



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MONOJENİK YARIGRUPLAR ÜZERİNDE

NOKTA ÇARPIM GRAFI

Büşra ÇAĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2017

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Büşra ÇAĞAN tarafından hazırlanan “Monojenik Yarıgruplar Üzerinde Nokta Çarpım Grafi” adlı tez çalışması .../.../... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof.Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

.....

Danışman

Yrd.Doç.Dr. Nihat AKGÜNEŞ

.....

Üye

Prof.Dr. Emine Gökçen KOÇER

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet COŞKUN

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this thesis document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Büşra ÇAĞAN
09 / 06 / 2017

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MONOJENİK YARIGRUPLAR ÜZERİNDE NOKTA ÇARPIM GRAFI

Büşra ÇAĞAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2017, 58 Sayfa

Jüri
Yrd.Doç.Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Prof.Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Prof.Dr. Emine Gökçen KOÇER

Graf Teori bir çok alanda uygulanabilirliği olan ve karmaşık gibi görünen problemlerin çözümünü kolaylaştıran bir yapıdır. Graf teorisinin gelişimi ve popülerliği ise hemen hemen tüm bilim dallarında problemlerin modellenmesi, analizi ya da ara işlem olarak kullanılmakta oluşundandır. Graf Teorisinin uygulamasını somutlaştırmak gerekirse bilgisayar ağlarının kurulumu bir örnek olarak verilebilir. Burada herhangi olumlu ya da olumsuz durumlarda ulaşılabilirlik ya da sürdürülebilirlik gibi durumları belirleyen tanımlar, teoriler ve elde edilen sonuçlar mevcuttur. Soyutlamak istediğimizde ise tabii ki Cebir ile birleştirerek yolumuza devam edebiliriz. Bu oluşan yapının önemi ise Graf Teorisi soyutlaştırırken Cebiri somutlaştırmaktır. Bu sayede cebirsel yapıları zihnimizde farklı açılardan canlandırabiliriz.

Bu tez toplam 5 ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, çalışmada kullanılacak Graf Teorisinin genel tanım ve özelliklerini içermektedir.

İkinci bölümde çalışmanın ana konusunu oluşturan sıfır bölen grafları ve çarpım grafları ile ilgili literatür taraması yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, bazı graf çarpımları verilerek, örnekleri ve bazı parametreleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, monojenik yarıgrup tanımı ile özellikleri verildi ve bu yarıgrup üzerinde nokta çarpım grafi tanımlandı, özellikleri incelendi ve bazı parametreleri elde edildi.

Son bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışıldı ve önerilerde bulunuldu.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel Graflar, Graf, Graf Parametreleri, Graf Çarpımları, Monojenik Yarıgrup, Nokta Çarpım Grafi.

ABSTRACT

MS THESIS

THE DOT PRODUCT GRAPH OVER MONOGENIC SEMIGROUPS

Büşra ÇAĞAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MECHANICAL ENGINEERING

Advisor: Asst.Prof.Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2017, 58 Pages

Jury

Yrd.Doç.Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Prof.Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Prof.Dr. Emine Gökçen KOÇER

Graph Theory makes easier the solution of problems which seems complicated and has applicability in many fields. Graph Theory is used almost all fields of science as modelling or analysing. If necessary to concrete application of Graph Theory , installation of computer networks can be given as an example. Here there are definitions, theories and conclusions that determine situations such as availability and sustainability in any positive or negative situation and like every science and each day it is open to development. When we want to abstract it, we can continue with our way by combining it with algebra. The importance of this is the concept of algebra concretize while the abstract of graph theory is abstract. Thus, we can visualize algebraic structures in our mind at different perspectives.

This thesis contains five main sections.

The first section consists of fundamental definitions and properties which use in this study.

In the second section, the literature review which is about zero-divisor graphs and product graphs that constitute the main subject of studying is made.

In the third section, giving some products of graphs, their samples and some parameters are analyzed.

The definition and properties of monogenic semigroups are given and its dot product graph is defined. Then properties are analyzed and some parameters are obtained.

In the final section, the results which have been obtained is discussed and some suggestions is given to researchers.

Keywords: Algebraic Graphs, Dot product graph, Graphs, Graph parameters, Graph products, Monogenic Semigroups.

ÖNSÖZ

Monojenik Yarıgruplar Üzerinde Nokta Çarpım Grafi isimli bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü Öğretim Üyesi, Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ yönetiminde hazırlanmıştır.

Bu çalışmamda bilgisini, tecrübesini ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ'e ve tüm hocalarıma saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca sonsuz sevgisi ile her zaman yanımda olan, yardımını ve sabrını esirgemeyen annem, babam, abim ve nişanlım Tolgahan AYDIN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Büşra ÇAĞAN
KONYA-2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1.GİRİŞ VE TEMEL TANIMLAR.....	1
1.1. Graf Tanımı.....	2
1.2. Derece ve Uzaklık	4
1.3. Altgraf.....	6
1.4. Yürüyüş ve Yol	6
1.5 Uzaklık ve Bağlantılılık.....	7
1.6 Bazı Özel Graf Çeşitleri	8
1.7 Bazı Graf Parametreleri.....	12
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	15
2.1. Sıfır Bölen Grafları Üzerine Çalışmalar	15
2.2. Graf Parametreleri ve Çarpımları Üzerine Çalışmalar	16
3. BAZI GRAF ÇARPIMLARI	19
3.1 Bazı Graf Çarpım Çeşitleri.....	19
3.2 Çarpım Graflar ile ilgili Bazı Sonuç ve Teoremler	25
4. MONOJENİK YARIGRUPLAR ÜZERİNDE NOKTA ÇARPIM GRAFI	30
4.1. Giriş ve Temel Tanımlar.....	30
4.2. Monojenik Yarıgrup Üzerinde Nokta Çarpım Grafi	30
4.3. $\Gamma(S)$ in Bazı Graf Parametreleri.....	32
4.4. $\Gamma(S)$ in Mükemmel Graf Özelliği	36
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	46
5.1. Sonuçlar.....	46
5.2. Öneriler	46
KAYNAKLAR	47



SİMGELER VE KISALTMALAR

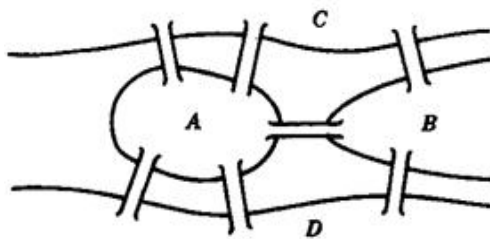
Simgeler

$G=(V,E)$	Graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
W_n	Tekerlek graf
$d(u,v)$	u ve v köşeleri arası uzaklık
$rad(G)$	G nin yarıçapı
$diam(G)$	G nin uzaklığı
$\chi(G)$	G nin renklendirme sayısı
$\Delta(G)$	Maksimum derece
$\sigma(G)$	Minimum derece
$\omega(G)$	Klik Sayısı
$\gamma(G)$	G nin baskınlık sayısı
$d_G(x)$	x köşesinin derecesi
$\delta(G)$	Minimum derece
$gr(G)$	G grafının çevrimi
C_n	Çevre graf
P_n	Yol graf
K_n	Tam graf
$G_1 \square G_2$	Kartezyen çarpım grafi
$G_1 \times G_2$	Tensör çarpım grafi
$G_1[G_2]$	Lexicographical graf
$G_1 \bowtie G_2$	Homomorfik çarpım grafi
$G_1 \blacksquare G_2$	Strong çarpım grafi

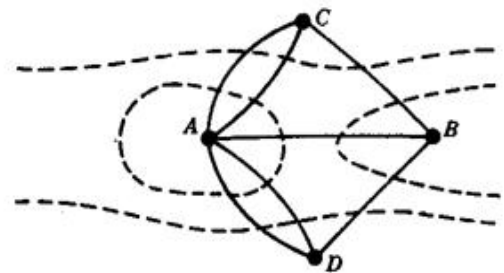
1. GİRİŞ VE TEMEL TANIMLAR

Grafların yegane amacı lazım olan her bilgiyi, lazım olmayacak her fazlalıktan uzağa odaklamaktır. Bu sebeple graflar karmaşık problemleri daha basit olarak düşünmemizi ve yalnızca çözümde yardımcı olacak verilere odaklanmamızı sağlayarak problemlerin çözümünü kolaylaştırır. Kullanım alanlarının ise yalnızca matematik biliminde sınırlı olmayıp birçok farklı alanda uygulanabilir olması popülerliğinin önemli sebeplerinden bir tanesidir. Örneğin; elektriksel devreler, köprüler, organik moleküller, bilgisayar bilimi, kimya, yöneylem araştırmaları, elektrik mühendisliği, dil bilimi ve ekonomi gibi. Ayrıca ekosistemdeki bazı somut etkileşimlerde, sosyolojik ilişkiler, veritabanları ya da bilgisayar programlarındaki akımlarda da kullanılıyor (Gross ve Yellen, 2004).

Graf teori, 1736 yılında Leonard Euler'in Königsberg Köprüsü problemine çözüm yolu olarak ortaya çıkmıştır. Bu problemi şöyle açıklayabiliriz: Königsberg'de (şimdi Rusya'daki Kaliningrad) Pregel Nehri boyunca uzanan iki ada, birbirleri ve kıyıları ile yedi köprü aracılığıyla bağlantılıdır, Şekil 1.a'da gösterildiği gibi. Merak edilen durum ise A,B,C ya da D noktalarının herhangi birinden başlayarak her köprüden yalnızca bir kez geçme koşulu ile tekrar başlangıç noktasına dönmektir.



Şekil 1.a



Şekil 1.b

Köprü yapısı; köşeler, yerleri ve kenarlar, köprüleri temsil etmek üzere Şekil 1.b'deki gibi bir graf olarak modellenmiştir.

Aslında graf teorisinin ortaya çıkmasında büyük rol oynayan Königsberg Köprüsü probleminde amaç bir yürüyüş gibi görünse de şüphe yok ki graf teoriye yakın zamanlardaki ilginin sebeplerinden bir tanesi de farklı alanlarda uygulanabilir oluşudur. Graf teori ile ilgili ilk çalışma 1736 yılında olmasına rağmen bazı önemli sonuçlar 19.yüzyılda bulunmuştur. Graf teori üzerine ilk kitap (Theorie der endlichen und unendlichen Graphen) 1939 yılında Macar asıllı Denes König tarafından yazılmıştır.

Graf Teori ve Cebirsel yapılar ile birlikte yapılan çalışmalar da araştırmacılar tarafından büyük ilgi görmüştür. İlk olarak 1988 yılında I.Beck graflar ile halka teorisini birleştirmiştir. Beck bu çalışmasında değişmeli halkaların graflarının renklendirme numarasıyla da ilgilenmiştir (Beck, 1988). Bu çalışmaya ilerleyen zamanlarda farklı olarak sıfır bölen ve nokta çarpım grafları da eklenerek graf ve cebir alanlarında ortak çalışmalara devam edilmiştir. Anderson ve Livingston da değişmeli halkaların sıfır bölen graflarını çalıştılar (Anderson ve Livingston, 1999). Bu graflardan Sıfır bölen grafları, değişmeli yarı gruplar üzerinde de çalışıldı (DeMeyer ve DeMeyer, 2005, DeMeyer ve ark., 2002, DeMeyer ve arkadaşları, 2010). Sıfır bölen graflarından sonra nokta çarpım grafları da büyük ilgi görmüştür. Bu graflar da farklı cebirsel yapılar üzerinde çalışılmıştır. Halkalar üzerinde nokta çarpım grafları bir çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır (Anderson ve Badawi, 2008, Akbari ve Mohammadian, 2004). Akgüneş de monojenik yarıgrupların nokta çarpım grafini tanımladı ve bu grafin bazı parametreleri için belli ve keskin sonuçlar buldu (Das ve ark., 2013). Nokta çarpım grafi ile ilgili son çalışma olarak değişmeli halkalar üzerinde Badawi tarafından çalışıldı (Badawi, 2015). Badawi halkaların hem nokta çarpım grafi hem de sıfır bölen grafi ile ilgilendi. Graf teorisi ile halkanın tamlik bölgesini kullanarak bazı sonuçlar elde etti.

Öncelikle temel graf terim bilgisi ve örnekleri ile başlayacağız. Daha sonra bazı graf çeşitleri ile ilgili çalışmaları göreceğiz. Bu bölümdeki temel tanımlar Gross ve Yellen'in Handbook of Graph Theory (Gross ve Yellen, 2004) kitabından alınmıştır.

1.1. Graf Tanımı

Tanım 1.1.1 Nokta ve bu noktalar arasında bağlantı içeren herhangi matematiksel objeler **graf** olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.2 Bir graftaki tüm bağlantılar yönsüz ise **yönsüz graf** olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.3 Bir G grafi $G=(V,E)$; V ve E şeklinde iki kümeyi içerir. V kümesinin elemanları **köşeler** (vertices), E kümesinin elemanları ise **kenarlar** (edges) olarak adlandırılır. Bu şekilde tanımlanan $G=(V,E)$ ikilisine **graf** (graph) denir.

Tanım 1.1.4 Her kenar bir ya da iki köşeyle bağlantılıdır. Bu köşelere **bitiş noktaları** (endpoints) denir.

Tanım 1.1.5 Köşe ve kenar kümesi sonlu olan bir graf **sonlu graf** (finite graph) olarak adlandırılır. Sonlu graflarda köşe kümesi $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olmak üzere $|V|=n$ sayısına **grafın mertebesi** (order); kenar kümesi $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olmak üzere $|E|=m$ sayısına da **grafın boyutu** (size) denir.

Tanım 1.1.6 Eğer u ve v köşesi bir kenarla birleşiyor ise u köşesi ile v köşesi **komşu köşeler** olarak adlandırılırlar.

