** adı verilir (O'Neill, 2006).



Şekil 1.3 $\mathbb{R}^3$'de bir eğrinin Frenet vektör alanları

Vektörel çarpımın özelliklerinden dolayı; $B(s)$ vektörü, $T(s)$ ve $N(s)$ vektörlerinin her ikisine diktir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi pozitif yönlü bir çatıdır.

Ayrıca her $s \in I$ için

$$\|B(s)\| = \|T(s)\| \, \|N(s)\| \, \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 1 \tag{1.12}$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi $T_{\alpha(s)}(\mathbb{R}^3)$ uzayının ortonormal bir bazıdır.

Tanım 1.1.8 $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** adı verilir. T, N, B vektör alanlarına α eğrisi üstünde **Frenet vektör alanları** denir (O'Neill, 2006).

Tanım 1.1.9 Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere ve $\tau: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle \tag{1.13}$$

fonksiyonuna α eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. $\tau(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** denir (O'Neill, 2006).

Teorem 1.1.1. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

eşitliği sağlanır (Sabuncuoğlu 2010).

İspat: $\mathrm{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$ eşitliğinden $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ elde edilir.

$N'(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$ olduğunu varsayalım. Bu eşitliğin her iki yanının $T(s)$ ile iç çarpımı yapılarak $< N'(s), T(s) >= a$ bulunur. Öte yandan

$$\langle N(s), T(s)\rangle = 0 \tag{1.15}$$
$$\langle N'(s), T(s)\rangle + \langle N(s), T'(s)\rangle = 0 \tag{1.16}$$
$$\langle N'(s), T(s)\rangle = -\langle N(s), T'(s)\rangle = -\langle N(s), \kappa(s)N(s)\rangle = -\kappa(s) \tag{1.17}$$

olduğundan $a = -\kappa(s)$ olur.

$N'(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $N(s)$ ile iç çarpımı yapılarak $\langle N'(s), N(s)\rangle = b$ bulunur. Ayrıca

$$\langle N(s), N(s)\rangle = 1 \tag{1.18}$$
$$\langle N'(s), N(s)\rangle + \langle N(s), N'(s)\rangle = 0 \tag{1.19}$$
$$2\langle N'(s), N(s)\rangle = 0 \tag{1.20}$$
$$\langle N'(s), N(s)\rangle = 0 \tag{1.21}$$

olduğundan $b = 0$ olur.

$N'(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $B(s)$ ile iç çarpımı yapılarak $\langle N'(s), B(s)\rangle = c$ bulunur. Bununla birlikte

$$\langle N(s), B(s)\rangle = 0 \tag{1.22}$$
$$\langle N'(s), B(s)\rangle + \langle N(s), B(s)'\rangle = 0 \tag{1.23}$$
$$\langle N'(s), B(s)\rangle = -\langle N(s), B'(s)\rangle = \tau(s) \tag{1.24}$$

olduğundan, $c = \tau(s)$ bulunur. Öyleyse $N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$' dir.

$B'(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$ olduğunu varsayalım. Bu eşitliğin her iki yanının $T(s)$ ile iç çarpımı yapılarak $\langle B'(s), T(s)\rangle = d$ bulunur. Ayrıca

$$\langle B(s), T(s)\rangle = 0 \tag{1.25}$$
$$\langle B'(s), T(s)\rangle + \langle B(s), T'(s)\rangle = 0 \tag{1.26}$$
$$\langle B'(s), T(s)\rangle = -\langle B(s), T'(s)\rangle = -\langle B(s), \kappa(s)N(s)\rangle = 0 \tag{1.27}$$

olduğundan $d = 0$ olur.

Benzer şekilde $B'(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $N(s)$ ile iç çarpımı yapılarak $\langle B'(s), N(s)\rangle = e$ bulunur ve

$$\langle B(s), N(s)\rangle = 0 \tag{1.28}$$
$$\langle B'(s), N(s)\rangle + \langle B(s), N'(s)\rangle = 0 \tag{1.29}$$
$$\langle B'(s), N(s)\rangle = -\langle B(s), N'(s)\rangle = -\langle B(s), \kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)\rangle = -\tau(s) \tag{1.30}$$

olduğundan $e = -\tau(s)$ olur.

Son olarak $B'(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $B(s)$ ile iç çarpımı yapılarak $\langle B'(s), B(s)\rangle = f$ bulunur. Öte yandan

$$\langle B(s), B(s)\rangle = 1 \tag{1.31}$$
$$\langle B'(s), B(s)\rangle + \langle B(s), B'(s)\rangle = 0 \tag{1.32}$$
$$\langle B'(s), B(s)\rangle = 0 \tag{1.33}$$

olduğundan $f = 0$ elde edilir. Öyleyse $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ dir.

Bu teoremde elde edilen eşitliklere, birim hızlı α eğrisi için **Frenet -Serret formülleri** denir. Frenet formüllerindeki katsayılar matrisi olan

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

matrisinin ters simetrik bir matris olduğunu kolayca görebilirsiniz.

Tanım 1.1.10 $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olsun. $\{T(s)\,, N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **oskülatör düzlem** denir. $\{T(s)\,, B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlem** denir. $\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **normal düzlem** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

1.2. Minkowski 3-Uzayı

Tanım 1.2.1 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{1.35}$$

ile tanımlanan çarpıma Lorentz çarpımı ve bu çarpım ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayına 3 boyutlu **Lorentz (Minkowski) uzayı** denir ve E_1^3 ile gösterilir (Yüce, 2017).

Tanımı gereği bu çarpım pozitif tanımlı değildir. Bunun yerine bu çarpım E_1^3'deki vektörleri aşağıdaki gibi sınıflara ayırır. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in E_1^3$ olmak üzere

i) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L > 0$ veya $(\vec{u} = \vec{0})$ ise $\vec{u}$ vektörüne **spacelike vektör**;

ii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L < 0$ ise $\vec{u}$ vektörüne **timelike vektör**;

iii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L = 0$ ise $\vec{u}$ vektörüne **lightlike (null) vektör**;

adı verilir (Yüce, 2017).

Tanım 1.2.2 Her $\vec{u} \in E_1^3$ için $\vec{u}$ vektörünün normu $\|\vec{u}\| = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L|}$ olarak tanımlanır. Eğer $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = 0$ ise $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri **diktir** denir (Yüce, 2017).

Ayrıca her $\vec{u}$, $\vec{v} \in E_1^3$ için

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u^T I^* v \tag{1.36}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$I^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

olup " $-$ " işaretinin konumu $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin E_1^3' ün hangi bazının seçildiğine göre değişiklik gösterir. Burada $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ bazına göre yazılmıştır. $I_{ij}^* = \langle e_i, e_j \rangle_L$ eşitliğinden

$$I_{11}^* = \langle e_1, e_1 \rangle_L = -1,\ I_{22}^* = \langle e_2, e_2 \rangle_L = 1,\ I_{33}^* = \langle e_3, e_3 \rangle_L = 1 \tag{1.38}$$

olduğu görülür.

Tanım 1.2.3 Her $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in E_1^3$ için,

$$\vec{u} \times_L \vec{v} = det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_2 \end{bmatrix} \tag{1.39}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye $\vec{u}$ve $\vec{v}$ vektörlerinin **Lorentz vektörel çarpımı** denir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Karacan ve Bükcü 2009’ daki çalışmalarında E_1^3’ te eliptik silindirik Tzitzeica eğrileri bir harmonik denklemin çözümüne bağlı olarak elde etmiştir. Ayrıca bir eğrinin spacelike, timelike veya null eliptik silindirik Tzitzeica eğrisi olma koşulları verilmiştir (Karacan ve Bükcü, 2009).

İlarslan ve Nesovic 2008’ deki çalışmalarında asli normali N olmak üzere pozisyon vektörü $N^{\perp}$ ortogonal hiperdüzleminde yatan eğriler olarak E^4’ teki rektifiyan eğrileri tanımlamıştır. Bunun yanında E^4’ teki rektifiyan eğrilerin eğrilik fonksiyonları yardımıyla karakterizasyonu yapılmıştır (İlarslan ve Nesovic, 2008).

İlarslan 2005’ teki çalışmasında E_1^3’ te spacelike, timelike ve null asli normale sahip spacelike normal eğrilerin bazı karakterizasyonunu vermiştir (İlarslan, 2005).

Chen 2003’ teki makalesinde 3 boyutlu Öklid uzayında normal eğriler yani pozisyon vektörleri normal düzlemlerinde yatan eğrilerin küresel eğriler olduğu söylemiştir. Bununla birlikte E^3’ te rektifiyan eğrilerin karakterizasyonu incelenmiştir (Chen, 2003).

Grabovic ve Nesovic 2012’ deki çalışmalarında E_1^3’ te bazı özel spacelike rektifiyan eğriler üzerinde çalışmıştır. Bu eğrilerin spacelike, timelike ve null düzlemlere izdüşümleri birer normal eğridir (Grobovic ve Nesovic, 2012).

Crasmareanu 2002’ deki çalışmasında E^3’ te Tzitzeica koşulunu sağlayan eliptik ve hiperbolik silindirik eğriler harmonik denklemin çözümüne bağlı olarak ifade etmiştir (Karacan ve Bükcü, 2009, Crasmareanu, 2002).

Constantinescu ve Crasmareanu 2011’ deki çalışmalarında $\mathbb{R}^n$’ de Tzitzeica hiperyüzeylerinin parametrik, açık ve kapalı denklemlerinin üçü de elde etmiştir. Ayrıca R^3’ te bazı Tzitzeica yüzeyi örnekleri verilmiştir (Constantinescu ve Crasmareanu, 2011).

Chen ve Dillen 2005’ teki çalışmalarında E^3’ te rektifiyan eğrilerin bazı geometrik özellikleri vermiştir (Chen ve Dillen, 2005).

Bobe ve arkadaşları 2012’ deki çalışmalarında E_1^3’ te ve Öklid 3 uzayında Tzitzeica eğri ve yüzeyleri merkez afin değişmezleri bakımından incelemiştir (Bobe ve Ark., 2012).

Bilici ve Çalışkan 2009’ daki çalışmalarında E_1^3’ te timelike binormale sahip spacelike eğrilerin involute eğrileri incelemiştir. Bu involutlerin spacelike ya da timelike binormale sahip birer spacelike eğri olduğu gösterilmiştir. İnvolute-evolute eğri çiftinin Frenet çatıları aralarındaki ilişki ve bu eğri çiftlerinin bazı yeni karakterizasyonu elde edilmiştir (Bilici ve Çalışkan, 2009).

Bila 2012’ deki çalışmasında E^3’ te Tzitzeica eğri denklemini bir lineer olmayan diferansiyel denklem olarak ele alıp Tzitzeica eğrilerini yeniden analiz etmiştir (Bila, 2012).

Balgetir ve arkadaşları 2004’ teki çalışmalarında E_1^3’ te null Bertrand eğrileri ve karakterizasyonları Cartan çatısı ile incelemiştir (Balgetir ve Ark., 2004).

