T.C.
NECMETTİN ERBAKAN NİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CEBİRSEL YAPILARIN BAZI FARKLI GRAFLARI ÜZERİNDE İNCELEMELER

Erden ÖZALAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2020
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Erden Özalan tarafından hazırlanan "Cebirsel Yapıların Bazı Farklı Grafları Üzerinde İncelemeler " adlı tez çalışması 26/08/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Başkan Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK	…………………
Danışman Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ	…………………
Üye Doç. Dr. Sedat PAK	…………………

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…/20.. gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

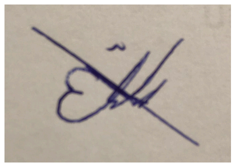
Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Erden Özalan

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CEBİRSEL YAPILARIN BAZI FARKLI GRAFLARI ÜZERİNDE İNCELEMELER

Erden ÖZALAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2020, 43 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Sedat PAK

Graf teori uygulama veya teorik alanındaki problemlerin bir çoğunun incelenmesinde ve çözümünde iyi bir model olmuştur.

Tez toplam dört ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümü olup bu bölümde konunun literatür özeti yapılmıştır. Ayrıca bu bölümde çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılmış ve örnekler verilmiştir.

İkinci bölümde grafların Zagreb indeksleri tanıtılmış ve elde edilen bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Dahası bu bölümde başka bir referans tarafından yeni tanıtılmış Co-Double grafların Zagreb indeksleri hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölüm ise bu tezin ana teması olan Co-double grafların Tensör çarpımları tanımlanarak bu yeni grafların Zagreb indekslerine ayrılmıştır.

Son bölümde, tüm tezde elde edilen sonuçlar, öneriler eşliğinde tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Co-Double Graf, Graf, Tensör çarpım, Zagreb indeksi

ABSTRACT

MS THESIS

STUDIES ON SOME DIFFERENT GRAPHS OF ALGEBRAIC STRUCTURE

Erden ÖZALAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE / DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MECHANICAL ENGINEERING

Advisor: Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Year, 43 Pages

Jury
Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Sedat PAK

The graph theory has become a good model for investigating and solving of many problems given in the meaning of theoretically and applicational.

This thesis contains four main sections.

First chapter is introduction, and a brief summary of related literature is given in this chapter. Moreover, some basic concepts which will be used in the forthcoming chapters are introduced and some examples are given in this chapter.

In the second chapter, Zagreb indices of graph are introduced and some results and theorems for Zagreb indices are given. Furthermore we give information about the Zagreb indices which described very recently in another reference.

Zagreb indices of tensor products of Co-double graphs that are actually main goals of this thesis are given in third sections.

The final section discusses the whole results of the thesis with some suggestions.

Keywords: Co-Double Graph, Graph, Tensör product, Zagreb index

ÖNSÖZ

Tezimi hazırladığım süre boyunca tecrübe ve bilgileriyle desteğini esirgemeyen, kıymetli zamanını ayırarak sabır ve ilgi ile bana faydalı olabilmek için elinden geleni yapan değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ'e içtenlikle teşekkür ederim.

Lisans dönemimden itibaren her konuşmamda abi desteğini hissettiğim, her alanda yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisans dönemimde ve tez çalışmalarım boyunca her zaman yanımda olan ve en zor anlarımda desteğini esirgemeyen eşime teşekkür ederim.

Sevgileriyle beni destekleyen, maddi ve manevi her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimle...

Erden ÖZALAN
KONYA-2020

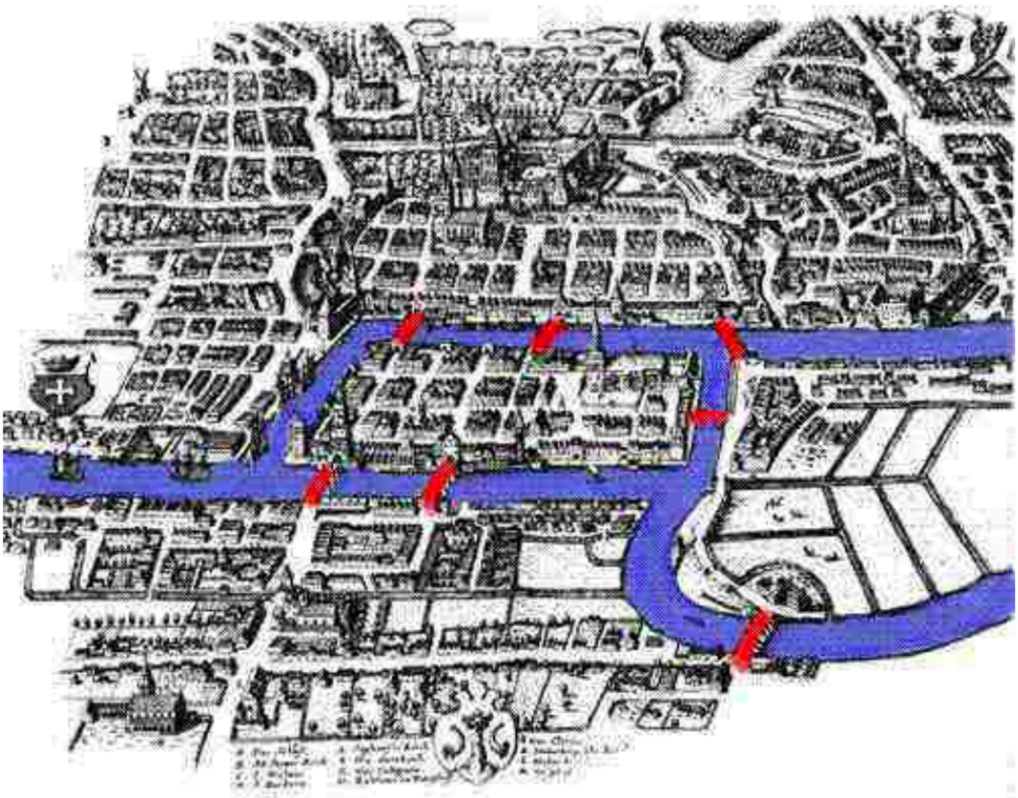
İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Kısaltmalar
G	Graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$\|V_G\|$	G grafının mertebesi
d_v	v köşesinin derecesi
$\Delta(G)$	G grafının maksimum derecesi
$\delta(G)$	G grafının minimum derecesi
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir graf
P_n	n köşeli yol graf
S_n	n köşeli yıldız graf
T_n	n köşeli ağaç graf
M_1	Birinci Zagreb indeks
M_2	İkinci Zagreb indeks
π_1	Birinci çarpımsal Zagreb indeks
π_2	İkinci çarpımsal Zagreb indeks
$\overline{M_1}$	Birinci Zagreb eşindeks
$\overline{M_2}$	İkinci Zagreb eşindeks
F	Forgetten (unutulmuş) indeks
${}^{m}M_1$	Birinci değiştirilmiş indeks
${}^{m}M_2$	Birinci değiştirilmiş indeks
HZ	Hyper-Zagreb indeks
$\overline{HZ}$	Hyper-Zagreb eşindeksi
$G_1 \otimes G_2$	Grafların Tensör Çarpımı

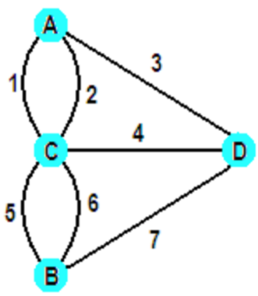
1. GİRİŞ

1736 yılında, L. Euler tarafından yazılan Königsberg'in Yedi Köprüsü isimli makale graf teori kavramının literatüre girmesini sağlayan ilk makaledir.(Biggs ve ark.1986). Kısaca problem şöyledir; dört anakara ve bu anakaraları birbirine bağlayan yedi köprüden oluşan Königsberg şehrini, herhangi bir anakaradan başlayarak her bir köprüden tam olarak bir defa geçmek suretiyle dolaşacak bir yol bulmadır. Euler bu problemi çözerken aslında somut bir olayı modelleyip soyut bir şekle dönüştürerek graf kuramının temellerini atmıştır.



Şekil 1.1 Königsberg'in Yedi Köprüsü

Euler bu problemin çözümünün olmadığını aşağıdaki çizelge aracılığıyla göstermiştir.



Şekil 1.2 Königsberg Çizgesi

Euler bu çizelge yardımıyla şu sonuca varmıştı. Dört anakara parçası toplam tek sayıda köprüyle bağlantılıydı. Bunlardan ikisinin yolun başlangıç ve bitiş noktaları olduğu varsayılırsa diğerleri çift sayıda köprüyle bağlantılı olmalıydı.

Bu sayede graf teorisinin çıkış ve gelişmesi alışılmışın dışında olduğu söylenebilir. Graflar elektrik mühendisliği, kimya, kimya mühendisliği ve ekonomi gibi birbirinden bağımsız bir çok alanda karşımıza çıkmıştır. Yakın geçmişte ve günümüzde bu teori, modern cebirin içinde yer alan problemlerin çözümü için önemli bir yer işgal etmektedir.

Graf teori çözümü aranan bir problemi görsele dökerek temsil edebilmeye, düzenlemeye ve çözmeye yardımcı olur. Bunun için öncelikle elimizdeki problemin, graf yapısına dönüştürüldükten sonra, problemde istenilen amaçları yerine getirecek en hızlı yolu bulmak için sistematik yöntemler aranır. Bu durumda, graf teori pek çok değişik uygulama alanlarına sahip olması açısından oldukça elverişli bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu uygulama alanlarından bazıları şu şekildedir. Ulaşım ağlarının optimizasyonunda aynı zamanda elektrik şebekeleri kavramında ve haberleşme ağlarında kullanılmaktadır. Ayrıca istatistiksel mekanikte, kimyasal formüllerde ve bilgisayar kuramında olmasının yanında toplumsal bilimlerde, coğrafyada ve mimarlık gibi pek çok alan graf teorinin kullanım alanlarındandır. Çizge kuramı olarak da bilinen graf teorinin gelişmesinin en önemli nedeni de bahsetmiş olduğumuz gibi pek çok bilim dallarına uygulanabilir olmasıdır. Karmaşık problemlerin çoğu, graf teori problemlerine dönüştürülerek çözülebilmektedir. Bunun dışında, matematiğin diğer bilim dallarıyla ortak alana sahip olması da graf teorinin önemini arttırmaktadır.

Bu sebeple teorik ve uygulamalı matematik alanlarında önemli bir yer tutan Graf Teori belirli noktalar eşliğinde bu noktaları belirli özelliklerle birleştirmeye çalışan bir alandır. Bu özellikleri ortaya çıkarmasından kaynaklı olarak birçok graf çeşidi bulunmaktadır.

Bu çalışmanın amacı elde edilen yeni bir graf türünün belirli bir graf operasyonu (Tensör Çarpım) üzerinde Zagreb indekslerini incelemektir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü ve ön bilgilerden oluşup bu tez boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve özellikler verilmiştir. İkinci bölümde grafların Zagreb indekslerine giriş yapılmış, elde edilecek tüm indeksler tanıtılmış, bazı temel özelliklerden bahsedilerek Zagreb indeksleri için Literatür taraması verilmiştir. Üçüncü bölümde yeni elde edilmiş olan Co-double graf tanıtılarak bu graf için elde edilmiş olan Zagreb indeksleri verilmiştir. Çalışmanın temelini oluşturan üçüncü bölümde Co-double grafın Tensör çarpımı elde edilerek bu yeni graf üzerinde bazı indeksler elde edilerek çalışma sona erdirilmiştir.