Tanım 1.1.7 Ortak bir bitiş noktasına sahip olan iki kenara **komşu kenarlar** denir.

Tanım 1.1.8 Çoklu-kenar (multi-edge) aynı bitiş noktalarına sahip iki ya da daha fazla kenardan oluşur.

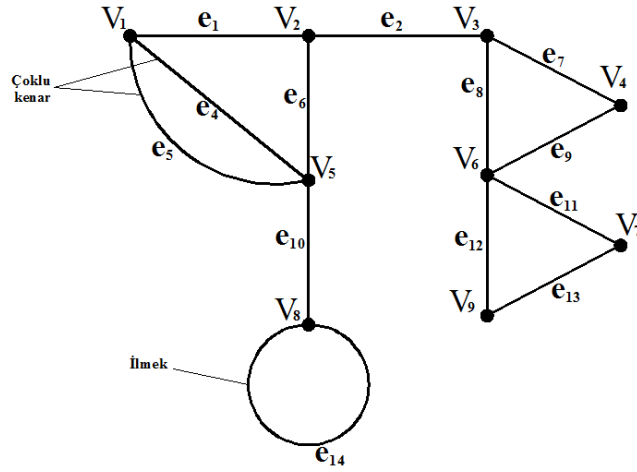
Tanım 1.1.9 Köşeler arasında tam bir kenar var ise **basit komşuluk** (simple adjacency) olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.10 Tek bitiş noktası ile kendine bağlanan kenar **ilmek** (loop) olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.11 Bir graf ilmek ve çoklu-kenar içermiyor ise bu grafa **basit graf** denir. Aksi durumda ise bu grafa **çoklu graf** denir.

Tanım 1.1.12 Bir $G=(V,E)$ grafının V köşe kümesi ve E kenar kümesi boş küme ise bu grafa **boş graf** (null graph) denir.

Örnek 1.1.13 Köşe kümesi $V=\{v_1, v_2, \dots, v_9\}$ ve kenar kümesi $E=\{e_1, e_2, \dots, e_{14}\}$ dolayısıyla mertebesi $|V|=9$ ve boyutu $|E|=14$ olan $G=(V,E)$ sonlu çoklu grafi aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil 1.1 Çoklu Graf örneği

Çalışmamızda yönsüz ve basit graflar üzerinde çalışılacaktır. Akıcılık açısından graf olarak söylenecektir. Graf teorisinin çoğu teorisi de basit graflarla ilgilidir.

1.2. Derece ve Uzaklık

Graf teorisindeki iki önemli temel kavram köşe derecesi ve iki köşe arasındaki uzaklıktır.

Tanım 1.2.1 V kümesinden alınan bir v_i köşesine komşu olan köşelerin sayısına v_i köşesinin derecesi denir ve $d_G(v_i)$ ile gösterilir. Bir grafta her bir köşe komşu olduğu köşeye 1 derece kazandırır. İlmekte ise köşe kendisine de komşu olduğundan köşeye 2 derece kazandırır. Bir graf yapısında derecesi 1 olan köşeye uç (pendant) köşe, derecesi 0 olan köşeye ise izole (isolated) köşe denir.

Örnek 1.2.2 Aşağıdaki basit graf örneğinde v_7 izole, v_5 uç köşe ve herhangi bir köşe v_3 ün derecesi $d_G(v_3)=4$ tür.

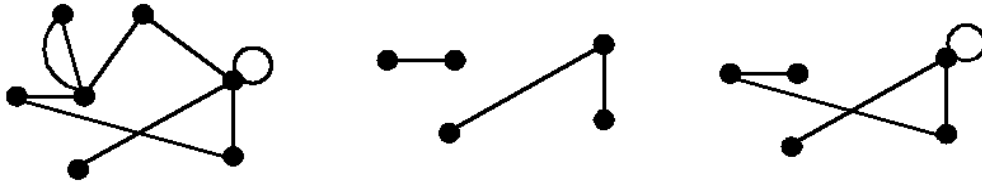
1.3. Altgraf

Tanım 1.3.1 $G=(V_1,E_1)$ ve $H=(V_2,E_2)$ birer graf olmak üzere, eğer $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ koşulu sağlanıyorsa, H grafı G grafının **altgrafıdır** (subgraph) denir.

Tanım 1.3.2 $G=(V_1,E_1)$ ve $H=(V_2,E_2)$ birer graf olmak üzere, eğer $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ koşulunun yanında H grafında tüm köşeler diğer köşeler ile komşu oluyorsa H grafına G grafının **tam altgrafı** denir.

Tanım 1.3.3 G bir graf ve G grafının nokta kümesinin boştan farklı alt kümesi ise S olsun. Köşe kümesi S olan ve kenar kümesi de G nin S deki köşe çiftleriyle komşu olan tüm kenarlarından oluşan altgrafa G nin **indüklenmiş alt grafı** (induced subgraph) denir ve $\langle S \rangle$ ile gösterilir.

Örnek 1.3.4 Aşağıda sırası ile bir graf ve bu grafın bir altgrafı ve bir indüklenmiş altgrafı gösterilebilir.



Şekil 1.3 Bir graf, alt grafı ve indüklenmiş alt grafı

1.4. Yürüyüş ve Yol

Tanım 1.4.1 Köşe ve kenarların $j=1, \dots, n$ ve v_{j-1} ve v_j köşeleri e_j nin bitiş noktaları olmak üzere $W=v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$ alternatif dizisi bir G grafında **yürüyüş (walk)** denir.

Başlangıç köşesi (initial vertex) v_0 dir. Bitiş köşesi (final vertex) v_n dir. İç köşe (internal vertex) ne başlangıç ne bitiş olan köşedir. Başlangıç ve bitiş köşeleri aynı ise bu yürüyüş **kapalı yürüyüş** olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.2 Yürüyüş uzunluğu (length of a walk) kenarların numarasıdır.

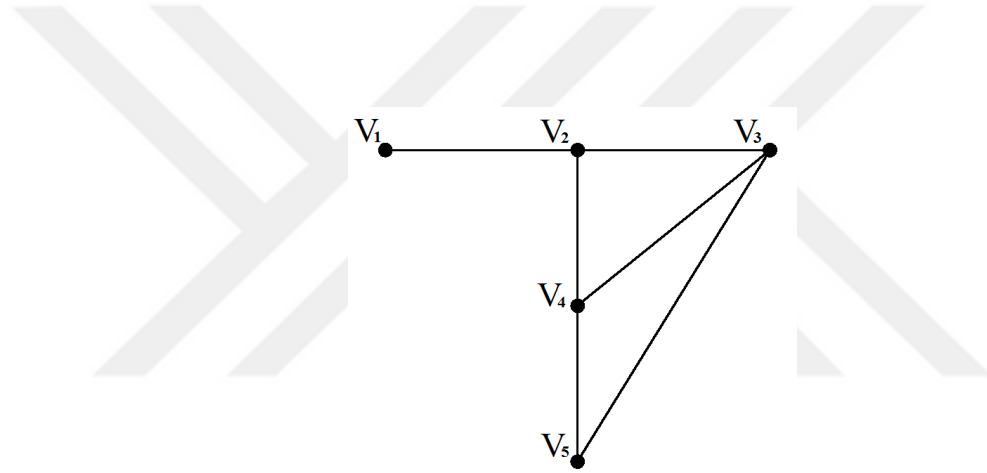
Tanım 1.4.3 Bir grafta **iz (trail)** hiçbir kenarın birden fazla geçilmediği yürüyüştür.

Tanım 1.4.4 Bir G grafının **euler izi (eulerian trail)** o grafın her kenarından yalnızca bir kere geçildiği yürüyüştür.

Tanım 1.4.5 Bir grafta **yol (path)** o grafta hiçbir iç noktanın tekrar edilmediği izdir.

Tanım 1.4.6 Başlangıç ve bitiş noktaları dışında kalan diğer tüm köşeleri ve tüm kenarları farklı olan kapalı yürümeye **devir** denir.

Örnek 1.4.7 Aşağıdaki şekilde verilen G grafı için $v_1v_2v_4v_5v_4v_3$ 5 uzunluğunda bir yürüyüştür fakat bir iz değildir. $v_1v_2v_4v_3v_5v_4$ bir iz fakat bir yol değildir. Bu grafta $v_1v_2v_4v_3$ bir yoldur ve $v_4v_3v_5v_4$ de bir devirdir.



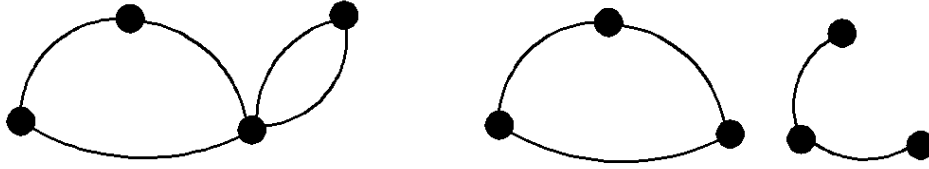
Şekil 1.4 G grafı

1.5 Uzaklık ve Bağlantılılık

Tanım 1.5.1 Bir grafta herhangi iki köşe x ve y arasındaki **uzaklık** (distance) bu iki köşe arasındaki en kısa yürüyüşün uzunluğudur ve $d(x, y)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.2 Bir grafta her iki köşe çifti arasında bir yürüyüş varsa bu grafa **bağlantılı** (connected) denir. Aksi durumda bu grafa **bağlantısız** (disconnected) **graf** denir. Bağlantısız graflarda iki köşe arasında bir yürüyüş yoksa aralarındaki uzaklığa sonsuzdur denir.

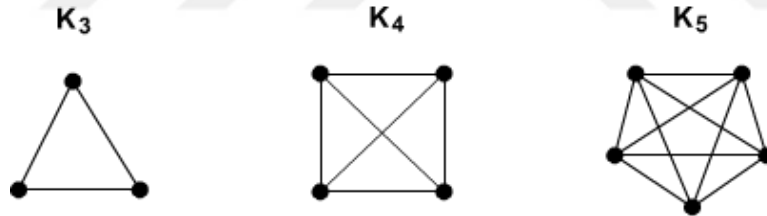
Örnek 1.5.3 Aşağıdaki şekilde bağlantılı bir çoklu graf ve bağlantısız bir graf örneğini görebiliriz.



Şekil 1.5 Bağlantılı ve bağlantısız graf örneği

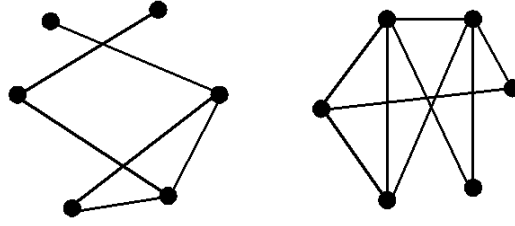
1.6 Bazı Özel Graf Çeşitleri

Tanım 1.6.1 Bir G grafının köşelerinin her ikisi komşu ise G ye **tam graf** (complete graph) denir ve n mertebeli bir graf K_n ile gösterilir.



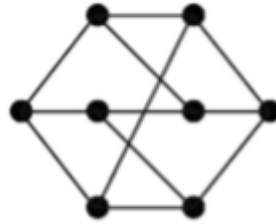
Şekil 1.6.1 $n=3,4$ ve 5 için tam graflar

Tanım 1.6.2 Köşe kümesi G grafının köşe kümesi ile aynı, kenar kümesi ise G de olmayan kenarlardan oluşan ve dolayısıyla komşu olmayan köşeleri birbirine komşu yapan grafa G grafının **tamamlayıcı (tümleyen) grafi** denir.



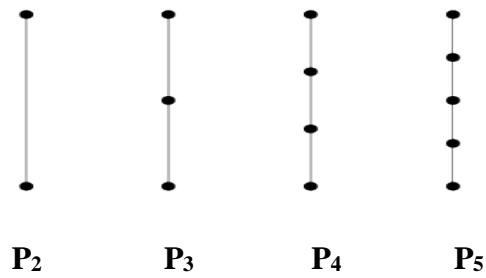
Şekil 1.6.2 Bir graf ve tamamlayıcı grafi

Tanım 1.6.3 Bir grafın tüm köşeleri aynı r dereceye sahip ise bu grafa **r -düzgün graf** denir.



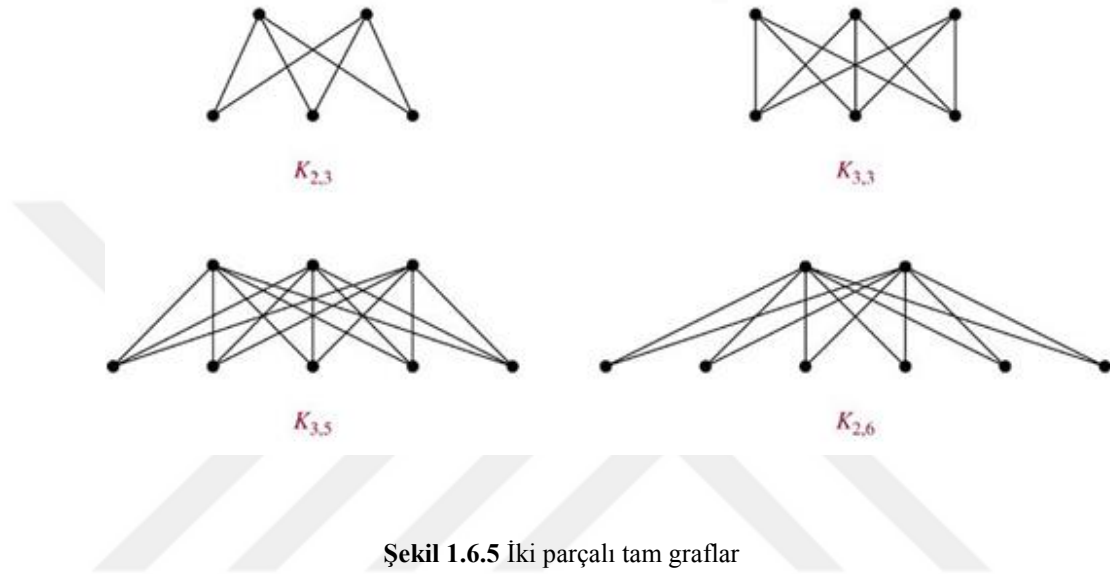
Şekil 1.6.3 3-düzgün graf

Tanım 1.6.4 Bir grafın başlangıç ve bitiş köşelerinin derecesi 1 ve diğer köşelerinin derecesi 2 ise bu grafa **yol (path) graf** denir ve mertebesi n olan bir yol grafi P_n ile gösterilir.