Agnew ve arkadaşları 2010’ daki çalışmalarında Tzitzeica eğrileri ve yüzeylerinin afin değişmez geometrik nesnelerin örneklerini temsil ettiğini ifade etmiştir (Agnew ve Ark., 2010).

Bobe ve arkadaşları 2012’ deki çalışmalarında Minkowski uzaylarında Tzitzeica eğrilerini ve yüzeylerini 3 merkez afin değişmez fonksiyonu ile yeniden tanımlamıştır (Bobe ve Ark., 2012).

Monterde 2007’ deki çalışmasında $\mathbb{R}^n$’ de iki ardışık eğriler arasındaki eğrilikler oranının sabit olduğunu ifade etmiştir (Chen, 2007).

Petrovic-Torgasev ve Sucurorovic 2002’deki çalışmalarında Minkowski uzayında W-eğrilerini sınıflandırmışlardır (Petrovic-Torgasev ve Sucurorovic, 2002).

Bu çalışmada, null olmayan, null ve pseudo- null Tzitzeica eğrileri çalışılmıştır. Gerekli alt yapıyı oluşturmak için; Öklid uzayı, Öklid uzayında regüler eğri ve Frenet formülleri, Minkowski 3-uzayı ve bu uzayda null olmayan, null ve pseudo-null eğriler için Frenet formüllerine dair temel bilgiler verilmiştir. Ayrıca bir eğrinin Tzitzeica olma koşulu ile yeniden ifade edilmiştir. Özel olarak, Tzitzeica koşulunu sağlayan null olmayan rektifiyan eğriler ve genel helislere dair elde edilen bazı sonuçlar ve ispatları sunulmuştur. Ardından, null ve pseudo null Tzitzeica eğrileri ele alınmıştır ve null olmayan Tzitzeica eğri denklemleri elde edilmiştir. Son olarak incelenen bazı örneklere yer verilmiştir.

3. MİNKOWSKİ UZAYINDA EĞRİLER

3.1. Birim Hızlı Null Olmayan Eğriler

Tanım 3.1.1 $\alpha: I \to E_1^3$, $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ vektörü timelike vektör ise α eğrisine timelike eğri denir. $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1$ ise α' ya birim hızlı timelike eğri denir (Walrave, 1995).

$\alpha: I \to E_1^3$ birim hızlı bir timelike eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s) \tag{3.1}$$

vektörü α eğrisinin birim teğet vektörüdür ve timelike vektördür. Yani

$$\langle T(s), T(s) \rangle_L = -1 \tag{3.2}$$

olur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle T'(s), T(s) \rangle_L = 0 \tag{3.3}$$

elde edilir. O halde $T'(s) \perp T(s)$'dir. Sonuç olarak $T'(s) = \alpha''(s)$ spacelike vektör olmalıdır.

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\sqrt{|\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L|}} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \tag{3.4}$$

vektörü α eğrisinin asli normal vektörü olup

$$B(s) = T(s) \times_L N(s) \tag{3.5}$$

ise α eğrisinin binormal vektörüdür. Burada α eğrisinin eğriliği

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L} \tag{3.6}$$

olarak tanımlanır. Diğer yandan

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} \Rightarrow T'(s) = \kappa(s).N(s) \tag{3.7}$$

olduğu görülür ve

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle_L \tag{3.8}$$

eşitliği sağlanır. α eğrisinin burulma fonksiyonu ise

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle_L \tag{3.9}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.1.1. Birim hızlı timelike $\alpha: I \to E_1^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $T\,, N, B$ ise

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

dir (Walrave, 1995).

İspat: $\mathrm{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\, T'(s)$ eşitliğinden

$$T'(s) = \kappa(s) N(s) \tag{3.11}$$

elde edilir. $N'(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$ olduğunu kabul edelim. Her iki tarafın $T(s)$ ile Lorentz çarpımı yapılarak $\langle N'(s), T(s) \rangle_L = -a$ bulunur.

$$\langle N(s), T(s) \rangle_L = 0 \tag{3.12}$$
$$\langle N'(s), T(s) \rangle_L + \langle N(s), T'(s) \rangle_L = 0 \tag{3.13}$$
$$\langle N'(s), T(s) \rangle_L = -\langle N(s), T'(s) \rangle_L = -\langle N(s), \kappa(s) N(s) \rangle_L = -\kappa(s) \tag{3.14}$$

olduğundan $a = \kappa(s)$ olur.

$N'(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $N(s)$ ile Lorentz çarpımı yapılarak $\langle N'(s), N(s)\rangle_L = b$ bulunur. Ayrıca $\langle N(s), N(s)\rangle_L = 1$ olduğundan her iki tarafın türevi alınarak

$$\langle N'(s), N(s)\rangle_L + \langle N(s), N'(s)\rangle_L = 0 \tag{3.15}$$

$$\langle N'(s), N(s)\rangle_L = 0 \tag{3.16}$$

elde edilir. Yani $b = 0$ olur.

$N'(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $B(s)$ ile Lorentz çarpımı yapılarak $\langle N'(s), B(s)\rangle_L = c$ bulunur.

$$\langle N(s), B(s)\rangle_L = 0 \tag{3.17}$$

$$\langle N'(s), B(s)\rangle_L + \langle N(s), B'(s)\rangle_L = 0 \tag{3.18}$$

$$\langle N'(s), B(s)\rangle_L = -\langle N(s), B'(s)\rangle_L = \tau(s) \tag{3.19}$$

olduğundan, $c = \tau(s)$ bulunur. Öyleyse $N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$ dir. Şimdi $B'(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$ olduğunu varsayalım. Bu eşitliğin her iki yanının $T(s)$ ile iç çarpımı yapılarak $\langle B'(s), T(s)\rangle_L = -d$ bulunur.

$$\langle B(s), T(s)\rangle_L = 0 \tag{3.20}$$

$$\langle B'(s), T(s)\rangle_L + \langle B(s), T'(s)\rangle_L = 0 \tag{3.21}$$

$$\langle B'(s), T(s)\rangle_L = -\langle B(s), T'(s)\rangle_L = -\langle B(s), \kappa(s)N(s)\rangle_L = 0 \tag{3.22}$$

olduğundan $d = 0$ olur.

$B'(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $N(s)$ ile iç çarpımı yapılarak $\langle B'(s), N(s)\rangle_L = e$ bulunur.

$$\langle B(s), N(s)\rangle_L = 0 \tag{3.23}$$

$$\langle B'(s), N(s)\rangle_L + \langle B(s), N'(s)\rangle_L = 0 \tag{3.24}$$

$$\langle B'(s), N(s)\rangle_L = -\langle B(s), N'(s)\rangle_L = -\langle B(s), \kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)\rangle_L = -\tau(s) \tag{3.25}$$

olduğundan $e = -\tau(s)$ olur.

$B'(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $B(s)$ ile iç çarpımı yapılarak $\langle B'(s), B(s)\rangle_L = f$ bulunur.

$$\langle B(s), B(s)\rangle_L = 1 \tag{3.26}$$

$$\langle B'(s), B(s)\rangle_L + \langle B(s), B'(s)\rangle_L = 0 \tag{3.27}$$

$$\langle B'(s), B(s)\rangle_L = 0 \tag{3.28}$$

olduğundan $f = 0$ bulunur. Öyleyse $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ dir.

Bu teoremde elde edilen eşitliklere, birim hızlı timelike α eğrisi için **Frenet - Serret formülleri** denir.

Tanım 3.1.2 $\alpha: I \to E_1^3$, $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ vektörü spacelike bir vektör ise α eğrisine **spacelike eğr**i denir. $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle_L = 1$ ise α' ya **birim hızlı spacelike eğri** denir (Walrave, 1995).

$\alpha: I \to E_1^3$ birim hızlı bir spacelike eğri olsun. $T(s) = \alpha'(s)$ vektörü α eğrisinin birim teğet vektörüdür ve spacelike vektördür. $\langle T(s), T(s)\rangle_L = 1$ olduğundan her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle T'(s), T(s)\rangle_L = 0 \tag{3.29}$$

olur. $T'(s) \perp T(s)$ elde edilir. $T(s)$ spacelike olduğundan $T'(s)$ spacelike ya da timelike olabilir.

1.Durum: $T'(s) = \alpha''(s)$ spacelike ise; bu durumda

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle_L} \tag{3.30}$$

olarak tanımlanır.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} \tag{3.31}$$

eğrinin asli normali olup

$$B(s) = T(s) \times_L N(s) \tag{3.32}$$

ise eğrinin binormal vektörüdür. Bu eğriler için burulma fonksiyonu $\tau(s) = -\langle N'(s), B(s)\rangle_L$ olarak tanımlanır. Frenet formülleri ise;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

olarak bulunur (Walrave, 1995).

2.Durum: $T'(s) = \alpha''(s)$ timelike ise; bu durumda

$$\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s)\rangle_L} = \sqrt{-\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle_L} \tag{3.34}$$

olmak üzere normal vektörü

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} \tag{3.35}$$

şeklindedir.

$$B(s) = T(s) \times_L N(s) \tag{3.36}$$

spacelike bir vektördür. Eğrinin burulması ise $\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L$ olarak tanımlanır. Frenet formülleri ise;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

şeklindedir (Walrave, 1995).

Sonuç olarak birim hızlı timelike ve spacelike eğriler için Frenet formülleri verilmiştir. Özetle birim hızlı null olmayan bir α eğrisi için Frenet formülleri aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \varepsilon_1\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}. \tag{3.38}$$

Burada

$$\varepsilon_1 = \langle T(s), T(s) \rangle_L = \mp 1,\ \varepsilon_2 = \langle N(s), N(s) \rangle_L = \mp 1,\ \langle B(s), B(s) \rangle_L = -\varepsilon_1\varepsilon_2 \tag{3.39}$$

olarak ifade edilir.

3.2. Pseudo Yay Uzunluğu Parametresine Göre Verilmiş Null Eğriler

Tanım 3.2.1 $\alpha: I \to E_1^3$, $\forall s \in I$ için $\langle\, \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0$ ve $\langle\, \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L > 0$ ise α eğrisine **null eğri** adı verilir. Eğer $\langle\, \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = 1$ ise α' ya **pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null eğri** denir (Walrave, 1995).

$\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir null eğri olsun. Bu durumda

$$T(s) = \alpha'(s) \tag{3.40}$$

vektörü α eğrisinin teğet vektörüdür. α eğrisinin asli normal vektör alanı

$$N(s) = \alpha''(s) \tag{3.41}$$

olup spacelike vektördür. B binormal vektör alanı ise α eğrisinin her $\alpha(s)$ noktasında $N(s)$' e dik olan tek null vektör alanıdır öyle ki

$$\langle T(s), B(s) \rangle_L = 1 \tag{3.42}$$

dir. Burada α doğru ise $\kappa(s) = 0$ ve diğer durumlarda $\kappa(s) = 1$' dir. Ayrıca α eğrisinin burulma fonksiyonu $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle_L$' dır (Walrave, 1995).