Tez boyunca verdiğimiz bütün temel tanımlar Gross ve Yellen (Gross ve Yellen, 2004) ve Harris ve arkadaşları (Harris ve ark., 2008) nın kitaplarında bulunabilir.

Ayrıca graflar ile ilgili yapılmış önemli çalışmalardan bazıları ise (Akgüneş ve ark., 2013), (Akgüneş, 2013), (Çevik ve ark., 2013), (Çevik ve ark., 2014), (Çevik ve ark., 2016) ve (Çevik ve ark., 2020) şeklindedir.

1.1. Ön Bilgiler

Tanım 1.1 Bir G grafı için köşe noktalarının kümesi $V(G)$ ile kenarlarının kümesi ise $E(G)$ ile gösterilsin. $G = (V, E)$ kümesine *graf* denir.

Tanım 1.2 G grafında bir köşeyi kendisiyle birleştiren kenara *ilmek* denir.

Tanım 1.3 Aynı köşe çiftini birleştiren iki veya daha fazla kenara *çoklu kenar* denir.

Tanım 1.4 Bir graf çoklu kenar ve ilmek içermiyor ise *basit graf* denir. Aksi durumda ise *çoklu graf* denir.

Tanım 1.5 Graf yapısındaki her bir köşeden diğer köşelere bir kenar varsa o graf *bağlıdır* denir.

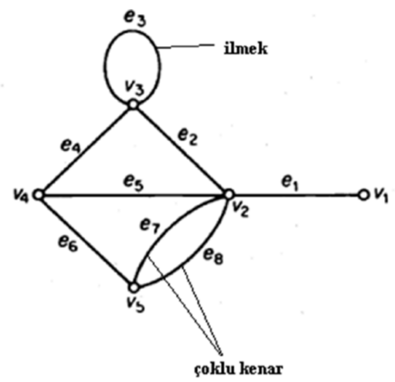
Tanım 1.6 Bir G grafının köşe kümesi olan V den alınan iki köşe v_i ve v_j olsun. Alınan bu köşeler arasında bir kenar varsa bu köşelere *komşudur* denir.

Tanım 1.7 Köşe kümesi ve kenar kümesi sonlu olan bir graf *sonlu graf* olarak adlandırılır.

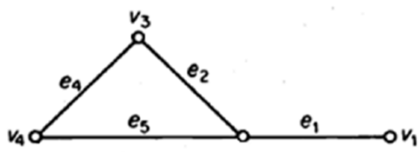
Tanım 1.8 Sonlu bir grafta $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ köşe kümesi olmak üzere $|V(G)| = n$ sayısına *grafın mertebesi*, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesi olmak üzere $|E(G)| = m$ sayısına *grafın boyutu* denir.

Şimdi bu özellikleri bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 1.9 $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ köşe noktalarının kümesi ve $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ kenarların kümesi olmak üzere aşağıda verilmiş olan yapı bir graftır.

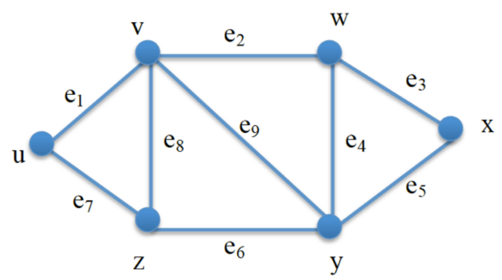


Şekil 1.1 Çoklu graf örneği



Şekil 1.2 Basit graf örneği

Örnek 1.10 $V(G) = \{u, v, w, x, y, z\}$ köşe noktalarının kümesi ve $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ olan G grafı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 1.3 G grafı

Şekil 1.3'de verilen G grafı için $|V(G)| = 6$, $|E(G)| = 9$ şeklindedir.

Tanım 1.11 Köşe kümesinden alınan bir v_n noktasına komşu olan köşe noktalarının sayısına *grafın derecesi* denir. Grafın derecesini deg (v_n) ile gösterilir. Bir G grafındaki köşe noktasının derecesinin 0 olduğu köşeye *izole köşe* ve köşe noktasının derecesinin 1 olduğu köşeye de uç nokta denir.

Örnek 1.12 Şekil 1.3'de verilen G grafına göre $\deg(u) = 2$, $\deg(w) = 3$ 'tür.

Tanım 1.13 G grafının maksimum derecesi ve minimum derecesi sırasıyla

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) | v \in G\}$$

ve

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) | v \in G\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.14 Şekil 1.3'de verilen G grafına göre $\Delta(G) = 4$ ve $\delta(G) = 2'$dir.

Graflardaki bir diğer önemli kavramlar graflardaki yol ve yürüme kavramlarıdır. Şimdi onların tanımlarından kısaca bahsedelim.

Tanım 1.15 Köşe kümesi $V(G) = \{a, b, c, \dots, z\}$ olan bir G grafı için her biri birbiriyle sırasıyla bağlanan köşeler dizisine *yürüme* denir.

G grafındaki *ab,bc,..., yz* formundaki yürümenin uzunluğu, *k* tane kenarın bir araya gelmesinden oluştuğu için bu yürümenin uzunluğu *k'*dır. Bu şekildeki yürüme *abc...yz* şeklinde gösterilir ve *a* ile *z* arasında bir yürüme olarak adlandırılır.

Tanım 1.16 Başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olan yürümeye *kapalı yürüme* denir.

Tanım 1.17 Bir yürümede köşelerin hiçbiri tekrar etmiyor ise bu yürümeye *yol* adı verilir.

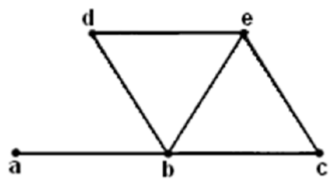
Tanım 1.18 *G* grafı üzerinde alınan farklı iki köşenin arasında bir yol var ise bu iki nokta *bağlantılıdır* denir.

Tanım 1.19 *G* grafı üzerinde yürünen tüm kenarlar farklı ise bu yürümeye *gezi* denilmektedir.

Tek bir köşe kendi başına bir yol teşkil eder. O halde her yol bir gezi olurken her gezi bir yol olmaz.

Tanım 1.20 Başlangıç ve bitiş noktaları haricinde tüm köşeleri ve tüm kenarları farklı olan kapalı yürümeye *devir* denir

Örnek 1.21 Aşağıdaki G grafı için,

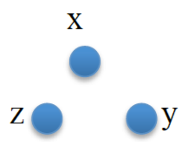


- *abebc*, 4 uzunluğunda bir yürümedir fakat bir gezi değildir.
- *abedbc* bir gezi ancak bir yol değildir.
- *abed* bir yol olup, *bdeb* bir devirdir diyebiliriz.

1.2. Graf Çeşitleri

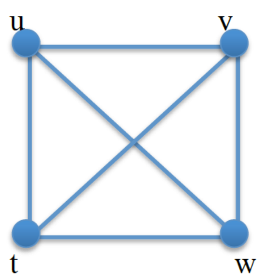
Tezin bu kısmında graf çeşitleri tanımlanarak her bir graf çeşidi için örnekler verilecektir.

Tanım 1.2.1 Kenarı bulunmayan graflara *sıfır graf* denir ve n köşeli bir sıfır graf N_n ile gösterilir.



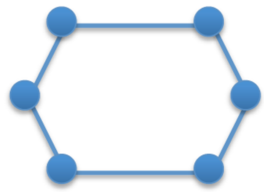
Şekil 1.2.1 N_3 sıfır grafı

Tanım 1.2.2 Her köşe çiftinin tam bir kenarla birleştirildiği graflara *tam graf* adı verilir. n köşeli tam graf K_n notasyonu ile gösterilir.



Şekil 1.2.2 K_4 tam grafı

Tanım 1.2.3 Sadece bir devirden oluşan grafa *devir grafı* adı verilir.n köşeli bir devir grafı C_n notasyonu ile gösterilir.



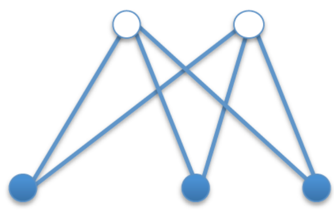
Şekil 1.2.3 C_6 devir grafı

Tanım 1.2.4 Bir tek patikadan oluşan graflara *yol grafı* denir. n köşeli bir yol grafı P_n ile gösterilir. P_n'in $n-1$ kenarı vardır ve C_n'den bir tek kenar çıkarılarak elde edilir.

Şekil 1.2.4 P_5 devir grafı

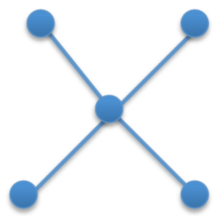
Tanım 1.2.5 Köşe kümesi A ve B gibi iki parçaya ayrılabilen ve her bir kenarı A'daki bir köşeyi B'deki bir köşeye birleştiren graflara *iki parçalı graf* denir. Eğer iki parçalı grafta A'nın her bir köşesi B'nin her bir köşesiyle birleştirilmiş ise grafa *iki parçalı tam graf* denir.

A, *r* köşeye ve B, *s* köşeye sahip ise bu graf $K_{r,s}$ notasyonu ile gösterilir.



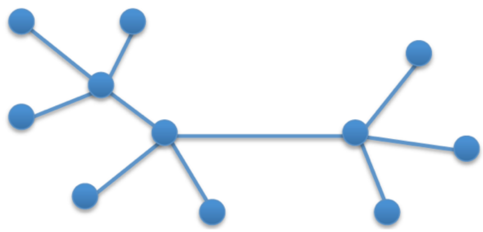
Şekil 1.2.5 $K_{2,3}$ iki parçalı tam graf

Tanım 1.2.6 $K_{1,s}$ şeklindeki bir grafa *yıldız (star) graf* adı verilir. n köşeli bir yıldız graf S_n notasyonu ile gösterilir.



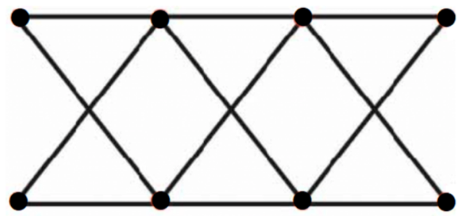
Şekil 1.2.6 S_5 iki yıldız graf

Tanım 1.2.7 Hiç bir devir bulundurmayan bağlantılı graflara *ağaç* denir. n köşeli bir ağaç T_n notasyonu ile gösterilir.



Şekil 1.2.7 T_{11} ağaç graf

Tanım 1.2.8 Bir G grafı için köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ aynı köşe sayısı kadar etiketlendirilmiş bir kopyası alınsın. Her i için v_i köşesi hangi köşeler ile komşu ise kopyasında komşularına bağlanarak oluşturulan grafa double graf denir. $D(G)$ ile gösterilir.