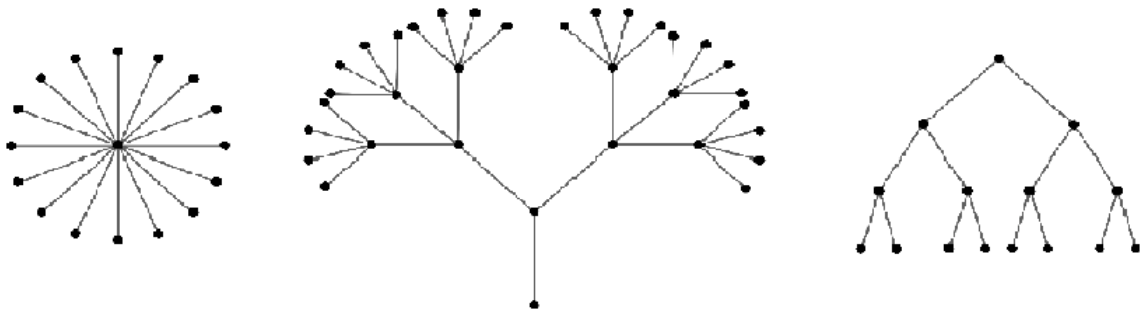
Şekil 1.6.4 Bazı yol graflar

Tanım 1.6.5 Bir G grafinin köşe kümesini iki tane maksimum mertebeli bağımsız ve ayrık kümeye ayırmak mümkünse o grafa **iki parçalı graf** (bipartite graph) denir. Köşe kümeleri V_1 ve V_2 olan iki parçalı bir grafta eğer tüm köşeler karşılıklı olarak birbirleriyle komşu ise bu grafa **iki parçalı tam graf** (bipartite complete graph) denir. $|V_1|=m$ ve $|V_2|=n$ olmak üzere $K_{m,n}$ şeklinde gösterilir.



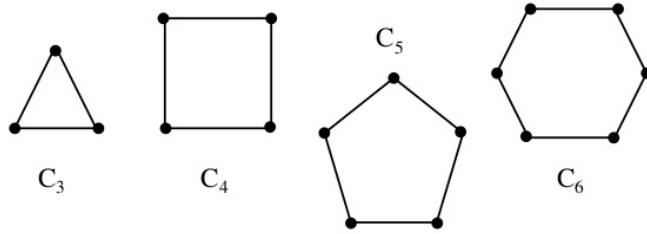
Şekil 1.6.5 İki parçalı tam graflar

Tanım 1.6.6 Bağlantılı bir graf devir içermiyor ise bu grafa **ağaç graf** denir ve T ile gösterilir.



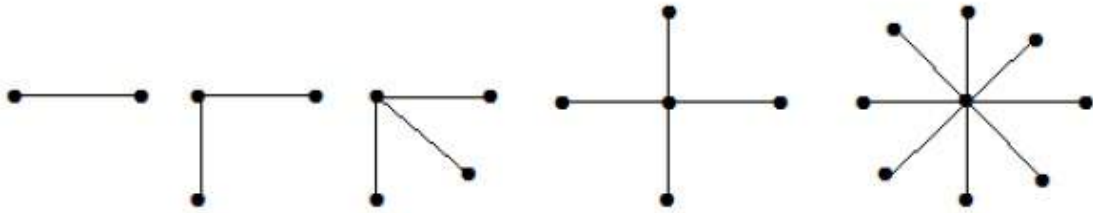
Şekil 1.6.6 Bazı ağaç graflar

Tanım 1.6.7 Bir G grafının başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan ve tüm köşelerinin derecesi 2 olan graf **çevre (cycle) graf** olarak adlandırılır. Özel olarak n köşeli bir çevre graf C_n ile gösterilir.



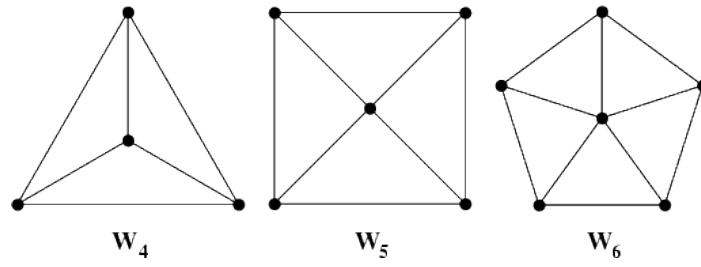
Şekil 1.6.7 Çevre graflar

Tanım 1.6.8 n köşeli bir ağaç grafın, bir köşesinin derecesi $n-1$; diğer köşelerinin dereceleri 1 olan grafa **yıldız graf** denir ve S_n ile gösterilir. Yıldız graflar tam iki parçalı graf olarak da adlandırılırlar. n köşeli bir S_n yıldız grafi iki parçalı $K_{1,n}$ iki parçalı tam graftır.



Şekil 1.6.8 Yıldız graflar

Tanım 1.6.9 Köşe sayısı n olan bir C_n çevre grafının tüm köşelerine bir kenar ile komşu olan yeni bir köşe eklenmesi ile oluşan yeni grafa **tekerlek (wheel) graf** denir ve W_n ile gösterilir.



Şekil 1.6.9 Tekerlek graflar

1.7 Bazı Graf Parametreleri

Tanım 1.7.1 Bir G grafında x ve y köşeleri için x ten y ye en kısa yolun uzunluğuna x köşesinin y köşesine uzaklığı denir ve $d(x,y)$ ile gösterilir.

Tanım 1.7.2 Bir $G=(V,E)$ grafından alınan v köşesi ile v ye en uzak köşe arasındaki uzaklığa v köşesinin **eksantiriği (eccentricity)** denir ve $e(v)$ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile;

$$e(v)=\max\{d(v,x) : x \in V(G)\}$$

gösterilebilir.

Tanım 1.7.3 Bağlantılı bir G grafının köşeleri arasındaki en küçük eksantiriğe G grafının **yarıçapı (radius)** denir ve

$$rad(G)=\min\{e(v) : v \in V(G)\}$$

ile ifade edilebilir.

Tanım 1.7.4 Bağlantılı bir G grafında köşeleri arasındaki en büyük eksantiriğe G grafının **çapı (diameter)** denir ve $diam(G)$ ile gösterilir. Başka bir ifade ile;

$$diam(G)=\max\{e(v) : v \in V(G)\} \text{ dir.}$$

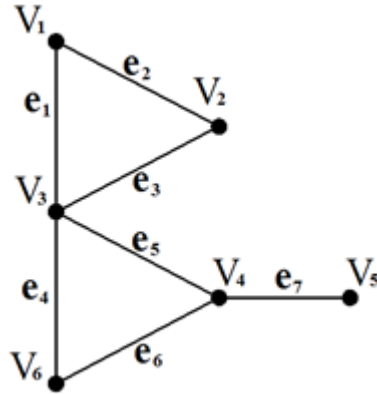
Teorem 1.7.5 (Ostrand, 1973) Herhangi bir G grafi için

$$rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$$

eşitsizliği mevcuttur.

Tanım 1.7.6 Bir G grafının içerdiği en kısa devir **çevrim** (girth) olarak adlandırılır ve $gr(G)$ ile gösterilir.

Örnek 1.7.7 Aşağıdaki şekilde verilen G grafının bazı köşeleri arasındaki uzaklıklar $d(v_1, v_5)=3$, $d(v_1, v_2)=1$ ve $d(v_1, v_4)=2$ şeklindedir. Çap köşeler arasındaki en büyük değer olduğundan G grafının çapı $diam(G)=3$ tür. Benzer şekilde yarıçapı ise $rad(G)=2$ dir.



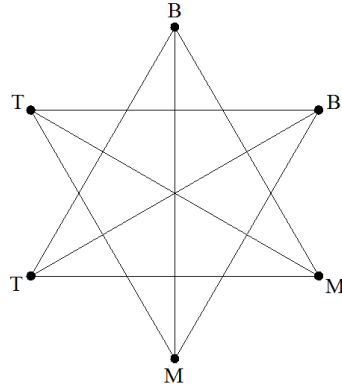
Şekil 1.7.1 Bir graf örneği

Tanım 1.7.8 V bir G grafının köşe kümesi ve $D \subseteq V$ olmak üzere D kümesindeki her eleman V/D kümesindeki herhangi bir elemana komşu oluyor ise bu D kümelerinin en küçüğünün eleman sayısına **baskınlık sayısı** (domination number) denir ve $\gamma(G)$ ile ifade edilir.

Tanım 1.7.9 Bir grafın **köşe renklendirmesi** grafın köşe kümesi V_G den, elemanları renkler olarak adlandırılan C kümesine bir fonksiyondur. Eğer iki komşu köşe her zaman farklı renklerle belirtilebilirse köşe renklendirmesi **uygun** olur. Bir graf c ya da daha az sayıda renkle uygun köşe renklendirmesine sahipse bu grafa **c-boyanabilir** denir. Bir G grafının (köşe) **kromatik numarası** c -boyanabilir olan G grafının en küçük c sayısıdır ve $\chi(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.7.10 (Gross ve Yellen, 2004) Bir grafın içerdiği tam altgrafların her birine **klik** denir. Kliklerin içindeki en fazla köşe sayısına sahip olan kliğin köşe sayısına da grafın **klik sayısı** (clique number) denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir.

Örnek 1.7.11 Aşağıdaki şekilde verilen G grafinin köşelerinin B (beyaz), T (turkuaz) ve M (mavi) ile renklendirerek kromatik sayısını 3 olarak bulabiliriz. Ayrıca en büyük tam altgrafının da köşe sayısı 3 olduğu için bu grafin klik sayısı da 3 tür.



Şekil 1.7.2 Renklendirme ve Klik sayısı

Teorem 1.7.12 (Bondy ve Murty, 1978) Herhangi bir G grafi için

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

eşitsizliği mevcuttur.

Teorem 1.7.13 (Gross ve Yellen, 2004) Herhangi bir G grafi için

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

eşitsizliği sağlanır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Çalışmanın bu bölümünde araştırmacılar tarafından incelenmiş ve kullanım alanlarının genişletildiği graf parametreleri, monojenik yarıgruplar, graf çarpımlar ve nokta çarpım grafları hakkında literatürde var olan bazı çalışmaların içeriğinden bahsedilecektir.

Öncelikle graf parametreleri ve monojenik yarıgruplar ile ilgili olan çalışmalardan bahsedelim.

2.1. Sıfır Bölen Grafları Üzerine Çalışmalar

Beck (1988), "*Coloring of Commutative Rings*" isimli eserinde graf teorisi ile halka teorisini birleştiren ilk çalışma yapılmıştır. Ayrıca değişmeli halkaların sıfır bölen grafları tanımlanarak bu grafların renklendirmesi ile ilgilenilmiştir.

Anderson ve Nasser (1991), "*Beck's Coloring of Commutative Ring*" adlı çalışmalarında Beck'in "Coloring of Commutating Rings" isimli eserinde sıfır bölen grafların renklendirme sayısı ile ilgili bıraktığı açık problem çözülmüştür.

Anderson ve Livingston (1999), "*The Zero-Divisor Graph of Commutative Ring*" adlı çalışmalarında değişmeli halkaların sıfır bölen grafları ile ilgili bir çok teorem bulunmuştur. Bir değişmeli halkanın sıfır bölen grafinin bağlantılı ve uzaklığının 3 e eşit ya da 3 ten küçük olduğu gösterilmiştir.

DeMeyer ve ark. (2002), "*The Zero-Divisor Graphs of a Commutative Semigroup*" çalışmasında sıfır bölen graflarını değişmeli yarıgruplar üzerinde çalışılmıştır.

Akbari ve Mohammadian (2004), "*On the Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring*" adlı çalışmalarında değişmeli halkanın sıfır bölen grafinin kenar kromatik numarasıyla ilgilenmişlerdir.

DeMeyer ve DeMeyer (2005), "*Zero-Divisor Graphs of Semigroups*" adlı çalışmasında ise yarıgrupların değişmeli olmadığı durumlarda da yarıgruplar için sıfır bölen graf çalışmalarına devam edilmiştir.

Anderson ve Badawi (2008), "*On the Zero-Divisor Graph of a Ring*" çalışmalarından R halkasının sıfırdan farklı olan sıfır bölenleri ile halkanın elemanları arasında kesin bölünebilme koşulları ya da R nin idealleri ya da asal idealleri arasında karşılaştırılabilirlik koşullarını sağlayan R halkasının sıfır bölen grafi incelenmiştir.

DeMeyer ve ark. (2010), "*The Zero-Divisor Graph Associated to a Semigroup*" isimli çalışmalarında hem graf hem de cebirsel teoriyi kullanarak sıfır bölen grafları tanımak için gerekli olan kenar sayısının alt sınırı elde edilmiştir.

Sharma ve ark. (2011), "*Analysis of Adjacency Matrix and Neighborhood Associated with Zero-Divisor Graph of Finite Commutative Rings*" isimli çalışmada sonlu değişmeli halkalar üzerinde sıfır bölen graflarının komşuluk kümesi ile ilgilenildi ve komşuluk matrisi ile ilgili sonuçlar ve teoremler elde edildi.