Teorem 3.2.1. $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir null eğri, T, N, B Frenet vektör alanları olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \tau(s) & 0 & -\kappa(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Burada

$$\langle T(s), T(s)\rangle_L = \langle B(s), B(s)\rangle_L = \langle T(s), N(s)\rangle_L = \langle N(s), B(s)\rangle_L = 0 \tag{3.44}$$

$$\langle N(s), N(s)\rangle_L = \langle T(s), B(s)\rangle_L = 1 \tag{3.45}$$

olarak ifade edilir (Walrave, 1995).

3.3. Pseudo Yay Uzunluğu Parametresine Göre Verilmiş Pseudo-Null Eğriler

Tanım 3.3.1 $\alpha: I \to E_1^3$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle_L > 0$ ve $\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle_L = 0$ ise α eğrisine **pseudo-null eğri** adı verilir. Eğer $\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle_L = 1$ ise α' ya **pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş pseudo-null eğri** denir (Walrave,1995).

$\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir pseudo-null eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s) \tag{3.46}$$

vektörü α eğrisinin teğet vektörüdür. α eğrisinin normal vektör alanı

$$N(s) = \alpha''(s) \tag{3.47}$$

null vektörüdür. B binormal vektör alanı ise α eğrisinin her $\alpha(s)$ noktasında $T(s)$ spacelike vektörüne dik olan tek null vektör alanıdır öyle ki

$$\langle N(s), B(s)\rangle_L = 1 \tag{3.48}$$

dir. Burada α doğru ise $\kappa(s) = 0$ ve diğer durumlarda $\kappa(s) = 1$' dir. Ayrıca α eğrisinin burulma fonksiyonu ise

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle_L \tag{3.49}$$

olarak tanımlıdır (Walrave, 1995).

Teorem 3.3.1. $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir pseudo-null eğri ve T, N, B Frenet vektör alanları olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

dir. Burada

$$\langle N(s), N(s) \rangle_L = \langle B(s), B(s) \rangle_L = \langle T(s), N(s) \rangle_L = \langle T(s), B(s) \rangle_L = 0 \tag{3.51}$$

$$\langle T(s), T(s) \rangle_L = \langle N(s), B(s) \rangle_L = 1 \tag{3.52}$$

olarak ifade edilir (Walrave,1995).

4. MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA TZİTZEİCA EĞRİLERİ

4.1. Null Olmayan Tzitzeica Eğrileri

Tanım 4.1.1 $\alpha: I \to E_1^3$ birim hızlı null olmayan bir eğri olmak üzere, her $s \in I$ için

$$\frac{\tau(s)}{\left(d(s)\right)^2} = sabit \tag{4.1}$$

ise α eğrisine **Tzitzeica eğrisi** adı verilir. Burada $\tau(s)$, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması; $d(s)$ ise α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzleminin orjine olan uzaklığıdır. Ayrıca $\frac{\tau}{d^2} = sabit$ olması koşuluna **Tzitzeica eğrisi olma koşulu** adı verilir (Aydın ve Ergüt, 2014).

4.1.1. Tzitzeica koşulunu sağlayan rektifiyan eğriler

Tanım 4.1.1.1 $\alpha: I \to E_1^3$ birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin pozisyon vektörü α eğrisinin rektifiyan düzleminde bulunuyorsa α eğrisine **rektifiyan eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Her α rektifiyan eğrisi

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s) \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$f_0: I \to \mathbb{R},\ f_2: I \to \mathbb{R} \tag{4.3}$$

birer diferansiyellenebilir fonksiyonlardır (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 4.1.1.1 $\alpha: I \to E_1^3$ spacelike veya timelike rektifiyan düzleme sahip ve birim hızlı null olmayan bir rektifiyan eğri öyle ki

$$\kappa(s) > 0, \tag{4.4}$$

$$\langle T(s), T(s)\rangle_L = \varepsilon_1 = \mp 1 \tag{4.5}$$

olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler sağlanır;

i) Uzaklık fonksiyonu, $\rho = \|\alpha\|$, $c_1 \in \mathbb{R}$ ve $c_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere,

$$\rho^2 = |\varepsilon_1 s^2 + c_1 s + c_2| \tag{4.6}$$

dir.

ii) Pozisyon vektörünün teğet bileşeni, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\langle \alpha(s), T(s)\rangle_L = \varepsilon_1 s + c \tag{4.7}$$

eşitliğini sağlar.

iii) Eğrinin pozisyon vektörünün normal bileşeni α^N sıfırdır.

iv) $\tau \neq 0$ ve α eğrisinin pozisyon vektörünün binormal bileşeni $\langle \alpha(s), B(s)\rangle_L$ sabittir.

Aksine; $\alpha: I \to E_1^3$ spacelike veya timelike rektifiyan düzleme sahip ve birim hızlı null olmayan bir eğri olmak üzere öyle ki, $\kappa(s) > 0$ ve $\langle T(s), T(s)\rangle_L = \varepsilon_1 = \mp 1$ olsun. Buna göre; i, ii, iii, iv ifadelerinden herhangi biri sağlanıyorsa α rektifiyan eğridir (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: α eğrisi rektifiyan eğri olsun. O halde;

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s) \tag{4.8}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca α eğrisi birim hızlı olduğundan $\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle_L = \mp 1$ dir.

i) $\rho = \|\alpha(s)\| = \sqrt{|\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle_L|}$ olduğundan $\rho^2 = |\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle_L|$'dir. Buradan

$$\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle_L = \langle f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s), f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s)\rangle_L \tag{4.9}$$
$$= f_0^2(s)\langle T(s), T(s)\rangle_L + 2f_0(s)f_2(s)\langle T(s), B(s)\rangle_L + f_2^2(s)\langle B(s), B(s)\rangle_L \tag{4.10}$$

olduğu görülür.

$$\langle T(s), T(s)\rangle_L = \varepsilon_1, \langle T(s), B(s)\rangle_L = 0, \langle B(s), B(s)\rangle_L = -\varepsilon_1\varepsilon_2 \tag{4.11}$$

ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle_L = |f_0^2(s)\varepsilon_1 - f_2^2(s)\varepsilon_1\varepsilon_2| \tag{4.12}$$

$\alpha(s)$ eğrisinin türevini alırsak,

$$\alpha'(s) = f_0'(s)T(s) + f_0(s)T'(s) + f_2'(s)B(s) + f_2(s)B'(s) \tag{4.13}$$

eşitliği elde edilir.

Buradan denklem (3.38)' den $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ ve $B'(s) = \varepsilon_1\tau(s)N(s)$ yerlerine yazılırsa,

$$\alpha'(s) = f_0'(s)T(s) + \big(f_0(s)\kappa(s) + \varepsilon_1\tau(s)f_2(s)\big)N(s) + f_2'(s)B(s) \tag{4.14}$$

bulunur. $\alpha'(s) = T(s)$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\alpha'(s) = T(s) = f_0'(s)T(s) + \big(f_0(s)\kappa(s) + \varepsilon_0\tau(s)f_2(s)\big)N(s) + f_2'(s)B(s) \tag{4.15}$$

olur. Buradan ; $f_0'(s) = 1$, $f_0(s)\kappa(s) + \varepsilon_1\tau(s)f_2(s) = 0$, $f_2'(s) = 0$ olduğu görülür. Öyleyse; $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f_0(s) = s + a, f_2(s) = b \tag{4.16}$$

şeklinde yazabiliriz. $f_0(s)$ ve , $f_2(s)$ ifadelerini (4.12) denkleminde yerine yazarsak,

$$\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle_L = |f_0^2(s)\varepsilon_1 - f_2^2(s)\varepsilon_1\varepsilon_2| = |(s+a)^2\varepsilon_1 - b^2\varepsilon_1\varepsilon_2| \tag{4.17}$$

$$= |(s^2 + 2sa + a^2)\varepsilon_1 - b^2\varepsilon_1\varepsilon_2| \tag{4.18}$$

$$= |s^2\varepsilon_1 + 2sa\varepsilon_1 + a^2\varepsilon_1 - b^2\varepsilon_1\varepsilon_2| \tag{4.19}$$

$$= |\varepsilon_1 s^2 + 2a\varepsilon_1 s + a^2\varepsilon_1 - b^2\varepsilon_1\varepsilon_2| \tag{4.20}$$

elde edilir. Burada; $2a\varepsilon_1 = c_1$, $a^2\varepsilon_1 - b^2\varepsilon_1\varepsilon_2 = c_2$ olarak alınırsa,

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_L = \rho^2 = |\varepsilon_1 s^2 + c_1 s + c_2| \tag{4.21}$$

olarak bulunur.

ii) $\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s)$ denkleminde $f_0(s) = s + a$, $f_2(s) = b$ yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = (s + a)T(s) + bB(s) \tag{4.22}$$

olduğu görülür. O halde,

$$\langle \alpha(s), T(s) \rangle_L = \langle (s + a)T(s) + bB(s), T(s) \rangle_L \tag{4.23}$$

$$= (s + a)\langle T(s), T(s) \rangle_L + b\langle B(s), T(s) \rangle_L \tag{4.24}$$

eşitliğinde $\langle T(s), T(s) \rangle_L = \varepsilon_1$, $\langle B(s), T(s) \rangle_L = 0$ ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\langle \alpha(s), T(s) \rangle_L = (s + a)\varepsilon_1 = \varepsilon_1 s + a\varepsilon_1 \tag{4.25}$$

bulunur. $a\varepsilon_1 = c$ denirse,

$$\langle \alpha(s), T(s) \rangle_L = \varepsilon_1 s + c \tag{4.26}$$

elde edilir.

iii) Kabul gereği

$$\langle \alpha(s), N(s) \rangle_L = \langle f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s), N(s) \rangle_L \tag{4.27}$$

$$= f_0(s)\langle T(s), N(s) \rangle_L + f_2(s)\langle B(s), N(s) \rangle_L = 0 \tag{4.28}$$

olduğu görülür.

iv) $\alpha(s) = (s + a)T(s) + bB(s)$ olduğundan

$$\langle \alpha(s), B(s) \rangle_L = \langle (s + a)T(s) + bB(s), B(s) \rangle_L \tag{4.29}$$

$$= (s + a)\langle T(s), B(s) \rangle_L + b\langle B(s), B(s) \rangle_L \tag{4.30}$$

eşitliğinde $\langle T(s), B(s)\rangle_L = 0$, $\langle B(s), B(s)\rangle_L = -\varepsilon_1\varepsilon_2$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\langle \alpha(s), B(s)\rangle_L = -b\varepsilon_1\varepsilon_2 \tag{4.31}$$

bulunur. -$b\varepsilon_1\varepsilon_2 = c$ dersek

$$\langle \alpha(s), B(s)\rangle_L = c \tag{4.32}$$

elde edilir ve ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur. Şimdi teoremin ikinci kısmını ispatlayalım.

i) $\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s)$, $\rho^2 = |\varepsilon_1 s^2 + c_1 s + c_2|$ olsun.