Şekil 1.2.8 $D(P_4)$ double grafı

2. GRAFLARIN ZAGREB İNDEKSLERİ

Bu bölümde ilk olarak Zagreb indeksleri ile ilgili tanım ve bazı temel teoremler verilecektir. Ayrıca bazı grafların elde edilen Zagreb indekslerinden bahsedilecektir. Bu bölümle ilgili daha detaylı kaynaklar (Togan, 2014, Yurttaş, 2014) şeklinde verilebilir. Bu tez boyunca, çok katlı kenar ve döngüleri olmayan, sonlu, basit graflar göz önüne alınacaktır. *G*, kenar kümesi *E(G)* ve köşe kümesi *V(G)* olan bir grafı temsil etsin.

2.1. Birinci ve İkinci Zagreb İndeksleri

1972 yılında, Gutman ve Trinajstic moleküler yapıda toplam π-elektron enerjisinin bağlılığını incelerken toplam π-elektron enerjisi için iki terim ortaya atmışlardır. Bu terimler $\sum_{köşeler}(d_u)^2$ ve $\sum_{kenarlar} d_u d_v$ şeklindedir. Burada verilen d_u moleküler grafın *u* köşesinin derecesidir. (Gutman ve Trinajstić, 1972) Yazarlar bu iki terimden elde edilen sayıların moleküler yapıyı yansıttığını dile getirmişlerdir. Bunun üzerine 1975 yılında Gutman ve ark., 1983 yılında Balaban ve ark., ayrıntılı bir çalışma yapmışlardır. İlk olarak bu indekslerin tanımlarını verelim.

Tanım 2.1.1 *Birinci Zagreb indeksi,* grafın köşelerinin derecelerinin karelerinin toplamıdır. Yani, notasyon olarak $M_1(G)$ ile gösterilen birinci Zagreb indeksi

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} [d_G(u)]^2$$

şeklindedir. (Gutman ve Trinajstić, 1972)

Tanım 2.1.2 *İkinci Zagreb indeksi,* her bir kenarı oluşturan köşelerin derecelerinin çarpımlarının toplamıdır. Yani, notasyon olarak $M_2(G)$ ile gösterilen ikinci Zagreb indeksi

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u).d_G(v)$$

şeklindedir. (Gutman ve Trinajstić, 1972)

2.2. Birinci ve İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksleri

Bu kısımda, literatürde birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri olarak bilinen indeksler üzerinde durulacaktır. 2011 yılında Gutman tarafından adlandırılan aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 2.2.1 *Birinci çarpımsal Zagreb indeksi,* grafın köşelerinin derecelerinin karelerinin çarpımıdır. Yani, notasyon olarak π_1 ile gösterilen birinci çarpımsal Zagreb indeksi

$$\pi_1 = \pi_1(G) = \prod_{v \in V(G)} d_G(v)^2$$

şeklindedir. (Todeschini ve Consonni, 2010)

Tanım 2.2.2 *İkinci çarpımsal Zagreb indeksi,* her bir kenarı oluşturan köşelerin derecelerinin çarpımlarının çarpımıdır. Yani, notasyon olarak π_2 ile gösterilen ikinci çarpımsal Zagreb indeksi

$$\pi_2 = \pi_2(G) = \prod_{uv \in V(G)} d_G(u).d_G(v)$$

şeklindedir. (Todeschini ve Consonni, 2010)

2.3. Birinci ve İkinci Zagreb Eşindeksleri

Tezin bu kısmında literatürde yer alan birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1 G grafının *birinci Zagreb eşindeksi,* kenar oluşturmayan tüm köşe ikililerinin derecelerinin toplamlarının toplamıdır. Yani notasyon olarak $\overline{M_1}(G)$ ile gösterilen birinci Zagreb eşindeksi,

$$\overline{M_1}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} [d(u) + d(v)]$$

olarak tanımlanır (Ashrafi ve ark. 2010, Ashrafi ve ark. 2011).

Tanım 2.3.2 *G* grafının *ikinci Zagreb eşindeksi,* kenar oluşturmayan tüm köşe ikililerinin derecelerinin çarpımlarının toplamıdır. Yani, notasyon olarak $\overline{M_2}(G)$ ile gösterilen ikinci Zagreb eşindeksi,

$$\overline{M_2}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d(u)\, d(v)$$

olarak tanımlanır (Ashrafi ve ark. 2010, Ashrafi ve ark. 2011).

Önerme 2.3.3 (Ashrafi ve ark. 2010) m^c kenarı olan n^c köşeli bir G grafı verilsin. Bu durumda,

- $\overline{M_1}(G) = 2m^c(n^c - 1) - M_1(G)$
- $\overline{M_2}(G) = 2m^{c^2} - \frac{1}{2}M_1(G) - M_2(G)$

2.4. Unutulmuş (Forgetten) İndeks

Bu kısımda bir diğer indeks unutulmuş indeksten bahsedilecektir. Ayrıca bazı indekslerin alternatiflerini belirten bir teorem ifade edilecektir. Bu teorem indeksler ile eşindeksleri arasında bağlantı olarak düşünülebilir.

Tanım 2.4.1 F notasyonu ile gösterilen forgetten Zagreb indeksi

$$F = F(G) = \sum_{v \in V(G)} d(v)^3$$

şeklinde tanımlanır. (Gutman ve Trinajstić, 1972)

Önerme 2.4.2 (Gutman, 2017) m^c kenarı olan n^c köşeli bir G grafı verilsin. Bu durumda,

- $\overline{F}(G) = (n^c - 1)\, M_1(G) - F(G)$

şeklindedir.

İspat: (Gutman, 2017) referansında ispatı verilmiştir.

Bu teoremler eşindekslerin alternatif olarak indeksler türünden nasıl yazılabileceğini gösterir.

2.5. Birinci ve İkinci Değiştirilmiş (Modified) Zagreb İndeksleri

Nikolic ve ark. tarafından 2003 yılında birinci ve ikinci Zagreb indekslerinde köşelerin derecelerinin tersini düşünmüşlerdir. Bunun üzerine tanımı yapılan birinci ve ikinci değiştirilmiş Zagreb indeksleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.5.1 *Birinci değiştirilmiş (modified) Zagreb indeksi,* ${}^{m}M_1$ notasyonu ile gösterilerek aşağıdaki şekilde tanımlanır. (Nikolic ve ark., 2003)

$$ {}^{m}M_1 = \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{d_G(u)^2} $$

Tanım 2.5.2 *İkinci değiştirilmiş (modified) Zagreb indeksi,* ${}^{m}M_2$ notasyonu ile gösterilerek aşağıdaki şekilde tanımlanır. (Nikolic ve ark., 2003)

$$ {}^{m}M_2 = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{d(u)d(v)} $$

2.6. Hyper-Zagreb İndeksi ve Hyper-Zagreb Eşindeksi

Yukarıda ifade ettiğimiz birinci Zagreb indeksinin kenarlar üzerindeki formülünün düzenlenmesi ile Hyper-Zagreb indeksi ortaya çıkmıştır. Aşağıda Hyper-Zagreb indeksi ve eşindeksi için tanım ve alternatif formülü verilmiştir.

Tanım 2.6.1 Hyper-Zagreb indeksi $HZ(G)$ notasyonu ile gösterilerek

$$ HZ(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]^2 $$

şeklinde tanımlanır. (Shirdel ve ark., 2013)

Önerme 2.6.2 Bir G grafı için

$$ HZ(G) = F(G) + 2M_2(G) $$

olarak bulunur. (Gutman, 2017)

Tanım 2.6.3 Hyper-Zagreb eşindeksi, bir G grafında komşu olmayan iki köşe noktasının derecelerinin toplamının karesi şeklinde tanımlanmıştır. (Gutman, 2017)

$$\overline{HZ}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]^2$$

Önerme 2.6.4 Bir G grafının n^c tane köşe ve m^c tane kenarı olsun. O halde Hyper-Zagreb eşindeksi

$$\overline{HZ}(G) = 4m^c + (n^c - 2)M_1(G) - HZ(G)$$

olarak bulunur. (Gutman, 2017)

2.7. Zagreb İndekslerinin Graflar Üzerindeki Örnekleri

Yukarıda verilen Zagreb indeksleri bazı graf çeşitleri üzerinde düşünülmüştür. Aşağıdaki tabloda farklı graflar üzerinde elde edilen bazı Zagreb indeksleri verilmiştir. (Togan, 2014 ve Yurttaş, 2014)

	P_n	C_n	S_n	K_n	$K_{r,s}$
$M_1(G)$	$4n-6$	$4n$	$n(n-1)$	$n(n-1)^2$	$sr(r+s)$
$M_2(G)$	$4n-8$	$4n$	$(n-1)^2$	$\binom{n}{2}(n-1)^2$	s^2r^2
$\pi_1(G)$	2^{2n-4}	2^{2n}	$(n-1)^2$	$(n-1)^{2n}$	$r^{2s}s^{2r}$
$\pi_2(G)$	2^{2n-4}	2^{2n}	$(n-1)^{n-1}$	$(n-1)^{n(n-1)}$	$(rs)^{rs}$
$\overline{M_1}(G)$	$2(n-2)^2$	$4[\binom{n}{2}-n]$	$2\binom{n-1}{2}$	$n(n-1)^2$	$rs(s+r+2)$
$\overline{M_2}(G)$	$2n^2-10n+13$	$4[\binom{n}{2}-n]$	$\binom{n-1}{2}$	$\binom{n}{2}(n-1)^2$	$r^2\binom{s}{2}+s^2\binom{r}{2}$

Çizelge 2.7.1 Farklı grafların Zagreb indeksleri

2.8. Zagreb İndeksler için Literatür Taraması

Tezin bu kısmında Zagreb indeksleri hakkında günümüze kadar yapılmış bazı önemli çalışmalar listelenecektir.

- **Gutman ve Trinajstić (1972)**, "*Graph theory and molecular orbitals: Total π-electron energy of alternant hydrocarbons*" isimli çalışmalarında graf teoride ve kimsayal matematik konusunda önemli bir yere sahip olacak olan Birinci Zagreb indeksi ortaya koydular.
- **Gutman ve ark. (1975),** "*Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes*" isimli çalışmalarında da yukarıdaki çalışmalarının ışığında İkinci Zagreb indeksi tanımlamışlar ve çeşitli özelliklerini ortaya koymuşlardır.
- **Das, K.C. ve Gutman, I. (2004),** *"Some properties of the second Zagreb index"* isimli çalışmalarında ikinci Zagreb indeksleri üzerinde bazı özellikleri ortaya koymuşlardır.
- **Ashrafi, A.R., Doslic, T., Hamzeh, A. (2010),** *"The Zagreb coindices of graph Operations"* isimli çalışmalarında kimyasal anlamda tanımlanan graf ve Zagreb indekslerinin temel matematiksel özelliklerini inceleyerek çeşitli graf işlemleri altında yeni graf değişmezleri için formüller ortaya koymuşlardır.
- **Ashrafi, A.R., Doslic, T., Hamzeh, A. (2011),** *"Extremal graphs with respect to the Zagreb coindices"* isimli çalışmalarında bazı özel graf sınıfları üzerinde yeni topolojik değişmezlerin uç değerleri belirlenmiştir.

- **Das, K.C., Gutman, I., Zhou, B. (2009),** *"New upper bounds on Zagreb indices"* isimli çalışmalarında yazarlar tarafından Zagreb indekleri için yeni üst sınırlar elde edilmiştir.
- **Das, K.C., Trinajstic, N. (2011),** *"Relationship between the eccentric connectivity index and Zagreb indices"* isimli çalışmalarında bazı graf çeşitleri için Zagreb eksantrik (eccenticity) indeks ve Zagreb indeksleri karşılaştırılmıştır.
- **Das, K.C., Lee, D., Graovac, A. (2013),** *"Some properties of the Zagreb eccentricity indices"* isimli çalışmalarında Zagreb eksantrik (eccenticity) indekslerinin bazı özellikleri incelenmiştir.