Akgüneş ve Togan (2012), "*Some Graph Theoretical Properties Over Zero-Divisor Graphs of Special Finite Commutative Rings*" isimli çalışmadan p ve q asalları olmak üzere $Z_p \times Z_q$ halkasının sıfır bölen graflarının graf parametreleri incelenmiştir.

Akgüneş (2013), "*Graf Parametleri ve Cebirsel Yapılara Grafsal Yaklaşımlar*" isimli doktora tezinde düzensizlik indeksi kullanılarak bir grafın yarıçapı için kuvvetli bir sınır elde edilmiştir. Ayrıca monojenik yarıgruplar üzerinde tanımlanan özel grafların topolojik indekslerinin monogenik yarıgrupun mertebesi ile ifade edileceği gösterilmiştir.

Das ve ark. (2013), "*On a Graph of Monogenic Semigroups*" adlı çalışmasında monojenik yarıgrupların grafi tanımlanmış ve çeşitli parametreleri incelenmiştir. Ayrıca bu grafın mükemmel bir graf olduğu gösterilmiştir. Bu graf üzerinde kartezyen çarpım grafının özellikleri de incelenmiştir.

Badawi (2015), "*On the Dot Product Graph of a Commutative Ring*" çalışmasında ise değişmeli halkaların sonlu kartezyen çarpımı ile oluşturulan R halkası için genel nokta çarpımı grafi $TD(R)$ ve sıfır bölen nokta çarpım grafi $ZD(R)$ tanımlanarak $ZD(R)$ nin $TD(R)$ nin indüklenmiş altgrafi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu grafların bağlantılı olması için yeter koşullar verilmiştir.

Şimdi de Graf çarpımları ve nokta çarpım graflarla ilgili bazı çalışmalara bakalım.

2.2. Graf Parametreleri ve Çarpımları Üzerine Çalışmalar

Berge (1962), "*The Theory of Graphs and Its Applications*" isimli eserinde mükemmel grafları belirlemek için kullanılacak Berge Graf olarak adlandırılan grafi ve özellikleri tanıtılmıştır. Ayrıca bu çalışmada genel graf bilgisi de bulunmaktadır.

Sabidussi (1957), "*Graphs with Given Group and Given Graph-Theoretical Properties*" isimli çalışmada iki grafın kartezyen çarpım grafının kromatik numarasının bu iki graftan kromatik numarası büyük olanın değerine eşit olduğu bulunmuştur.

Hedetniemi (1966), "*Homomorphisms of Graphs and Automata*" isimli çalışmada iki grafin tensör çarpımlarının kromatik numarasının bu iki graftan kromatik numarası küçük olanın değerine eşit olduğu bulunmuştur.

Ostrand (1973), "*Graphs with specified radius and diameter*" adlı çalışmasında yarıçap ve uzaklık ile ilgili $rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$ eşitsizliği bulunmuştur.

Geller ve Stahl (1975), "*The Chromatic Number and Other Functions of the Lexicographic Product*" isimli çalışmada iki grafin lexico çarpımlarının kromatik numarasının köşe ve kenar bağlantılılığı ve köşe bağımsızlığı grafların parametrelerinin değerleriyle ilişkisi açıklandı.

Bondy ve Murty (1976), "*Graph Theory with Applications*" isimli çalışmalarında önemli graf parametrelerinden renklendirme sayısı için grafin maksimum derecesi ile ilişkili bir üst sınır elde etmiştir.

Stahl (1976), "*n-Tuple Colorings and Associated Graphs*" isimli çalışmada her bir köşeye n renk atayan grafik x_n ile tanımlanmış ve çeşitli grafların kromatik sayıları hesaplanmıştır.

Doyle ve Graver (1977), "*Mean Distance in a Graph*" isimli çalışmada ortalama uzaklık için grafin köşe sayısı ve uzaklığı ile ilgili sınırlar bulunmuştur.

Vesztergombi (1978/79), "*Some Remarks on the Chromatic Number of the Strong Product of Graphs*" adlı çalışmada iki çevre grafin strong çarpımlarının kromatik numarasının değeri bulunmuştur.

Erdős ve ark. (1989), "*Radius, diameter and minimum degree*" adlı çalışmalarında grafin uzaklığı ve yarıçapı ile ilgili grafin yalnızca köşe sayısını ve en küçük derecesini içeren sınırlar bulmuştur.

Čížek ve Klavžar (1994), "*On the Chromatic Number of the Lexicographic Product and the Cartesian Sum of Graphs*" isimli çalışmada iki grafin lexicographical grafinin kromatik numarası üzerinde çalışılmıştır.

Kouider ve Winkler (1997), "*Mean Distance and Minimum Degree*" isimli çalışmada bir grafin ortalama uzaklığının grafin merteye ve en küçük derecesi ile bağlantılı bir üst sınırı elde edilmiştir.

Bollobas (1998), "*Modern Graph Theory*" isimli eserde temel graf bilgisi verilmiştir.

Imrich ve Klavzar (2000), "*Product Graphs: Structure and Recognition*" isimli çalışmada bir çok garf çarpımı incelenmiş ve özellikleri ortaya konulmuştur.

Gross ve Yellen (2004), "*Handbook of Graph Theory*" adlı eserlerinde graf teorisinin temel terim bilgisi detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Lovasz (2006), "*Normal Hypergraphs and the Perfect Graph Conjecture*" adlı çalışmada normal hipergaf tanımı yapılmış ve hangi durumlarda bir hipergrafın normal olacağı kanıtlanmıştır. Berge ve Las Vernas'ın ilgili bir teoremi için yeni bir kanıt verilmiştir.

Akgüneş ve Çevik (2013), "*A New Bound of Radius of Irregularity Index*" isimli çalışmalarında yarıçap (radius) graf parametresi için düzensizlik indeksi (irregularity index) yardımı ile kuvvetli bir üst sınır elde edilmiştir.



3. BAZI GRAF ÇARPIMLARI

Bu bölümde graf çarpımlarından bahsedilecektir. Graf çarpımlarının kimya gibi birçok farklı yerlerde disiplinlerarası kullanım alanları vardır. Öncelikle boştan farklı herhangi iki grafın nasıl çarpılacağını köşe ve kenar kümelerinin nasıl yapılandırıldığını görelim. Bu bölümdeki temel tanımlar Imrich ve Klavzar'ın Product Graphs: Structure and Recognition (Imrich ve Klavzar, 2000) isimli kitabından alınmıştır.

Tanım 3.1 G_1 ve G_2 iki graf olsun. Köşeleri $V(G_1) \times V(G_2)$ kartezyen kümesinden oluşan ve kenarları “bir kurala bağlı” olarak elde edilen grafa G_1 ve G_2 **graflarının çarpımı** denir ve $G_1 * G_2$ ile ifade edilir.

3.1 Bazı Graf Çarpım Çeşitleri

Tanım 3.1.1 G_1 grafının köşe kümesi V_1 , G_2 grafının köşe kümesi V_2 olmak üzere $V = V_1 \times V_2$ kartezyen kümesinden $u = (u_1, u_2)$ ile $v = (v_1, v_2)$ elemanlarını alalım.

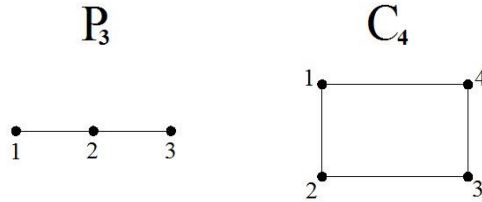
$$i) \quad u_1 = v_1 \text{ ve } (u_2, v_2) \in E(G_2)$$

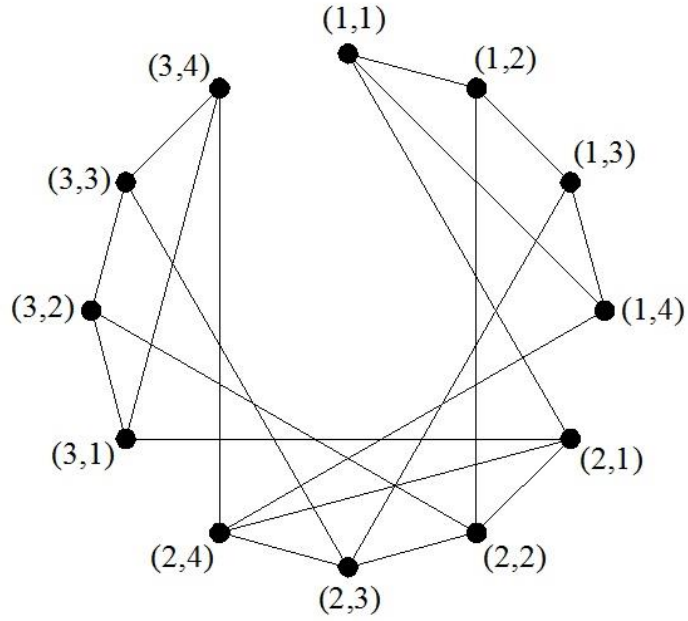
ya da

$$ii) \quad (u_1, v_1) \in E(G_1) \text{ ve } u_2 = v_2$$

şartı sağlanıyorsa u ile v köşeleri komşudur denir. Bu şekilde oluşan grafa G_1 ile G_2 grafının **kartezyen çarpım grafi** (cartesian product graph) denir ve $G_1 \square G_2$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.2 $G = P_3 \square C_4$ kartezyen çarpım grafi için tanımladığımız özellikleri bulalım.





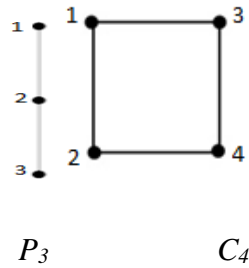
Şekil 3.1.1 P_3 ve C_4 grafi ve Kartezyen Çarpım grafları

Tanım 3.1.3 G_1 grafinin köşe kümesi V_1 , G_2 grafinin köşe kümesi V_2 olmak üzere $V=V_1 \times V_2$ kartezyen kümesinden $u=(u_1, u_2)$ ile $v=(v_1, v_2)$ elemanlarını alalım.

$$(u_1, v_1) \in E(G_1) \text{ ve } (u_2, v_2) \in E(G_2)$$

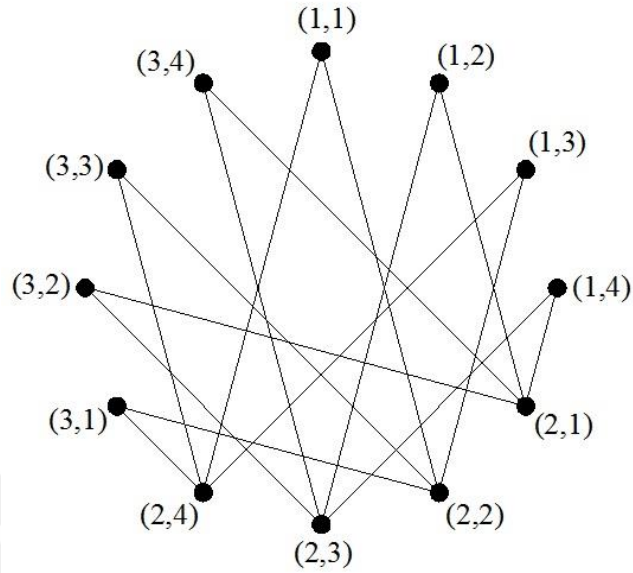
şartı sağlanıyorsa u ile v köşeleri komşudur denir. Bu şekilde oluşan grafa G_1 ile G_2 grafinin **tensor çarpım grafi** (tensor product) denir ve $G_1 \times G_2$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.4 $G=P_3 \times C_4$ tensor çarpım grafi için tanımladığımız özellikleri bulalım.



Şekil 3.1.2 P_3 ve C_4 grafi

G çarpım grafının köşe kümesi $V=\{(u_1,u_2) : u_1 \in V(P_3), u_2 \in V(C_4)\}$ şeklindedir ve G tensör çarpım grafının gösterimi;



Şekil 3.1.3 $P_3 \times C_4$

şeklindedir. Burada G çarpım grafının mertebesi 12, boyutu 16 dır. $der((1,2))=2$ ve $der((2,3))=4$ olduğundan $\sigma(G)=2$ ve $\Delta(G)=4$.

Tanım 3.1.5 G_1 grafının köşe kümesi V_1 , G_2 grafının köşe kümesi V_2 olmak üzere $V=V_1 \times V_2$ kartezyen kümesinden $u=(u_1, u_2)$ ile $v=(v_1, v_2)$ elemanlarını alalım.

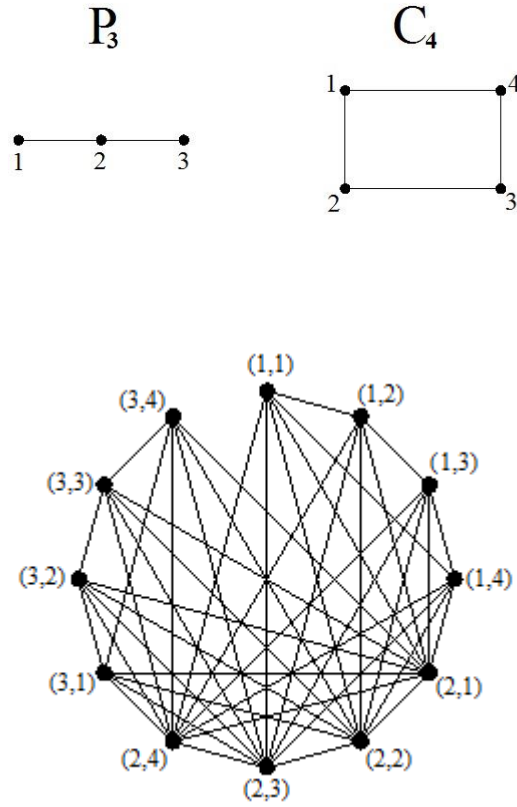
$$i) \quad (u_1, v_1) \in E(G_1)$$

ya da

$$ii) \quad u_1=v_1 \text{ ve } (u_2, v_2) \in E(G_2)$$

şartı sağlanıyorsa u ile v köşeleri komşudur denir. Bu şekilde oluşan grafa G_1 ile G_2 grafının **lexicographical grafi** denir ve $G_1[G_2]$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.6 P_3 ve C_4 graflarının lexicographical grafına bakalım. Bu grafın gösterimi;

Şekil 3.1.4 $P_3[C_4]$

şeklinde. $der((2,1))=10$ ve $der((1,1))=6$ olduğundan $\sigma(G)=6$ ve $\Delta(G)=10$ dur.

