T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER METRİK UZAYLAR VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN UYGULAMALARI

Sacide GENÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2021
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Sacide GENÇ tarafından hazırlanan "Modüler Metrik Uzaylar ve Bazı Sabit Nokta Teoremlerinin Uygulamaları" adlı tez çalışması 14/07/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Unvanı Adı SOYADI	…………………..
Danışman Unvanı Adı SOYADI	…………………..
Üye Unvanı Adı SOYADI	…………………..

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14/07/2021 gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim KALAYCI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Sacide GENÇ

14/07/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODÜLER METRİK UZAYLAR VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN UYGULAMALARI

Sacide GENÇ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sedat PAK

2021, 40 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Sedat PAK
Diğer Üyenin Unvanı Adı SOYADI
Diğer Üyenin Unvanı Adı SOYADI

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kaynak araştırması ve tezin amacı verilmiştir. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanım ve teoremler hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde Banach sabit nokta teoreminin modüler metrik uzaylara genelleştirilmiş şekli olan ve Chistyakov tarafından oluşturulan modüler büzülme şartı ve modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoreminden bahsedilmiştir. Bu teoremlerin ispatları Palais tarafından verilen temel büzülme şartından yararlanılarak yapılmıştır. Dördüncü bölümde modüler metrik uzaylarda Reich sabit nokta teoremi ve çok değerli Reich dönüşümleri verilmiş, ispatları yapılmıştır. Beşinci bölümde ise çalışmada yer alan bilgilerle elde edilen sonuç ve öneriler yer almıştır.

Anahtar Kelimeler: Büzülme dönüşümü, Çok değerli dönüşüm, Modüler metrik, Sabit Nokta

ABSTRACT

MS THESIS

MODULAR METRIC SPACES
AND
APLICATIONS OF SOME FIXED POINT THEOREMS

Sacide GENÇ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Sedat PAK

2021, 40 Pages

Jury
Doç. Dr. Sedat PAK
Diğer Üyenin Unvanı Adı SOYADI
Diğer Üyenin Unvanı Adı SOYADI

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, the source research and the aim of the thesis are given. In the second part, basic definitions and theorems related to the subject are reminded. In the third chapter, the modular contraction condition, which is the generalized form of Banach fixed point theorem to modular metric spaces and created by Chistyakov, and the fixed point theorem in modular metric spaces are mentioned. The proofs of these theorems are made using the basic contraction condition given by Palais. In the fourth chapter, Reich fixed point theorem and multi-valued Reich transformations in modular metric spaces are given and their proofs are given. In the fifth chapter, the results and suggestions obtained with the information in the study are included.

Keywords: Contraction transform, Multi-valued transform, Modular metric, Fixed Point

ÖNSÖZ

Modüler Metrik Uzaylar ve Bazı Sabit Nokta Teoremlerinin Uygulamaları başlıklı tez çalışmam Doç. Dr. Sedat PAK danışmanlığında hazırlanmıştır. Tez konumun belirlenmesinden teslim edilmesine kadar geçirdiğim süreçte benden yardımlarını esirgemeyen, bana rehberlik eden, bilgisi ve tecrübesi ile çalışmalarıma yön veren kıymetli hocam sayın Doç. Dr. Sedat PAK'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmamın dördüncü bölümünün hazırlanma aşamasında destek ve katkılarından dolayı sayın Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Tez hazırlama süresince yanımda olan beni destekleyen sevgili eşim Mehmet Ali Genç'e kızım Ceren ve oğlum Eren'e en içten ve en derin duygularla teşekkür ederim.

Sacide GENÇ
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

(X, s)	Metrik uzay
(X_w, s)	Modüler metrik uzay
$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \ (x_n \to a)$	(x_n) dizisinin a sayısına yakınsaması
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\emptyset$	Boş küme
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak
$[0, \infty)$	Negatif olmayan reel sayılar
$[0, \infty]$	Genişletilmiş negatif olmayan reel sayılar
$(0, \infty)$	Pozitif reel sayılar
$\|x\|$	Norm fonksiyonu
$(X, \|\,.\,\|)$	Normlu uzay
(X, τ)	Topolojik uzay
(x_n)	$\{x_n\}$ Dizisi
X_w	Modüler küme
X_w^*	Konveks modüler küme
s_w	Modüler metrik
s_w^*	Konveks modüler metrik
inf A	A kümesinin en büyük alt sınırı

sup A	A kümesinin en küçük üst sınırı
lim $\inf(x_n)$	(x_n) dizisinin alt limiti
lim $\sup(x_n)$	(x_n) dizisinin üst limiti
H_w	Pompeiu-Hausdorff Metriği
$\mathcal{C}\ (M)$	X in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerinin sınıfı
$\mathcal{CB}(M)$	X in boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin sınıfı
$\mathcal{K}\ (M)$	X in boş olmayan tüm kompakt alt kümelerinin sınıfı
$\mathcal{P}(M)$	X in tüm alt kümelerinin sınıfı
$\{T^n x_0\}$	İterasyon dizisi

1. GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Metrik uzaylar teorisi ilk olarak Frechet (Frechet, 1906) ve Hausdorff (Hausdorff, 1914) tarafından oluşturulmuştur. Frechet 1906 yılında doktora tezinde metrik uzaylardan bahsetmiştir. Hausdorff ise Frechet'in bahsettiği metrik uzaylar ile ilgili çalışmalara katkıda bulunmuştur.

Metrik kavramı bir kümedeki uzaklık fonksiyonudur. Metrik uzay ise üzerinde uzaklık fonksiyonu tanımlanmış olan bir kümedir. Bir metrik uzayın sahip olduğu en önemli özellik tamlık özelliğidir.

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi (Goebel ve Kirk, 1990), (Kirk ve Sims (Eds), 2001) tarafından kapsamlı olarak çalışılmıştır. Tam metrik uzaylarda sabit nokta çalışmaları Banach tarafından 1922 yılında başlamıştır. Banach sabit nokta teoremi metrik uzaylar için oldukça önemlidir.

Banach bu teoremi

(X, s) bir tam metrik uzay X, boş kümeden farklı bir küme olsun. $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\alpha > 0$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$s((T(x), T(y)) \leq \alpha s(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha < 1$ varsa T ye büzülme fonksiyonu denir.

$T(x) = x$ eşitliğini sağlayacak şekilde

(i) $x \in X$ noktası T'nin bir ve yalnız bir sabit noktasıdır.

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi, T'nin bu sabit noktasına yakınsar.

şeklinde ifade eder.

Banach'ın büzülme dönüşümü şartı sadeliği ile dikkat çeker. Analizlerde kullanılan en yaygın uygulanan sabit nokta teoremidir. Test edilmesi kolaydır. Teorem Stefan Banach'ın (1892-1945) adıyla anılır (Banach, 1922). Banach büzülmesi ve sabit nokta teoremi ile sabit noktanın varlığı ispatlanır ve sabit noktanın tek olduğu, nasıl bulunacağı da gösterilir. Yakın zamanlarda metrik uzayların bu teoremler için yeterli olmadığı görülmüştür bu sebepden farklı uzaylarda çalışılma ihtiyacı doğmuştur. Banach büzülme şartı bu uzaylara uyarlanmıştır.

Sabit nokta teorisi kavramının temeli 20. asırda atılmıştır. Büzülme şartı Banach'ın oluşturduğu sabit nokta teorisinin temeli olmuştur. Bu şart ardışık yaklaşım teoreminin soyut şeklidir. Bu yöntem eski çağlardan beri denklem çözmek için kullanılmıştır. Örneğin gezegenlerin konumunu belirlemek için kepler eşitliğini çözmek için yararlanılmıştır. Bu teori özellikle biyoloji, kimya, ekonomi, oyun teorisi fizik vb. alnlarda kullanılır.

Bilim insanları klasik fonksiyon uzayları L^pnin genelleştirilmesi üzerinde yıllardır çalışmaktadırlar. İlk çalışmalar Orlicz ve Birnbaum (Birnbaum ve Orlicz, 1931) tarafından yapılmıştır. Modüler uzaylar Lebesgue, Riesz ve Orlicz uzaylarının uzantılarıdır. Vektör uzayında modüler kavramı Nakano (Nakano, 1950) tarafından 1950 yılında ortaya atılmış Turpin, Mazur, Luxemburg, Musielac ve Orlicz tarafından genişletilmiştir (Orlicz, 1988), (Musilelac ve Orlicz, 1959), (Luxemburg, 1955), (Mazur & Orlicz, 1958), (Turpin, 1978). 2006 yılında Chistyakov tarafından küme üzerinde metrik modüler kavramı verilmiştir (Chıstyakov V., 2006). Bu kavram Nakano tarafından verilen fonksiyon uzayındaki klasik lineer modüllerinden elde edilmiştir. Chistyakov modüler metrik uzaylar kavramını F-modülerler tarafından tanımlamış ve bu uzayların teoremlerini geliştirmiştir. Fakat fikir aynı kalmıştır (Chistyakov V., 2008). Modüler fonksiyonlar uzaklık gibi kullanılamaz kullanılabilmesi fonksiyonun ancak ve ancak Δ_2-şartının sağlanması ile mümkün olur. Bu konu ile ilgili bilgi için (Taleb, A. Ait, Hanebaly E., 2000), (Khamsi, M. A., Kozlowski, W. M., Reich, S., 1990), (Khamsi, M. A., Kozlowski, Chen, 1991) kaynaklarına başvurulabilir. Modüler bir küme onu bir metrik uzaya çeviren bir metrik ile donatılabilir. Modüler metrik kavramı lineer uzayda klasik bir modüler kavramından farklı olsa da benzerlik gösterir. Bir kümede modüler metrik, negatif olmayan (muhtemelen sonsuz değerli) hızların alanı olarak yorumlanabilir. Modüler metrik uzaylar, modüler fonksiyon uzayların lineer olmayan versiyonu olarak görülebilir.