- **Das, K.C., Yurttas, A., Togan, M., Cevik, A.S., Cangul, I.N. (2013),** *"The multiplicative Zagreb indices of graph operations"* isimli çalışmalarında graf işlemlerinin Zagreb indeksleri üzerinde durulmuştur.
- **Eliasi, M., Iranmanesh, A., Gutman, I. (2012**), *"Multiplicative versions of first Zagreb index"* isimli çalışmalarında birinci Zagreb indeksinin çarpımsal versiyonu üzerinde düşünülerek, graf üzerinde yorumlanması yapılmıştır.
- **Fath-Tabar, G.H. (2011),** *"Old and new Zagreb indices of graphs"* isimli çalışmalarında birinci ve ikinci Zagreb indekslerinin bazı sınırları sunulmuş ve yeni bir graf değişmezi tanıtılarak bunun matematiksel özellikleri hakkında bilgi verilmiştir.

- **Gutman, I., Das, K.C. (2004),** *"The first Zagreb index 30 years after"* isimli çalışma şuana kadar yapılan Zagreb indeksleri (birinci ve ikinci Zagreb indeksi) ve sınırları hakkında yazılmış var olan sonuçların özetlendiği ve bazı yeni özelliklerin sunulduğu bir makale niteliğindedir.
- **Gutman, (2011),** *"Multiplicative Zagreb indices of trees"* isimli çalışmada ağaçlar üzerinde çarpımsal Zagreb indeksleri ortaya konulmuştur.
- **Ghorbani, M., Hosseinzadeh, M.A. (2012),** *"A new version of Zagreb indices"* isimli çalışmalarında Zagreb indekslerinin yeni bir versiyonunu tanımlamışlardır.
- **Hansen, P., Vukicevic, D. (2007),** *"Comparing Zagreb indices"* isimli çalışmalarında Zagreb indekslerinin karşılaştırmalarını yapmışlardır.
- **Horoldagva, B., Lee, S.G. (2010),** *"Comparing Zagreb indices for connected graphs"* isimli çalışmalarında özel bir graf üzerinde Zagreb indekslerinin karşılaştırması yapılmıştır.

- **Khalifeh, M.H., Azari, H.Y., Ashrafi, A.R. (2009),** "The first and second Zagreb indices of some graph operations" isimli çalışmalarında bazı graf işlemleri üzerinde birinci ve ikinci Zagreb indeksleri elde edilmiştir.
- **Liu, B., Gutman, I. (2006),** "Upper bounds for Zagreb indices of connected graphs" isimli çalışmalarında özel graflar üzerinde Zagreb indeksi için üst sınırlar elde edilmiştir.
- **Liu, J., Zhang, Q. (2012),** "Sharp upper bounds on multiplicative Zagreb indices" isimli çalışmalarında çarpımsal Zagreb indeksleri için sınır değerleri elde edilmiştir.

- **Trinajstic, N., Nikolic, S., Milicevic, A., Gutman, I. (2010),** “On Zagreb indices” isimli çalışmalarında Zagreb indekleri üzerine bazı özellikler incelenmiştir.

- **Xu, K., Das, K.C. 2012.** Trees, unicyclic and bicyclic graphs extremal with respect to multiplicative sum Zagreb index” isimli çalışmalarında yeni bir Zagreb indeksi bularak, çarpımsal toplam Zagreb indeksi, özel bazı graf çeşitleri üzerinde bu indeksi incelemişlerdir.

3. CO-DOUBLE GRAFLARIN TENSÖR ÇARPIMLARININ ZAGREB İNDEKSLERİ

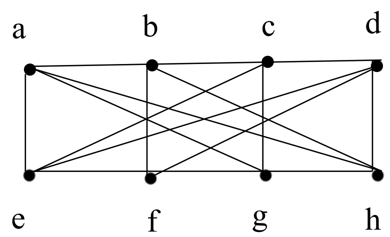
Tezin bu bölümünde Co-Double graf tanımı ve bu grafın üzerinde elde edilmiş Zagreb indeksleri verilecektir.

3.1. Co-double Graflar

Co-double graf inşa edilirken double grafı oluşturma mantığının tersi düşünülmüştür. Co-Double graf, grafın kopyası alınarak, her v_i köşesi kopyasında komşu olmadığı köşelere bağlanarak oluşturulur. Aşağıda tanımı verilmiştir.

Tanım 3.1.1 Bir G grafı için köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ aynı köşe sayısı kadar etiketlendirilmiş bir kopyası alınsın. Her i için v_i köşesi hangi köşeler ile komşu değil ise kopyasında komşu olmadığı köşere bağlanarak oluşturulan grafa Co-double graf denir. Co-$D(G)$ notasyonu ile gösterilir.

Aşağıdaki yol graf ile oluşturulan Co-double örneği düşünelim;



Şekil 3.1.1 Co-D(P_4)

3.2. Co-double Grafların Zagreb İndeksleri

Bu bölümde Co-Double grafların Zagreb indeksleri verilecektir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar ve ispatlar (Urlu, 2020) tezinde bulunduğu için ispatsız bir şekilde verilmiştir.

Teorem 3.2.1 Bazı özel grafların Co-double graflarının Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksleri

$$\pi_1(CoD(G)) = \left\{ \begin{array}{ll} & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = C_n\ n \geq 3 \\ & eğer\ G = K_n\ n \geq 3 \\ n^{4n} & eğer\ G = K_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = S_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = W_n\ n \geq 4 \\ & eğer\ G = T_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \end{array} \right.$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.2.2 Bazı özel grafların Co-double graflarının ikinci Çarpımsal Zagreb İndeksleri

$$\pi_2(CoD(G)) = \left\{ \begin{array}{ll} & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = C_n\ n \geq 3 \\ & eğer\ G = K_n\ n \geq 3 \\ n^{2n^2} & eğer\ G = K_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = S_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = W_n\ n \geq 4 \\ & eğer\ G = T_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \end{array} \right.$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.2.3 Bazı özel graflarının Co-Double Graflarının birinci Modified Zagreb indeskleri;

$$m_{M_1}(CoD(G)) = \left\{ \begin{array}{ll} & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = C_n\ n \geq 3 \\ & eğer\ G = K_n\ n \geq 3 \\ \frac{2n}{n^2} & eğer\ G = K_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = S_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = W_n\ n \geq 4 \\ & eğer\ G = T_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \end{array} \right.$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.2.4 Bazı özel grafların Co-Double graflarının ikinci modified Zagreb indeksleri

$$^{m}M_2\big(CoD(G)\big) = \begin{cases} & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = C_n\ n \geq 3 \\ & eğer\ G = K_n\ n \geq 3 \\ 1 & eğer\ G = K_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = S_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = W_n\ n \geq 4 \\ & eğer\ G = T_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.2.5 Bazı özel grafların Co-double graflarının Narumi-Katayama indeksi;

$$NK\big(CoD(G)\big) = \begin{cases} & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = C_n\ n \geq 3 \\ & eğer\ G = K_n\ n \geq 3 \\ n^{2n} & eğer\ G = K_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = S_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = W_n\ n \geq 4 \\ & eğer\ G = T_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.2.6 Bazı özel grafların Co-Double graflarının birinci Zagreb eşindeksleri

$$\overline{M_1}\big(CoD(G)\big) = \begin{cases} & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = C_n\ n \geq 3 \\ & eğer\ G = K_n\ n \geq 3 \\ 2n^2(n-1) & eğer\ G = K_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = S_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = W_n\ n \geq 4 \\ & eğer\ G = T_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.2.7 Bazı özel grafların Co-Double graflarının ikinci Zagreb eşindeksleri

$$M_2\big(CoD(G)\big) = \begin{cases} & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = C_n\ n \geq 3 \\ & eğer\ G = K_n\ n \geq 3 \\ n^4 - n^3 & eğer\ G = K_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = S_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = W_n\ n \geq 4 \\ & eğer\ G = T_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.2.8 Bazı özel grafların Co-Double graflarının Hyper-Zagreb eşindeksleri ;

$$\overline{HZ}\big(CoD(G)\big) = \begin{cases} & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = C_n\ n \geq 3 \\ & eğer\ G = K_n\ n \geq 3 \\ 4n^2 - 4n^3 & eğer\ G = K_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = S_n\ n \geq 2 \\ & eğer\ G = W_n\ n \geq 4 \\ & eğer\ G = T_{t,s}\ t \geq 1\ \ s \geq 2 \\ & eğer\ G = P_n\ n \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

3.3. Graf ve Co-Double Grafların Tensör Çarpımı

Tezin bu bölümünde grafların tensör çarpımı hakkında bilgi verilecektir. Sonrasında 3.1. alt bölümünde tanıtılmış Co-double graflar için tensör çarpımları düşünülecektir.

3.3.1. Graflar Üzerinde Tensör Çarpım

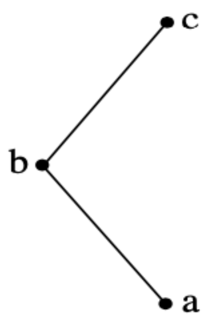
Tanım 3.3.1 G ve H grafları verilsin. G ve H graflarının tensör çarpımı olan yeni grafı $G \otimes H$ ile gösterelim. $G \otimes H$ grafının köşe ve kenar kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

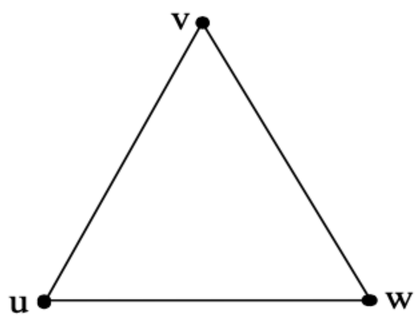
- $V(G \otimes H) = V(G) \times V(H)$
- $E(G \otimes H) = \{(a,b)(c,d) \mid ac \in E(G)\ ve\ bd \in E(H)\}$

Köşe ve kenar kümesi yukarıdaki gibi tanımlanan grafa *G ve H graflarının tensör çarpımı* denir.

İki grafın tensör çarpımı için aşağıdaki örneklerle inceleyelim.

Örnek 3.3.2 P_3 ve C_3 grafının tensör çarpımını inceleyelim.