$$\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle_L = f_0^2(s)\langle T(s), T(s)\rangle_L + f_1^2(s)\langle N(s), N(s)\rangle_L + f_2^2(s)\langle B(s), B(s)\rangle_L \tag{4.33}$$

eşitliğinde $\langle T(s), T(s)\rangle_L = \varepsilon_1$, $\langle N(s), N(s)\rangle_L = \varepsilon_2$, $\langle B(s), B(s)\rangle_L = -\varepsilon_1\varepsilon_2$ yazılırsa

$$\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle_L = f_0^2(s)\varepsilon_1 + f_1^2(s)\varepsilon_2 - f_2^2(s)\varepsilon_1\varepsilon_2 \tag{4.34}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\rho^2 = |f_0^2(s)\varepsilon_1 + f_1^2(s)\varepsilon_2 - f_2^2(s)\varepsilon_1\varepsilon_2| = |\varepsilon_1 s^2 + c_1 s + c_2| \tag{4.35}$$

eşitliği elde edilir. Burada her iki tarafın s parametresine göre türevi alınırsa

$$|2\varepsilon_1 s + c_1| = |2f_0(s)f_0'(s)\varepsilon_1 + 2f_1(s)f_1'(s)\varepsilon_2 - 2f_2(s)f_2'(s)\varepsilon_1\varepsilon_2| \tag{4.36}$$

bulunur. Öte yandan

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s) \tag{4.37}$$

eğrisinin türevini alalım.

$$\alpha'(s) = f_0'(s)T(s) + f_0(s)T'(s) + f_1'(s)N(s) + f_1(s)N'(s) + f_2'(s)B(s) + f_2(s)B'(s) \tag{4.38}$$

olarak bulunur. (3.38) denklemini kullanarak

$$\alpha'(s)=f_0'(s)T(s)+f_0(s)\big(\kappa(s)N(s)\big)+f_1'(s)N(s)$$
$$+f_1(s)\big(-\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s)\big)+f_2'(s)B(s)+f_2(s)\big(\varepsilon_1\tau(s)N(s)\big) \quad (4.39)$$
$$=\big(f_0'(s)-\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa(s)f_1(s)\big)T(s)+\big(f_0(s)\kappa(s)+f_1'(s)+f_2(s)\varepsilon_1\tau(s)\big)N(s)$$
$$+\big(f_1(s)\tau(s)+f_2'(s)B(s)\big) \quad (4.40)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ olduğundan ve $f_0'(s)-\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa(s)f_1(s)=1$ eşitliğinden

$$f_0'(s)=1+\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa f_1(s) \quad (4.41)$$

olarak bulunur. $f_0(s)\kappa(s)+f_1'(s)+f_2(s)\varepsilon_1\tau(s)=0$ eşitliğinden,

$$f_1'(s)=-f_0(s)\kappa(s)-f_2(s)\varepsilon_1\tau(s) \quad (4.42)$$

dur. Son olarak,

$$f_2'(s)=-f_1(s)\tau(s) \quad (4.43)$$

bulunur. (4.36) denkleminde (4.41), (4.42) ve (4.43) eşitliklerini yerine yazarsak

$$2\varepsilon_1 s+c_1=2f_0(s)\big(1+\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa(s)f_1(s)\big)\varepsilon_1+2f_1(s)\big(-f_0(s)\kappa(s)-f_2(s)\varepsilon_1\tau(s)\big)\varepsilon_2$$
$$-2f_2(s)(-f_1(s)\tau(s))\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad (4.44)$$
$$2\varepsilon_1 s+c_1=2f_0(s)\varepsilon_1+2\varepsilon_1^2\varepsilon_2\kappa(s)f_0(s)f_1(s)$$
$$-2f_0(s)f_1(s)\varepsilon_2\kappa(s)-2f_1(s)f_2(s)\varepsilon_1\varepsilon_2\tau(s)+2f_1(s)f_2(s)\varepsilon_1\varepsilon_2\tau(s) \quad (4.45)$$
$$2f_0(s)\varepsilon_1=2\varepsilon_1 s+c_1 \quad (4.46)$$

olarak bulunur. $a=\frac{c_1}{2\varepsilon_1}$ alırsa

$$f_0(s)=s+a \quad (4.47)$$

olduğu görülür. (4.4)’ten

$$f_0'(s) = 1 = 1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa(s)f_1(s) \tag{4.48}$$

olduğundan $f_1(s) = 0$ elde edilir. (4.5)'ten $f_1'(s) = 0$ ve

$$0 = -(s+a)\kappa(s) - f_2(s)\varepsilon_1\tau(s) \tag{4.49}$$

olarak bulunur.

$$f_2(s) = \frac{-(s+a)\kappa(s)}{\varepsilon_1\tau(s)} \tag{4.50}$$

elde edilir. $f_1(s) = 0$ olduğundan α eğrisinin rektifiyan olduğu görülür.

ii) $\langle \alpha(s), T(s)\rangle_L = \varepsilon_1 s + c$ ve $\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s)$ olsun.

$$\langle \alpha(s), T(s)\rangle_L = f_0(s)\langle T(s), T(s)\rangle_L + f_1(s)\langle N(s), T(s)\rangle_L + f_2(s)\langle B(s), T(s)\rangle_L \tag{4.51}$$

dir. Ayrıca

$$f_0(s)\varepsilon_1 = \varepsilon_1 s + c \tag{4.52}$$

olarak bulunur. Buradan $f_0(s) = s + a$, $f_0'(s) = 1$ olduğu görülür ve (4.41) denkleminde yerine yazarsak

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa(s)f_1(s) = 0 \tag{4.53}$$

olur ki bu da $f_1(s) = 0$ olduğunu gösterir. O halde α eğrisi rektifiyandır.

iii) $\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L = \varepsilon_1 s + c$ ve $\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s)$ olsun.

$$\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L = \langle f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s), N(s)\rangle_L \tag{4.54}$$

$$= f_0(s)\langle T(s), N(s)\rangle_L + f_1(s)\langle N(s), N(s)\rangle_L + f_2(s)\langle B(s), N(s)\rangle_L \tag{4.55}$$

eşitliğinde $\langle T(s), N(s)\rangle_L = 0$, $\langle N(s), N(s)\rangle_L = \varepsilon_2$, $\langle B(s), N(s)\rangle_L = 0$ ifadeleri son denklemde yerine yazılırsa

$$\langle \alpha(s), N(s) \rangle_L = f_1(s)\varepsilon_2 = 0 \tag{4.56}$$

olur ve dolayısıyla $f_1(s) = 0$ olduğu görülür. Bu da α eğrisinin rektifiyan olduğunu gösterir.

iv) $\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s)$ ve $\langle \alpha(s), B(s) \rangle_L = sabit$ olsun.

$$\langle \alpha(s), B(s) \rangle_L = \langle f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s), B(s) \rangle_L \tag{4.57}$$

$$= f_0(s)\langle T(s), B(s) \rangle_L + f_1(s)\langle N(s), B(s) \rangle_L + f_2(s)\langle B(s), B(s) \rangle_L \tag{4.58}$$

eşitliğinde $\langle T(s), B(s) \rangle_L = 0$, $\langle N(s), B(s) \rangle_L = 0$, $\langle B(s), B(s) \rangle_L = -\varepsilon_1\varepsilon_2$ ifadeleri yukarıdaki denklemde yerlerine yazılırsa

$$\langle \alpha(s), B(s) \rangle_L = -\varepsilon_1\varepsilon_2 f_2(s) \tag{4.59}$$

ifadesi sabittir. O halde $f_2(s)$ de sabittir. Dolayısıyla $f_2'(s) = 0$' dır. (4.43) eşitliğinden $-f_1(s)\tau(s) = 0$ olur. $\tau(s) \neq 0$ olduğundan $f_1(s) = 0$ olur ki bu da α eğrisinin rektifiyan olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.1.2. $\alpha: I \to E_1^3$ spacelike ya da timelike rektifiyan düzleme sahip ve birim hızlı null olmayan bir eğri öyle ki $\kappa(s) > 0$ olsun. Eğer α rektifiyan bir eğri ise $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2 \tag{4.60}$$

dir. Burada $\mathbb{R}_0$ ile sıfırdan farklı reel sayılar kümesi temsil edilmektedir (İlarslan ve Ark.,2003).

İspat: $\alpha: I \to E_1^3$ spacelike ya da timelike rektifiyan düzleme sahip ve birim hızlı null olmayan bir rektifiyan eğri öyle ki $\kappa(s) > 0$ olsun. O halde;

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s) \tag{4.61}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki ifadenin türevi alınır ve (3.38)' de verilen eşitlikler yardımıyla

$$\alpha'(s) = f_0'(s)T(s) + \big(f_0(s)\kappa(s) + \varepsilon_1\tau(s)f_2(s)\big)N(s) + f_2'(s)B(s) \tag{4.62}$$

bulunur. α birim hızlı olduğundan $\alpha'(s) = T(s)$'dir. Buradan

$$f_0'(s) = 1,\ f_0(s) = s + a, \tag{4.63}$$
$$f_2'(s) = 0, f_2(s) = b \tag{4.64}$$

olduğu görülür. Burada $a, b \in \mathbb{R}$ integral sabitidir. Ayrıca

$$f_0(s)\kappa(s) + \varepsilon_1\tau(s)f_2(s) = 0 \tag{4.65}$$

denkleminde bulunan $f_0(s)$ ve $f_2(s)$ ifadeleri yukarıda yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{s}{-\varepsilon_1 f_2(s)} + \frac{a}{-\varepsilon_1 f_2(s)} \tag{4.66}$$

elde edilir. Son olarak $-\varepsilon_1 f_2(s) = \frac{1}{c_1}$ ve $\frac{a}{-\varepsilon_1 f_2(s)} = c_2$ olarak adlandırılırsa;

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2 \tag{4.67}$$

bulunur. Burada $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$' dır.

Önerme 4.1.1. $\alpha: I \to E_1^3$ sabit burulmaya sahip, null olmayan bir eğri olsun. α eğrisinin Tzitzeica eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin rektifiyan olmasıdır (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $\alpha: I \to E_1^3$ null olmayan bir eğri ve $\tau(s) = sabit$ olsun.

($\Rightarrow$): α eğrisi Tzitzeica eğrisi olsun. O halde; $\frac{\tau(s)}{d^2(s)} = sabit$'tir. $\tau(s)$ sabit olduğundan $d(s)$ de sabit olmak zorundadır. α' nın rektifiyan olduğunu görmek için $\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L = 0$ olduğunu görmeliyiz.