Tanım 3.1.7 G_1 grafının köşe kümesi V_1 , G_2 grafının köşe kümesi V_2 olmak üzere $V=V_1 \times V_2$ kartezyen kümesinden $u=(u_1, u_2)$ ile $v=(v_1, v_2)$ elemanlarını alalım.

i) $u_1=v_1$ ve $(u_2, v_2) \in E(G_2)$

ya da

ii) $(u_1, v_1) \in E(G_1)$ ve $u_2=v_2$

ya da

iii) $(u_1, v_1) \in E(G_1)$ ve $(u_2, v_2) \in E(G_2)$

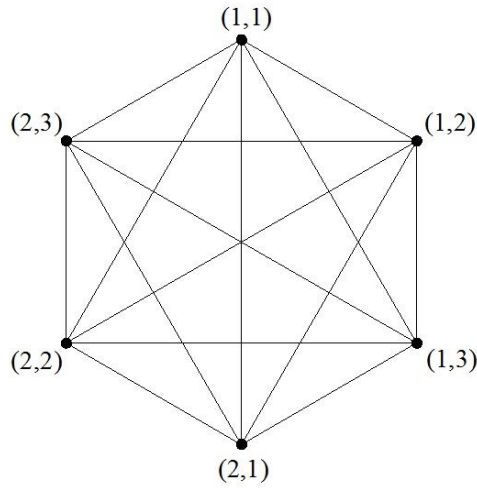
şartı sağlanıyorsa u ile v köşeleri komşudur. Bu şekilde oluşan grafa G_1 ile G_2 grafının **strong çarpım grafi** denir ve $G_1 \blacksquare G_2$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.8 $G=P_2 \blacksquare C_3$ strong çarpım grafına bakalım.



Şekil 3.1.5 P_2 ve C_3 grafi

G çarpım grafının köşe kümesi $V=\{(u_1, u_2) : u_1 \in V(P_2), u_2 \in V(C_3)\}$ şeklindedir ve G strong çarpım grafının gösterimi;



Şekil 3.1.6 $P_2 \blacksquare C_3$

şeklindedir. Burada G çarpım grafının mertebesi 6, boyutu 16 dır. Tüm köşeler birbirine komşu ve dereceleri 5 olduğundan G strong çarpım grafi bir tam graf ve $\sigma(G) = \Delta(G) = 5$ tir.

Tanım 3.1.9 G_1 grafının köşe kümesi V_1 , G_2 grafının köşe kümesi V_2 olmak üzere $V = V_1 \times V_2$ kartezyen kümesinden $u = (u_1, u_2)$ ile $v = (v_1, v_2)$ elemanlarını alalım.

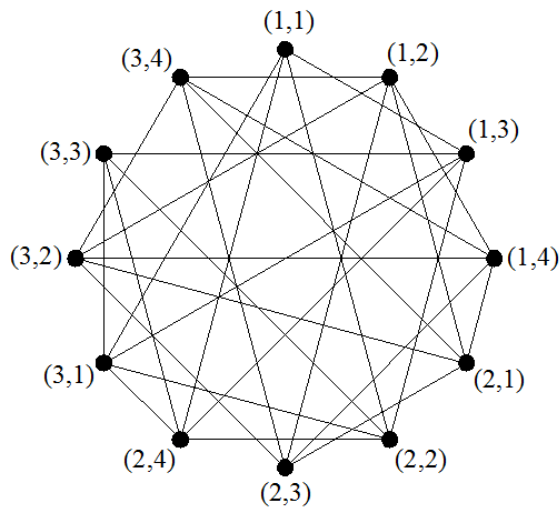
$$\text{i) } (u_1, v_1) \in E(G_1) \text{ ve } (u_2, v_2) \in E(G_2)$$

ya da

$$\text{ii) } (u_1, v_1) \notin E(G_1) \text{ ve } (u_2, v_2) \notin E(G_2)$$

şartı sağlanıyorsa u ile v köşeleri komşudur denir. Bu şekilde oluşan grafa G_1 ile G_2 grafının **modüler çarpım grafi** denir.

Örnek 3.1.10 P_2 ve C_3 modüler çarpım grafına bakalım.



Şekil 3.1.7 P_2 ve C_3 modüler çarpım grafi

Tanım 3.1.11 G_1 grafının köşe kümesi V_1 , G_2 grafının köşe kümesi V_2 olmak üzere $V = V_1 \times V_2$ kartezyen kümesinden $u = (u_1, u_2)$ ile $v = (v_1, v_2)$ elemanlarını alalım.

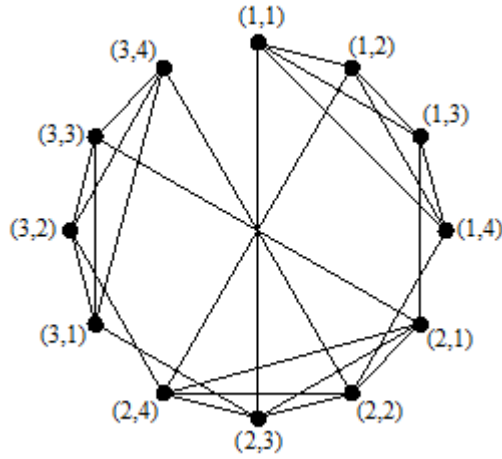
$$i) \quad u_1=v_1$$

ya da

$$ii) \quad (u_1,v_1) \in E(G_1) \text{ ve } (u_2,v_2) \notin E(G_2)$$

şartı sağlanıyorsa u ile v köşeleri komşudur denir. Bu şekilde oluşan grafa G_1 ile G_2 grafinin **homomorfik çarpım grafi** denir ve $G_1 \times G_2$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.12 P_3 ve C_4 graflarının homomorfik çarpım grafini bakalım. $G=P_3 \times C_4$ çarpım grafinin köşe kümesi $V=\{(u_1,u_2) : u_1 \in V(P_3), u_2 \in V(C_4)\}$ şeklindedir ve G homomorfik çarpım grafinin gösterimi;



Şekil 3.1.8 $P_3 \times C_4$

şeklindedir. Burada G çarpım grafinin mertebesi 12, boyutu 28 dir. $der((1,1))=4$ ve $der((2,3))=5$ olduğundan $\sigma(G)=4$ ve $\Delta(G)=5$ tir.

3.2 Çarpım Graflar ile ilgili Bazı Sonuç ve Teoremler

Bu kısımda yukarıda tanımlanan ve graf teori alanında geniş yer kaplayan graf çarpımları hakkında teoristlerin çok sık kullandığı ve teorinin inşasında gerekli olan aşağıdaki genel sonuçlar verilecektir.

İlk sonucumuz yukarıda bahsedilen bazı graf çarpımlarının kenar kümeleri arasındaki kapsama ilişkisi ile ilgilidir.

Sonuç 3.2.1 G ve H herhangi iki graf ve \times , grafların tensör; \blacksquare , strong; \square , kartezyen ve $[]$, lexicographical çarpımı olmak üzere bu çarpımların kenar kümeleri arasında aşağıdaki gibi eşitlik ve kapsama ilişkisi mevcuttur.

$$E(G \times H) \cup E(G \blacksquare H) = E(G \square H) \subseteq E(G[H])$$

Şimdi de bazı graf çarpımlarının renklendirme numarası ile ilgili birkaç teoreme bakalım.

Teorem 3.2.2 (Sabidussi, 1957) G ve H grafları için aşağıdaki eşitlik mevcuttur.

$$\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$$

İspat: $X \times Y$ 'nin iki maksimal altgrafı X_y ve Y_x olsun.

$$V(X_y) = V(X) \times \{y\} \quad \exists y \in V(Y)$$

$$V(Y_x) = V(Y) \times \{x\} \quad \exists x \in V(X)$$

Dolayısıyla X_y X 'e ve Y_x Y 'ye izomorf olur.

$m = \max\{\chi(X), \chi(Y)\}$ olmak üzere; $\chi(X \times Y) \geq m$ dir.

Şimdi $c_x : V(X) \rightarrow J_m \quad \exists J_m : \text{mod } m \text{ tamsayılar grubu}$
 $x \rightarrow c_x(x)$ m renklendirme fonksiyonu olsun.

$[x, x'] \in E(X) \Rightarrow c_x(x) \neq c_x(x')$ olduğu açıktır.

Aynı şekilde c_y m renklendirme fonksiyonu da tanımlanabilir. Daha sonra;

$$c : V(X, Y) \rightarrow J_m$$

$$(x, y) \rightarrow c(x, y) = c_x(x) + c_y(y) \quad \exists x \in V(X), y \in V(Y)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım ve c 'nin de bir m -renklendirme olduğunu gösterelim:

$(x, y), (x', y') \in E(X \times Y) \Rightarrow x = x', [y, y'] \in E(Y) \vee y = y', [x, x'] \in E(X)$ dir. İlk durumu düşünmek için $x = x' \Rightarrow c_X(x) = c_X(x'), [y, y'] \in E(Y) \Rightarrow c_Y(y) \neq c_Y(y')$ yeterlidir. O halde;

$c_X(x) = c_X(x'), c_Y(y) \neq c_Y(y')$ olur. Bu yüzden;

$c(x, y) = c_X(x) + c_Y(y) \neq c_X(x') + c_Y(y') = c(x', y')$ olur ve dolayısıyla c $X \times Y$ nin bir renklendirmesi olur. O halde $\chi(X \times Y) \leq m$ olur. Sonuç olarak $\chi(X \times Y) = \max\{\chi(X), \chi(Y)\}$ bulunur. ■

G ve H herhangi iki graf olmak üzere; $\chi(G \times H) \leq \min\{\chi(G), \chi(H)\}$ olduğu açıktır. Hedetniemi 1966 yılında her G ve H grafi için aşağıdaki eşitliğin varlığını göstermiştir.

Lemma 3.2.3 (Hedetniemi, 1966) G ve H iki graf olsun. O halde G ve H graflarının tensör çarpımlarının kromatik numarası için aşağıdaki eşitlik mevcuttur.

$$\chi(G \times H) = \min\{\chi(G), \chi(H)\}$$

Teorem 3.2.4 (Geller ve Stahl, 1975) $\chi(H) = n$ olan bir H grafi, K_n n mertebeli bir tam graf ve herhangi bir G grafi için

$$\chi(G[H]) = \chi(G[K_n])$$

eşitliği vardır.

İspat: $f: H \rightarrow K_n$ homomorfizması vardır. Dolayısıyla $G[H] \rightarrow G[K_n]$ homomorfizması da vardır. Bu bize $\chi(G[H]) \leq \chi(G[K_n])$ olduğunu verir. Diğer yönden, $f: G[H]$ için uygun bir renklendirme ve $a \in V(G)$ olsun. $\chi(H) = n$ iken f i en az n renk sınıfların kesişimi H_a ya kısıtlarsak, n tanesini ve her sınıf için H_a da bir köşe seçelim. Seçilen köşeleri bir köşe ile bağlayalım (zorunlu değildir). Bu işlemi G nin tüm köşeleri için uygularsak $G[K_n]$ e izomorf bir graf elde ederiz. O halde $\chi(G[K_n]) \leq \chi(G[H])$ olur. ■

Lemma 3.2.5 (Cizek ve Klavzar, 1994) $n \geq k \geq 2$ ise $\chi(C_{2k+1}[C_{2n+1}]) = 8$ ve

$$n = 2 \text{ ve } k \geq 3 \text{ için } \chi(C_{2k+1}[C_{2n+1}]) = 7 \text{ olur.}$$

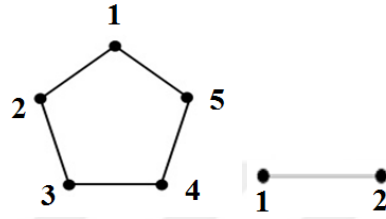
Lemma 3.2.6 (Vesztergombi, 1978/79) $k \geq 2$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\chi(C_{2k+1} \blacksquare C_{2n+1}) = 5$ dir.

Lemma 3.2.7 (Stahl, 1976) $k \geq 2$ ve $n \geq 1$ olsun.

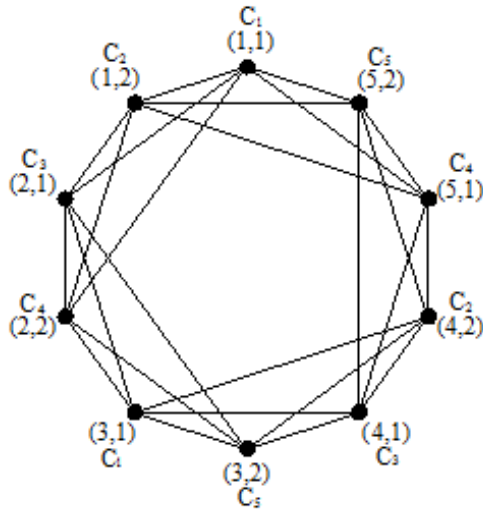
$$\chi(C_{2k+1} \blacksquare K_n) = 2n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \text{ dir.}$$

Örnek 3.2.8 $k=2$ ve $n=2$ alalım. $\chi(C_{2k+1} \blacksquare K_n) = 2n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ eşitliğini görelim.