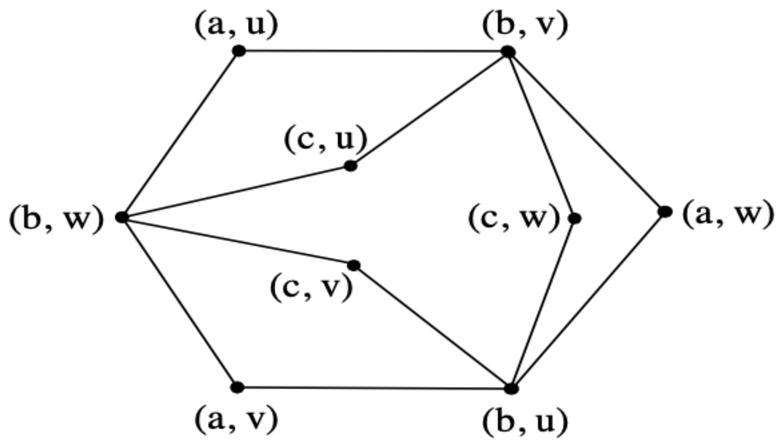




$\boldsymbol{P_3}$ $\boldsymbol{C_3}$

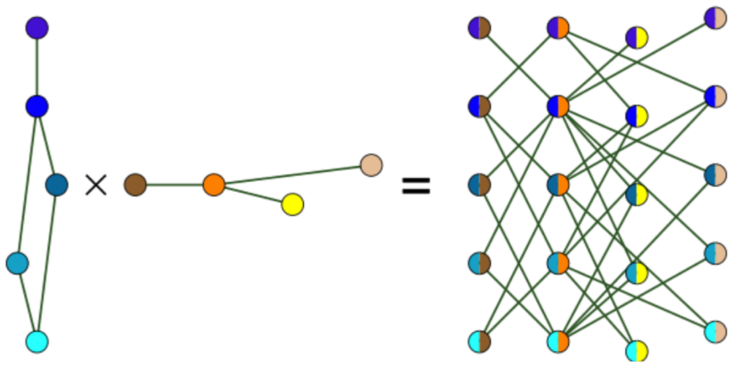
Yukarıda verilen tensör çarpım tanımına göre $P_3 \otimes C_3$ grafının köşe kümesi
$V(P_3 \otimes C_3) = \{(c,u), (c,v), (c,w), (b,u), (b,v), (b,w), (a,u), (a,v), (a,w)\}$
şeklindedir.

$P_3 \otimes C_3$ grafının kenar kümesi düşünüldüğünde;
(a,u) köşesi $(b,v), (b,w)$ ile,
(a,v) köşesi $(b,u), (b,w)$ ile,
(a,w) köşesi $(b,v), (b,u)$ ile,
(b,u) köşesi $(a,v), (a,w), (c,v), (c,w)$ ile,
(b,v) köşesi $(a,u), (a,w), (c,u), (c,w)$ ile,
(b,w) köşesi $(a,u), (a,v), (c,u), (c,v)$ ile,
(c,u) köşesi $(b,v), (b,w)$ ile,
(c,v) köşesi $(b,u), (b,w)$ ile,
(c,w) köşesi $(b,v), (b,u)$ ile komşu olduğu görülür. Bu durumda oluşan $P_3 \otimes C_3$ grafı şöyledir.



Şekil 3.3.1 $P_3 \otimes C_3$ grafı

Aşağıda iki grafın tensör çarpım graflarının bir örneği daha verilmiştir.



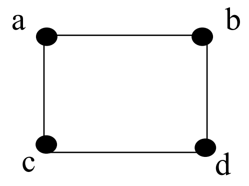
Şekil 3.3.2 Tensör çarpım grafı

3.3.2. Co-double Grafların Tensör Çarpımı

Bu bölümde literatüre yeni kazandırılan, tezin 3.1. alt bölümünde kısaca bahsettiğimiz Co-double grafların, Tensör çarpımlarını inceleyeceğiz. Bu bölümde ilk olarak Co-double yol grafı üzerinde düşünelim.

Bir Co-double G grafını notasyon olarak $CoD(G)$ ile göstereceğiz (Gürbüz, 2020) .

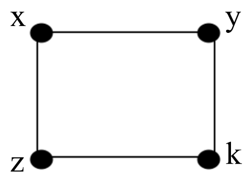
$CoD(P_2)$



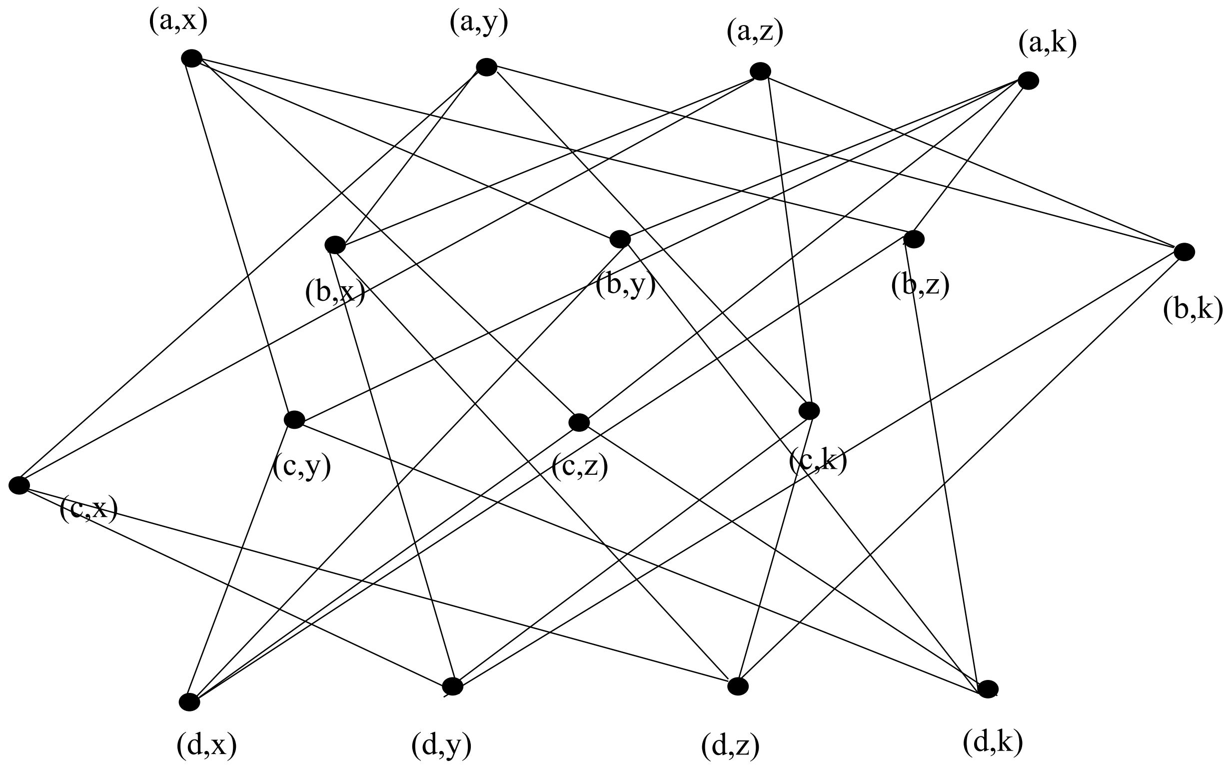
Şekil 3.3.3

$\otimes$

$CoD(P_2)$



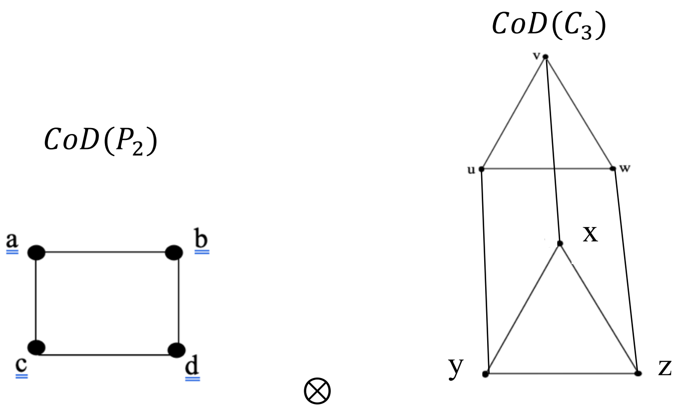
Şekil 3.3.4



Şekil 3.3.5 $CoD(P_2) \otimes CoD(P_2)$ grafı

Yukarıda Şekil 3.3.5'de, Şekil 3.3.3'de verilen bir Co-double P_2 yol grafı ile Şekil 3.3.4'de de verilen bir P_2 Co-double yol grafının Tensör çarpımının grafı verilmiştir.

Şimdi yeni bir Co-double grafların tensör çarpım grafı örneği verelim. Bu kez iki farklı türde olan Co-double grafının (yol Co-double grafı ve devir Co-double grafı) tensör çarpımının grafını oluşturabileceğimizi görelim.



Bu grafın köşelerini ve her köşenin hangi köşelerle komşu olacağını inceleyelim.

Grafın köşe kümesinin elemanları

$V\big(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)\big)$

$= \{au, av, aw, ax, ay, az, bu, bv, bw, bx, by, bz, cu, cv, cw, cx, cy, cz, du, dv, dw, dx, dy, dz\}$

şeklindedir. Şimdi ise her bir köşenin komşu olduğu köşeleri yazalım.

- au köşesi: bv, bw, by, cv, cw, cy
- av köşesi: bu, bw, bx, cu, cw, cx
- aw köşesi: bu, bv, bz, cu, cv, cz
- ax köşesi: bv, bz, by, cv, cz, cy
- ay köşesi: bu, bx, bz, cu, cx, cz
- az köşesi: bx, bw, by, cx, cw, cy
- bu köşesi: av, aw, ay, dv, dw, dy
- bv köşesi: au, aw, ax, du, dw, dx
- bw köşesi: au, av, az, du, dv, dz
- bx köşesi: av, az, ay, dv, dz, dy
- by köşesi: au, ax, az, du, dx, dz
- bz köşesi: ax, aw, ay, dx, dw, dy
- cu köşesi: av, aw, ay, dv, dw, dy
- cv köşesi: au, aw, ax, du, dw, dx
- cw köşesi: au, av, az, du, dv, dz
- cx köşesi: av, az, ay, dv, dz, dy
- cy köşesi: au, ax, az, du, dx, dz
- cz köşesi: ax, aw, ay, dx, dw, dy

- du köşesi: bv, bw, by, cv, cw, cy
- dv köşesi: bu, bw, bx, cu, cw, cx
- dw köşesi: bu, bv, bz, cu, cv, cz
- dx köşesi: bv, bz, by, cv, cz, cy
- dy köşesi: bu, bx, bz, cu, cx, cz
- dz köşesi: bx, bw, by, cx, cw, cy

köşeleri ile komşudur.

3.4. Co-double Grafların Tensör Çarpım Grafının Zagreb İndeksi

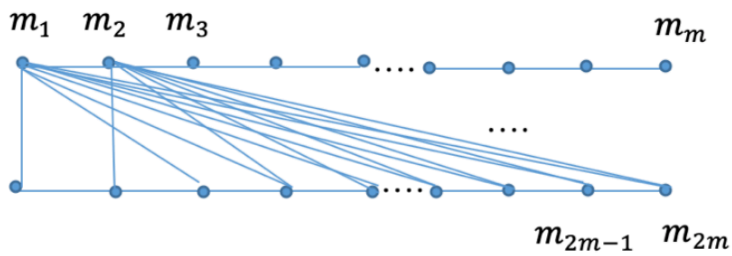
Bu bölümünde tensör çarpımlarını elde ettiğimiz iki Co-Double grafın tezin ikinci bölümünde açıkladığımız Zagreb indeksleri incelenecektir.