Kabul edelim ki $\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s)$ olsun. Burada $f_0, f_1, f_2: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ ile $N(s)$' in Lorentz çarpımı alınırsa ve $\langle N(s), N(s)\rangle_L = \varepsilon_2$, $\langle T(s), N(s)\rangle_L = 0$, $\langle N(s), B(s)\rangle_L = 0$ ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L = f_0(s)\langle T(s), N(s)\rangle_L + f_1(s)\langle N(s), N(s)\rangle_L + f_2(s)\langle N(s), B(s)\rangle_L \tag{4.68}$$

$$\langle \alpha(s), N(s) \rangle_L = f_1(s)\varepsilon_2 \tag{4.69}$$

elde edilir. $d(s) = |\langle B(s), \alpha(s) \rangle_L| = sabit$'tir. Eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$0 = \langle B'(s), \alpha(s) \rangle_L + \langle B(s), \alpha'(s) \rangle_L \tag{4.70}$$

bulunur. $\langle B(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0$ olduğundan

$$0 = \langle \tau(s)\varepsilon_1 N(s), \alpha(s) \rangle_L \tag{4.71}$$

elde edilir. Burada $\tau(s) = sabit$, $\varepsilon_1 \neq 0$ olduğundan

$$\langle \alpha(s), N(s) \rangle_L = 0 \tag{4.72}$$

olmalıdır. Bu da $f_1(s)\varepsilon_2 = 0$ demektir. O halde $\alpha(s)$ rektifiyan eğridir.

($\Leftarrow$): α eğrisi rektifiyan eğri olsun. $\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s)$, $f_0, f_2 : I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olacak şekilde yazılabilir.

$\tau(s) = sabit$ olduğundan Tzitzeica eğrisi olabilmesi için $d(s) = sabit$ olmalıdır. $d(s) = |\langle B(s), \alpha(s) \rangle_L|$ eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\langle B'(s), \alpha(s) \rangle_L + \langle B(s), \alpha'(s) \rangle_L = d'(s) \tag{4.73}$$

olur. Burada $B'(s) = \tau(s)\varepsilon_1 N(s)$, $\alpha'(s) = T(s)$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\langle \tau(s)\varepsilon_1 N(s), f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s) \rangle_L = d'(s) \tag{4.74}$$

elde edilir.

$\langle N(s), T(s) \rangle_L = 0$, $\langle N(s), B(s) \rangle_L = 0$ ifadeleri yerlerine yazılırsa $d'(s) = 0$ olur ki bu da $d(s) = sabit$ olduğunu gösterir. O halde $\frac{\tau(s)}{d^2(s)} = sabit$ olur ve α eğrisinin Tzitzeica eğrisi olduğu gösterilmiş olur.

4.1.2. Tzitzeica koşulunu sağlayan genel helisler

Tanım 4.1.2.1. $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisi verilsin. Her $s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü; $u \in E_1^3$ sabit vektörü ile sabit açı yapıyorsa α' ya E_1^3' de **genel helis** adı verilir (Barros ve Ark., 2001).

Teorem 4.1.2.1. E_1^3' te bir α eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart $\tau(s) = b\kappa(s)$ olacak şekilde bir b sabitinin olmasıdır (Barros, 1997).

Teorem 4.1.2.2. $\alpha : I \to E_1^3$ null olmayan genel helis olsun. Eğer bir

$$X(s) = 2b_1\varepsilon_1 N(s) - \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\right) B(s) \in E_1^3 \tag{4.75}$$

vektörü var ve $\langle \alpha(s), X(s) \rangle_L = 0$ ise α bir Tzitzeica genel helistir (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $\alpha : I \to E_1^3$ null olmayan genel helis olsun öyle ki $\tau(s) = b_1\kappa(s)$ olacak şekilde $b_1 \in \mathbb{R}$ sabiti vardır.

$\frac{\tau(s)}{d^2(s)} = f(s)$ olsun. O halde

$$\frac{b_1\kappa(s)}{d^2(s)} = f(s) \tag{4.76}$$

$$b_1 = \frac{f(s)}{\kappa(s)} d^2(s) \tag{4.77}$$

eşitliği sağlanır. Bu ifadenin her iki tarafının türevi alınırsa

$$0 = \left(\frac{f(s)}{\kappa(s)}\right)' d^2(s) + 2\, d(s) d'(s) \frac{f(s)}{\kappa(s)} \tag{4.78}$$

bulunur. Ayrıca

$$d(s) = |\langle B(s), \alpha(s) \rangle_L| \tag{4.79}$$

eşitliğinin türevi

$$d'(s) = \langle B'(s), \alpha(s) \rangle_L + \langle B(s), \alpha'(s) \rangle_L \tag{4.80}$$

elde edilir. Bu eşitliği (4.78)' de yerine yazarsak

$$0 = \left(f'(s)\frac{1}{\kappa(s)} - f(s)\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\right)d^2(s) + 2\,d(s)\,|\langle B(s),\alpha'(s)\rangle_L + \langle B'(s),\alpha(s)\rangle_L|\,\frac{f(s)}{\kappa(s)} \tag{4.81}$$

$$0 = \left(f'(s)\frac{1}{\kappa(s)} - f(s)\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)'\right)d^2(s) + 2\,d(s)\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L \tau(s)\varepsilon_1\frac{f(s)}{\kappa(s)} \tag{4.82}$$

olduğu görülür. Burada $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = b_1$ olduğundan

$$0 = d(s)\left(\left(f'(s)\frac{1}{\kappa(s)} - f(s)\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)'\right)d(s) + 2\,\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L b_1\varepsilon_1 f(s)\right) \tag{4.83}$$

olarak yazılabilir. $d(s) = |\langle \alpha(s), B(s)\rangle_L|$ ifadesi yukarıdaki denklemde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$0 = d(s)\left(\langle \alpha(s), \left(f'(s)\frac{1}{\kappa(s)} - f(s)\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)'\right)B(s) + 2N(s)b_1\varepsilon_1 f(s)\rangle_L\right) \tag{4.84}$$

$$0 = d(s)\left(f(s)\,\langle \alpha(s), 2b_1\varepsilon_1 N(s) + \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)' B(s)\rangle_L + \langle \alpha(s), f'(s)\frac{1}{\kappa(s)}B(s)\rangle_L\right) \tag{4.85}$$

olduğu görülür. Kabul gereği

$$X(s) = 2b_1\varepsilon_1 N(s) - \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\right) \tag{4.86}$$

vektörü için $\langle \alpha(s), X(s)\rangle_L = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$0 = \frac{1}{\kappa(s)}f'(s)d(s)\,\langle \alpha(s), B(s)\rangle_L \tag{4.87}$$

$$0 = \frac{1}{\kappa(s)}f'(s)d^2(s) \tag{4.88}$$

bulunur. $\kappa(s) \neq 0$, $d(s) \neq 0$ olduğundan $f'(s) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $f(s) = sabit$'tir. Yani $\frac{\tau(s)}{d^2(s)} = sabit$ olur. O halde α bir Tzitzeica eğrisidir.

Tanım 4.1.2.2. $\alpha: I \to E_1^3$ eğrisi verilsin. Eğer α eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ ve burulma fonksiyonu τ sıfırdan farklı sabit ise α' ya **W-eğrisi** adı verilir (İlarslan, Boyacıoğlu, 2007).

Sonuç 4.1.2.1. Tzitzeica koşulunu sağlayan hiçbir null olmayan W-eğrisi yoktur (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $\alpha: I \to E_1^3$ null olmayan bir W-eğri olsun ve Tzitzeica koşulunu sağlasın. O halde $\frac{\tau(s)}{d^2(s)} = sabit$ olmalıdır. α, W-eğrisi olduğundan $\tau(s) = sabit,\ \kappa(s) = sabit$'tir. Dolayısıyla $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = sabit$ olacağından W- eğrisi bir genel helistir.

$d(s) = |\langle \alpha(s), B(s) \rangle_L|$ eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsa

$$0 = \langle \alpha(s), B'(s) \rangle_L + \langle \alpha'(s), B(s) \rangle_L \tag{4.89}$$

$$0 = \langle \alpha(s), \tau(s)\varepsilon_1 N(s) \rangle_L \tag{4.90}$$

$$0 = \tau(s)\varepsilon_1 \langle \alpha(s), N(s) \rangle_L \tag{4.91}$$

elde edilir. Buradan $\langle \alpha(s), N(s) \rangle_L = 0$ ise α bir rektifiyan eğri olduğu görülür. O halde Teorem 4.1.1.1. iii 'ye göre α bir rektifiyan Tzitzeica eğrisidir. Teorem 4.1.1.2. 'ye göre $c_1 \in \mathbb{R}_0,\ c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2$ olmalıdır. Bu ise α'nın W-eğrisi olması ile çelişir. Sonuç olarak Tzitzeica eğrisi olma koşulunu sağlayan W-eğrisi yoktur.

Teorem 4.1.2.3 $\alpha: I \to E_1^3$ yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null olmayan bir eğri olsun.

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s) \tag{4.92}$$

olmak üzere

$$\frac{\tau(s)}{\left(d(s)\right)^2} = \frac{\tau(s)}{\left(f_2(s)\right)^2} = \frac{\tau(s)}{(\langle \alpha(s), B(s) \rangle_L)^2} \tag{4.93}$$

dir. Burada $f_0, f_1, f_2: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

İspat: $\alpha: I \to E_1^3$ birim hızlı timelike bir eğri olduğundan;

$$\alpha'(s) = T(s) \tag{4.94}$$

dir. Eşitliğinin türevi alınırsa

$$\alpha''(s) = \kappa(s)N(s) \tag{4.95}$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha'(s) \times_L \alpha''(s) = T(s) \times_L \kappa(s)N(s) = \kappa(s)\left(T(s) \times_L N(s)\right) = \kappa(s)B(s) \tag{4.96}$$

bulunur. Ayrıca

$$\left\|\alpha'(s) \times_L \alpha''(s)\right\|^2 = \kappa^2(s)\langle B(s), B(s)\rangle_L = \kappa^2(s) \tag{4.97}$$

dir. Diğer yandan (4.95)' in türevi alınırsa

$$\alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s) \tag{4.98}$$

elde edilir. O halde

$$\langle\alpha'(s) \times_L \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L = \kappa^2(s)\tau(s) \tag{4.99}$$

dir. Sonuç olarak

$$\tau(s) = \frac{\langle\alpha'(s)\times_L\alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L}{\left\|\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\right\|^2} \tag{4.100}$$

bulunur. $\alpha: I \to E_1^3$ eğrisinin oskülatör düzleminin orjine olan uzaklığını $d(s)$ ile gösterirsek

$$\left(d(s)\right)^2 = \frac{\left(\langle\alpha(s), \alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\rangle_L\right)^2}{\left\|\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\right\|^2} \tag{4.101}$$

olduğundan

$$\frac{\tau(s)}{(d(s))^2}=\frac{\langle\alpha'(s)\times_L\alpha''(s),\alpha'''(s)\rangle_L}{(\langle\alpha(s),\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\rangle_L)^2}=\frac{\tau(s)}{(f_2(s))^2} \quad (4.102)$$

bulunur. $\alpha: I \to E_1^3$ yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir spacelike eğrisi için de ispat benzer şekildedir.

Sonuç 4.1.2.2. $\alpha: I \to E_1^3$ yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null olmayan bir eğrinin Tzitzeica eğrisi olma koşulu olan $\frac{\tau(s)}{(d(s))^2}=sabit$ koşulu yerine

$$\frac{\tau(s)}{(\langle\alpha(s),B(s)\rangle_L)^2}=sabit \quad (4.103)$$

olma koşulu alınabilir.