1969 yılında Nadler tarafından gösterilen büzülme ilkesinin çok değerli şekliyle başlayan çok değerli operatörler için sabit nokta teorisi pek çok çalışmada kullanılmıştır. Çok değerli sabit nokta teoremleri Banach büzülmesinin genellemesidir. Nadler tam metrik uzaylar için çok değerli büzülme ilkesini kullanarak sabit noktasının var olduğunu ispatlamıştır. Bu ispattan sonra konu ile ilgili yapılan çalışmalar gelişmiştir. Sabit nokta teoremi diferansiyel denklem hesaplarında önemlidir. Tek değerli operatörler için kullanılan sabit nokta teoremleri gibi çok değerli versiyonları da diferansiyel ve integral eşitliklerin çözümünde kullanılmaktadır. Modüler uzaylarda sabit nokta teorileri için daha fazla bilgi almak için (Kirk ve Sims(Eds), 2001), (Khamsi ve Kozlowski, 2015) kaynaklarına da başvurulabilir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında metrikten modülere, modülerden modüler metrik kavramlarına geçiş şartları incelenecektir. Metrik uzaylarda büzülme dönüşümü, Chistyakov'un vermiş olduğu modüler metrik uzaylarda büzülme dönüşümleri ve sabit nokta teoremleri üzerinde çalışılacaktır. Palais'in temel modüler büzülme şartı ve temel güçlü modüler büzülme şartı ile modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremi ispatlanmaya çalışılacaktır. Ayrıca modüler metrik uzaylarda Reich büzülme dönüşümü verilip ispatı klasik tekniklerden yararlanarak yeni bir versiyon ile ispatlanmaya çalışılacak, benzer şekilde çok değerli Reich büzülme dönüşümü verilecek ve çok değerli Reich sabit nokta teorisi klasik tekniklerden ilham alınarak özgün bir şekilde ispatlanmaya çalışılacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar ve Ön Hazırlık

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız Metrik, PseudoMetrik, Modüler Metrik vb. tanım ve bu kavramlarla ilgili örnekleri vererek okuyucunun çalışmanın bütünlüğünden kopmadan idrak etmesi amaçlanmaktadır. Metrik kavramı basit olarak x ve y gibi herhangi iki nokta arasındaki uzaklık kavramından bahsederken, modüler metrik kavramı ile bu iki nokta arasındaki uzaklığın sabit bir ortalama hızla ne kadar zamanda katedeceği üzerinde durulmaktadır. Buradan hareketle iki nokta arasındaki mesafeyi katetmek uzaklıklar arası yapısal olarak bir bütün ise mümkünken, uzaklıklar arası yapısal olarak bir bütün değilse mümkün olmayacaktır, dolayısıyla bu durumda hiçbir zaman bir noktadan diğer bir noktaya ulaşmak mümkün olmayacaktır. Örneğin dünya üzerinde iki farklı kıtadaki noktalardan kara yolu ile ulaşmak mümkün değil iken, aynı kıta üzerindeki noktalardan ulaşmak mümkün olacaktır. Buradan hareketle modüler metrik çalışmalarımızda sonsuz da kümeye dahil olacaktır.

Tanım 2.1.1 (Metrik Uzay) $X \neq \emptyset$ olmak üzere s: $X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall$ $x, y, z \in X$ için;

M1-) $s(x,y) \geq 0$

M2-) $s(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3-) $s(x,y) = s(y,x)$ (simetri)

M4-) $s(x,y) \leq s(x,z) + s(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

aksiyomları sağlanıyorsa s fonksiyonuna X üzerinde metrik, (X,s) ikilisine de metrik uzay denir. M2-) şartı yerine,

M2′-) $\forall x \in X$ için $s(x,x) = 0$

aksiyomunu kullanırsak s fonksiyonuna X üzerinde pseudometrik (X,s) ikilisine de pseudometrik uzay denir (Chıstyakov, 2015).

Tanım 2.1.2 (Metrik Uzaylarda Yakınsaklık) (X, s) bir metrik uzay ve bu uzayda bir dizi (x_n) olsun. $x \in X$ olmak üzere herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall n \geq n_0$ için $s(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 varsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyor denir ve $n \to \infty$ için $s(x_n, x) \to 0$ ile ifade edilir.

Tanım 2.1.3 (X, s) bir metrik uzay ve bu uzayda bir dizi (x_n) olsun. Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall\, m, n \geq n_0$ için

$$s(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde n_0 varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.4 (X, s) bir metrik uzay olmak üzere X üzerindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, s) metrik uzayına **tam metrik uzay** denir.

Tanım 2.1.5 (X, s_1) ve (Y, s_2) iki metrik uzay $f: (X, s_1) \to (Y, s_2)$ ve $a \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $s(x, a) < \delta$ olduğunda $s(f(x), f(a)) < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X'in her bir noktasında sürekli ise f fonksiyonuna X üzerinde sürekli ya da kısaca süreklidir denir.

Tanım 2.1.6 (X, s_1) ve (Y, s_2) iki metrik uzay $f: (X, s_1) \to (Y, s_2)$ fonksiyonu eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$s(x, y) < \delta$$

olduğunda her $x, y \in X$ için

$$s\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.1.7 X, sayı cismi $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) olan bir vektör uzayı olsun. Eğer her $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\sigma = \|\,.\,\| : X \to \mathbb{R},$$

$$\sigma(x) = \|x\|$$

Fonksiyonu için

N.1 $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N.2 $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$

N.3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

özellikleri sağlanıyorsa $\|\,.\,\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\,.\,\|)$ ikilisine ise normlu uzay denir. Bazen normlu uzay yerine **'normlu doğrusal uzay'** ya da **'normlu vektör uzay'** ifadeleri de kullanılabilir.

Bir normlu doğrusal uzayı, normdan indirgenen metrik ile tam ise **Banach uzayı** olarak adlandırılır.

Normlu uzaylar ve Banach uzayları birer metrik uzaydır.

2.2. Modüler Metrik Uzaylar

Tanım 2.2.1 X herhangi bir vektör uzayı olmak üzere, $m : X \to [0, \infty]$ fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve $\alpha > 0,\ \beta > 0$ için

$m.1)$ $m(0) = 0;$

$m.2)$ $m(\alpha x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$m.3)$ $m(-x) = m(x);$

$m.4)$ $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için

$$m(\alpha x + \beta y) \leq m(x) + m(y)$$

aksiyomları ile birlikte m fonksiyonuna, X vektör uzayı üzerinde bir modülerdir denir. $m.4)$ aksiyomu yerine;

$m.4')$ $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için

$$m(\alpha x + \beta y) \leq \alpha m(x) + \beta m(y),$$

aksiyomunu alacak olursak, m fonksiyonuna, X vektör uzayı üzerinde bir konveks modülerdir denir. Ayrıca

$$X_m \coloneqq \{x \in X : \alpha \to 0\ \ i\text{ç}in\ m(\alpha x) \to 0\}$$

şeklinde ifade edilen X_m de modüler küme olarak adlandırılır. (Khamsi M. , 1996) (Nakano, 1950) (Musielac ve Orlicz, 1959,2) (Kozlowski, 1988)

Gelişigüzel bir kümede metrik modüler tanımı Chıstyakov tarafından 2006 yılında bu fikirlerin bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Chıstyakov'un formülü sabit nokta teoremini anlamada iyi bir kaynak oluşturur.

Örnek 2.2.2 X herhangi bir vektör uzayı, $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ norm fonksiyonu $\forall x, y \in X\ ve\ \alpha \in \mathbb{R}$ için

m.1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

m.2) $\forall \alpha > 0\ ve\ |\alpha| = 1$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| = \|x\|,$

m.3) $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için $\|\alpha x + \beta y\| \leq \alpha\|x\| + \beta\|y\|$

aksiyomları ile birlikte norm fonksiyonu, X vektör uzayı üzerinde bir konveks modülerdir denir.

Tanım 2.2.3 $X \neq \emptyset$ bir küme olsun, $\forall a, b, c \in X$ ve $\forall t, s, m > 0$ için

$$w: (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$$
$$(t, a, b) \mapsto w_t(a, b)$$

fonksiyonu;

$w.1)$ $w_t(a, b) = 0 \;\; \Leftrightarrow a = b,$

$w.2)$ $w_t(a, b) = w_t(b, a)$

$w.3)$ $w_{s+m}(a, b) \leq w_s(a, c) + w_m(c, b)$

aksiyomları ile birlikte w, fonksiyonu X kümesi üzerinde bir modüler metriktir denir.

$w.3)$ aksiyomu yerine;

$w.3')$ $w_{s+m}(a, b) \leq \frac{s}{s+m} w_s(a, c) + \frac{t}{s+m} w_m(c, b)$

aksiyomunu alacak olursak, w fonksiyonuna, X kümesi üzerinde bir konveks modüler metriktir denir. Ayrıca $w.1)$ şartını,

$w.1')$ $x \in X$ ve $\forall t > 0$ için $w_t(x, x) = 0$

olarak ifade eder isek, w fonksiyonu X üzerinde pseudomodüler metrik olarak isimlendirilir (Chıstyakov, 2010).

Teorem 2.2.4 $m: X \to [0, \infty]$ fonksiyonu verilsin, $\forall t > 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$w_t(x, y) = m\left(\frac{x-y}{t}\right), \qquad (1)$$

X vektör uzayı üzerinde m modülerdir (konveks modülerdir) ancak ve ancak w, X üzerinde modüler metriktir (konveks modüler metriktir) (Chıstyakov, 2015).

İspat: $\forall t > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ ve $\forall x, y \in X$ için

$m.1)$ $\Leftrightarrow w.1)$ $m\left(\frac{x-y}{t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_t(x, y) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \forall t > 0 \;\; için \;\; x = y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-y}{t} = \frac{0}{t} = 0$$

elde edilir.

$m.2) \Leftrightarrow w.1)$ $$m(\alpha x) = m\left(\frac{x-0}{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$w_{1/\alpha}(x, 0\,) = 0$$

$w_{1/\alpha}(x, 0\,) = 0$ ise $x = 0$ ve $x \in X,\ \forall\alpha > 0$ için $m(\alpha x) = 0$ olur.

$m.3) \Leftrightarrow w.2)$ $\forall\, x \in X$ için $m(-x') = m(x')$ ise

$w_t(x, y) = m\left(\frac{x-y}{t}\right)$ $x' = \frac{x-y}{t}$ olsun.

$$m\left(\frac{x-y}{t}\right) = m\left(\frac{-(-x+y)}{t}\right)$$
$$= m\left(\frac{-(y-x)}{t}\right)$$
$$= m\left(\frac{y-x}{t}\right)$$
$$= w_t(y, x)$$

$\forall\, x \in X$ için $w_t(x, y) = w_t(y, x)\ ise$

$$w_t(x, y) = m\left(\frac{x-y}{t}\right) = m(x') \qquad \left(x' = \frac{x-y}{t} \text{ olsun}\right)$$
$$w_t(y, x) = m\left(\frac{y-x}{t}\right)$$
$$= m(-x').$$

$(m.4) \Leftrightarrow$ w.3) $\frac{t}{t+m} = \alpha > 0,\ \frac{m}{t+m} = \beta >$ olmak üzere

$$\frac{x-y}{t+m} = \frac{t}{t+m}.\frac{x-z}{t} + \frac{m}{t+m}.\frac{z-y}{m} = \alpha x' + \beta y' \qquad (*)$$

(1), (*) ve $m.4)$ birlikte kullanılarak, aksiyom w.3)'teki eşitsizliği aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$w_{t+m}(x, y) = m\left(\frac{x-y}{t+m}\right)$$

$m(\alpha x' + \beta y') \leq m(x') + m(y')$ eşitsizliği kullanılarak

$$= m\left(\frac{x-z}{t}\right) + m\left(\frac{z-y}{m}\right)$$
$$= w_t(x, z) + w_m(z, y)$$

elde edilir.

$w.3) \Rightarrow m.4)$ $\alpha > 0, \beta > 0,$ $\alpha + \beta = 1$ olduğunu varsayalım. Aksi takdirde $m.5)$ açıktır. (1) ve $w.4)$ birlikte kullanarak, $x, y \in X$ için ,

$$m(\alpha x + \beta y) = m\left(\frac{\alpha x - (-\beta y)}{\alpha + \beta}\right)$$
$$= w_{\alpha+\beta}(\alpha \mathrm{x}, -\beta \mathrm{y})$$
$$\leq w_{\alpha}(\alpha \mathrm{x}, 0) + w_{\beta}(0, -\beta \mathrm{y})$$
$$= m\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) + m\left(\frac{\beta x}{\beta}\right)$$
$$= m(x) + m(y)$$

elde edilir.