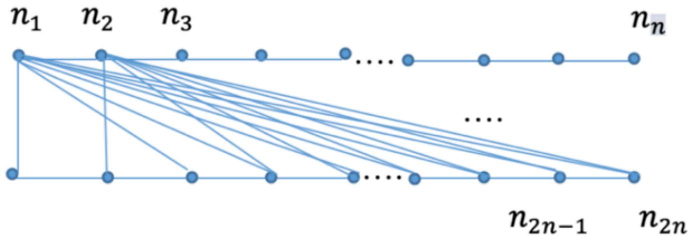
Bu bölümde bahsedilecek olan $CoD(G_m)$ *ve* $CoD(G_n)$ *grafları yol graf, yıldız graf, iki parçalı graf, devir graf ve tam graflar üzerinde düşünülmüş Co-double graflardır. Elde edilen sonuçlar tüm bu grafların Co-double grafları düşünülerek elde edilmiştir.*G_n *grafı;* P_n*: n köşeli yol graf,* C_n*: n köşeli devir graf,* K_n*: n köşeli tam graf,* S_n*: n köşeli yıldız graflardan herhangi biri ve* G_m *grafı;* P_m*: m köşeli yol graf,* C_m*: m köşeli devir graf,* K_m*: m köşeli tam graf,* S_m*: m köşeli yıldız graflarından biridir.*

Tezin bu kısmında yukarıda açıklanan graf türleri üzerinde düşünülen Co-double grafların bazı Zagreb indeksleri elde edilmiştir. İlk olarak iki Co-double grafın Tensör çarpım grafı oluşturulduğunda açık bir şekilde görülebilen köşe, derece ve kenar sayılarını ifade eden teoremleri verelim. Ardından Zagreb indeksi ile ilgili elde etmiş olduğumuz ifadeler verilecektir.

Teorem 3.4.1 $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafının derecesi *n.m*'dir.

İspat: Aşağıda verilen $CoD(G_m)$ ve $CoD(G_n)$ graflarını düşünelim.





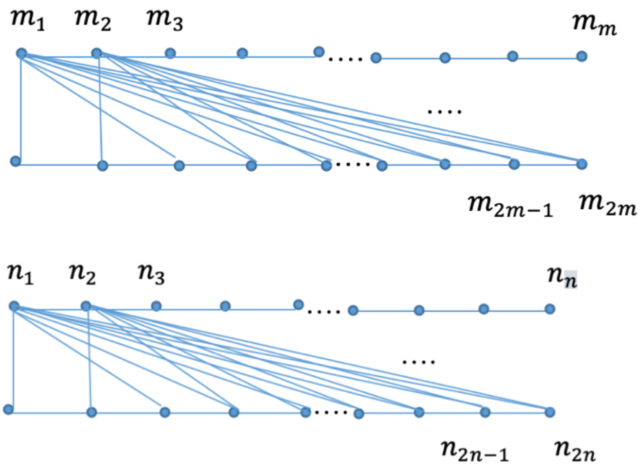
$CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafındaki (m_1, n_1) köşesi düşünüldüğünde $CoD(G_m)$ grafında m_1 köşesinin *m* tane n_1 köşesinin *n* tane komşuluğu vardır. Bu sebeple (m_1, n_1) köşesi *m.n* dereceye sahip olur. Diğer köşerde benzer şekilde düşünüldüğünde $CoD(G_m)$ $\otimes$ $CoD(G_n)$ grafında tüm köşeler *m.n* dereceye sahiptir.

Teorem 3.4.2 $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafının köşe sayısı *4.n.m*'dir.

İspat: Co-double graf tanımından $CoD(G_m)$ grafının *2m*, $CoD(G_n)$ grafının *2n* tane köşesi bulunmaktadır. $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafının köşe sayısı *2m.2n=4mn* şeklinde olur.

Teorem 3.4.3 $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafının kenar sayısı $2n^2m^2$'dir.

İspat: İlk olarak $CoD(G_m)$ grafının *2m* tane, $CoD(G_n)$ grafının *2n* tane köşesi olduğunu biliyoruz (Co-double graf tanımından). G_m ve G_n Co-double yol grafları aşağıdaki gibi verilsin. (Aşağıda örnek verilen graflarda yalnızca m_1, m_2, n_1 ve n_2 köşeleri komşu oldukları kenarlarla eşleşmişlerdir.)



$CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafı düşünülürse;

(m_1, n_1) köşesinin komşu olduğu
(m_1, n_2) köşesinin komşu olduğu
(m_1, n_3) köşesinin komşu olduğu
.
.
.
(m_1, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu

2n tane köşe,
mn tane komşuluk

(m_2, n_1) köşesinin komşu olduğu
(m_2, n_2) köşesinin komşu olduğu
(m_2, n_3) köşesinin komşu olduğu
.
.
.
(m_2, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu
(m_3, n_1) köşesinin komşu olduğu
(m_3, n_2) köşesinin komşu olduğu
.
.
.
(m_m, n_1) köşesinin komşu olduğu
.
.
.
(m_m, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu

(m-1) tane

2n tane köşe,
(m-1)n tane komşuluk

(m-1) tane

(m_{m+1}, n_1) köşesinin komşu olduğu

(m_{m+1}, n_2) köşesinin komşu olduğu

(m_{m+1}, n_3) köşesinin komşu olduğu

.
.
.

(m_{m+1}, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu

.
.
.

(m_{2m-1}, n_1) köşesinin komşu olduğu

(m_{2m-1}, n_2) köşesinin komşu olduğu

.
.
.

(m_{2m-1}, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu

2n tane köşe,
n tane komşuluk

Bu durumda kenar sayısı,

$$= 2n.mn + (m-1).2n.(m-1)n + (m-1).2n.n$$
$$= 2n(mn + (m-1)^2.n + (m-1).n)$$
$$= 2n^2\big(m + (m-1)^2 + (m-1)\big) = 2n^2m^2$$

Teorem 3.4.4 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının birinci Zagreb indeksi;

$$M_1\big(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)\big) = 4n^3m^3$$

şeklindedir.

İspat: Bu bölümün başında belirtildiği gibi G_n grafı; P_n: n köşeli yol graf, C_n: n köşeli devir graf, K_n: n köşeli tam graf, S_n: n köşeli yıldız graflardan herhangi biri ve G_m grafı ise P_m: m köşeli yol graf, C_m: m köşeli devir graf, K_m: m köşeli tam graf, S_m: m köşeli yıldız graflarından biridir. Birinci Zagreb indeksi her köşenin derecelerinin kareleri toplamıdır. Buna göre tensör çarpım grafının;

- her köşesinin *n.m* derecesi,
- *4n.m* köşesi var ise

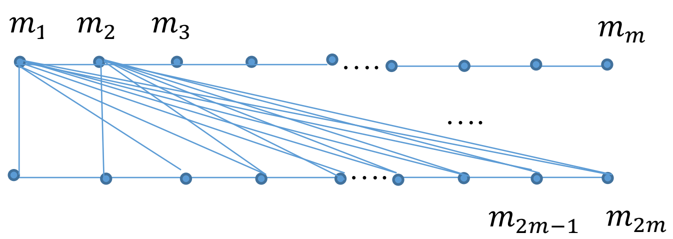
$$M_1\big(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)\big) = 4.n.m.(n.m)^2$$
$$= 4.n.m.n^2m^2$$
$$= 4n^3m^3$$

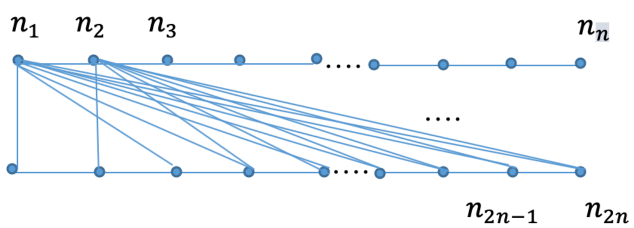
Teorem 3.4.5 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının ikinci Zagreb indeksi;

$$M_2\big(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)\big) = 2n^4m^4$$

şeklindedir.

İspat: İkinci Zagreb indeksin, komşu köşelerin derecelerinin çarpımının toplamı olduğunu belirtmiştik. $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafının her köşesi $m.n$ derecelidir. Bu durumda, $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{2m}$: G_m grafının köşeleri ve $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{2n}$: G_n grafının köşeleri olmak üzere, (m_1, n_1) köşesinin derecesi de mn olur. Burada dikkat edilmesi gereken G_m Co-double grafının *2m* tane G_n Co-double grafının *2n* tane köşe sayısı olduğudur. Aşağıda G_m ve G_n Co-double yol grafları düşünülmüştür. (Aşağıdaki graflarda, örnek teşkil etmesi adına, yalnızca m_1, m_2, n_1 ve n_2 köşeleri komşu oldukları kenarlarla eşleşmişlerdir.)





$CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafı düşünülürse;

(m_1, n_1) köşesinin komşu olduğu
(m_1, n_2) köşesinin komşu olduğu
(m_1, n_3) köşesinin komşu olduğu
.
.
.
(m_1, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu

2n tane köşe,
mn tane komşuluk,
$(mn)^2$ komşu köşelerin dereceler çarpımı

(m-1) tane

(m_2, n_1) köşesinin komşu olduğu
(m_2, n_2) köşesinin komşu olduğu
(m_2, n_3) köşesinin komşu olduğu
.
.
.
(m_2, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu
(m_3, n_1) köşesinin komşu olduğu
(m_3, n_2) köşesinin komşu olduğu
.
.
.
(m_m, n_1) köşesinin komşu olduğu
.
.
.
(m_m, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu

2n tane köşe,
(m-1)n tane komşuluk,
$(mn)^2$ komşu köşelerin dereceler çarpımı

(m-1) tane

(m_{m+1}, n_1) köşesinin komşu olduğu

(m_{m+1}, n_2) köşesinin komşu olduğu

(m_{m+1}, n_3) köşesinin komşu olduğu

.
.
.

(m_{m+1}, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu

.
.
.

(m_{2m-1}, n_1) köşesinin komşu olduğu

(m_{2m-1}, n_2) köşesinin komşu olduğu

.
.
.

(m_{2m-1}, n_{2n}) köşesinin komşu olduğu

2n tane köşe,
n tane komşuluk,
$(mn)^2$ komşu köşelerin dereceler çarpımı

$CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafında $(m_{2m}, n_1), (m_{2m}, n_2), \ldots, (m_{2m}, n_{2n})$ köşeleri düşünüldüğünde bu grafların tüm komşuluklarının yukarıda hesaplandığı görülür. Bu durumda yukarıda bulduğumuz tüm köşelerin komşu oldukları köşelerin derecelerini çarpıp topladığımızda,

$$= 2n.mn.(mn)^2 + (m-1).2n.(m-1)n.(mn)^2 + (m-1).2n.n.(mn)^2$$

$$= 2n(mn)^2[mn + (m-1).(m-1)n + (m-1).n]$$

$$= 2n(mn)^2[mn + (m-1)^2 n + (m-1).n]$$

$$= 2n(mn)^2 n[m + (m-1)^2 + (m-1)]$$

$$= 2n(mn)^2 n[m + m^2 - 2m + 1 + m - 1] = 2n(mn)^2 nm^2 = 2n^4 m^4$$

şeklindedir.

Önerme 3.4.6 $M_2\big(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)\big) \neq M_2\big(CoD(G_n) \otimes CoD(G_m)\big)$

İspat: $M_2\big(CoD(G_n) \otimes CoD(G_m)\big)$ grafının Zagreb indeksi yukarıdaki teoremde belirtildiği gibi $2m(mn)^2[mn + (n-1)^2 + (n-1)m]$ olacağından Zagreb indekslerinin eşit olmadığı açıktır.