4.2. Null Tzitzeica Eğrileri

Teorem 4.2.1 $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir null eğri olsun öyle ki

$$\alpha(s)=f_0(s)T(s)+f_1(s)N(s)+f_2(s)B(s) \quad (4.104)$$

şeklinde verilsin. α eğrisinin Tzitzeica eğrisi olma şartı

$$\frac{\tau(s)}{(\langle\alpha(s),T(s)\rangle_L)^2}=sabit \quad (4.105)$$

olmasıdır.

İspat: $f_2(s)=\langle\alpha(s),T(s)\rangle_L$ olduğundan açıkça görülür.

Teorem 4.2.2 $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş sabit burulmaya sahip null bir eğri olmak üzere α eğrisi Tzitzeica eğrisi ise α rektifiyandır.

İspat: $\alpha: I \to E_1^3$ null bir eğri, $\tau(s)=sabit$ ve Tzitzeica eğrisi olsun. Bu durumda Teorem 4.2.1. gereğince

$$\frac{\tau(s)}{(f_2(s))^2}=\frac{\tau(s)}{(\langle\alpha(s),T(s)\rangle_L)^2}=c\ (sabit) \quad (4.106)$$

olmalıdır. $\tau(s)$ sabit olduğuna göre $\langle\alpha(s), T(s)\rangle_L$ değeri sabittir. O halde α eğrisinin rektifiyan olduğunu göstermeliyiz.

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s) \tag{4.107}$$

verilsin. O halde;

$$\langle\alpha(s), N(s)\rangle_L = f_1(s) \tag{4.108}$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$\langle\alpha'(s), T(s)\rangle_L + \langle\alpha(s), T'(s)\rangle_L = 0 \tag{4.109}$$

eşitliğinden Teorem 3.2.1.' e göre

$$\langle\alpha(s), \kappa(s)N(s)\rangle_L = 0 \Rightarrow \kappa(s)\langle\alpha(s), N(s)\rangle_L = 0 \Rightarrow \langle\alpha(s), N(s)\rangle_L = 0 \tag{4.110}$$

elde edilir. Sonuçta α rektifiyan eğridir.

Teorem 4.2.3 $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null eğri öyle ki $\kappa(s) > 0$ olsun. Eğer α rektifiyan bir eğri ise $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\tau(s) = c_1 s + c_2 \tag{4.111}$$

dir.

İspat: α eğrisi rektifiyan eğri ise

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s) \tag{4.112}$$

şeklinde yazılabilir. α eğrisinin türevi alınır, Teorem 3.2.1.' den ve $\kappa(s) = 1$ olduğundan

$$\alpha'(s) = f_0{}'(s)T(s) + \big(f_0(s)\kappa(s) - f_2(s)\tau(s)\big)N(s) + f_2{}'(s)B(s) \tag{4.113}$$

elde edilir. Burada $\alpha'(s) = T(s)$ eşitliğinden

$$f_0{}'(s) = 1,\ f_0(s) = s + a \tag{4.114}$$
$$f_2{}'(s) = 0,\ f_2(s) = b \tag{4.115}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$f_0(s) - f_2(s)\tau(s) = 0 \tag{4.116}$$

denkleminde bulunan $f_0(s),\ f_2(s)$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\tau(s) = \frac{s+a}{b} \tag{4.117}$$

bulunur. O halde $c_1 \neq 0$ olmak üzere

$$\tau(s) = c_1 s + c_2 \tag{4.118}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.4 $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null rektifiyan hiçbir Tzitzeica eğrisi yoktur.

İspat: α pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null rektifiyan Tzitzeica eğrisi olsun. Önceki teoremin ispatından

$$\frac{\tau(s)}{\left(d(s)\right)^2} = \frac{\tau(s)}{\left(f_2(s)\right)^2} = \frac{s+a}{b^3} \tag{4.119}$$

olarak bulunur. α Tzitzeica eğrisi olduğundan

$$\frac{\tau(s)}{\left(d(s)\right)^2} = sabit \tag{4.120}$$

olmalıdır. O halde hiç bir null rekitifiyan Tzıtzeica eğrisi yoktur.

4.3. Pseudo-Null Tzitzeica Eğrileri

Teorem 4.3.1 $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir pseudo-null eğri olsun öyle ki

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s) \tag{4.121}$$

şeklinde verilsin. α eğrisinin Tzitzeica eğrisi olma şartı

$$\frac{\tau(s)}{(\langle\alpha(s),N(s)\rangle_L)^2} = sabit \tag{4.122}$$

olması şeklinde de ifade edilebilir.

İspat: $f_2(s) = \langle\alpha(s), N(s)\rangle_L$ olduğundan açıkça görülür.

Teorem 4.3.2 $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş pseudo null eğri öyle ki $\kappa(s) > 0$ olsun. Eğer α rektifiyan bir eğri ise $\tau(s) = 0$’ dır.

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi rektifiyan eğri olduğundan

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s) \tag{4.123}$$

şeklinde yazılabilir. $\alpha(s)$ eğrisinin türevi alınır ve Teorem 3.3.1. ve $\kappa(s) = 1$ eşitliği kullanılırsa

$$\alpha'(s) = f_0{}'(s)T(s) + \big(f_0(s)\kappa(s) - f_2(s)\tau(s)\big)N(s) + f_2{}'(s)B(s) \tag{4.124}$$

elde edilir. Buradan

$$f_0{}'(s) - f_2(s) = 1, \quad f_0(s) = 0, \quad f_2{}'(s) - f_2(s)\tau(s) = 0 \tag{4.125}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$$f_2{}'(s) = \tau(s) = 0 \tag{4.126}$$

olduğu görülür.

Uyarı 4.3.1 $\tau(s)=0$ iken $\frac{\tau(s)}{\left(d(s)\right)^2}=0$ olacağından Tzitzeica eğrisi olma koşulu sağlanmaz.

Sonuç 4.3.1 E_1^3' te hiç bir pseudo-null rektifiyan Tzitzeica eğrisi yoktur.

Teorem 4.3.3 E_1^3' te sabit burulmaya sahip hiçbir pseudo-null Tzitzeica eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha: I \to E_1^3$ sabit burulmaya sahip pseudo-null bir eğri olsun. α eğrisi Tzitzeica eğrisi olsun. Bu durumda

$$\frac{\tau(s)}{(\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L)^2}=c\ (sabit) \tag{4.127}$$

olmalıdır. $\tau(s)$ sabit olduğundan $\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L = sabit$ olmalıdır. $\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L$ eşitliğinin pseudo yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak ve Teorem 3.3.1.' i kullanırsak

$$\langle T(s), N(s)\rangle_L + \langle \alpha(s), \tau(s)N(s)\rangle_L = 0 \tag{4.128}$$

elde edilir. $\tau(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L = 0$ elde edilir. O halde hiçbir pseudo-null Tzitzeica eğrisi yoktur.

5. NULL OLMAYAN TZİTZEİCA EĞRİ DENKLEMİ

Öklid uzayında Tzitzeica eğri denklemleri Williams, Bila ve Eni tarafından incelenmiştir (Bila, 2012; Bila ve Eni, 2012; Williams ve Bila, 2017). Bu kısımda null olmayan eğriler için Tzitzeica eğri denklemleri elde edilecektir.

Teorem 5.1 $\alpha: I \to E_1^3$ yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null olmayan bir eğri olsun. Öyle ki parametrik denklemi

$$\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \tag{5.1}$$

olarak verilsin. α eğrisinin Tzitzeica eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$bz'(s) - a'z''(s) + az'''(s) = \lambda\big(az(s) + c'z'(s) + cz''(s)\big)^2 \tag{5.2}$$

non-lineer denkleminin sağlanmasıdır. Burada

$$a = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) \tag{5.3}$$
$$b = x'''(s)y''(s) - x''(s)y'''(s) \tag{5.4}$$
$$c = x(s)y'(s) - x'(s)y(s) \tag{5.5}$$

olup $\lambda \in \mathbb{R}_0$ sabittir.

İspat: $\alpha(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$ birim hızlı bir timelike eğri olsun. $\alpha'(s) = T(s)$ eşitliğinin türevi alınarak

$$\alpha''(s) = \kappa(s)N(s) \tag{5.6}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\alpha'(s) \times_L \alpha''(s) = T(s) \times_L \kappa(s)N(s) = \kappa(s)B(s) \tag{5.7}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$\|\alpha'(s) \times_L \alpha''(s)\|^2 = \kappa^2(s) \tag{5.8}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) \tag{5.9}$$
$$= \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\big(\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)\big) \tag{5.10}$$
$$= \kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s) \tag{5.11}$$

eşitliğini elde edilir. (5.7) ve (5.11) denklemlerinin Lorentz çarpımından

$$\langle \alpha'(s) \times_L \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L = \tau(s)\kappa^2(s) \tag{5.12}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s)\times_L \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L}{\|\alpha'(s)\times_L \alpha''(s)\|^2} \tag{5.13}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$d(s) = \langle \alpha(s), B(s)\rangle_L = \langle \alpha(s), \frac{\alpha'(s)\times_L \alpha''(s)}{\|\alpha'(s)\times_L \alpha''(s)\|}\rangle_L \tag{5.14}$$
$$= \frac{1}{\|\alpha'(s)\times_L \alpha''(s)\|}\langle \alpha(s), \alpha'(s) \times_L \alpha''(s)\rangle_L \tag{5.15}$$

elde edilir. O halde

$$\frac{\tau(s)}{d^2(s)} = \frac{\langle \alpha'(s)\times_L \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L}{(\langle \alpha(s), \alpha'(s)\times_L \alpha''(s)\rangle_L)^2} \tag{5.16}$$

elde edilir.

$$\alpha'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)\,) \tag{5.17}$$
$$\alpha''(s) = (x''(s), y''(s), z''(s)\,) \tag{5.18}$$
$$\alpha'''(s) = (x'''(s), y'''(s), z'''(s)\,) \tag{5.19}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)=\begin{pmatrix}-y'(s)z''(s)+y''(s)z'(s), x''(s)z'(s)-x'(s)z''(s),\\ x'(s)y''(s)-x''(s)y'(s)\end{pmatrix} \tag{5.20}$$

$$\langle\alpha'(s)\times_L\alpha''(s),\alpha'''(s)\rangle_L = x'''(s)y'(s)z''(s)-x'''(s)y''(s)z'(s)$$
$$+x''(s)y'''(s)z'(s)-x'(s)y'''(s)z''(s)+x'(s)y''(s)z'''(s)-x''(s)y'(s)z'''(s) \tag{5.21}$$

elde edilir. Burada $a=x'(s)y''(s)-x''(s)y'(s)$ ve $b=x'''(s)y''(s)-x''(s)y'''(s)$ denirse

$$\langle\alpha'(s)\times_L\alpha''(s),\alpha'''(s)\rangle_L = bz'(s)-a'z''(s)+az'''(s) \tag{5.22}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$\langle\alpha(s),\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\rangle_L =$$
$$\begin{pmatrix}x(s)y'(s)z''(s)-x(s)y''(s)z'(s)+x''(s)y(s)z'(s)-x'(s)y(s)z''(s)+\\ x'(s)y''(s)z(s)-x''(s)y'(s)z(s)\end{pmatrix} \tag{5.23}$$

$$=\big(x'(s)y''(s)-x''(s)y'(s)\big)z(s)+\big(-x(s)y''(s)+x''(s)y(s)\big)z'(s)$$
$$+\big(x(s)y'(s)-x'(s)y(s)\big)z''(s) \tag{5.24}$$

bulunur. Ayrıca $c=x(s)y'(s)-x'(s)y(s)$ alınırsa

$$\langle\alpha(s),\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\rangle_L = az(s)+c'z'(s)+cz''(s) \tag{5.25}$$

bulunur. α eğrisi Tzitzeica eğrisi şartını sağlayacağından

$$\frac{\tau(s)}{d^2(s)}=\lambda\ (sabit) \tag{5.26}$$

olur. Yani

$$\langle\alpha'(s)\times_L\alpha''(s),\alpha'''(s)\rangle_L=\lambda(\langle\alpha(s),\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\rangle_L)^2 \tag{5.27}$$

olur. Buradan da

$$bz'(s)-a'z''(s)+az'''(s)=\lambda\big(az(s)+c'z'(s)+cz''(s)\big)^2 \tag{5.28}$$

denklemi elde edilir.

$\alpha(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$ eğrisi birim hızlı spacelike eğri olsun öyle ki $\alpha''(s)$ timelike olsun. Bu durumda Teorem 3.1.1 gereğince $\alpha'(s) = T(s)$ ve $\alpha''(s) = \kappa(s)N(s)$' dir. O halde

$$\alpha'(s) \times_L \alpha''(s) = T(s) \times_L \kappa(s)N(s) = \kappa(s)B(s) \tag{5.29}$$

olduğundan

$$\|\alpha'(s) \times_L \alpha''(s)\|^2 = \kappa^2(s) \tag{5.30}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) \tag{5.31}$$
$$= \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\big(\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)\big) \tag{5.32}$$
$$= \kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s) \tag{5.33}$$

ve

$$\langle \alpha'(s) \times_L \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L = \tau(s)\kappa^2(s) \tag{5.34}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s)\times_L\alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L}{\|\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\|^2} \tag{5.35}$$

şeklinde yazılabilir.

$$d(s) = |\langle \alpha(s), B(s)\rangle_L| = \langle \alpha(s), \frac{\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)}{\|\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\|}\rangle_L = \frac{\langle \alpha(s), \alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\rangle_L}{\|\alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\|} \tag{5.36}$$

$$\frac{\tau(s)}{d^2(s)} = \frac{\langle \alpha'(s)\times_L\alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L}{(\langle \alpha(s), \alpha'(s)\times_L\alpha''(s)\rangle_L)^2} \tag{5.37}$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.2) eşitliğinin sağlandığı görülür. $B(s)$' in birim hızlı spacelike eğri olup $\alpha'''(s)$ spacelike olma durumu ise ilk iki duruma benzer şekilde ispatlanır.

6. ÖRNEKLER

Örnek 6.1 $\alpha(s)=\left(\frac{1}{2}\sinh s,\frac{1}{2}\cosh s,\frac{\sqrt{5}}{2}s\right)$ parametrizasyonu ile verilen $\alpha:\left(-\sqrt{15},\sqrt{15}\right)\to E_1^3$ eğrisini ele alalım.

$\alpha'(s)=\left(\frac{1}{2}\cosh s,\frac{1}{2}\sinh s,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ olduğundan

$$\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle_L=-\frac{1}{4}(\cosh s)^2+\frac{1}{4}(\sinh s)^2+\frac{5}{4}=1 \tag{6.1}$$

elde edilir. O halde α eğrisi birim hızlı bir spacelike eğridir. Ayrıca

$$\alpha''(s)=\left(\frac{1}{2}\sinh s,\frac{1}{2}\cosh s,0\right) \tag{6.2}$$

olarak bulunur. α eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$$\kappa(s)=\|\alpha''(s)\|=\sqrt{|\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle_L|}=\sqrt{\left|-\frac{1}{4}(\sinh s)^2+\frac{1}{4}(\cosh s)^2\right|}=\frac{1}{2} \tag{6.3}$$

elde edilir. Öte yandan

$$N(s)=\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}=(\sinh s,\cosh s,0) \tag{6.4}$$

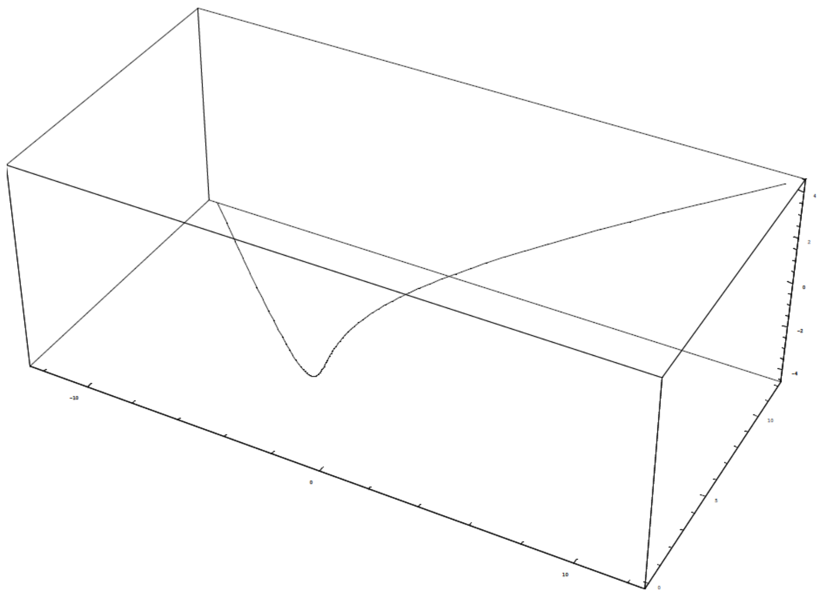
ve

$$B(s)=T(s)\times_L N(s)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\cosh s,\frac{\sqrt{5}}{2}\sinh s,\frac{1}{2}\right) \tag{6.5}$$

olarak bulunur. Son olarak $N'(s)=(\cosh s,\sinh s,0)$ olduğundan

$$\tau(s)=-\langle N'(s),B(s)\rangle_L=-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}(\cosh s)^2+\frac{\sqrt{5}}{2}(\sinh s)^2\right)=\frac{\sqrt{5}}{2} \tag{6.6}$$

olarak bulunur. α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonu sabit olduğundan α bir W-eğrisidir.



Şekil 6.1 α eğrisinin grafiği

Örnek 6.2 $\beta(s) = (s, \cos s, \sin s)$ olmak üzere $\beta: (-\pi, \pi) \to E_1^3$ eğrisini ele alırsak

$$\beta'(s) = (1, -\sin s, \cos s) \tag{6.7}$$

olduğundan

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_L = -1 + (\sin s)^2 + (\cos s)^2 = 0 \tag{6.8}$$

elde edilir. O halde β eğrisi bir null eğridir.

$$\beta''(s) = (0, -\cos s, -\sin s) \tag{6.9}$$

ve

$$\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle_L = (\sin s)^2 + (\cos s)^2 = 1 \tag{6.10}$$

olduğundan β eğrisi pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir null eğridir. Ayrıca

$$\kappa(s) = 1 \tag{6.11}$$

olduğu görülür. Burada Frenet vektör alanları

$$T(s) = (1, -\sin s, \cos s) \tag{6.12}$$

$$N(s) = (0, -\cos s, -\sin s) \tag{6.13}$$

$$B(s) = (1, \sin s, -\cos s) \tag{6.14}$$

olarak bulunur. Bununla birlikte

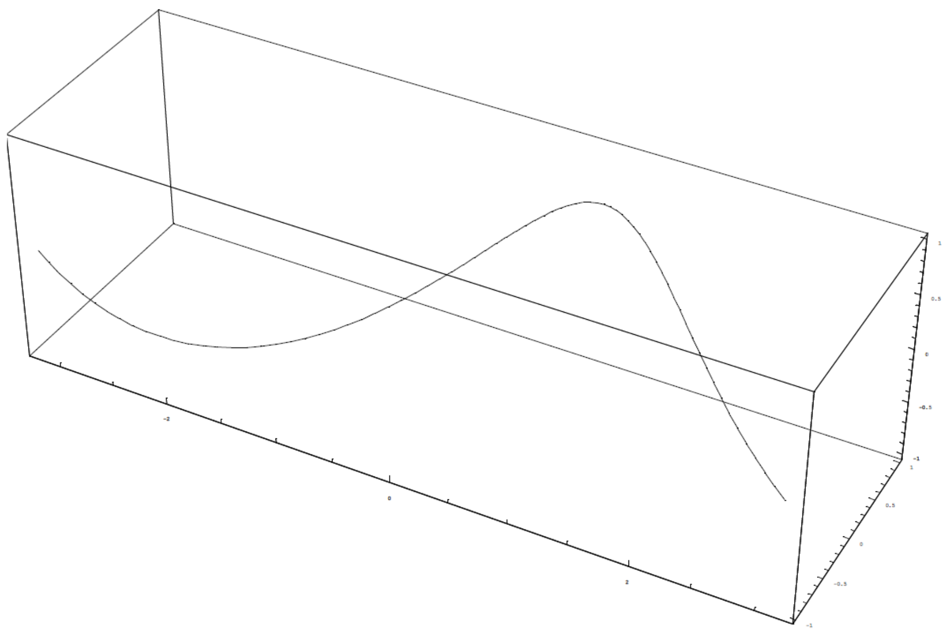
$$N'(s) = (0, \sin s, -\cos s) \tag{6.15}$$

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L = (\sin s)^2 + (\cos s)^2 = 1 \tag{6.16}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\tau(s)}{\big(d(s)\big)^2} = \frac{\tau(s)}{(\langle \alpha(s), T(s)\rangle_L)^2} = \frac{1}{(-s)^2} = \frac{1}{s^2} \neq sabit \tag{6.17}$$

olduğundan β eğrisi Tzitzeica eğrisi değildir.