O halde C_5 ve K_2 graflarını alalım ve strong çarpımlarını bulalım.



Şekil 3.2.1 C_5 ve K_2 grafları



Şekil 3.2.2 $C_5 \blacksquare K_2$; C_5 ve K_2 grafları ve strong çarpımlarının grafi

Burada $(1,1)$ ve $(3,1)$ köşelerini C_1 renginde, $(1,2)$ ve $(4,2)$ köşelerini C_2 renginde, $(2,1)$ ve $(4,1)$ köşelerini C_3 , $(2,2)$ ve $(5,1)$ köşelerini C_4 ve son olarak da kalan köşeler $(3,2)$ ve $(5,2)$ köşelerini de C_5 ile renklendirdiğimizde $\chi(C_5 \blacksquare K_2)=5$ bulunur.



4. MONOJENİK YARIGRUPLAR ÜZERİNDE NOKTA ÇARPIM GRAFI

Son yıllarda revaçta olan (bkz; Badawi-2015, Das ve ark.-2013, Demeyer ve ark.-2010, Anderson ve Badawi-2008, Demeyer ve Demeyer-2005, Demeyer ve ark.-2002) graf teori ile cebirsel yapıların ortak çalışma alanlarına ek olarak monojenik yarıgrupların graflarının nokta çarpım graflarını inceleyeceğiz. Öncelikle monojenik yarıgruplar için giriş yapılarak temel tanımlar, daha sonra nokta çarpım grafi hakkında bilgi verilecek, ardından bu grafin bazı parametreleri ve özellikleri incelenecektir.

4.1. Giriş ve Temel Tanımlar

Graf Teori ile cebirsel yapıları birleştiren ilk çalışma Irwin Beck (Beck, 1988) tarafından değişmeli halkaların sıfır bölen grafları ile ilgiliydi. Bu başlangıç diğer araştırmacılar tarafından farklı çalışmalar eklenerek devam etti (Anderson ve Livingston-1999, Anderson ve Badawi-2008, Sharma ve ark.-2011, Akgüneş ve Togan-2012, Das ve ark.-2013, Badawi-2015).

Bu bölümde, monojenik yarıgrubu S_M^n ve bu yarı grubun sonlu kartezyen çarpımı S olarak gösterilmek üzere, bu kartezyen çarpım üzerinde oluşturulan nokta çarpım grafi $\Gamma(S)$ hakkında bilgi verilecek ve bazı özelliklerine değinilecektir.

Öncelikle monojenik yarıgrup tanımını verelim.

Tanım 4.1.1 (Hungerford, 1974) Bir yarıgrup bir eleman tarafından üretilir. Bir monojenik yarıgrup ise bir x elemanının x^k şeklinde doğal sayı kuvvetlerinden oluşur ve $\langle x \rangle$ ile gösterilir. Eğer tüm kuvvetler farklı ise doğal sayıların toplamsal yarı grubuna izomorftur. Aksi halde $\langle x \rangle$ sonlu ve elemanların sayısı, yarı grubun mertebesidir. Monojenik yarıgrupları mertebesi n olmak üzere $S_M^n = \{x, x^2, \dots, x^n\} \cup \{0\}$ şeklinde gösterilir.

4.2. Monojenik Yarıgrup Üzerinde Nokta Çarpım Grafi

Tanım 4.2.1 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ iki vektör olmak üzere, a ve b nin karşılıklı girişlerinin çarpımlarının toplamı **nokta çarpım** olarak adlandırılır. Başka bir ifade ile;

$$a.b = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

şeklindedir.

Tanım 4.2.2 (Badawi, 2015) A boştan farklı bir değişmeli halka, n bir tamsayı ($1 \leq n < \infty$) ve $R = A \times A \times \dots \times A$ n kere olsun. Köşeleri $R^* = R \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ ve iki köşe x ve y $x.y = 0 \in A$ sağladığında komşudur (burada “.” nokta çarpım olarak tanımlanmıştır). R 'nin tüm sıfır bölenlerinin kümesi $Z(R)$ ile gösterilir.

Badawi nokta çarpım graf tanımını değişmeli halkalar için yukarıdaki gibi tanımlamıştır. Biz de monojenik yarıgruplar için nokta çarpım graf tanımını verebiliriz.

S_M^n , $\{0, x, x^2, \dots, x^n\}$ elemanlarına sahip bir monojenik yarı gruptur. S_M^n monojenik yarı grubunun sonlu kere kartezyen çarpımının kümesini ise S ile gösterelim. Köşeleri S 'nin sıfırdan farklı elemanlarından oluşan yönsüz graf $\Gamma(S)$ olsun. k pozitif tamsayısı için $0 \leq \{i_t\}_{t=1}^k, \{j_t\}_{t=1}^k \leq n$ olacak şekilde S 'nin sıfırdan ve birbirinden farklı $(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})$ ve $(x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_k})$ şeklindeki elemanlarının komşu olması için gerek ve yeter şart $(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k}) \cdot (x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_k}) = 0_{S_M^n}$ yani nokta çarpımlarının yarı grubun sıfır elemanına eşit olmasıdır. Burada $i_t = 0$ iken $x^{i_t} = 0_{S_M^n}$ olarak alınacaktır.

Burada tanımlanan $\Gamma(S)$ grafının parametrelerinden uzaklık, çevrim, en büyük ve en küçük derecesi, baskınlık sayısı, klik ve renklendirme numarası ve bunlara paralel olarak da grafın mükemmelliği incelenecektir.

Öncelikle sıfırdan farklı S 'nin herhangi iki elemanının nasıl komşu olacağını ifade edelim.

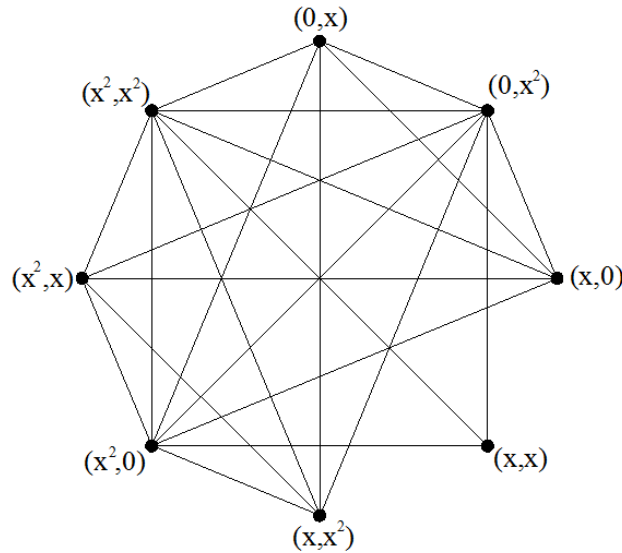
Tanım 4.2.2 S 'nin birbirinden ve sıfırdan farklı iki elemanı $X = (x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})$ ve $Y = (x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_k})$ öyle ki $k \in \mathbb{N}^+$, $\{i_t\}_{t=1}^k, \{j_t\}_{t=1}^k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $X \cdot Y = 0_{S_M^n}$ olsun. Yani $x^{i_1+j_1} + x^{i_2+j_2} + \dots + x^{i_k+j_k} = 0_{S_M^n}$ sağlandığında X ve Y komşudur denir.

Bu eşitlik $\forall t \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $i_t + j_t > n$ ya da $i_t = 0_{S_M^n}$ ya da $j_t = 0_{S_M^n}$ olduğunda geçerlidir. Diğer bir deyişle;

$$(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k}) \sim (x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_k}) \Leftrightarrow \forall t \in \{1, 2, \dots, k\} (i_t + j_t > n) \vee (i_t = 0_{S_M^n}) \vee (j_t = 0_{S_M^n})$$

Tanımı bir örnek üzerinde görelim.

Örnek 4.2.3 $n=k=2$ için $S = S_M^2 \times S_M^2$ nokta çarpım grafına bakalım. Köşeleri $S^* = S \setminus \{(0,0)\} = \{(0,x), (0,x^2), \dots, (x^2,x^2)\}$ ve köşeler arasındaki komşuluk nokta çarpım grafi aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil 4.2 $\Gamma(S = S_M^2 \times S_M^2)$

4.3. $\Gamma(S)$ in Bazı Graf Parametreleri

Bu kısımda bir önceki kısımda tanımlanan $\Gamma(S)$ nokta çarpım grafının parametrelerinden bazıları ve bu parametrelere bağlı olarak $\Gamma(S)$ grafının özellikleri

incelenecektir. Uzaklık, çevrim, en büyük ve en küçük derece, baskınlık kümesi ve sayısı şeklinde parametreler incelenecektir.

Öncelikle gerekli olan temel kavramlar, ardından $\Gamma(S)$ nokta çarpım grafi için verilen tanımın değerinin teorem ve ispatı verilecektir.

Tanım 4.3.1 (Gross ve Yellen, 2004) Bir G grafinin çapı

$$diam(G) = \sup\{d(x, y) : x, y \in V(G)\}$$

kümesi ile belirtilir.

Teorem 4.3.2 Yukarıdaki gibi tanımlanan herhangi bir S için

$$diam(\Gamma(S)) = 2 \text{ 'dir.}$$

İspat. Sıfırdan, birbirinden ve (x^n, x^n, \dots, x^n) elemanından farklı S 'nin herhangi iki elemanı $X = (x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})$ ve $Y = (x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_k})$ alalım öyle ki $k \in \mathbb{N}^+$, $\{i_t\}_{t=1}^k, \{j_t\}_{t=1}^k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Burada iki durum vardır, ya $i_t = 0$ ya da $i_t \neq 0$. Eğer $i_t = 0$ ise $x^{i_t} = 0_{S_M^n}$ olduğundan $x^{i_t} \cdot x^n = 0$ olur. Eğer $i_t \neq 0$ ise $i_t \in \mathbb{N}^+$ ve $i_t + n > n$ olduğundan $x^{i_t} \cdot x^n = 0$ olur. O halde $(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k}), (x^n, x^n, \dots, x^n)$ köşesine komşu olur. Aynı şekilde $(x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_k})$ köşesi de (x^n, x^n, \dots, x^n) köşesine komşu olur. O halde S 'nin sıfırdan ve birbirinden farklı herhangi iki köşesi arasındaki uzaklık 2 bulunur. O halde

$$diam(\Gamma(S)) = 2 \text{ olur.} \blacksquare$$

Tanım 4.3.3 (Gross ve Yellen, 2004) Bir grafin çevrimi o grafta bulunan en kısa uzunluklu devirin uzunluğu olarak bulunur ve bir G grafinin çevrimi $girth(G)$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.4 Tanımladığımız herhangi bir S için $\Gamma(S)$ grafinin çevrimi 3'e eşittir.

Yani;

$$girth(\Gamma(S)) = 3.$$

İspat. Öncelikle $n+2 > n$ olduğundan (x^n, x^n, \dots, x^n) köşesi (x^2, x^2, \dots, x^2) köşesine komşudur. Ayrıca (x^2, x^2, \dots, x^2) köşesi $(x^{n-1}, x^{n-1}, \dots, x^{n-1})$ köşesine de komşudur. Son olarak $2n-1 > n$ olduğundan $(x^{n-1}, x^{n-1}, \dots, x^{n-1})$, (x^n, x^n, \dots, x^n) komşu köşelerdir. O halde 3 uzunluklu bir çevrim bulunmuştur. Daha küçük bir çevrim bulunamayacağından $\Gamma(S)$ grafinin çevrimi 3'tür. ■

Tanım 4.3.5 (Gross ve Yellen, 2004) Bir grafin en büyük derecesi o grafta bulunan en fazla komşuya sahip köşenin derecesinin değeridir ve Δ ile gösterilir. Benzer şekilde bir grafin en küçük derecesi de o grafta bulunan en az komşuya sahip köşenin derece değeridir ve δ ile ifade edilir.

Teorem 4.3.6 S_M^n monojenik yarıgrupunun sonlu k kere kartezyen çarpım kümesi S ve nokta çarpım grafi $\Gamma(S)$ olmak üzere bu grafin en büyük derecesi

$$\Delta(\Gamma(S)) = (n+1)^k - 2$$

ve en küçük derecesi

$$\delta(\Gamma(S)) = 2^k - 1$$

şeklindedir.

İspat. En büyük derece için (x^n, x^n, \dots, x^n) köşesine komşu olan herhangi bir köşeyi $(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})$ öyle ki $k \in \mathbb{N}^+$, $\{i_t\}_{t=1}^k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ şeklinde seçelim. $\forall i_t \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için $x^{i_t} \cdot x^n = 0_{S_M^n}$ olduğundan $(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})$ köşesi $(n+1)^k$ tane farklı köşeye eşit olabilir. Fakat $(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})$ köşesi S 'nin sıfır elemanına eşit olamayacağı ve (x^n, x^n, \dots, x^n) köşesinden farklı olacağı için (x^n, x^n, \dots, x^n) köşesine komşu olabilen $(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})$ köşesi toplam $(n+1)^k - 2$ tane farklı köşeye eşit olabilir. Bu da $\Gamma(S)$ grafinin en büyük derecesinin $(n+1)^k - 2$ değerine eşit olduğunu verir.

En küçük derece için ise S_M^n monojenik yarıgrubunun en küçük üssüne sahip elemanların kartezyen çarpımından oluşan (x, x, \dots, x) elemanının komşu olduğu köşelere bakalım. $i_t \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})$ köşesi (x, x, \dots, x) köşesine komşu herhangi bir köşe olsun. Dolayısıyla $\forall t \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $x \cdot x^{i_t} = 0_{S_M^n}$ olacağından ya $i_t + 1 > n$ ya da $i_t = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\forall i_t \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ya n ya da 0 değerine eşit olmalıdır. Bu demek olur ki (x, x, \dots, x) köşesine komşu olan 2^k tane S 'nin farklı elemanı vardır. Fakat bunların içinde S_M^n 'in sıfır elemanı olamayacağından $2^k - 1$ tane farklı köşe vardır. O halde $\Gamma(S)$ grafının en küçük derecesi $2^k - 1$ 'e eşittir. ■

Tanım 4.3.7 (Gross ve Yellen, 2004) Bir G grafının köşe kümesi $V(G)$ 'nin alt kümesi D olsun. D 'de olmayan G 'nin tüm köşeleri en az bir köşe ile D 'ye komşu ise D kümesi G grafının baskınlık kümesi olarak adlandırılır. Baskınlık sayısı ise G 'nin en az köşeye sahip baskınlık kümesinin sayısıdır ve $\gamma(G)$ ile gösterilir.

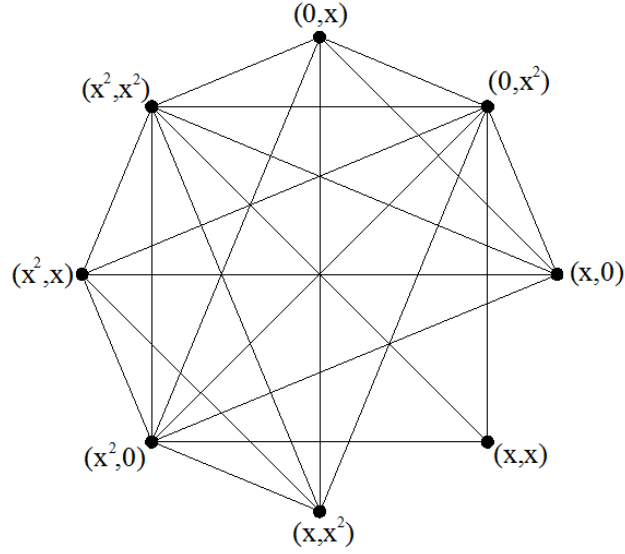
Teorem 4.3.8 $\Gamma(S)$ grafının baskınlık sayısının değeri 1'e eşittir.

$$\gamma(S) = 1$$

İspat. $\Gamma(S)$ grafının baskınlık kümesi $D = \{(x^n, x^n, \dots, x^n)\}$ olarak seçilirse, $\Gamma(S)$ grafının baskınlık sayısının 1'e eşit olduğu elde edilir. ■

Yukarıda verilen kavram ve teoremlerin sağladığı kısalığı görmek için aşağıdaki örneğe bakabiliriz.

Örnek 4.3.9 $n=k=2$ için $S = S_M^2 \times S_M^2$ nokta çarpım grafının parametrelerine bakalım.



Şekil 4.3 $S = S_M^2 \times S_M^2$ nokta çarpım grafi

Burada, $\Gamma(S)$ grafinin herhangi iki köşe arasındaki uzaklık 2'dir. $(x,x), (0,x^2)$ ve $(x^2,0)$ köşelerini seçersek $girth(\Gamma(S))=3$ bulunur. Grafin en büyük derecesine sahip olan köşesi (x^2,x^2) alınabilir, bu köşenin derecesi 7'dir. Dolayısıyla grafin en büyük derecesi n ve k değerleri yerine yazıldığında $\Delta(\Gamma(S))=(n+1)^k - 2 = 7$ olduğu görülür. Aynı şekilde grafin en küçük derecesine sahip olan köşe ve derecesi $d_s((x,x))=3$ şeklindedir. Grafin baskınlık kümesinin $\{(x^2,x^2)\}$ olduğu ve baskınlık sayısının 1 olduğu da görülür.

4.4. $\Gamma(S)$ in Mükemmel Graf Özelliği

Bu bölümde ise grafların önemli özelliği olan mükemmellik tanımına yer verilecektir. Bir grafin mükemmel olması için gerek ve yeter koşullar, gerekli olan parametrelerin tanımları ve $\Gamma(S)$ grafi için bu parametrelerin değerleri ispatlanacaktır.

Graf teoride önemli yere sahip olan mükemmellik kavramı için literatüre yeni bir mükemmel graf ekleyeceğiz.

Çalışmanın bu kısmından sonra k değeri 2 alınarak devam edilecektir. Şimdi mükemmel graf için gerekli olan iki temel kavramdan biri olan bir grafın renklendirme numarası tanımını sonrasında $\Gamma(S)$ grafının renklendirme numarasının değerini verelim.

Tanım 4.4.1 (Gross ve Yellen, 2004) Bir grafın **köşe renklendirmesi** grafın köşe kümesi V_G den, elemanları renkler olarak adlandırılan C kümesine bir fonksiyondur. Eğer iki komşu köşe her zaman farklı renklerle belirtilebilirse köşe renklendirmesi **uygun** olur. Bir graf c ya da daha az sayıda renkle uygun köşe renklendirmesine sahipse bu grafa **c -boyanabilir** denir. Bir G grafının (köşe) **renklendirme numarası** c -boyanabilir olan G grafının en küçük c sayısıdır ve $\chi(G)$ ile gösterilir.

Renklendirme numarası tanımından dolayı, bu değeri bulurken mümkün olduğu kadar az renk kullanacağımızdan aynı renkle komşu olmayan köşeler boyanabildiğinden komşu olmayan köşeler ile ilgilenilecektir. Bu yüzden aşağıdaki iddianın amacı $\Gamma(S)$ grafının herhangi iki köşesinin hangi koşullarda komşu olmayacağıdır.

İddia 4.4.2 S 'nin herhangi iki elemanının $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x^{i_1}, x^{i_2}) ve (x^{j_1}, x^{j_2}) 'nin komşu olması için gerek ve yeter şart $i_1 = 0$ ya da $j_1 = 0$ ya da $i_1 + j_1 > n$ ve $i_2 = 0$ ya da $j_2 = 0$ ya da $i_2 + j_2 > n$ şeklindedir. Diğer bir deyişle;

$$(x^{i_1}, x^{i_2}) \sim (x^{j_1}, x^{j_2}) \Leftrightarrow (i_1 = 0 \vee j_1 = 0 \vee i_1 + j_1 > n) \wedge (i_2 = 0 \vee j_2 = 0 \vee i_2 + j_2 > n)$$

Bu iddianın tersi ise S 'nin herhangi iki elemanının $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x^{i_1}, x^{i_2}) ve (x^{j_1}, x^{j_2}) 'nin komşu olmaması için gerek ve yeter şart i_1 ve j_1 sıfırdan farklı ve $i_1 + j_1 \leq n$ ya da i_2 ve j_2 sıfırdan farklı ve $i_2 + j_2 \leq n$ şeklindedir. Diğer bir deyişle;

$$(x^{i_1}, x^{i_2}) \not\sim (x^{j_1}, x^{j_2}) \Leftrightarrow (i_1, j_1 \neq 0, i_1 + j_1 \leq n) \vee (i_2, j_2 \neq 0, i_2 + j_2 \leq n)$$

Dolayısıyla S 'nin elemanlarını aynı renkle boyamak için bileşenlerinin S_M^n üzerinde komşuluk koşulunun sağlamaması gerek ve yeter koşuldur.

Teorem 4.4.3 $S_M^n = \{0, x, x^2, \dots, x^n\}$ olmak üzere $S = S_M^n \times S_M^n$ olsun. O halde;

$$\chi(\Gamma(S)) = \begin{cases} \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2 \right)^2 - 1; & n \text{ tek} \\ \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1 \right)^2 + 1; & n \text{ çift} \end{cases}$$

İspat. S 'nin elemanlarının bileşenlerinin derecelerini $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir $[C]_{m \times m}$ matrisi olarak aşağıdaki gibi düşünelim.

$$[C]_{m \times m} = \begin{pmatrix} c_{00} & \cdots & c_{0\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{0\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)} & \cdots & c_{0(n-1)} & c_{0n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil 0} & \cdots & c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)} & \cdots & c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil (n-1)} & c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil n} \\ c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)0} & \cdots & c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)} & \cdots & c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)(n-1)} & c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_{(n-1)0} & \cdots & c_{(n-1)\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{(n-1)\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} & c_{(n-1)n} \\ c_{n0} & \cdots & c_{n\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{n\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)} & \cdots & c_{n(n-1)} & c_{nn} \end{pmatrix}$$

S 'nin elemanlarını renklendirmeye S_M^n 'nin en büyük dereceye sahip elemanı yani $[C]_{m \times m}$ matrisinin c_{mn} elemanından başlayalım.

c_{mn} elemanını C_{0n} ile renklendirelim. c_{mn} elemanına karşılık gelen (x^n, x^n) köşesi S 'nin diğer tüm köşelerine komşu olduğu için C_{0n} ile başka hiçbir elemanı renklendiremeyiz.

$c_{(n-1)n}$ elemanını ve (x^{n-1}, x^n) elemanına komşu olmayan $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere (x, x^i) şeklindeki tüm köşeleri yani C matrisinin birinci satırındaki tüm elemanları C_{1n} ile renklendirebiliriz.

Aynı şekilde $c_{(n-2)n}$ ve C matrisinin ikinci satırındaki tüm elemanları C_{2n} ile renklendirelim.

Yukarıdaki süreç n 'in tek ya da çift oluşuna göre değişecektir.

n 'in tek olduğu durum: n tek ise $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil > n$ olduğundan yukarıdaki süreç n . sütunun $c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil n}$ elemanına kadar $n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ olduğundan $C_{\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)n}$ ile renklendirilerek devam edecektir. Dolayısıyla $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$ tane farklı renk kullanılmış olacaktır. Bu sırada $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) < n$ olduğundan 1. satırdan $\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$. satıra kadar olan tüm elemanlar renklendirilmiştir.

Daha sonra $(n-1)$. sütuna geçtiğimizde $(n-1)$. sütunun en büyük dereceye sahip $c_{n(n-1)}$ elemanını renklendirme ile devam edersek, bu elemanı C 'nin birinci sütunundaki renklendirilmemiş tüm elemanları $C_{0(n-1)}$ ile renklendirebiliriz. Benzer şekilde $(n-1)$. sütun için $c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil (n-1)}$ elemanına kadar, $n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ olduğundan $C_{\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)(n-1)}$ rengi ile renklendirerek devam edilir. Bu sırada $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$ farklı renk kullanılmış olacaktır.

Bu durum C 'nin $c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$ elemanına kadar devam eder ve C 'nin 1. sütunundan $\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right)$. sütununa kadar olan renklendirilmemiş tüm elemanlar renklendirilmiş olacaktır. Bu sırada $\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)^2$ farklı renk kullanılmıştır. Dikkat edelim ki 1. ve $\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right)$. satır ve sütunlar arasındaki tüm elemanlar renklendirilmiş olacaktır.

Renklendirilmeden kalan elemanların kümesi $\left\{c_{i0}, c_{0i} : i \in \left\{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, \dots, n\right\}\right\}$

şeklinde ifade edilebilir. Bu kümedeki tüm elemanlar birbirine de komşu olduğundan bu kümeyi renklendirme için toplam $2\left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)$ farklı renk kullanılmalıdır. Dolayısıyla

$$2\left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right) = 2\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1\right) \quad \text{olduğundan} \quad \text{sonuç} \quad \text{olarak}$$

$\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1\right)^2 + 2\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1\right) = \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2\right)^2 - 1$ renk S 'in tüm sıfırdan farklı elemanlarını renklendirebilen en küçük sayıdır.

n 'in çift olduğu durum: n çift ise yukarıdaki süreç n .sütun için C 'nin $c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)n}$ elemanı

$c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right)n}$ rengi ile renklendirilerek devam edilir. Bu sırada $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ farklı renk kullanılır ve ($\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right) + \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) < n$ olduğundan) 1.satırdan $\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right)$. satıra kadar elemanlar

renklendirilir. Sonra $(n-1)$. sütuna geçtiğimizde $c_{n(n-1)}$ elemanının ve bu elemana komşu olmayan C 'nin 1.sütunu $C_{0(n-1)}$ rengi ile renklendirilebilir. Benzer şekilde devam edildiğinde C 'nin $(n-1)$. sütununun $c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)(n-1)}$ elemanını $C_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right)(n-1)}$ ile renklendirilir.

Dolayısıyla $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ renk daha kullanılır.

Bu süreç C 'nin $\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)$.sütununun $c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}$ elemanına kadar farklı renkler

ile renklendirilerek devam edilir. Bu sırada 1.sütundan $\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right)$.sütuna kadar olan tüm

elemanlar renklendirilmiş olur. Kalan elemanlardan bir kısmı içinde $c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil 0}$ ve $c_{0\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$, $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

satır ve $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.sütundaki elemanlar $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < n$ olduğundan 2 farklı renk ile

renklendirilebilir. Diğer kalan elemanlar ise $\left\{c_{i_0}, c_{o_i} : i \in \left\{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2, \dots, n\right\}\right\}$ ve dolayısıyla $\left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)^2 + 2\left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 2 = \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)^2 + 1 = \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1\right)^2 + 1$ renk kullanılır. ■

Mükemmel graflar için gerekli olan ikinci önemli graf parametresi ise bir grafın klik numarasıdır. Şimdi de bu kavramın tanımını ardından da $\Gamma(S)$ grafı için değerini ispatlayalım.

Tanım 4.4.4 (Gross ve Yellen, 2004) Bir grafın içerdiği tam altgrafların her birine **klik** denir. Kliklerin içindeki en fazla köşe sayısına sahip olan kliğin köşe sayısına da grafın **klik sayısı** (clique number) denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir.

Teorem 4.4.5 $S_M^n = \{0, x, x^2, \dots, x^n\}$ olmak üzere $S = S_M^n \times S_M^n$ olsun. O halde;

$$\omega(\Gamma(S)) = \begin{cases} \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2\right)^2 - 1; & n \text{ tek} \\ \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1\right)^2 + 1; & n \text{ çift} \end{cases}$$

İspat. C 'yi $\Gamma(S)$ grafının bir tam altgrafı olarak düşünelim. Tam graf tanımından $V(C)$ 'nin tüm elemanları birbirine komşu olmalıdır. C 'yi oluşturan S kümesi için komşuluk şartı S_M^n 'nin elemanlarının kendi aralarında komşu olma koşulu vardır. (Das ve ark., 2013)'deki Teorem7'nin kanıtından $\Gamma(S_M^n)$ grafının tam altgrafının herhangi iki köşesi x^i ve x^j için i ve j değerleri en az $i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ve $j = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ olmalıdır. $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ n 'den daha küçük ya da daha büyük olacağından $\Gamma(S)$ grafının klik numarasını n 'in tek ya da çift oluşuna göre ayırarak gözlemleyeceğiz.

Tek durum: n tek iken S 'nin herhangi iki elemanı (x^{i_1}, x^{i_2}) ve (x^{j_1}, x^{j_2}) i_1, i_2, j_1 ve j_2

değerleri $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil > n$ olduğundan $\left\{0, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, \dots, n\right\}$ kümesindeki elemanlara

eşit iken komşu olabilir. Diğer bir deyişle komşuluğu daha rahat görebilmek için bu elemanları $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki gibi matrisini $[C]_{m \times m}$ düşünelim. Burada $[C]_{m \times m}$ matrisi de girişleri S 'nin elemanlarının bileşenlerinin derecelerinden oluşur. $[C]_{m \times m}$ matrisinde komşu köşelerin üslerinden oluşan elemanları 3 tane blok matris oluşturur. Bunlardan bir tanesi, satır ve sütununun değerleri $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 'den n 'ye kadar ve diğerleri 0. satır ve 0. sütunda bulunan $\left\{ c_{i0}, c_{0i} : i \in \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2, \dots, n \right\} \right\}$ şeklindeki iki bloktur.

$$[C]_{m \times m} = \begin{pmatrix} c_{00} & \cdots & c_{0\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{0\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)} & \cdots & c_{0(n-1)} & c_{0n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil 0} & \cdots & c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)} & \cdots & c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil (n-1)} & c_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil n} \\ c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)0} & \cdots & c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)} & \cdots & c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)(n-1)} & c_{\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_{(n-1)0} & \cdots & c_{(n-1)\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{(n-1)\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} & c_{(n-1)n} \\ c_{n0} & \cdots & c_{n\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & c_{n\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)} & \cdots & c_{n(n-1)} & c_{nm} \end{pmatrix}$$

Bu yüzden $\left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right)^2 + 2 \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right)$ eleman birbirine komşudur. Bu değer de (Das ve ark., 2013)'deki Lemma1'den $\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2 \right)^2 - 1$ 'e eşittir.

Çift durum: Tek durumunda olduğu gibi bir $[C]_{m \times m}$ matrisini düşünelim. $[C]_{m \times m}$ matrisindeki birbirine komşu olan köşeler 3 tane blok oluşturur. Bunlardan bir tanesi $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right) > n$ olduğundan satır ve sütun değerleri $\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right)$ 'den n 'ye kadar ve

diğerleri 0. satır ve 0. sütunda bulunan $\left\{c_{i0}, c_{0i} : i \in \left\{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2, \dots, n\right\}\right\}$

şeklindeki iki bloktur. Bu yüzden $\left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)^2 + 2\left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)$ tane köşe birbirine komşu

olur. Bu da $\left(\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1\right)^2 + 1\right)$ 'e eşittir, (Das ve ark., 2013)'deki Lemma1'den. ■

Tanım 4.4.6 (Gross ve Yellen, 2004) Herhangi bir G grafi için $\chi(G) \geq \omega(G)$ eşitsizliğı her zaman geçerlidir. Eğer G 'nin indüklenmiş her altgrafi için $\chi(G) = \omega(G)$ eşitliğini de sağlıyorsa bu G grafına **mükemmel graf** denir.

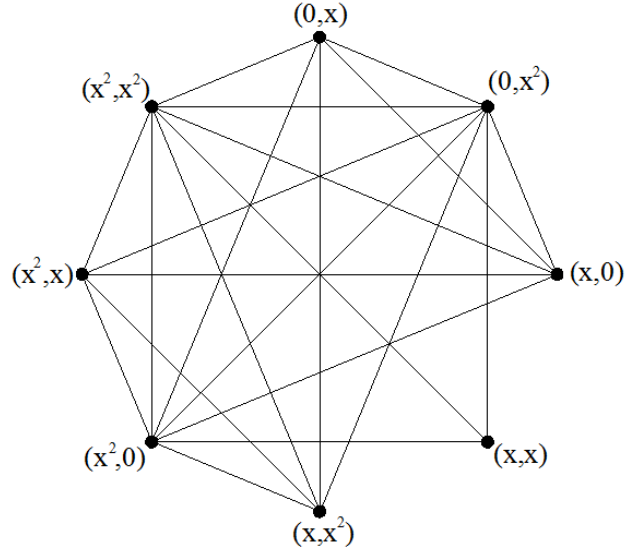
Mükemmel graf tanımı ve yukarıdaki teoremlerden aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 4.4.7 Tanımlanan S için

$$\chi(\Gamma(S)) = \omega(\Gamma(S)) \begin{cases} \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2\right)^2 - 1; & n \text{ tek} \\ \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1\right)^2 + 1; & n \text{ çift} \end{cases}$$

olduğundan $\Gamma(S)$ grafi mükemmel bir graftır.

Örnek 4.4.8 $n=k=2$ için $S = S_M^2 \times S_M^2$ nokta çarpım grafının mükemmellik özelliğine bakalım.



Şekil 4.4 $S = S_M^2 \times S_M^2$ nokta çarpım grafi

Öncelikle $\Gamma(S)$ grafinin renklendirme numarasının değerini bulalım. S 'nin (x^2, x^2) köşesi diğer tüm köşelere komşu olduğu için C_{02} rengi ile yalnızca (x^2, x^2) köşesini renklendirerek başlayabiliriz.

(x, x^2) köşesini ve bu köşeye komşu olmayan $(x, 0)$ ve (x, x) köşelerini de C_{12} ile renklendirebiliriz.

$(0, x^2)$ köşesini C_{22} ile renklendirelim.

(x^2, x) köşesini ve bu köşeye komşu olmayan $(0, x)$ köşesini C_{01} rengi ile renklendirebiliriz.

Kalan $(x^2, 0)$ köşesi de C_{20} ile renklendirerek toplam 5 renk kullanılmış olur.

$n=2$ çift olduğundan renklendirme sayısı formülünde, $\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1\right)^2 + 1$, yerine yazıldığında renklendirme sayısı yine 5 olarak bulunur.

Benzer şekilde $\Gamma(S)$ grafinin klik sayısı için en büyük tam altgrafi oluşturan köşeleri $\{(x^2, x^2), (0, x^2), (x^2, 0), (x, x^2), (x^2, x)\}$ şeklinde seçilebilir ve klik sayısı için bulunan ifade $n=2$ çift durumunda yazıldığında $\Gamma(S)$ grafinin klik sayısı 5 olarak bulunur.

Dolayısıyla renklendirme ve klik numaraları eşit olduğundan $\Gamma(S)$ mükemmel graftır.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tezde genel graf tanımı ve parametreleri verilmiştir. Bunun yanında graf çarpımlarının bazılarında söz edilmiş ve özel olarak nokta çarpım grafi ile devam edilmiştir. Monojenik yarıgruplar üzerinde incelenen nokta çarpım grafının parametrelerinden

- çapının 2'ye eşit olduğu,
- çevriminin değerinin 3 olduğu ,
- en büyük derecesinin yarıgrupun mertebesi n ve monojenik yarıgrupun sonlu kere kartezyen çarpımının değeri k olmak üzere $(n+1)^k-2$ 'ye ve en küçük derecesinin 2^k-1 'e eşit olduğu,
- baskınlık sayısının daima 1 olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca mükemmel graf olabilmesi için kromatik ve klik numaraları incelenerek değerleri bulunmuştur.

Literatürde önemli yeri olan mükemmel graf özelliği elde edilmiştir.

5.2. Öneriler

Bu tezde bir cebirsel yapı üzerinde tanımlanan ve incelenen bir graf çarpım çeşidi araştırmacılar için iyi bir tavsiye olabilir. Ayrıca monojenik yarıgrup üzerinde tanımlanan nokta çarpım grafının diğer parametreleri incelenebilir ya da $k>2$ durumunda mükemmel graf özelliği incelenebilir. İki mükemmel grafın nokta çarpım graflarının da mükemmel olduğu görülmüştür. Bunun sağlanmayan örnekleri ya da her zaman sağlandığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Akbari, S., Mohammadian, A., 2004, On the Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring, *Journal of Algebra*, 274, 847-855.
- Akgüneş, N., 2013, Graf Parametreleri ve Cebirsel Yapılara Grafsal Yaklaşımlar, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Akgüneş, N., Çevik., A., S., A New Bound of Radius with Irregularity Index, *Applied Math. And Comp.*, 219 (11), 5750-5753.
- Akgüneş, N., Togan, M., Some Graph Theoretical Properties over Zero-Divisor Graphs of Special Finite Commutative Rings, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 22(2), 305-315.
- Anderson, D. F., Livingston, P. S., 1999, The Zero-Divisor Graph of Commutative Ring, *Journal of Algebra*, 217, 434-447.
- Anderson, D. F., Badawi, A., 2008, On the Zero-Divisor Graph of a Ring, *Communications in Algebra*, 36(8), 3073-3092.
- Anderson, D. D., Naseer M., 1991, Beck's Coloring of a Commutative Ring, *Journal Algebra*, 159, 500-514.
- Badawi, A., 2015, On the Dot Product Graph of a Commutative Ring, *Communications in Algebra*, 43, 43-50.
- Beck, I., 1988, Coloring of Commutative Ring, *Journal Algebra*, 116, 208-226.
- Berge, C., 1962, The Theory of Graphs and Its Applications, x+247 pp. *Wiley, New York* Translated by Alison Doig Methuen & Co. Ltd., London.
- Bollobas, B., 1998, Modern Graph Theory, *Graduate Texts in Mathematics*, 184, Springer, New York.
- Bondy, J. A., Murty, U. S., R., 1976, Graph Theory with Applications, *The Macmillan Press Ltd.*, Great Britain.
- Cizek N., Klavzar S., 1994, On the chromatic number of the lexicographic product and the cartesian sum of graphs, *Discrete Math.*, 134, 17-24.
- Das, K. Ch., Akgüneş, N., Çevik, A. S., 2013, On a Graph of Monogenic Semigroups, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013:44.
- DeMeyer, F. R., DeMeyer, L., 2005, Zero-Divisor Graphs of Semigroups, *Journal Algebra*, 283, 190-198.
- DeMeyer, F. R., McKenzie, T., Schneider, K., 2002, The Zero-Divisor Graph of a Commutative Semigroup, *Semigroup Forum*, 65, 206-214.
- DeMeyer, L., Greve, L., Sabbaghi, A., Wang, J., 2010, The Zero-Divisor Graph Associated to a Semigroup, *Communications in Algebra*, 38(9), 3370-3391.
- Doyle, J. K., Graver, J. E., 1977, Mean Distance in a Graph, *Discrete Mathematics*, 17, 147-154.
- Erdős, P., Pach, J., Pollack, R., Tuza, Z., Radius, Diameter and Minimum Degree, *J. Combin. Theory Ser.*, B 47, 73-79.

- Geller D., Stahl S., 1975, The chromatic number and other parameters of the lexicographic product, *J. Combin. Theory Ser.*, B 19, 87-95.
- Gross, J. L., Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory, *Chapman Hall, CRC Press*.
- Hedetnemi S., 1966, Homomorphisms of graphs and automata, *Univ Michigan*, Technical Report 03105-44-T.
- Hungerford, T.W., 1974, Abstract Algebra, *Springer Berlin*.
- Imrich, W., Klavzar, C., 2000, Product Graphs: Structure and Recognition, *Wiley*, New York.
- Kouider, M., Winkler, P., 1997, Mean Distance and Minimum Degree, *Journal of Graph Theory*, 25, 95-99.
- Lovasz, L., 2006, Normal Hypergraphs and the Perfect Graph Conjecture, *Discrete Mathematics*, 306, 867-875.
- Ostrand, P., A., Graphs with Specified Radius and Diameter, *Discrete Math.*, 4 (1973) 71-75.
- Sharma, P., Sharma, A., Vats, R. K., 2011, Analysis of Adjacency Matrix and Neighborhood Associated with Zero-Divisor Graph of Finite Commutative Rings, *International Journal of Computer Applications*, 14, 38-42.
- Sabidussi, G., 1957, Graphs with given group and given graph-theoretical properties, *J. Math.*
- Stahl S., 1976, n-tuple colorings and associated graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 20 (1976) 185-203.
- Vesztergombi K., 1978/79, Some remarks on the chromatic number of the strong product of graphs, *ActaCybernet.* 4 (1978/79) 207-212.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Büşra ÇAĞAN
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Ankara - 24.08.1989
Telefon : 05549184189
e-mail : bsrcgn@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Etlik Süper Lisesi, Ankara	2007
Üniversite	: Hacettepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı, Ankara	2013
Yüksek Lisans	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Tezli Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı, Konya	
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2014-	Ata İçil Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Kadınhanı, Konya	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Çağan, B., Akgüneş, N., 2016, The dot product of monogenic semigroup, *3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference*, Mersin-Türkiye.