Teorem 3.4.7 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının birinci çarpımsal Zagreb indeksi;

$$\pi_1(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = (mn)^{8mn}$$

şeklindedir.

İspat: G_m ve G_n Co-Double graflarının tensör çarpımlarının oluşturduğu grafın köşe sayısının $4nm$ ve her köşenin mn derecesi olduğu Teorem 3.4.1 ve 3.4.2'de gösterildi. $\pi_1(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n))$ demek her köşenin derecelerinin kareleri çarpımı olduğu tezin 2. Bölüm Tanım 2.2.1'de açıklanmıştı. O halde birinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımına göre;

$$\begin{aligned}\pi_1(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) &= [(mn)^2]^{4mn}\\ &= (mn)^{8mn}\end{aligned}$$

olarak hesaplarız.

Teorem 3.4.8 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının ikinci çarpımsal Zagreb indeksi;

$$\pi_2(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = [(mn)^7(m-1)^3n^2]^{2n}$$

şeklindedir.

İspat: İkinci çarpımsal Zagreb indeksi kenarı oluşturan köşelerin derecelerinin çarpımlarının çarpımıdır. $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafı üzerinde düşünülürse;

$2n$ tane $(mn)(mn)^2 \rightarrow [(mn)^3]^{2n}$

$2n$ tane $(m-1)^2n(mn)^2 \rightarrow [(m-1)^2n(mn)^2]^{2n}$

$2n$ tane $(m-1)n(mn)^2 \rightarrow [(m-1)n(mn)^2]^{2n}$

olup

$$\begin{aligned}\pi_2 &= [(mn)^3]^{2n}.[(m-1)^2n(mn)^2]^{2n}.[(m-1)n(mn)^2]^{2n}\\ &= [(mn)^3.(m-1)^2n(mn)^2.(m-1)n(mn)^2]^{2n}\\ &= [(mn)^7(m-1)^3n^2]^{2n}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.9 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının birinci Zagreb eşindeksi;

$$\overline{M_1}(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = 16n^3m^3 - 4n^2m^2 - (mn)^{8mn}$$

şeklindedir.

İspat: m^c kenarlı n^c köşeli bir G grafı için Önerme 2.3.3'e göre birinci Zagreb eşindeksi

$\overline{M_1}(G) = 2m^c(n^c - 1) - M_1(G)$ şeklinde verilmişti. $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafının köşe sayısının $4nm$, kenar sayısının $2n^2m^2$ olduğu Teorem 3.4.2 ve 3.4.3'de belirtilmişti. Bu durumda

$\overline{M_1}(G) = 2.(2n^2m^2)(4nm - 1) - (mn)^{8mn}$

$= 4n^2m^2(4nm - 1) - (mn)^{8mn}$

$= 16n^3m^3 - 4n^2m^2 - (mn)^{8mn}$ şeklindedir.

Teorem 3.4.10 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının ikinci Zagreb eşindeksi;

$$\overline{M_2}(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = 2m^3n^3(3mn - 1)$$

şeklindedir.

İspat: m^c kenarlı n^c köşeli bir G grafı için Önerme 2.3.3'e göre ikinci Zagreb eşindeksi

$\overline{M_2}(G) = 2m^{c2} - \frac{1}{2}M_1(G) - M_2(G)$ şeklinde verilmişti. $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafının kenar sayısının $2n^2m^2$ olduğu, birinci ve ikinci Zagreb indeksleri Teorem 3.4.4 ve 3.4.5'de belirtilmişti. Bu durumda

$\overline{M_2}(G) = 2.(2n^2m^2)^2 - \frac{1}{2}4n^3m^3 - 2m^4n^4$

$= 2(4n^4m^4) - \frac{1}{2}4n^3m^3 - 2m^4n^4$

$= 8n^4m^4 - 2n^3m^3 - 2m^4n^4 = 6n^4m^4 - 2n^3m^3 = 2n^3m^3(3mn - 1)$ şeklindedir.

Teorem 3.4.11 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının unutulmuş (forgetten) indeksi ;

$$F(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = 4m^4n^4$$

şeklindedir.

İspat: $F(G) = \sum_{v \in V(G)} d(v)^3$ olduğu Teorem 2.4.1'de , $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafının köşe sayısının $4nm$ olduğu Teorem 3.4.2'de belirtildi. Buna göre, her köşe nm dereceli ve $4nm$ köşe olduğundan
$F(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = 4mn(mn)^3 = 4n^4m^4$ elde edilir.

Teorem 3.4.12 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının birinci değiştirilmiş (modified) Zagreb indeksi,

$$^{m}M_1(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = \frac{4}{mn}$$

şeklindedir.

İspat: Tanım 2.5.1'de birinci değiştirilmiş (modified) Zagreb indeksinin köşe sayısının karesinin çarpımsal terslerinin toplamı olduğu belirtilmişti. Köşe sayısı mn olduğuna göre,

$$^{m}M_1(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = \frac{1}{(mn)^2}.4mn = \frac{4}{mn} \text{ şeklindedir.}$$

Teorem 3.4.13 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının ikinci değiştirilmiş (modified) Zagreb indeksi,

$$^{m}M_2(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = \frac{2}{(mn)^2}[\frac{1}{mn} + \frac{1}{(m-1)^2n} + \frac{1}{(m-1)n}]$$

şeklindedir.

İspat: Tanım 2.5.2'de ikinci değiştirilmiş (modified) Zagreb indeksin, kenarı oluşturan köşelerin derecelerinin çarpımının çarpımsal terslerinin toplamı olduğu belirtilmişti.
İkinci Zagreb indeksinde ayrıntılı bir şekilde belirtildiği gibi genel olarak düşünüldüğünde;

$$^{m}M_2(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = 2n\frac{1}{(mn)^3} + 2n\frac{1}{(m-1)^2n(mn)^2} + 2n\frac{1}{(m-1)n(mn)^2}$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.14 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının Hyper-Zagreb indeksi,

$$HZ(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)\,) = 8n^4m^4$$

şeklindedir.

İspat: Hyper-Zagreb indeksi Önerme 2.6.2'de alternatif bir formül ile verilmişti. Bunun anlamı, komşu köşelerin dereceleri toplamının karelerinin toplamı anlamına gelen Hyper-Zagreb indeksinin forgetten ve ikinci Zagreb indeksi tarafından ifade edilmesinin bir diğer yolu olmasıdır. $F(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = 4n^4m^4$ ve $M_2(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = 2n^4m^4$ olduğu Teorem 3.4.5 ve 3.4.11'de belirtilmişti. Buna göre,

$$HZ(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = 4n^4m^4 + 4n^4m^4 = 8n^4m^4$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.4.15 G_m ve G_n Co-double graflar olmak üzere, bu iki grafın Tensör çarpım grafının Hyper-Zagreb eşindeksi,

$$\overline{HZ}(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)\,) = 8n^2m^2(m^2n^2 - mn + 1)$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 3.4.14'e benzer olarak, Önerme 2.6.4'e göre $\overline{HZ}(G) = 4m^c + (n^c - 2)M_1(G) - HZ(G)$ şeklinde verilmiştir. Bu Hyper-Zagreb eşindeksinin kenar, köşe, birinci Zagreb indeksi ve Hyper-Zagreb indeksleri yardımıyla ifade edilebileceğinin göstergesidir. $CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)$ grafı için

$m^c = 2n^2m^2$, $n^c = 4nm$, $m^c = 2n^2m^2$, $M_1\big(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)\big) = 4n^3m^3$ ve $HZ(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)) = 8n^4m^4$ olduğu yukarıda ifade ettiğimiz teoremlerde bulundu. Buna göre

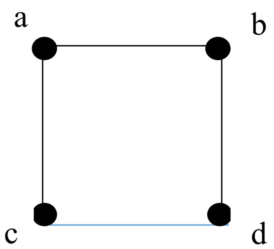
$$\begin{aligned}\overline{HZ}(CoD(G_m) \otimes CoD(G_n)\,) &= 4(2n^2m^2) + (4nm - 2)4n^3m^3 - 8n^4m^4 \\ &= 8n^2m^2 + 16n^4m^4 - 8n^3m^3 - 8n^4m^4 \\ &= 8n^2m^2(m^2n^2 - mn + 1)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

3.5. Co-double Grafların Tensör Çarpımlarının Zagreb İndeksi için Uygulama

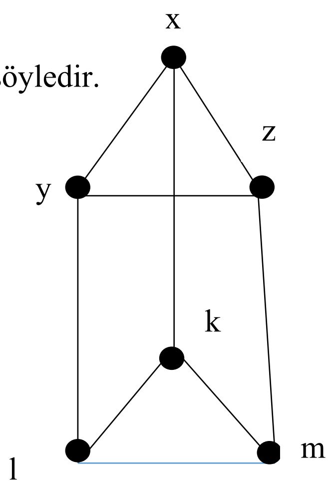
Tezin bu kısmında şu ana kadar bulmuş olduğumuz Zagreb indekslerini iki Co-double grafın tensör çarpımı üzerinde örneklendirelim. İlk olarak $CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)$ tensör çarpım grafını düşünelim.

$CoD(P_2)$ grafı:

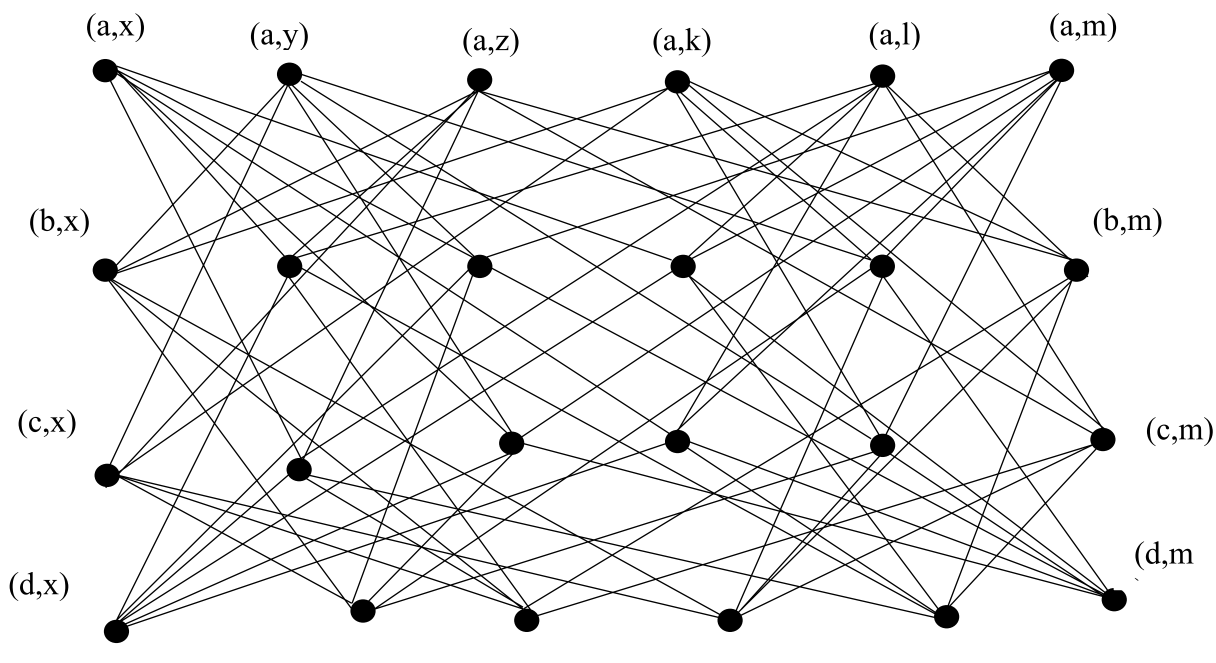


şeklinde verilsin.