Şekil 6.2 β eğrisinin grafiği

Örnek 6.3 $\gamma(s) = \left(\cosh s\,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sinh s\,, \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh s\right)$ olmak üzere $\gamma: \left(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right) \rightarrow E_1^3$ eğrisi verilsin.

$$\gamma'(s) = \left(\sinh s\,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cosh s\,, \frac{1}{\sqrt{3}}\cosh s\right) \tag{6.18}$$

olduğundan

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_L = -(\sinh s)^2 + \frac{2}{3}(\cosh s)^2 + \frac{1}{3}(\cosh s)^2 = 1 \tag{6.19}$$

olarak bulunur. γ eğrisi birim hızlı spacelike eğridir.

$$T(s) = \left(\sinh s\,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cosh s\,, \frac{1}{\sqrt{3}}\cosh s\right) \tag{6.20}$$

olur. Ayrıca

$$\gamma''(s) = \left(\cosh s\,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sinh s\,, \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh s\right) \tag{6.21}$$

ve

$$\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle_L = -(\cosh s)^2 + \frac{2}{3}(\sinh s)^2 + \frac{1}{3}(\sinh s)^2 = -1 \tag{6.22}$$

olduğundan $\gamma''(s)$ timelike vektördür. Buradan

$$N(s) = \left(\cosh s\,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sinh s\,, \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh s\right) \tag{6.23}$$

$$B(s) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \tag{6.24}$$

olduğu görülür. Ayrıca

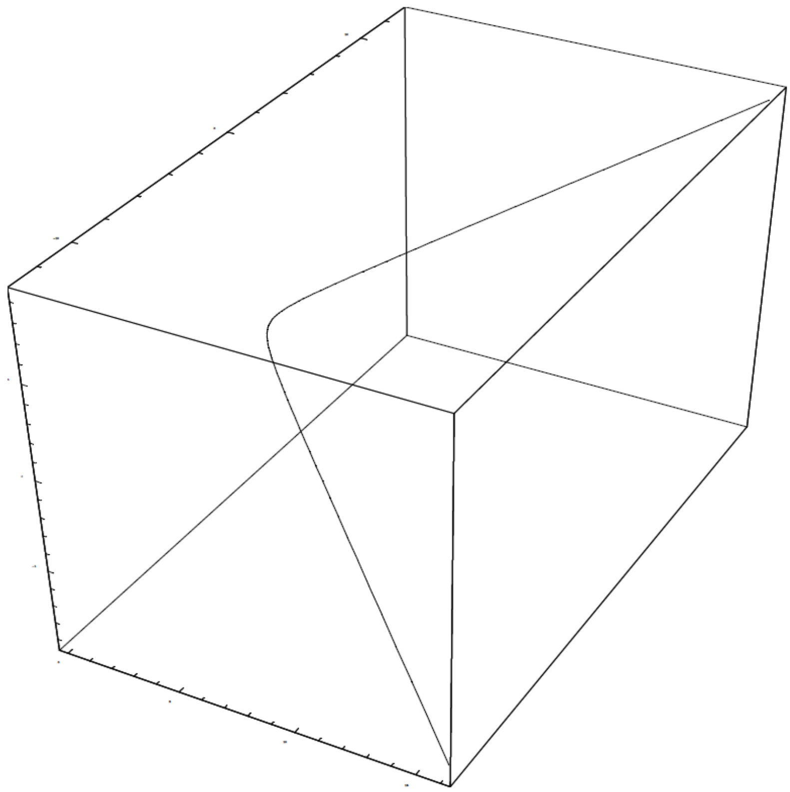
$$\kappa(s) = 1 \tag{6.25}$$

$$N'(s) = \left(\sinh s\,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cosh s\,, \frac{1}{\sqrt{3}}\cosh s\right) \tag{6.26}$$

ve

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle_L = 0 \tag{6.27}$$

olduğundan γ düzlemsel eğridir.



Şekil 6.3 γ eğrisinin grafiği

Örnek 6.4 $\theta(s) = \left(\frac{s^2}{2}, \frac{s^2}{2}, s\right)$ parametrizasyonu ile verilen $\theta: (-6,6) \to E_1^3$ eğrisini ele alalım. Burada

$$\theta'(s) = (s, s, 1) \tag{6.28}$$

$$\langle \theta'(s), \theta'(s) \rangle_L = -s^2 + s^2 + 1 = 1 > 0 \tag{6.29}$$

elde edilir ve

$$T(s) = (s, s, 1) \tag{6.30}$$

olur. Öte yandan

$$\theta''(s) = (1,1,0) \tag{6.31}$$
$$\langle \theta''(s), \theta''(s) \rangle_L = -1 + 1 + 0 = 0 \tag{6.32}$$

olduğundan θ eğrisi pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir pseudo-null eğridir. O halde

$$N(s) = (1,1,0) \tag{6.33}$$

ve

$$B(s) = \left(\frac{s^2-1}{2}, \frac{1-s^2}{2}, -s\right) \tag{6.34}$$

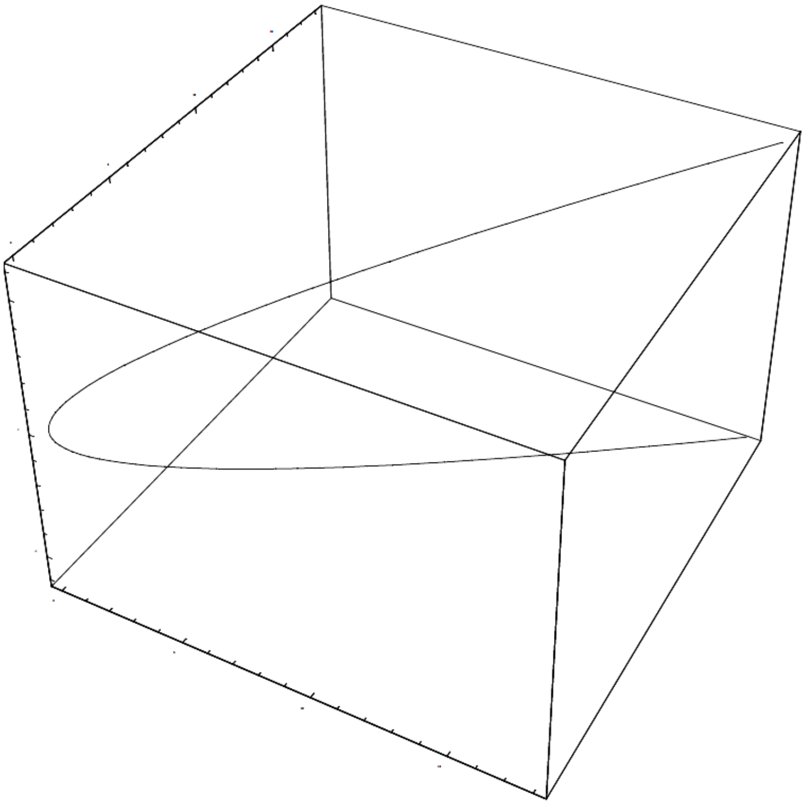
bulunur. Ayrıca

$$\kappa(s) = 1 \tag{6.35}$$

ve

$$\tau(s) = 0 \tag{6.36}$$

bulunur. O halde θ eğrisi oskülatör eğridir.



Şekil 6.4 θ eğrisinin grafiği

KAYNAKLAR

Agnew, A.F., Bobe, A., Boskoff, W.G., Suceava, B.D., 2010, Tzitzeica curves and surfaces, *The Mathematica Journal*, 12, 1-18.

Aydın, M. E., Ergüt, M., 2014, Non-null curves of Tzitzeica type in Minkowski 3-space, *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science,* 81-90.

Balgetir, H., Bektas, M., and Ergut, M., 2016, Bertrand curves for non-null curves in 3-dimensional Lorentzian space, *Hadronic Journal*, 229-236.

Barros, M., 1997, General helices and a theorem of Lancret, *Proceedings of the Am. Math.Soc.*, 1503-1509.

Barros, M., Ferrandez, A., Lucas, P. and Merono, M.A.,2001, General helices in the three-dimensional Lorentzian space forms, *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 31, 2, 373-388.

Bila, N., 2012, Symmetry reductions for the Tzitzeica curve equation, *Math. and Comp.Sci. Working Papers*, Paper 16, 1-10.

Bila, N., Eni, M., 2012, Particular solution to the Tzitzeica curve equation, *Math. and Comp.Sci. Working Papers*, 6,29, 1-10.

Bilici, M., Caliskan, M., 2009, On the involutes of the spacelike curve with a timelike binormal in Minkowski 3-space, *Int. Math. Forum*, 4, 31, 1497-1509.

Bobe, A., Boskoff, W. G., ve Ciuca, M. G., 2012, Tzitzeica type centro-affine invariants in Minkowski spaces, *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 20,2, 27-34.

Chen, B. Y., 2003, When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?, *Amer. Math. Monthly*, 110, 2, 147-152.

Chen, B. Y., Dillen, F., 2005, Rectifying curves as centrodes and extremal curves, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica,* 33, 2, 77-90.

Constantinescu,O. and Crasmareanu, M., 2011, A new Tzitzeica hypersurface and cubic Finslerian metrics of Berwald type, *Balkan J. Geom. Appl.*, 16 ,2, 27-34.

Crasmareanu, M., 2002, Cylindrical Tzitzeica curves implies forced harmonic oscillators, *Balkan J. Geom. Appl.*, 7 , 1, 37-42.

Grbovic, M., Nesovic, E., 2012, Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space, *Math. Commun.*, 17 , 655-664.

Ilarslan, K., Nesovic, E., Petrovic-Torgasev, M., 2003, Some characterizations of rectifying curves in Minkowski 3-space, *Novi Sad J Math.*, 33 , 2, 23-32.

Ilarslan, K., 2005, Spacelike normal curves in Minkowski space E_1^3, *Turk J Math.*, 29 , 53-63.

Ilarslan, K., Nesovic, E., 2008, Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space E4 , *Turk J. Math*. 32, 21 - 30.

Ilarslan, K., Boyacıoğlu, Ö., 2007, Position vectors of a spacelike W-curve in Minkowski space E_1^3, *Bull, Korean Math. Soc*., 44, 3, 429-438.

Karacan, M. K., Bukcu, B., 2009, On the elliptic cylindrical tzitzeica curves in Minkowski 3-space, *Sci. Manga*, 5, 44-48.

Monterde, J., 2007, Curves with constant curvature ratios, *Bulletin of Mexican Mathematic Society, 3a serie*, 13 , 177-186.

O`Neill, B., 1983, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, *Academic Press,* New York.

O'Neill, B., 2006, Elementary Differential Geometry, *Elsevier*, United States.

Petrovic-Torgasev, M., Sucurovic, E., 2002, W-curves in Minkowski space-time, *Novi Sad J. Math*., 32 , 2, 55-65.

Sabuncuoğlu, A., 2010, Diferansiyel geometri, *Nobel Yayınevi*, Ankara, 1-83.

Walrave, J., 1995, Curves and surfaces in Minkowski space, Doctoral dissertation, *K.U. LEUVEN Faculteit Der Wetenschappen*, 1-9.

Williams, L.R., Bila, N., On the Tzitzeica curve equation [online], https://uncw.edu/csurf/Explorations/documents/williams.pdf [Ziyaret Tarihi: 01.10.2017].

Yüce, S., 2017, Öklid uzayında diferansiyel geometri, *Pegem Akademi*, Ankara, 156-302.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Özgül ÖZERDEM
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Elazığ- 14/06/1990
Telefon	**:**	05372178167
Faks	**:**	
e-mail	**:**	ozgulozerdem@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Süleyman Çelebi Lisesi, Osmangazi,BURSA	2008
Üniversite	:	Fırat Üniversitesi,ELAZIĞ	2012
Yüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi,KONYA	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

YAYINLAR

Özerdem Ö., Erdoğdu, M., Null and pseudo-null Tzitzeica curves in Minkowski 3-space, 3^{rd} *International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences-ICANAS 2018,* Antalya-Turkey.