$(m.4') \Leftrightarrow$ $w.4)$ $t, m > 0$ ve $x, y, z \in X$ verildiğinde

$\alpha = \frac{t}{t+m} > 0,$ $\beta = \frac{m}{t+m} > 0,$ $\alpha + \beta = 1$ ($x' = \frac{x-z}{t}$ ve $y' = \frac{z-y}{m}$) olmak üzere ve (*) dan

(1) ve m.4′) birlikte kullanılarak, aksiyom $w.4)$ eşitsizliğini,

$$w_{t+m}(x, y) \leq \frac{t}{t+m} w_t(x, z) + \frac{m}{t+m} w_m(z, y)$$

elde ederiz.

$w.4) \Leftrightarrow m.4')$ $\alpha > 0,$ $\beta > 0,$ $\alpha + \beta = 1$ olduğunu varsayalım. (aksi takdirde $(m.5)$ açıktır)

(1) ve (iv) dikkate alındığında $x, y \in X$ için

$$m(\alpha x + \beta y) = m\left(\frac{\alpha x - (-\beta y)}{\alpha + \beta}\right)$$
$$= w_{\alpha+\beta}(\alpha \mathrm{x}, -\beta \mathrm{y})$$
$$\leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta} w_{\alpha}(\alpha \mathrm{x}, 0) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} w_{\beta}(0, -\beta \mathrm{y})$$
$$= \alpha m\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) + \beta\, m\left(\frac{\beta x}{\beta}\right)$$
$$= \alpha m(x) + \beta m(y).$$

Teorem 2.2.5 $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonunun aşağıdaki iki koşulu sağladığını varsayalım.

(I) $\forall t > 0$ ve $x, y, z \in X$ $için$ $w_t(x + z, y + z) = w_t(x, y)$

(II) $\forall t, m > 0$ ve $x \in X$ $için$ $w_t(mx, 0) = w_{t/m}(x, 0)$

$x \in X$ verildiğinde $m(x) = w_1(x, 0)$ olsun. Bu taktirde;

(a) eşitlik (1) eşitliğini sağlar.

(b) m reel vektör uzayı X üzerinde bir klasik (konveks) modülerse w, X kümesindeki bir (konveks) modülerdir (Chıstyakov, 2015).

İspat: (a) I ve II özelliklerini kullanarak

$$w_t(x, y) = w_t(x - y, y - y)$$
$$= w_1\left(\frac{x-y}{t}, 0\right)$$
$$= m\left(\frac{x - y}{\quad}\right)$$

(b) İspatın ilk koşulları gerçekleştirdiği açık olduğundan sadece $w.4) \Leftrightarrow m.5)$ koşulunu sağlarız.

$w.4) \;\Rightarrow\; m.5)$

$\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1$ ve $x, y \in X$ eşitlikler (1.3.3), I ve II ile koşul (iv) ten

$$m(\alpha x + \beta y) = w_1(\alpha x, -\beta y) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} w_\alpha(\alpha x, 0) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} w_\beta(0, -\beta y)$$
$$= \alpha w_{\alpha/\alpha}(x, 0) + \beta w_{\beta/\beta}(y, 0)$$
$$= \alpha m(x) + \beta m(y).$$

$m.5) \;\Leftarrow\; w.4)$ Eşitlik (1) hesaba katıldığında teorem 2.2.4 ün ispatı burada da geçerlidir.

2.3. $\varphi -$ Üretilen Modülerler

$\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty]$ fonksiyonu $\varphi(0) = 0\ ve\ \varphi \not\equiv 0$ olacak şekilde azalmayan bir fonksiyon olsun.

$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı, $x \in X$ olmak üzere, $m(x) = \varphi(\|X\|)$ fonksiyonu, X üzerinde klasik modülerdir. $m,\ X$ üzerinde konveks modülerdir ancak ve ancak $\varphi,\ [0, \infty)$ üzerinde konvekstir (Chistyakov V. , 2015).

Teorem 2.3.1 (X,s) bir metrik uzay olsun.

$$w_t(x,y)=\varphi\left(\frac{s(x,y)}{t}\right),\qquad t>0,\ \ x,y\in X \tag{2}$$

ise bu durumda w, X üzerinde bir modülerdir. Ayrıca φ konveks ise w, konveks modülerdir ve $\forall\, u>0$ için $\varphi(u)\neq 0$ ise w kesin (strict) olur (Chistyakov V. , 2015).

Örnek 2.3.2 (M,s) bir metrik uzay olsun. $X=M^N$ ve $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ üst toplamsal fonksiyon olsun. $w:(0,\infty)\times X\times X\to[0,\infty]$ fonksiyonunu

$$w_t(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{s(x_n,y_n)}{h(t)}\right),\qquad t>\ 0,\ \ x,y\ \in X.$$

şeklinde tanımlayalım, bu durumda w,X üzerinde modülerdir.

Örnek 2.3.3 $w_t(x,y)=s(x,y)$

Bu örnek modüler metrik olup konveks değildir (Abobaker ve Ryan, 2017). Gösterelim:

$w.1)$ $x,y\in X$ ve $t>0$ için $w_t(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ olduğunu göstermeliyiz. Metrik uzay tanımından $s(x,y)=0\ \Leftrightarrow\ x\ =\ y$ olup,

$$w_t(x,y)=0=s(x,y)\Leftrightarrow x=y \text{ dir.}$$

$w.2)$ $x,y\in X$ ve $\forall t>0$ için $w_t(x,y)=\ w_t(y,x)$ olduğunu gösterelim. Metrik uzay tanımından $s(x,y)\ =\ s(y,x)$ olup, $w_t(x,y)=s(x,y)=w_t(y,x)$ dir.

$w.3)$ $x,y,z\in X$ ve $\forall s,t>0$ için $w_{s+t}(x,y)\le w_s(x,z)+w_t(z,y)$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermeliyiz. Metrik uzay tanımından

$$w_{s+t}(x,y)=s(x,y)\le s(x,z)+s(z,y)$$

yazabiliriz. Ayrıca $w_s(x,z)=s(x,z)$ ve $w_t(z,y)=s(z,y)$ olup, buradan da

$$w_{s+t}(x,y)\le w_s(x,z)+w_t(z,y)$$

elde edilir ki verilen fonksiyon metrik modülerdir. Şimdi konveks olup olmadığını araştıralım,

$$\mathrm{w}_{s+t}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leq \frac{s}{s+t}\mathrm{w}_{s}(\mathrm{x},\mathrm{z}) + \frac{t}{s+t}\mathrm{w}_{t}(\mathrm{z},\mathrm{y})$$

$s = t$ ve $z = y$ alırsak

$$\mathrm{w}_{t+t}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leq \frac{t}{t+t}\mathrm{w}_{t}(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \frac{t}{t+t}\mathrm{w}_{t}(\mathrm{y},\mathrm{y})$$

($s(y, y) = 0$ olduğundan)

$$\mathrm{w}_{2t}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leq \frac{1}{2}\mathrm{w}_{t}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

elde edilir.

$$\mathrm{s}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leq \frac{1}{2}s(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

olduğundan bu fonksiyon konveks değildir.

Örnek 2.3.4 $w_t(x, y) = \frac{s(x,y)}{t}$

Bu örnekte $w_t(x, y)$ fonksiyonunu x noktasından y noktasına t kadar sürede gitmesi için gereken ortalama hız olarak da düşünebiliriz. Üçgen eşitsizliğiyle yapılan basit bir hesaplama bu modülün konveks olduğunu gösterir (Abobaker ve Ryan, 2017).

$w.1)$ $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $w_t(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ olduğunu göstermeliyiz. Metrik uzay tanımından $s(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ olup,

$$w_t(x, y) = \frac{s(x, y)}{t} = \frac{0}{t} = 0$$

olup $w_t(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ dir.

$w.2)$ $x, y \in X$ ve $\forall t > 0$ için $w_t(x, y) = w_t(y, x)$ olduğunu gösterelim. Metrik uzay tanımından $s(x, y) = s(y, x)$ olup,

$$w_t(x, y) = \frac{s(x, y)}{t} = \frac{s(y, x)}{t}$$
$$= w_t(y, x)$$

elde edilir ki $w_t(x, y) = w_t(y, x)$ dir.

$w.3)$ $x, y, z \in X$ ve $\forall s, t > 0$ için $w_{s+t}(x, y) \leq w_s(x, z) + w_t(z, y)$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$w_{s+t}(x, y) = s(x, y) \leq s(x, z) + s(z, y)$$

yazılabilir. Ayrıca $w_s(x, y) = \frac{s(x,y)}{s}$ ve $w_t(x, y) = \frac{s(x,y)}{t}$ eşitliklerini kullanırsak

$$w_{s+t}(x,y) \leq w_s(x,z) + w_t(z,y)$$

elde edilir ki verilen fonkisyon modüler metriktir. Konveks olup olmadığını araştıralım,

$$\mathrm{w_{s+t}(x,y)} \leq \frac{s}{s+t}\mathrm{w}_s\mathrm{(x,z)} + \frac{t}{s+t}\mathrm{w_t(z,y)}$$

$s = t$ ve $z = y$ alırsak

$$\mathrm{w_{t+t}(x,y)} \leq \frac{t}{t+t}\mathrm{w_t(x,y)} + \frac{t}{t+t}\mathrm{w}_t\mathrm{(y,y)}$$

yazılabilir, metrik tanımından $s(y,y) = 0$ olup,

$$\mathrm{w_{2t}(x,y)} \leq \frac{1}{2}\mathrm{w}_t\mathrm{(x,y)}$$

$$\frac{\mathrm{s(x,y)}}{2t} \leq \frac{\mathrm{s(x,y)}}{2t}$$

$t > 0$ için fonksiyon konvekstir.

Örnek2.3.5 $w_t(x,y) = \begin{cases} t < s(x,y) & , \infty \\ t \geq s(x,y) & , 0 \end{cases}$

Bu basit örnek hız metaforunun ekstrem bir örneği olarak görülebilir. Eğer ki zaman $s(x,y)$ den daha az ise, x noktasından y noktasına gitmek imkânsızdır. Ama eğer ki zaman en azından $s(x,y)$ kadar ise hemen gidebiliriz. Bu modül de konvekstir (Abobaker ve Ryan, 2017).

$s(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ metrik uzay tanım özelliğinden $t > 0$ olduğu için $t > s(x,y)$ olacağından $w_t(x,y) \Leftrightarrow x = y$ olur.

$s(x,y) = s(y,x)$ metrik uzay tanımı özelliğinden

$$w_t(y,x) = \begin{cases} t < s(x,y) & , \infty \\ t \geq s(x,y) & , 0 \end{cases}$$

$w_t(x,y) = w_t(y,x)$ olur.

$$w_{t+m}(x,y) \leq w_t(x,z) + w_m(z,y)$$

$t + m < s(x,y)$ ise $t < s(x,y)$, $m < s(x,y)$ olur. $\infty \leq \infty + \infty$ ise $\infty \leq \infty$

$t + m \geq s(x,y)$ ise $0 \leq 0 + 0$ ise $0 \leq \infty+\infty$ $0 \leq 0 + \infty$ $0 \leq \infty + 0$ olur.

$w_{t+m}(x,y) \leq \frac{t}{t+m} w_t(x,z) + \frac{m}{t+m} w_m(z,y)$

$m = t, z = y$ alırsak

$$w_{t+t}(x,y) \leq \frac{t}{t+t} w_t(x,y) + \frac{t}{t+t} w_m(y,y)$$

$2t < s(x,y)$ ise $t < s(x,y)$ $2t > s(x,y)$ ise $t < s(x,y)$,
$\lambda t \geq s(x,y)$
olabilir. $\infty \leq \frac{1}{2}\infty$, $\infty \leq \infty$, $0 \leq \frac{1}{2}\infty$, $0 \leq \frac{1}{2}0$, $0 \leq 0$ olduğu için konvekslik gösterilmiş olur.

Tanım 2.3.6 w, X te bir modüler olmak üzere $x_0 \in X$ sabiti ile

$$X_w = X_w(\,x_0) = \{x \in X: \lim_{t\to\infty} w_t\,(x, x_0) = 0\}$$

ve

$$X_w{}^* = X_w{}^*(\,x_0) = \{x \in X: t > 0\;\; w_t(x, x_0) < \infty\}$$

kümelerine modüler uzaylar denir. Bununla birlikte herhangi bir $a, b \in X_w$ için

$s_w(x,y)$ =inf$\{t > 0, w_t(x,y) \leq t\}$

X_w de bir metrik tanımlar.Eğer w modüleri konveks ise herhangi bir $a, b \in X_w{}^*$ için

$$s_w{}^*(x,y) = \inf\{t > 0, w_t(x,y) \leq 1\}$$

şeklinde konveks metrik tanımlanır (Chistyakov V. , 2015).

Tanım 2.3.7 (X, s) bir tam metrik uzay X, boş kümeden farklı bir küme olsun. $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\alpha > 0$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$\mathrm{s}((T(x), T(y)) \leq \alpha s(x,y)$$

olacak şekilde $\alpha < 1$ varsa T ye büzülme fonksiyonu denir.
$T(x) = x$ eşitliğini sağlayacak şekilde
(i) $x \in X$ noktası T'nin bir ve yalnız bir sabit noktasıdır.
(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi, T'nin bu sabit noktasına yakınsar.
şeklinde ifade eder.

3. BÖLÜM

3.1 Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Banach'ın sabit nokta teorisi, Chistyakov tarafından modüler metrik uzaylara genellenmiştir. Chistyakov modüler büzülme ve güçlü modüler büzülme dönüşümleri için sabit nokta teorilerini ispatlamıştır. Burada yapılan ispat Chistyakov' un ispatı yerine Richard Palais'in Banach sabit nokta teorisinin ispatından faydalanılarak yapılmıştır (Palais, 2007).

Teorem 3.1.1 w, X te bir konveks modüler, $k > 0$ bir sabit ve $T: X_w^* \to X_w^*$ dönüşümü verilsin. $x, y \in X_w^*$ olmak üzere,

$$s_w^*(Tx, Ty) \leq k s_w^*(x, y) \tag{3.1.1}$$

Lipschitz şartı, $\forall t > 0$ için $w_{kt+0}(Tx, Ty) \leq 1$ öyleki $w_t(x, y) \leq 1$ şartına denktir (Chistyakov V. , 2011).

Teorem 3.1.2 w, X üzerinde bir modüler, $k > 0$ ve $T: X_w^* \to X_w^*$ dönüşümü verilsin. $x, y \in X_w^*$ için,

$$s_w(Tx, Ty) \leq k s_w(x, y) \tag{3.1.2}$$

vardır ancak ve ancak $\forall t > 0$ için $w_{kt+0}(Tx, Ty) \leq kt$ öyleki $w_t(x, y) \leq t$ olmasıdır (Chistyakov V., 2011).

Tanım 3.1.3 w, X üzerinde bir modüler(konveks) ve $T: X_w^* \to X_w^*$ dönüşümü verilsin öyle ki, $\forall x, y \in X_w^*$ ve $0 < t < t_0$ için

$$w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y) \tag{3.1.3}$$

olacak biçimde k ya bağlı $0 < k < 1$ sayısı ve $t_0 > 0$ bulunabiliyorsa T dönüşümüne modüler büzülme(veya $w - büzülme$) denir (Chistyakov V., 2011).

Not: (X, s) metrik uzayı için $w_t(x,y) = \frac{s(x,y)}{t}$ denkliği ve (3.1.2) şartı kullanılarak

$$s(Tx, Ty) \leq ks(x,y)$$

elde edilir.

İkincisi, (3.1.3) şartı, (3.1.1) de soldaki varsayım ile karşılaştırıldığında t ya göre yerel bir durum görülür içindeki temel eşitsizlik $\infty \leq \infty$ olabilir.

Üçüncüsü, eğer ek olarak w strict ise ve $\infty/\infty = 1$ olarak ayarlarsak bu durumda (3.1.3) aşağıdakilerin bir sonucudur. $\forall\, x, y \in X_w^*$ supremum $x \neq y$

$$\lim_{t\to 0+} sup_{x\neq y} \frac{w_{ht}(T_x,T_y)}{w_t(x,y)} \leq 1 \tag{3.1.4}$$

olacak şekilde bir $0 < h < 1$ sayısı vardır. Bunu görmek için ilk olarak (3.1.4)'te sol tarafın kesin modüler özelliği kullanılarak $\forall t > 0$ için $w_t(x,y) \neq 0$ ve $x \neq y$ olur. $h < k < 1$ olacak şekilde herhangi bir k seçelim.

$$\lim_{m\to +0} \sup_{t\in(0,m]} \left(\sup_{x\neq y} \frac{w_{ht}(T_x,T_y)}{w_t(x,y)} \right) \leq 1 < \frac{k}{h}$$

ve böylece $m_0 = m_0(k) > 0$ vardır öyle ki $\forall\ 0 < t \leq m_0$ için

$$\sup_{x\neq y} \frac{w_{ht}(T_x,T_y)}{w_t(x,y)} < \frac{k}{h}$$

olur. Buradan $0 < t \leq m_0$ $x, y \in X_w^*$ için

$$w_{ht}(T_x,T_y) < \frac{k}{h} w_t(x,y)$$

w nin azalan olması ve $(h/k)t < t$ eşitsizliğinden,

$$w_t(x,y) \leq \frac{(h/k)t}{t} w_{(h/k)t}(x,y) = \frac{h}{k}\, w_{(h/k)t}(x,y)$$

dir. Buradan da her $0 < t \leq m_0$ ve $x, y \in X_w^*$ için

$$w_{ht}(Tx,Ty) \leq w_{(h/k)t}(x,y)$$

dir.

$t' = (h/k)t$ ve $t_0 = (h/k)m_0$ şeklinde ifade edersek $0 < t \leq t_0$ ve $ht = kt'$ olup. Son eşitsizlikten her $0 < t' \leq t_0$ ve $x, y \in X_w^*$ için

$$w_{kt'}(Tx, Ty) \leq w_{t'}(x, y)$$

elde edilir (Chistyakov V. , 2011).

Teorem 3.1.4 w, X üzerinde kesin konveks modüler olsun. X_w^* modüler uzayı w_tam dır ve $w - büzülme$ dönüşümü $T: X_w^* \to X_w^*$,

$\forall t > 0$ için $x = x(t) \in X_w^*$ vardır öyle ki $w_t(x, Tx) < \infty$ (3.1.5)

dır.

Bazı $x_* \in X_w^*$ için $Tx_* = x_*$ olacak şekilde T nin bir sabit noktası vardır. Eğer ek olarak modüler w yalnızca sonlu değer alıyor ise bu durumda (3.1.5) şartına gerek yoktur. T nin x_* sabit noktası tektir ve $\forall \bar{x} \in X_w^*$ için $\{T^n \bar{x}\}$ iterasyon dizisi x_* a modüler yakınsar (Chistyakov V. , 2011).

Tanım 3.1.5 w, X üzerinde modüler olsun, $T: X_w^* \to X_w^*$ dönüşümü $\forall x, y \in X_w^*$ ve $0 < t < t_0$ için

$w_{kt}(Tx, Ty) \leq k w_t(x, y)$ (3.1.6)

olacak biçimde $0 < k < 1$ ve $t_0 = t_0(k) > 0$ varsa T dönüşümüne güçlü modüler büzülme denir (Chistyakov V. , 2011).

Teorem 3.1.6 w, X üzerinde kesin modüler olsun, öyleki X_w^* , w-tamdır ve $T: X_w^* \to X_w^*$ dönüşümü (3.1.5) şartını sağlayan güçlü bir $w - büzülme$ dönüşümüdür. Eğer w modüleri X_w^* da sonlu değerlere sahip ise (3.1.5) şartının sağlanmasına gerek yoktur. Böylece T nin sabit bir noktası vardır. T nin sabit noktası x_* olup tektir ve $\forall \bar{x} \in X_w^*$ için $\{T^n \bar{x}\}$ iterasyon dizisi x_* a modüler yakınsar (Chistyakov V. , 2011).

Kabul edelim ki T, (X, s) metrik uzayındaki k sabitli bir büzülme olsun. Böylece elimizde $\forall\, x, y \in X$ için

$s(Tx, Ty) \leq ks(x, y)$

vardır. Bu veriyi üçgen eşitsizliği yardımı ile x, y ve Tx, Ty ile birleştirdiğimizde

$$s(x, y) \leq \frac{s(x, Tx) + s(y, Ty\,)}{1 - k}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Palais buna temel büzülme eşitsizliği ismini vermiştir. Bu onun ispatındaki en önemli içeriklerden biridir. Bu başlangıç noktasındaki T dönüşümünün tekrarlaması yardımıyla oluşturulmuş dizi için Cauchy özelliğini oluştumak amacıyla kullanılır (Palais, 2007).

3.2 Temel Modüler Büzülme Eşitsizliği

Banach sabit noktasını modüler metrik uzaylara genelleştiren kişi Chistyakov dur. Chistyakov temel modüler büzülme ve temel güçlü modüler büzülme eşitsizliğini ispatlamıştır. Burada Chistyakov un ispatları yerine Palais in Banach sabit nokta teoreminin ispatındaki uygulamalaı kullanılacaktır(Palais R., (2007)).

Teorem 3.2.1 (Temel Modüler Büzülme Eşitsizliği) w, X üzerinde konveks modüler $0 < t \leq t_0$ için $w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y)$ ile $T\colon X_w^* \to X_w^*$ bir modüler büzülme dönüşümüdür. $t_1,\ t_2 \geq 0$, $0 < t \leq t_0$ ve $t_1 + t_2 = (1 - k)t$ olsun. Böylece $\forall\, x, y \in X_w^*$ için $w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y)$ olduğundan

$$w_t(x, y) \leq \frac{t_1 w_{t_1}(x, Tx) + t_2 w_{t_2}(y, Ty)}{t(1 - k)}$$

elde edilir (Abobaker ve Ryan, 2017).

İspat: $t_1 + t_2 = (1 - k)t$ ve $w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y)$ den

$$w_{t_1 + kt + t_2}(x, y) \leq \frac{t_1}{t} w_{t_1}(x, Tx) + k w_{kt}(Tx, Ty) + \frac{t_2}{t} w_t(y, Ty)$$

$$w_t(x, y) \leq \frac{t_1}{t} w_{t_1}(x, Tx) + k w_t(x, y) + \frac{t_2}{t} w_{t_2}(y, Ty)$$

$$w_t(x,y) \leq \frac{t_1 w_{t_1}(x,Tx) + t_2 w_{t_2}(y,Ty)}{t(1-k)}$$

yazabiliriz.

Şimdi Chistyakov'un modüler metrik uzaylarda ilk sabit nokta teorisini verirken ifade etmiş olduğumuz temel modüler büzülme eşitsizliğini kullanacağız.

Teorem 3.2.2 w, X te bir kesin konveks modüler, X_w^* modüler uzayı w_tam ve $T: X_w^* \to X_w^*$ $w - büzülme$ dönüşümü olmak üzere

$\forall\lambda > 0$ için $w_t(x,Tx) < \infty$ (3.1.5)

şartını sağlayan $x = x(t) \in X_w^*$ vardır. O halde bazı $x_* \in X_w^*$ için $Tx_* = x_*$ olacak şekilde T nin bir sabit noktası vardır. Eğer ek olarak modüler w, X_w^* de yalnızca sonlu değerleri ifade ederse o zaman $w_t(x,Tx) < \infty$ durumu gereksiz olur. T nin x_* sabit noktası tektir ve $\forall x_0 \in X_w^*$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi x_* a modüler yakınsar (Abobaker ve Ryan, 2017).

İspat: Eğer x ve y sabit noktalar ise $w_t(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ dir. Dolayısıyla bir büzülme dönüşümünün en fazla bir sabit noktası vardır. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $T^n(x_0)$ dizisinin Cauchy olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$x = T^n(x_0)$ ve $y = T^m(x_0)$ alalım ve temel modüler büzülme eşitsizliği

$$w_t(x,y) \leq \frac{t_1 w_{t_1}(x,Tx) + t_2 w_{t_2}(y,Ty)}{t(1-k)}$$

kullanarak $w_t\big(T^n(x_0), T^m(x_0)\big) \to 0$ olduğunu gösterelim

$$w_t\big(T^n(x_0), T^m(x_0)\big) \leq \frac{t_1 w_{t_1}\big(T(T^n(x_0), T^n(x_0)\big) + t_2 w_{t_2}\big(T(T^m(x_0), T^m(x_0)\big)}{1-k}$$

$$= \frac{w_{t_1}\big(T^n(T(x_0), T^n(x_0)\big) + w_{t_2}\big(T^m(T(x_0), T^m(x_0)\big)}{1-k}$$

$$\leq \frac{t_1 w_{k^{-n}t_1}(T(x_0), x_0) + t_2 w_{k^{-m}t_2}(T(x_0), x_0))}{1-k}$$

$n \to \infty$ için $k^{-n}\, t_1 \to \infty$ böylece n nin yeterince büyük değerleri için $k^{-n}\, t_1 >$ t olur. Benzer olarak n nin yeterince büyük değerleri için $k^{-m}\, t_2 > t$ olur. t $\to w_t(x,y)$ fonksiyonu artmayandır ve $0 < k < 1$ dir. Buradan

$$w_{k^{-m}t_2}(Tx_0, x_0), w_{k^{-n}t_1}(Tx_0, x_0) \leq w_t(Tx_0, x_0) < \infty$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$w_t\big(T^n(x_0), T^m(x_0)\big) \to 0$$

dır. Dolayısıyla $T^n(x_0)$ Cauchy dir.

Önerme 3.2.3 (Temel Güçlü Modüler Büzülme Eşitsizliği) w, X üzerinde konveks modüler $0 < t \leq t_0$ için

$$w_{kt}(Tx, Ty) \leq k w_t(x,y)$$

ile $T{:}\, X_w^* \to X_w^*$ temel güçlü modüler büzülme dönüşümüdür.

$t_1,\ t_2 \geq 0,\ 0 < t \leq t_0$ ve $t_1 + t_2 = (1-k)t$ olsun. Böylece $\forall\, x, y \in X_w^*$ için

$$w_t(x,y) \leq \frac{w_{t_1}(x,Tx) + w_{t_2}(y,Ty)}{1-k}$$

olur (Abobaker ve Ryan, 2017).

İspat:

$$w_t(x,y) \leq \frac{w_{t_1}(x,Tx) + w_{t_2}(y,Ty)}{1-k}$$

özelliği ve modüler metrik tanımının 3. özelliğinden

$$w_{\,t_1+kt+\,t_2}(x,y) \leq w_{t_1}(x,Tx) + w_{kt}(Tx,Ty) + w_{t_2}(y,Ty)$$

$t_1 + t_2 = (1-k)t$ ile T için güçlü büzülme özelliğinden

$$w_t(x,y) \leq w_{t_1}(x,Tx) + k w_t(x,,y) + w_{t_2}(y,Ty)$$

olur ve böylece $\forall\ x, y \in X_w^*$ için

$$w_t(x,y)\ \le\ \frac{w_{t_1}(x,Tx)+w_{t_2}(y,Ty)}{1-k}$$

elde edilir.

Aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamak için temel güçlü büzülme eşitsizliğini kullanıyoruz.

Teorem 3.2.4 w, X te bir kesin modüler X_w modüler uzayı w_tam, $T: X_w^* \to X_w^*$ güçlü $w - büzülme$ dönüşümü olmak üzere

$\forall t > 0$ için $w_t(x,Tx) < \infty$ (3.1.5)

şartını sağlayan $x = x(t) \in X_w^*$ vardır. Dolayısıyla bazı $x_* \in X_w^*$ için $Tx_* = x_*$ olacak şekilde T nin bir sabit noktası vardır. Eğer ek olarak modüler w, X_w^* de yalnızca sonlu değerleri ifade ederse $w_\lambda(x,Tx) < \infty$ durumu gereksiz olur. T nin x_* sabit noktası tektir ve $\forall x_0 \in X_w^*$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi x_* a modüler yakınsar (Abobaker ve Ryan, 2017).

İspat: Eğer x ve y her ikisi de sabit noktalar ise $w_t(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ dir. Dolayısıyla bir büzülme dönüşümünün en fazla bir sabit noktası vardır. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $T^n(x_0)$ dizisinin Cauchy olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

$x = T^m(x_0)$ ve $y = T^n(x_0)$ alalım ve temel güçlü modüler büzülme eşitsizliğini

$$w_t(x,y)\ \le\ \frac{w_{t_1}(x,Tx)+w_{t_2}(y,Ty)}{1-k}$$

kullanarak $w_t\big(T^n(x_0), T^m(x_0)\big) \to 0$ olduğunu gösterelim.

$$w_t\big(T^n(x_0),T^m(x_0)\big)\ \le\ \frac{w_{t_1}\big(T(T^n(x_0)),T^n(x_0)\big)+w_{t_2}\big(T(T^m(x_0)),T^m(x_0)\big)}{1-k}$$

$$=\ \frac{w_{t_1}\big(T^n(T(x_0)),T^n(x_0)\big)+w_{t_2}\big(T^m(T(x_0)),T^m(x_0)\big)}{1-k}$$

$$\leq \frac{w_{k^{-n}t_1}(T(x_0),x_0)+w_{k^{-m}t_2}(T(x_0),x_0)}{1-k}$$

n→ ∞ iken $k^{-n}\,t_1 \to \infty$ böylece n nin yeterince büyük değerleri için $k^{-n}\,t_1 >$ t olur. Benzer olarak n nin yeterince büyük değerleri için $k^{-m}\,t_2 > t$ olur. $t \to w_t(x,y)$ fonksiyonu artmayandır ve $0 < k < 1$ dır. Buradan

$$w_{k^{-m}t_2}(Tx_0,x_0), w_{k^{-n}t_1}(Tx_0,x_0) \leq \; w_t(Tx_0,x_0) < \infty$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$w_t\big(T^n(x_0),T^m(x_0)\big) \to 0$$

dır. Bu nedenle $T^n(x_0)$ Cauchy dir.

4.BÖLÜM

4.1 Modüler Metrik Uzaylarda Reich Sabit Nokta Teoremi

Tanım 4.1.1 (Chistyakov V., 2010) X boştan farklı bir küme ve $\forall a,b,c \in X$ ve $\forall t,s > 0$ için

$$w: (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$$
$$(t,a,b) \mapsto w_t(a,b)$$

fonksiyonu;

$w.1)$ $w_t(a,b) = 0 \ \Leftrightarrow a = b,$

$w.2)$ $w_t(a,b) = w_t(b,a)$

$w.3)$ $w_{s+m}(a,b) \leq w_s(a,c) + w_m(c,b)$

aksiyomları ile birlikte $w,$ fonksiyonu X kümesi üzerinde bir modüler metriktir denir. $w.3)$ aksiyomu yerine;

$$w.3') \ w_{s+m}(a,b) \leq \frac{s}{s+m} w_s(a,c) + \frac{t}{s+m} w_m(c,b)$$

aksiyomunu alacak olursak, w fonksiyonuna, X kümesi üzerinde bir konveks modüler metriktir denir. Ayrıca $w.1)$ aksiyomu,

$w.1')$ $x \in X$ ve $\forall t > 0$ için $w_t(x,x) = 0$

Olarak ifade eder isek, w fonksiyonu X üzerinde pseudomodüler metrik olarak isimlendirilir. Ayrıca $w.1)$ aksiyomu yerine,

$\boldsymbol{w}.\mathbf{i}'')$ $x \in X$ ve bazı $t > 0$ için $x = y \Leftrightarrow w_t(x,y) = 0$

şartı sağlanıyorsa w nin X üzerinde regüler olarak ifade edilir.

Not : Bir X kümesi üzerinde w pseudomodüler metriği için $t \to w_t(x,y)$ şeklinde tanımlanan $(0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonu, $(0,\infty)$ kümesi üzerinde artmayan (nonincreasing) fonksiyonudur.

Gerçekten, eğer $0 < m < t,$ $\forall x,y \in X$ için $w.3)$ den

$$w_t(x,y) = w_{t-u+u}(x,y) \leq w_{t-u}(x,x) + w_u(x,y) = w_u(x,y)$$

olup $m < t$ için $w_t(x,y) < w_m(x,y)$ eşitsizliği elde edilir (Chistyakov V. , 2015).

Tanım 4.1.2 w, X üzerinde pseudomodüler (metrik) ve x_0 da X de sabit bir nokta olsun.

$$X_w = X_w(x_0) = \left\{x \in X: \lim_{t\to\infty} w_t\,(x, x_0) = 0\right\}$$

ve

$$X_w^* = X_w^*(x_0) = \{\, x \in X: w_t(x, x_0) < \infty, \qquad \exists t = t(\mathrm{x}) > 0 \,\}$$

şeklinde tanımlanan X_w ve X_w^* kümelerinin (x_0 etrafında) modüler uzay olduğu söylenir.

Yukarıdaki tanımlardan $X_w \subset X_w^*$ olduğu açıktır. Eğer w, X üzerinde bir modüler ise X_w modüler metrik uzayı w vasıtasıyla

$$s_w(x, y) := \inf\{t > 0, w_t(x, y) \leq t\}$$

(aşikar olmayan) metriği ile donatılabilir.

Eğer w, X üzerinde konveks modüler ise iki modüler uzay X_w ve X_w^* çakışıktırlar. Bu durumda, bu aynı iki küme herhangi $x, y \in X_w^*$ için

$$\mathrm{d}_\mathrm{w}^*(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \inf\{\, t > 0: w_t(x, y) \leq 1\}$$

metriği ile donatılabilir. Bu uzaklıklara Luxemburg uzaklıkları denir (Chistyakov V. , 2010) (Chistyakov V. V., 2010).

Tanım 4.1.3 (Chistyakov V., 2010) w, X üzerinde modüler bir metrik olsun.

(a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X_w da bir dizi ve $a \in X_w$ olsun. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin a noktasına $w-$ yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $w_1(x_n, a) \to 0$ olmasıdır. Buradaki a sayısına $\{x_n\}$ dizisinin $w-$limiti denir ve $x_n \xrightarrow{w} a$ ile gösterilir.

(b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X_w da bir dizi olsun. Eğer m, n$\to \infty$ için $w_1(x_m, x_n) \to 0$ oluyorsa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $w-$Cauchy dizisi denir.

(c) M, X_w de bir küme olsun. Eğer M nin olmak üzere M nin $w-$ yakınsak dizilerinin $w-$ limiti M de ise M w-kapalıdır denir.

(d) M, X_w de bir küme olsun. M deki herhangi bir w cauchy dizisi $w-$ yakınsak ise ve $w-$limiti M ye aitse M kümesine $w-$ tam kümedir denir.

(e) M, X_w de bir küme olsun.

$$\delta_w(M) = \sup\{w_1(a,b); a,b \in M\} < \infty$$

ise M $w -$ sınırlıdır denir.

(f) X_w de bir x noktasına w-yakınsayan herhangi bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve herhangi bir $y \in X_w$ için (Chistyakov, 2013)

$$w_1(x, y) \leq \liminf_{n\to\infty} w_1(x_n, y)$$

eşitsizliği sağlanırsa Fatou özelliği sağlanır denir.

Tanım 4.1.4 w, X üzerinde pseudomodüler (metrik) olsun. Eğer X_w^* da verilmiş bir $\{x_n\}$ dizisi ve x elemanı için (muhtemelen) $\{x_n\}$ ve x'e bağlı olarak belirlenen bir $t > 0$ sayısı varsa öyle ki $\lim_{n\to\infty} w_t(x_n, x) = 0$ olduğunda $\lim_{n\to\infty} w_{t/2}(x_n, x) = 0$ oluyorsa w pseudomodüleri Δ_2 şartını sağlar denir. (Chistyakov, 2013)

Tanım 4.1.5 (X, w) modüler metrik uzay olsun. Bir $\alpha > 0$ sayısı için $C_\alpha > 0$ sayısı; herhangi bir $t > 0$ ve X_w deki farklı her a, b noktaları için

$$w_{t/\alpha}(a, \mathrm{b}) \leq C_\alpha w_t(a, \mathrm{b})$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde varsa w, Δ_2-tip şartını sağlar denir. w, Δ_2 $-$tip şartını sağlıyorsa Δ_2 şartını sağlar.

Gerçekten $\{x_n\}$, X_w^* de bir dizi ve $x \in X_w^*$ olsun. Şimdi $w_t(x_n, x) \to 0$ iken $w_{t/2}(x_n, x) \to 0$ olduğunu gösterelim. Δ_2-tip şartında $\alpha = 2$ alınırsa (w' nin tanımından $w_{t/2}(x_n, x) \geq 0$)

$$0 \leq w_{t/2}(x_n, x,) \leq C w_t(x_n, x)$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken limit alınırsa (sıkıştırma teoreminden) istenen elde edilir (T. Dominguez Benavides, 2001).

Not : Açık olarak görüleceği gibi, bazı $\alpha > 0$ lar için $\lim_{n\to\infty} w_\alpha(x_n , x) = 0$ olması her $\alpha > 0$ için $\lim_{n\to\infty} w_\alpha(x_n , x) = 0$ olmasını gerektirmez. Modüler fonksiyon uzaylarında olduğu gibi, bazı $\alpha > 0$ lar için $\lim_{n\to\infty} w_\alpha(x_n , x) = 0$ olması her $\alpha > 0$ için de $\lim_{n\to\infty} w_\alpha(x_n , x) = 0$ olmasını gerektiriyorsa w, Δ_2 şartını sağlar denir.

w −yakınsama ve (Luxemburg uzaklığı) s_w − yakınsama arasındaki ilişki aşağıdaki şekildedir.

Tanım 4.1.6 X_w deki herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi ve $x \in X_w$ için, $\lim_{n\to\infty} s_w(x_n , x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart her $\lambda > 0$ için $\lim_{n\to\infty} w_t(x_n , x) = 0$ olmasıdır (Chistyakov V. V., 2018).

Özel olarak, w −yakınsama ve s_w − yakınsamanın denk olması için gerek ve yeter şart w_1 in Δ_2 şartını sağlamasıdır.

Dahası w modüleri konveks ise, s_w^* ve s_w' nin denkliğinden X_w deki herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi ve $x \in X_w$ için $\lim_{n\to\infty} s_w^*(x_n , x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} w_t(x_n , x) = 0$ olmasıdır (Chistyakov V. V., 2018).

Tanım 4.1.7 (X, w) modüler metrik uzay olsun. Herhangi bir $\alpha > 0$ için büyüme fonksiyonu

$$\Omega(\alpha) = \sup\left\{\frac{w_{t/\alpha}(x,y)}{w_t\,(a,b)};\ t > 0, x, y \in X_w, x \neq y\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun sağladığı temel özellikler (T. Dominguez Benavides, 2001) da lineer durumda ve (Abdou & Khamsi, 2013) de modüler metrik uzaylarda ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.8 (Afrah & Mohamed, 2014) (X, w) modüler metrik uzay olsun. Kabul edelim ki w konveks regüler modüler ve w, Δ_2 koşulunu sağlıyor olsun. Bu taktirde

(1) Herhangi bir $\alpha > 0$ için $\Omega(\alpha) < \infty$ dur.

(2) Ω, kesin artan fonksiyon ve $\Omega(1) = 1$dir.

(3) Herhangi bir $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ için $\Omega\,(\alpha\beta) \leq \Omega(\alpha)\Omega(\beta)$ dır.

(4) $\Omega^{-1}(\alpha)\Omega^{-1}(\beta) \leq \Omega^{-1}(\alpha\beta)$ dır. Burada Ω^{-1} fonksiyonu Ω fonksiyonunun tersidir..

(5) X_w deki herhangi farklı x, y elemanları için

$$s_w^*(x,y) \leq \frac{1}{\Omega^{-1}(1/w_1(x,y))}$$

dir.

İspat : Δ_2-type koşulunun (1) ifadesini sağladığı açıktır ve Ω tanımından $\Omega(1)$ = 1 dir.

Şimdi Ω fonksiyonunun kesin artan olduğunu ispatlayalım. Bunun için $\alpha < \beta$ olsun. w konveks olduğundan herhangi bir $x, y \in X_w$ için

$$w_{\alpha+\beta-\alpha}(x,y) \leq \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta-\alpha} w_{\beta-\alpha}(x,x) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta-\alpha} w_\alpha(x,y)$$

olup

$$w_\beta(x,y) \leq \frac{\alpha}{\beta} w_\alpha(x,y)$$

Eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten $\alpha < \beta$ için

$$\Omega(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\beta}\Omega(\beta)$$

olduğu kolayca görülür.

(3) ve (4) özellikleri (T. Dominguez Benavides, 2001) de geliştirilen ispatlarla gösterilebilir.

(5). Özellik için belirtelim ki

$$w_{\frac{1}{\Omega^{-1}(1/w_1(x,y))}}(x,y \leq \Omega(\Omega^{-1}(1/w_1(x,y)))w_1(x,y) = \frac{1}{w_1(x,y)} w_1(x,y) = 1$$

dir. Buradan s_w^* uzaklık tanımı göz önüne alınırsa (5) eşitsizliği elde edilir.

Tanım 4.1.9 (X,w) modüler bir metrik uzay ve M, X_w'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $T: M \to M$ bir dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir $t \in [0,+\infty)$ için $\limsup_{s\to t+} k(s) < 1$ olacak şekilde bir $k: (0,+\infty) \to [0,1)$ varsa öyle ki M nin farklı herhangi a, b elemanları için

$$w_1(T(a),T(b)) \leq k(w_1(a,b))w_1(a,b)$$

oluyorsa T dönüşümüne Reich büzülmesi (contraction) denir. Eğer $T(a) = a$ olacak şekilde bir a noktası varsa, a noktasına T nin sabit noktası denir (Abdou A. A., 2016).

Teorem 4.1.10 Bir $k: [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu her $t \in [0,+\infty)$ için $\limsup_{s\to t+} k(s) < 1$
şartını sağlasın. β: $(0,+\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu

$$\beta(t) = \frac{1}{2}(1 + k(t))$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu taktirde $\forall t \in [0,+\infty)$ için $\limsup_{s\to t+} \beta(s) < 1$ olur (Du, 2010).

Teorem 4.1.11 Bir k: $[0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonunun $\forall t \in [0,+\infty)$için

$$\limsup_{s\to t+} k(s) < 1$$

şartını sağlaması için gerek ve yeter şart $\forall t \in [0,+\infty)$ için bir $r_t \in [0,1)$ ve $\varepsilon_t > 0$ sayılarının $k(s) \leq r_t$, $\forall\, s \in [t, t+\varepsilon_t)$ eşitsizliğinin sağlanacak şekilde mevcut olmasıdır (Du, 2010).

Teorem 4.1.12 w konveks regüler modüler olmak üzere (X,w) modüler metrik uzay olsun. Kabul edelim ki w, Δ_2-tip koşulunu sağlasın. C, X_w'nin boştan farklı w −tam bir alt kümesi olsun ve $T: C \to C$ Reich büzülmesi olsun. Bu taktirde T, bir tek $x \in C$ sabit noktasına sahiptir ve herhangi bir $z \in C$ için $T^n(z) \xrightarrow{w} x$ dir. (Abdou, 2016).

İspat: T Reich büzülmesi olduğundan herhangi bir $t \in [0,+\infty)$ için $\limsup_{s\to t+} k(s) < 1$ olacak şekilde bir $k: (0,+\infty) \to [0,1)$ vardır öyle ki C nin farklı x ve y elemanları için

$$w_1(T(x),T(y)) \leq k(w_1(x,y))w_1(x,y) \qquad (1)$$

dir. Şimdi $\beta: [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonunu $\beta(t) := \frac{1}{2}\big(1 + \alpha(t)\big)$ şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde herhangi bir $\tau \in [0,+\infty)$ için Lemma 4.1.9 dan $\limsup_{s\to\tau+}\beta(s) < 1$ olduğunu görürüz. Aynı zamanda (1) eşitsizliğinden C nin farklı x ve y elemanları için

$$w_1(T(x),T(y)) \leq \beta(w_1(x,y))w_1(x,y) \tag{2}$$

olacaktır. Gerçekten (1) den

$$w_1(T(x),T(y)) \leq k(w_1(x,y))w_1(x,y)$$

olduğunu biliyoruz. Burada $k = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)k = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k$ olduğunu ve k ve β fonksiyonlarının tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} w_1\big(T(x),T(y)\big) \leq k\big(w_1(x,y)\big)w_1(x,y) &= \left(\frac{1}{2}k\big(w_1(x,y)\big) + \frac{1}{2}k\big(w_1(x,y)\big)\right)w_1(x,y) \\ &< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\big(w_1(x,y)\big)\right)w_1(x,y) \\ &= \left(\frac{1}{2}\big(1 + k(w_1(x,y)\big)\right)w_1(x,y) \\ &= \beta(w_1(x,y))w_1(x,y) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi x_0, C nin sabit bir noktası olsun. Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $T^n(x_0)$, T nin sabit noktası ise ispat açıktır. (Çünkü $T\big(T^n(x_0)\big) = T^n(x_0)$ ve $T^n(x_0) \in C$ dir ve $T^n(z) \xrightarrow{w} T^n(x_0)$).

Kabul edelim ki herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $T^{n+1}(x_0) \neq T^n(x_0)$ olsun. O halde (2) den

$$w_1(T^{n+1}(x_0),T^n(x_0)) \leq \beta(w_1(T^n(x_0),T^{n-1}(x_0)))w_1(T^n(x_0),T^{n-1}(x_0))$$

olacaktır. β nın tanımından $\beta\left(w_1\big(T^n(x_0),T^{n-1}(x_0)\big)\right) < 1$ olduğundan

$$w_1(T^{n+1}(x_0),T^n(x_0)) \leq w_1(T^n(x_0),T^{n-1}(x_0))$$

elde edilir. Bu durum bize pozitif terimli $\{w_1(T^{n+1}(x_0),T^n(x_0)\}$ dizisinin azalan olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\{w_1(T^{n+1}(x_0),T^n(x_0)\}$ dizisi yakınsaktır.

Şimdi

$$\lambda := \lim_{n\to\infty} w_1\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) = \underbrace{inf}_{n\in\mathbb{N}} w_1(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0))$$

olsun. $\lambda \geq 0$ olacağı açıktır. $\forall t \in [0,\infty)$ için $\operatorname{limsup}_{s\to\lambda+} \beta(s) < 1$ olduğundan Teorem 4.1.11 gereğince

her $s \in [\lambda, \lambda+\varepsilon)$ için $\beta(s) \leq r$ (3)

olacak şekilde bir $r \in [0,1)$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları vardır. Ayrıca β nın tanımından $\beta(\lambda) < 1$ dir, $\{w_1(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\}$ dizisi yakınsak ve λ aynı zamanda bu dizinin infimumu olduğundan

$\forall\, n \geq k_0$ için $\lambda \leq \{w_1(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0))\} \leq \lambda + \varepsilon$ (4)

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall\, n \geq k_0$ için $w_1\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) \in [\lambda, \lambda+\varepsilon)$ olduğundan (3) ten $\beta(w_1(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq r$ olacaktır. Diğer taraftan (2) den

$$w_1(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq \beta(w_1(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)))w_1(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0))$$

olacağından $\forall\, n \geq k_0$ için

$w_1\big(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)\big) \leq r w_1\big(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)\big)$ (5)

olacaktır. İterasyonu kullanarak

$$\begin{aligned}
w_1\Big(T^{k_0+1}(x_0), T^{k_0}(x_0)\Big) &\leq r w_1\Big(T^{k_0}(x_0), T^{k_0-1}(x_0)\Big)\\
w_1\Big(T^{k_0+2}(x_0), T^{k_0+1}(x_0)\Big) &\leq r^2 w_1\Big(T^{k_0+1}(x_0), T^{k_0}(x_0)\Big)\\
w_1\Big(T^{k_0+3}(x_0), T^{k_0+2}(x_0)\Big) &\leq r^3 w_1\Big(T^{k_0+2}(x_0), T^{k_0+1}(x_0)\Big)\\
\vdots \qquad & \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

olup

$$w_1\Big(T^{k_0+n}(x_0), T^{k_0+n-1}(x_0)\Big) \leq r^n w_1\Big(T^{k_0}(x_0), T^{k_0-1}(x_0)\Big),\ \forall\, \mathrm{n} \geq 2$$

elde edilir.

Şimdi

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_1\big(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0)\big)=\sum_{n=1}^{k_0} w_1\big(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0)\big)+\sum_{n=k_0}^{\infty} w_1\big(T^{n+1}(x_0),T^{n+2}(x_0)\big)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{k_0} w_1\big(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0)\big)+r^2w_1(T^{k_0}(x_0),T^{k_0-1}(x_0))$$

$$+r^3w_1(T^{k_0}(x_0),T^{k_0-1}(x_0))+\cdots+r^nw_1(T^{k_0}(x_0),T^{k_0-1}(x_0))+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{k_0} w_1\left(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0)\right)+r^2w_1\left(T^{k_0}(x_0),T^{k_0-1}(x_0)\right)\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_1(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0))$$

$$\leq \sum_{n=1}^{k_0} w_1(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0))+r^2w_1(T^{k_0}(x_0),T^{k_0-1}(x_0))\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

elde edilir. $r\in[0,1)$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} r^n<\infty$ olup $\sum_{n=1}^{\infty} w_1\big(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0)\big)$ serisi yakınsaktır. Böylece $\lim_{n\to\infty} w_1(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0))=0$ olup $\{T^n(x_0)\}$ $w-$Cauchy dir. Hipotezden C, $w-$tam olduğundan n→ ∞ iken $\{T^n(x_0)\}$ dizisi bir $x\in C$ ye $w-$yakınsaktır. Şimdi bu x in T'nin sabit noktası olduğunu gösterelim. Herhangi bir $n\geq 1$ için

$$0< w_2\big(x,T(x)\big)\leq w_1\left(x,,T^n(x_0)\right)+w_1\left(T^n(x_0),T(x)\right)$$

$$\leq w_1\big(x,,T^n(x_0)\big)+\beta\big(w_1(T^{n-1}(x_0),x)\big)w_1(T^{n-1}(x_0),x)$$

$$\leq w_1\big(x,T^n(x_0)\big)+w_1(T^{n-1}(x_0),x)$$

olup $\{T^n(x_0)\}$, x'e $w-$yakınsadığından $w_2\big(x,T(x)\big)=0$ elde edilir. T regüler modüler metrik olduğundan $T(x)=x$ olur. Yani $x\in C$, T'nin sabit noktasıdır. Ayrıca T'nin sabit noktasının tekliği herhangi bir $z\in C$ için $\{T^n(z)\}$ nin x noktasına $w-$yakınsak olacağı anlamına gelir. (Gerçekten başlangıçta seçilen $x_0\in C$ için $\{T^n(x_0)\}\xrightarrow{w} x$ ve bu x , T nin tek bir sabit noktası olduğundan herhangi $z\in C$ için de $\{T^n(z)\}\xrightarrow{w} x$ olacaktır.)

4.2 Çok Değerli Reich Dönüşümleri

Tanım 4.2.1 Bu çalışmanın geri kalanı için aşağıdaki bilgilere ihtiyaç vardır. M, X_w modüler metrik uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

(a) $C(M) = \{A, M$ nin boştan farklı $w -$ kapalı bir alt kümesi. $\}$

(b) $C\mathfrak{B}(M)$ $\{A, M$ nin boştan farklı $w -$ kapalı ve $w -$ sınırlı bir alt kümesi.$\}$

(c) $C\mathfrak{B}(M)$ üzerinde Haussdorff modüler metrik

$$H_w(C_1, C_2) = \max\{\sup_{a\in C_1} w_1(a, C_2), \sup_{b\in C_2} w_1(b, C_1)\}$$

İle tanımlanır. Burada

$$w_1(a, C) = inf_{b\in C} w_1(a, b)$$

dir (Abdou A. A., 2016).

Tanım 4.2.2 (X, w) modüler bir metrik uzay ve M, X_w'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $T: M \to C\mathfrak{B}(M)$ bir dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir $t \in [0, +\infty)$ için $\limsup_{s\to t+} k(s) < 1$ olacak şekilde bir $k: (0, +\infty) \to [0,1)$ varsa öyle ki M nin farklı herhangi a, b elemanları için

$$H_w(T(a), T(b)) \leq k(w_1(a, b))w_1(a, b)$$

oluyorsa T dönüşümüne Reich büzülmesi (contraction) eşlemesi denir. Eğer $T(a) = a$ olacak şekilde bir a noktası varsa, a noktasına T nin sabit noktası denir (Abdou A. A., 2016)

Teorem 4.2.3 (X, w) modüler metrik uzay M, X_w nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $C_1, C_2 \in C\mathfrak{B}(M)$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ ve $c_1 \in C_1$

$$w_1(c_1, c_2) \leq H_w(C_1, C_2) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $c_2 \in C_2$ vadır. Buradaki Teorem 4.2.3, Reich çok değerli dönüşümlerine eşdeğer bir tanıma olanak sağlar. Gerçekten M, X_w 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T: M \to C\mathfrak{B}(M)$ olsun. Kabul edelim ki $\limsup_{s\to t+} \alpha(s) < 1$ ve herhangi bir $t \in [0, +\infty)$ ve M deki her farklı a, b elemanları için

$$H_w(T(a), T(b)) \leq \alpha(w_1(a, b))w_1(a, b)$$

olacak şekilde bir $c_2 \in C_2$ vardır. $\alpha: (0, +\infty) \to [0,1)$ fonksiyon olsun. Teorem 4.2.3 ü kullanarak herhangi bir farklı x, y elemanları $\alpha \in T(x)$ için

$$s(a,b) \leq \beta(s(x,y))d(x,y), \quad \beta(t) = \frac{1}{2}(1+\alpha\ )$$

olacak şekilde bir b$\in T(y)$nin olduğu kolayca ispatlanır (Afrah & Mohamed, 2014).

İspat: Burada $\beta(t) = \frac{1}{2}(1+\alpha(t))$ herhangi bir $t \in [0, +\infty)$ için $\limsup_{s \to t+} \beta(s) < 1$ olmasını sağlar. Bu ifadeler çok değerli eşlemenin gerektirdiği varsayımdan Teorem 4.1.12 nin çok değerli versiyonunu kanıtlamamıza olanak tanır.

$\forall \varepsilon > 0$ ve $u \in T(a), v \in T(b)$, $\quad \varepsilon = \dfrac{1-\alpha\big(w_1(a,b)\big)}{2} w_1(a,b) > 0$

olmak üzere

$$\begin{aligned} w_1(a,b) &\leq H_w\big(T(a), T(b)\big) + \varepsilon \\ &\leq \alpha(w_1(a,b))w_1(a,b) + \varepsilon \\ &= \alpha(w_1(a,b))w_1(a,b) + \frac{1-\alpha(w_1(a,b))}{2} w_1(a,b) \\ &\leq \frac{1+\alpha(w_1(a,b))}{2} w_1(a,b) \\ &\leq \beta\big(w_1(a,b)\big)w_1(a,b) \end{aligned}$$

Teorem 4.2.4 w konveks regüler modüler olmak üzere (X, w) modüler metrik uzay olsun. Kabul edelim ki w, Δ_2-tip koşulunu sağlasın. M , X_w'nin boştan farklı $w-$tam bir alt kümesi olsun ve $T: M \to C(M)$ bir dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir $t \in [0, +\infty)$ için $\limsup_{s \to t+} k(s) < 1$ olacak şekilde bir $k: (0, +\infty) \to [0,1)$ varsa öyle ki M nin farklı herhangi $u, v \in M \ \ u \neq v$

$$w_1(a,b) \leq k(w_1(u,v))w_1(u,v)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece T, $x \in M$sabit noktasına sahiptir. Yani $x \in T(x)$ dir. Bu teoremin ispatı büyüme fonksiyonu kullanılarak ispatlanmıştır. Biz tekniklerin benzerlerini kullanarak teoremin kanıtını yapacağız (Abdou A. A., 2016).

İspat: $x_0 \in M$ için eğer x_0 , T'nin sabit noktası ise ispat açıktır. Aksi taktirde x_0 dan farklı T için büzülme hipotezini kullanarak $x_1 \in T(x_0)$ için $x_2 \in T(x_1)$ vardır. Öyle ki

$$w_1(x_1,x_2) \leq \; k(w_1(x_0,x_1))w_1(x_0,x_1)$$

İndüksiyon ile devam ederek herhangi bir $n \geq 1$ için $x_{n+1} \in T(x_n)$, $x_n \neq x_{n+1}$ olacak şekilde M'de bir $\{x_n\}$ dizisi bulabiliriz.

$w_1(x_2,x_3) \leq \; kw_1(x_1,x_2)w_1(x_1,x_2)$
$w_1(x_3,x_4) \leq \; kw_1(x_2,x_3)w_1(x_2,x_3)$
…………………………………
$w_1(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \; kw_1(x_n,x_{n+1})w_1(x_n,x_{n+1})$

Δ_2 koşulundan $w_1(x_0,x_1) < \infty$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $w_1(x_{n+1},x_{n+2}) < \infty$ olur. $k(t) < 1$ olduğundan herhangi bir $t \in [0,+\infty)$ $için$ pozitif sayıların azalan bir $w_1(x_{n+1},x_{n+2})$ dizisi bulabiliriz .

$$t_0 = \lim_{n\to+\infty} w_1(x_{n+1},x_{n+2}) = \inf_{n\in\mathbb{N}} w_1(x_{n+1},x_{n+2}) \text{ olsun.}$$

$\lim_{s\to t_0+} k(s) < 1$ olduğundan (k'nın tanımı göz önüne alınarak) $\alpha < 1$ sayısı ve $n_0 \geq 1$ vardır öyle ki herhangi bir $n \geq n_0$ için bu eşitsizliği sağlar. Ayrıca [10] dan

$$kw_1(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \alpha w_1(x_n,x_{n+1})$$

$$\begin{aligned} w_1(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \; kw_1(x_n,x_{n+1})w_1(x_n,x_{n+1}) \\ &\leq \alpha w_1(x_n,x_{n+1}) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \sum_{n=}^{\infty} w_1(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \sum_{n=1}^{k_0} w_1(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} w_1(x_n,x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k_0} w_1(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} w_1(x_{n+1},x_{n+2}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k_0} w_1(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} \alpha\, w_1(x_n,x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k_0} w_1(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} \alpha^n w_1\left(x_{k_0},x_{k_0+1}\right) \end{aligned}$$

O halde $\sum_{n=k_0}^{\infty} \alpha\, w_1(x_n, x_{n+1})$ yakınsak olduğundan $\lim_{n\to+\infty} w_1(x_n, x_{n+1}) = 0$ dır. Dolayısıyla $\{x_n\}$ $w-$Cauchy dir. M nin $w-$tamlığını kullanarak $\lim_{n\to+\infty} w_1(x_n, x) = 0$ olacak şekilde $x \in M$ vardır. Şimdi bu $x \in M$ nin T'nin sabit noktasının olduğunu ispatlayalım. T'nin büzülme dönüşümünü kullanarak bir $y_n \in T(x)$ vardır. Öyle ki

$$w_1(x_{n+1}, y_n) \leq k(w_1(x_n, x))w_1(x_n, x) < w_1(x_n, x) \qquad (*)$$

Herhangi bir $n \in N$ için. w nin özelliklerini kullanarak

$$w_2(y_n, x) \leq w_1(x_{n+1}, x) + w_1(x_{n+1}, y_n) < w_1(x_{n+1}, x) + w_1(x_n, x) \qquad (*) \text{ dan}$$

olur. Yani $n \geq n_0$ $\lim_{n\to+\infty} w_1(x_n, x) = 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to+\infty} w_1(y_n, x) = 0$ ile $\{y_n\}$ x'e $w-$yakınsaktır. $\{y_n\}$ $T(x)$ de bir dizi ve $\lim\limits_{n\to+\infty} w_1(y_n, x) = 0$ ve T $w-$kapalı olduğundan $x \in T(x)$ olur. Yani x, T'nin sabit noktasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ilk bölümünde metrik, metrik uzay, metrik uzayda yakınsama, tam metrik uzay, modüler, modüler metrik, modüler metrik uzayda sabit nokta teoremi tanıtılarak önemine değinilmiş ve gelişiminin tarihsel süreci ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde çalışmanın diğer bölümlerine altyapı oluşturacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Chistyakov, literatürde Banach büzülme prensibi ve Banach sabit nokta teoremi olarak bilinen önemli bir teoremi modüler metrik uzaylara aktarmıştır. Bu aşamada modüler metrik uzaylarda Chistyakov tarafından oluşturulan temel modüler büzülme eşitsizliği ve temel güçlü modüler büzülme eşitsizliği verilmş ispatları yapılmıştır. Chistyakov temel modüler büzülme şartı kullanılarak modüler metrik uzaylara uyarlanan Banach sabit nokta teoremi Palais'in temel modüler büzülme şartı ve temel güçlü modüler büzülme şarlarından yararlanılarak ispatlanmıştır.
Dördüncü bölümde literatürde Reich sabit nokta teoremi olarak bilinen teoremin ve Çok değerli Reich dönüşümlerinin modüler metrik uzaylara uygulanması verilmiş ispatları yapılmıştır.

Bu çalışmada kavramların güncel tanım ve teoremlerini literatürde bulunan çalışmaları detaylandıracak şekilde inceledik aşağıdaki bilgilerle sonuçlandırdık.

Günümüzde elektroelojik akışkanlar olarak bilinen materyaller üzerine çok çeşitli çalışmalar yapılmaktadır. Bu sıvılar bir elektrik alanında hızla katılaşan sıvılarken elektrik alanından uzaklaşınca da kısa sürede sıvılaşabilir ve bu işlem tekrarlanabilirdir. Bu yapılar genellikle Sobolev uzaylarından faydalanılarak incelenirken modüler metrik uzayların daha faydalı olduğu görülmüştür.

Yapılan çalişmalar modüler ile metrik uzaylarda sabit nokta sonuçlarının belirli tipdeki diferansiyallere uygun olduğu sonucu elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Abdou, A. A., 2016, Some fixed point theorems in modular metric spaces. *Journal of nonlinear science and applications*, 4381-4387.

Abdou, A., Khamsi, M., 2013, Fixed point results of pointwise contractions in modular metric spaces. *Fixed point theory appl.*163, 1-11.

Abobaker, H., Ryan, R. 2017, Modular metrıc spaces. *Irish mathematical society bulletin.* 80, 35-44.

Afrah, A., Mohamed, K., 2014, Fixed points of multivalued contraction mappings in modular metric spaces. *Fixed point theory appl.*249, 1-10.

Banach, S. 1922, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications. *Fund. Math*. 3, 133-181.

Birnbaum, Z., Orlicz, W., 1931, Uber die veralgemeinerung des begriffes der zueinander konjugierten potenzen. *Studia Math*. 3, 1-67.

Chistyakov., V., 2013, Modular contractions and their application. *Springer proceedings in mathematics statistics.* 32, 64-92.

Chistyakov, V., 2006, Metric modulars and their application. *Dokl. Akad. Nauk* 406, 2, 165-168.

Chistyakov, V., 2008, Modülar metric sapaces generated by F-Modulars. *Folıa mathematıca.* 15,1. 3-24.

Chistyakov, V., 2010, Modular metric spaces, I: basic concepts. *Nonlinear Analysis*, 72, 1-14.

Chistyakov, V., 2011, A fixed point theorem for contractions in modular metric spaces. *Preprint submitted* arXiv:1112.5561, 1-31.

Chistyakov, V., 2015, Metric modular spaces theory and applications. *Springer*, Russia.

Chistyakov, V., 2010, Modular metric spaces, II: Application to superposition operators. *Nonlinear Analysis*,72, 15-30.

Du, W.-S., 2010, Some new results and generalizations in metric fixed point theory. Nonlinear Analysis.

Frechet, M., 1906, Sur guelgues points du calcul functionnel. Rend. *Circ. Mat. Palermo.* 22(1), 1-72.

Goebel, K., Kirk, W., 1990, Topics in metric fixed point theory, cambridge studies. *Cambridge Univ. Press, Cambridge*,, MR1074005 (92c:47070).

Hausdorff, F. 1914, Grundzüge der mengenlehre. Veit and Company, Leipzig.

Khamsi, M., 1996, A convexity property in modular function spaces. *Math. Jpn*. 44, 269-279.

Khamsi, M., Kozlowski, W., 2015, Fixed point theory in modular function spaces. Birkhaüser. Switzerland.

Kirk, W., Sims(Eds), B., 2001, Handbook of metric fixed point theory. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, MR1904271 (2003b:47002).

Kozlowski, W., 1988, Modular function spaces. *Monographs and textbooks ın pure applied mathematics*, vol. 122. Marcel dekker, Newyork.

Khamsi, M. A., Koz lowski, W. M., Reich, S., 1990, Fixed point theory in modular function spaces. *Nonlinear Anal*. 14 (11) 935–953. MR1058415 (91d:47042)

Khamsi, M. A., Koz lowski, Chen, 1991, Some geometrical properties and fixed point theorems in Orlicz spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 155 (2) 393–412. MR1097290 (92b:47092)

Luxemburg, W., 1955, Banach function spaces. Thesis, Delft, Inst. of Techn., Assen, The Netherlands.

Mazur, S., Orlicz, W., 1958, On some classes of linear spaces. *Studia Math*. 17, 97-119.

Musielac, J., Orlicz, W., 1959, On modular spaces. *Studia Math*, 49-65.

Musilelac, J., Orlicz, W., 1959, Some remarks on modular spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys*. 7.

Nakano, H., 1950, Modulared semi-ordered spaces. Maruzen, Tokyo.

Orlicz, W., 1988, Collected papers. vols. I, II, PWN, Warszawa.

Palais, R., 2007, A simple proof of the Banach contraction principle . *J. Fixed Point Theory Appl.*2, 221-223.

T. Dominguez Benavides, M. A., 2001, Uniformly lipschitzian mappings in modular function spaces. *Nonlinear Analysis*, 267-278.

Taleb, A. Ait, Hanebaly E., 2000, A fixed point theorem and its application to integral equations in modular function spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2) 419–426. MR1487352 (99j:47082)

Turpin, P., 1978, Fubini inequalities and bounded multiplier property in generalized modular spaces. *Comment. Math. Tomus specialis in honorem Ladislai Orlicz I,* 331-353.