$CoD(C_3)$ grafı ise şöyledir.



$CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)$ grafı ise aşağıdaki gibidir.



Şimdi bu örnek üzerinden formüllerini elde etmiş olduğumuz Zagreb indekslerini bulalım.

- $CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)$ grafının derecesi 6'dır.
- $CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)$ grafının köşe sayısı 24'dür.
- $CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)$ grafının kenar sayısı 72'dir.
- Birinci Zagreb indeksi; $M_1\big(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)\big) = 864$'dür.
- İkinci Zagreb indeksi; $M_2\big(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)\big) = 2592$'dir.
- Birinci Çarpımsal Zagreb indeksi; $\pi_1\big(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)\big) = 6^{48}$'dir.
- İkinci Çarpımsal Zagreb indeksi; $\pi_2\big(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)\big) = 6^{36}$'dır.
- Birinci Zagreb eşindeksi;
$$\overline{M_1}(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)) = 16.3^3.2^3 - 4.3^2.2^2 - 6^{48}$$
- İkinci Zagreb eşindeksi;
$$\overline{M_2}(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)) = 2.2^3.3^3.17$$
- Unutulmuş (forgetten) indeksi ;
$$F(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)) = 4.16.81$$

- Birinci değiştirilmiş (modified) Zagreb indeksi,
$${}^{m}M_1(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)) = \frac{4}{6}$$
- İkinci değiştirilmiş (modified) Zagreb indeksi,
$${}^{m}M_2(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)) = \frac{2}{36}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right]$$
- Hyper-Zagreb indeksi,
$$HZ(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)) = 8.3^4.2^4$$
- Hyper-Zagreb eşindeksi,
$$\overline{HZ}(CoD(P_2) \otimes CoD(C_3)) = 8.3^2.2^2.31$$

Bulunan tüm Zagreb indekslerini daha küçük Co-double graflar üzerinde görmek mümkündür.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu tezde literatüre yeni kazandırılmış olan Co-double graflar ele alınmıştır. Öncelikle Co-double graflarlar tanıtılmıştır. Ayrıca bu graflar ile ilgili elde edilmiş olan bazı sonuçlar verilmiştir. Dahası Co-Double graflar üzerinde Graf teoride önemli bir yeri olan Graf operatörlerinden Tensör çarpımı ele alınmıştır.

İki Co-Double grafın tensör çarpım grafı düşünülerek elde edilen orijinal sonuçlar şöyledir. İlk olarak Teorem 3.4.1, 3.4.2 ve 3.4.3'te bu grafın derecesi, köşe sayısı ve kenar sayısı verilmiştir. Daha sonra bu grafın Zagreb indeksleri ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Teorem 3.4.4 ve 3.4.5'te bu graf için birinci ve ikinci Zagreb indeksleri bulunmuştur. Teorem 3.4.7 ve 3.4.8'de iki Co-Double grafın tensör çarpım grafının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri elde edilmiştir. Bu grafın birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri Teorem 3.4.9 ve 3.4.10'da ifade edilmiştir. Ayrıca Zagreb indekslerden önemli bir yere sahip olan unutulmuş (Forgetten) Zagreb indeksi de Teorem 3.4.11'de ifade edilmiştir. Teorem 3.4.12 ve 3.4.13'de sırasıyla birinci ve ikinci değiştirilmiş (modified) Zagreb indeksi elde edilmiştir. Son olarak Hyper-Zagreb indeksi ve Hyper-Zagreb eşindeksi Teorem 3.4.14 ve 3.4.15'de bulunmuştur.

4.2 Öneriler

Verilen tanımlar, örnekler ve teoremler graf teori alanında çalışan ya da çalışmak isteyen araştırmacılar için iyi bir referans olur. Elde edilen yeni bir yapının, grafın Graf operasyonları tanımlanarak farklı parametreler üzerinde çalışılabilir.

5. KAYNAKLAR

Akgüneş, N., Das, K. C., Çevik, A. S., Cangül, I. N., 2013, *Some properties on the lexicographic product of graphs obtained by monogenic semigroups,* Journal Inequalities and Applications, (1), 1-9.

Akgüneş, N., 2013, Graf parametreleri ve cebirsel yapılara grafsal yaklaşımlar, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü .

Ashrafi, A.R., Doslic, T. ve Hamzeh, A., 2010, *The Zagreb coindices of graph operations*, Discr. Appl. Math., 158:1571–1578.

Ashrafi, A.R., Doslic, T. ve Hamzeh, A., 2011, *Extremal graphs with respect to the Zagreb coindices*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 65: 85–92.

Balaban, A.T., Motoc, I., Bonchev, D. and Mekenyan, O., 1983, *Topological indices for structure-activity correlations*, Topics Curr. Chem., 114: 21-55.

Çevik, A.S., Das, K. C., Xu, K., Cangül I., Graovac, A., 2013, *On the Harary index of graph operations*, Journal of Inequalities and Applications, 2013:339.

Çevik, A.S., Akgünes, N., ve Das, K. C., 2014, *Some properties on the tensor product of graphs obtained by monogenic semigroups*, Applied Mathematics and Computation, Vol 235, 352-357.

Çevik, A.S., Bindusree, A. R., Cangul, I. N., ve Lokesha, V., 2016, *Zagreb polynomials of three graph operators*, Filomath, Vol 30, Number 7, 1979-1986.

Çevik, A.S., Aykaç, S., Akgüneş, N., 2020, *Analysis of Zagreb indices over zero-divisor graphs of commutative rings*, Asian-European Journal of Mathematics, Vol. 13(1)

Das, K. C., 2010, *Atom-bond connectivity index of graphs*, Discrete Appl. Math. 158, 1181-1188.

Das, K. C., and Gutman, I., 2009, *Estimating the Szeged index*, Appl. Math. Lett. 22, 1680-1684.

Das, K. C. and Gutman, I., 2010, *Estimating the Wiener index by means of number of vertices, number of edges, and diameter*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 64 (3), 647-660.

Das, K. C., Lee, D. W. and Graovac, A., 2013, *Some properties of the Zagreb eccentricity indices*, ARS Mathematica Contemporanea 6, 117-125.

Das, K. C. and Trinajstić, N., 2011, *Relationship between the eccentric connectivity index and Zagreb indices*, Comput. Math. Appl. 62, 1758-1764.

Das, K. C., Xu, K., Cangul, I. N., Cevik, A. S. and Graovac, A., 2013, *On the Harary Index of Graph Operations*, Journal of Inequalities and Applications, SI: Recent Advances in General Inequalities. DOI: 10.1186/1029-242X-2013-339.

Das, K. C., Xu, K. and Gutman, I., 2013, On Zagreb and Harary indices, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 70 (1), 301-314.

Das, K. C., Yurttas, A., Togan, M., Cangul, I. N. and Cevik, A. S., 2013, The Multiplicative Zagreb Indices of Graph Operations, Journal of Inequalities and Applications, 2013:90.

Das, K. C., Zhou, B. and Trinajstić, N., 2009, Bounds on Harary index, Journal of Mathematical Chemistry 46 (4), 1377-1393.

Das, K.C. and Gutman, I., 2004, Some properties of the second Zagreb index. MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 52: 103-112.

Das, K.C., Gutman, I. and Zhou, B., 2009, New upper bounds on Zagreb indices. J. Math. Chem., 46: 514–521.

Eliasi, M., Iranmanesh, A. and Gutman, I., 2012, Multiplicative versions of first Zagreb index. MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 68: 217-230.

Ghorbani, M. and Hosseinzadeh, M. A., 2012, *A new version of Zagreb indices*, Filomat, 26, 93-100.

Gross, J.L. and Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory, Chapman Hall, CRC Press.
Gutman, I., Ruščić, B., Trinajstić, N., Wilcox, C. F., 1975, *Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes*, J. Chem. Phys. 62, 3399-3405.

Gutman, I. and Trinajstić, N., 1972, *Graph theory and molecular orbitals: Total π-electron energy of alternant hydrocarbons*, Chem. Phys. Lett. 17, 535-538.

Gürbüz, R., 2020, *Co Double Graflar Üzerine Bazı Parametreler,* Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Gutman, I., 2011, *Multiplicative Zagreb indices of trees*, Bull. Soc. Math. Banja Luka, 18:17-23.

Gutman, I., 2017, *On Hyper-Zagreb index and coindex*, Bulletin T. CL de l'Academie serbe des sciences et des arts, 42.

Harris, J., Jeffry L. H., and Michael J. M., 2008, *Combinatorics and graph theory*, Springer.

Hansen, P. and Vukicevic, D., 2007, *Comparing Zagreb indices*, Croat. Chem. Acta, 80: 165-168.

Horoldagva, B. and Lee, S.G., 2010, *Comparing Zagreb indices for connected graphs*, Discrete Appl. Math., 158: 1073-1078.

Khalifeh, M.H., Azari, H.Y. and Ashrafi, A.R., 2009, *The first andsecond Zagreb indices of some graph operations*, Discrete Appl. Math., 157: 804-811.

Liu, B. and Gutman, I., 2006, *Upper bounds for Zagreb indices of connected graphs*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 55: 439-446.

Liu, J. and Zhang, Q., 2012, Sharp upper bounds on multiplicative Zagreb indices, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 68:231-240.

Nikolic, S., Kovacevic, G., Milicevic, A., and Trinajstic, N., 2003, The Zagreb indices 30 years after, Croat. Chem. Acta, 76: 113-124.

Trinajstic, N., Nikolic, S., Milicevic, A. and Gutman, I., 2010, On Zagreb indices, Kem. Ind., 59: 577-589.

Todeschini, R., Consonni, V., 2010, New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 64: 359-372.

Togan, M., 2014, Alt Grafların Zagreb indeksleri, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Urlu, B., 2020, Eş duble grafların Zagreb indeksleri , Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü .

Yurttaş, A., 2014, Graf Operasyonlarının Zagreb Ve Çarpımsal Zagreb İndeksleri, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Shirdel, G. H., Rezapour, H., and Sayadi, A. M., 2013, *The Hyper Zagreb Index of Graph Operations*, Iranian J. Math. Chem. 4, 213–220.

Xu, K. and Das, K.C., 2012, *Trees, unicyclic and bicyclic graphs extremal with respect to multiplicative sum Zagreb index*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 68(1): 257-272.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Erden ÖZALAN
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Mersin / 07.11.1989
Telefon	**:**	05074242939
Faks	**:**	
e-mail	**:**	erdenozalan@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Şevket Pozcu Lisesi, Mersin	**2007**
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Matematik	**2015**
Yüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Matematik	**2020**
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2016-2017	**Pusulam Özel Öğretim Kursu**	**Matematik Öğretmeni**
2017-	**Özel Boğaziçi Koleji Anadolu Lisesi**	**Matematik Öğretmeni**

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR