**T.C.**
**NECMETTİN ERBAKAN**
**ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# MAKSİMUMLU BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

**Fatma Zehra YILDIZ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran-2024**
**KONYA**

# TEZ KABUL VE ONAYI

Fatma Zehra YILDIZ tarafından hazırlanan "MAKSİMUMLU BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA" adlı tez çalışması 24/06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

| **Jüri Üyeleri** | **İmza** |
|---|---|
| **Başkan**<br>Doç. Dr. Ali GELİŞKEN | ………………….. |
| **Danışman**<br>Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA | ………………….. |
| **Üye**<br>Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU | ………………….. |

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…/2024 gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Fatma Zehra YILDIZ

Tarih: 24/06/2024

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

## MAKSİMUMLU BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

**Fatma Zehra YILDIZ**

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA**

**2024, 45 Sayfa**

**Jüri**
**Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA**
**Doç. Dr. Ali GELİŞKEN**
**Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU**

Bu çalışma bir derleme çalışmasıdır ve dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bulanık kümeler ve bulanık sayılar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; bulanık fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Changyou Wang ile Jiahui Li'nin 2020 yılında yayımlanmış olan "Periodic Solution for a Max-Type Fuzzy Difference Equation" başlıklı makalesi ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise; sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bulanık sayı, Maksimumlu bulanık fark denklemi, Çözümlerin varlığı, Periyodiklik

# ABSTRACT

## MS THESIS

## A STUDY ON THE MAX-TYPE FUZZY DIFFERENCE EQUATIONS

**Fatma Zehra YILDIZ**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY**
**THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATIC**

**Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA**

**2024, 45 Pages**

**Jury**
**Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA**
**Assoc. Prof. Dr. Ali GELİŞKEN**
**Assoc. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU**

This study is a compilation study and consists of four sections.

In the first section; basic definitions and theorems related to fuzzy sets and fuzzy numbers are given.

In the second section; informations about some of the studies regarding the fuzzy difference equations studied before are given.

In the third section; the article entitled “Periodic Solution for a Max-Type Fuzzy Difference Equation” published by Changyou Wang and Jiahui Li’nin in 2020 is discussed.

In the fourth section, conclusions and suggestions are given.

**Keywords:** Fuzzy number, Max-type fuzzy difference equation, Existence of solutions, Periodicity.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma bir derleme çalışmasıdır ve Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'nın yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarımda yardımını ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya, her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Fatma Zehra YILDIZ
KONYA-2024

# İÇİNDEKİLER

**ÖZET** ........................................................................................................ **iv**

**ABSTRACT** ................................................................................................. **v**

**ÖNSÖZ** ....................................................................................................... **vi**

**İÇİNDEKİLER** ............................................................................................ **vii**

**1.GİRİŞ** ........................................................................................................ **1**

1.1. BULANIK KÜMELER ............................................................................ 1
1.2. BULANIK SAYILAR .............................................................................. 5

**2. KAYNAK ARAŞTIRMASI** ...................................................................... **13**

**3.** $\omega_{n+1} = \max\left\{ \frac{A}{\omega_n}, \frac{A}{\omega_{n-1}}, \omega_{n-2} \right\}$ **BULANIK FARK DENKLEMİ** ................................ **17**

**4. SONUÇ VE ÖNERİLER** ............................................................................ **43**

**5. KAYNAKLAR** ............................................................................................ **44**

# 1.GİRİŞ

## 1.1. BULANIK KÜMELER

**Tanım 1.1.1.** $Y \neq \varnothing$ ve $A \subset Y$ için

$$Y_A(y) = \begin{cases} 1, & y \in A \\ 0, & y \notin A \end{cases} \tag{1.1.1}$$

ile tanımlanmış olan $Y_A : Y \to \{0,1\}$ fonksiyonuna $A$ kümesinin karakteristik (üyelik) fonksiyonu denir (Zadeh, 1965).

**Tanım 1.1.2.** $Y \neq \varnothing$ ve $I = [0,1]$ için $\mu_A : Y \to [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilen

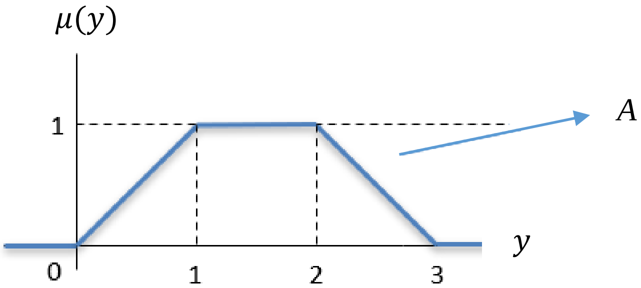
$$A = \{(y, \mu_A(y)) : y \in Y\} \tag{1.1.2}$$

kümesine $Y$ üzerinde bir bulanık (fuzzy) küme denir. $\mu_A$ ya $A$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu ve her $y \in Y$ için $\mu_A(y) \in \mathrm{I}$ değerine $y$ nin $A$ ya ait olma derecesi adı verilir (Zadeh, 1965).

**Örnek 1.1.1.**

$$\mu_A(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & 1 \leq y \leq 2 \\ 3 - y, & 2 \leq y \leq 3 \\ 0, & 3 \leq y \end{cases}$$

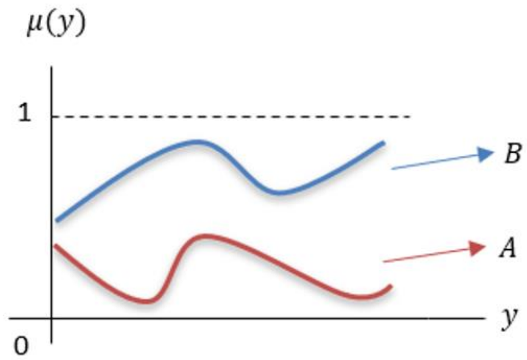
ile tanımlanmış olan $A = \{(y, \mu_A(y) : y \in \mathbb{R}\}$ bir bulanık kümedir.




**Şekil 1.1.1.** *A* bulanık kümesi

**Tanım 1.1.3.** $Y \neq \varnothing$ ve $A$ ile $B$ kümeleri $Y$ de iki bulanık küme olsun. Her $y \in Y$ için $\mu_A(y) = \mu_B(y)$ ise $A$ ve $B$ ye eşit bulanık kümeler denir (Zadeh, 1965).

**Tanım 1.1.4.** $Y \neq \varnothing$ ve $A$ ile $B$ kümeleri $Y$ de iki bulanık küme olsun. Her $y \in Y$ için $\mu_A(y) \leq \mu_B(y)$ ise $B$ bulanık kümesi $A$ bulanık kümesini kapsar ve $A \subset B$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).

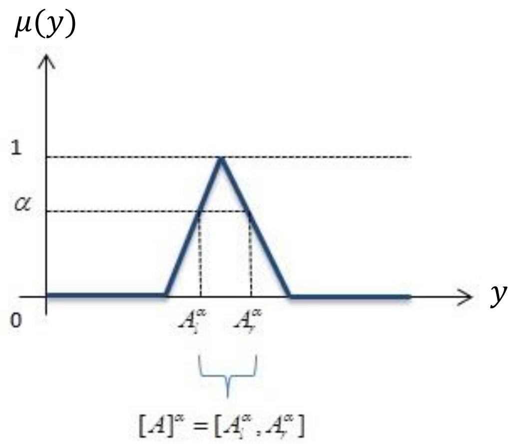



**Şekil 1.1.2.** *B* bulanık kümesinin *A* bulanık kümesini kapsaması

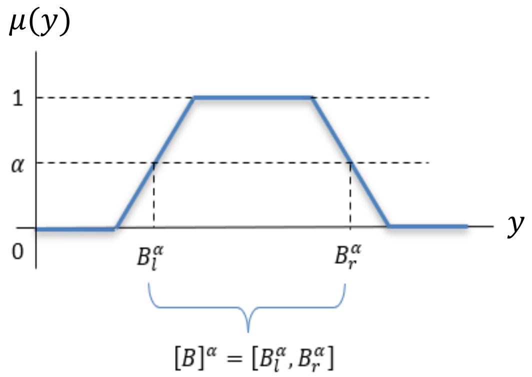
**Tanım 1.1.5.** $A$ kümesi $Y$ de bir bulanık küme ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. $A$ kümesinin $\alpha$ kesimi $[A]^\alpha$ ile gösterilir ve

$$[A]^\alpha = \{y \in Y : \mu_A(y) \geq \alpha\} \tag{1.1.3}$$

ile tanımlanır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).

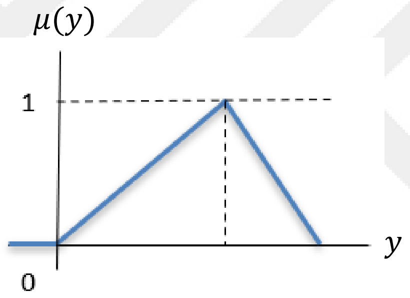



**Şekil 1.1.3.** *A* bulanık kümesinin $\alpha$ kesimi




**Şekil 1.1.4.** *B* bulanık kümesinin $\alpha$ kesimi

**Tanım 1.1.6.** En az bir $y_0 \in Y$ için $\mu_A(y_0) = 1$ ise $Y$ de tanımlı $A$ kümesi normaldir denir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).

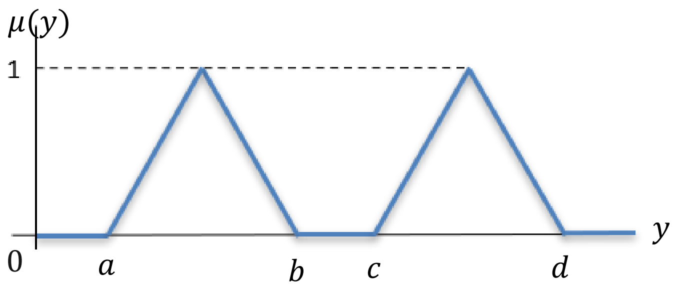



**Şekil 1.1.5.** *A* normal bulanık kümesi

**Tanım 1.1.7.** $Y$ de tanımlı $A$ bulanık kümesi için destek (dayanak) kümesi

$$supp(A) = \{y \in Y : \mu_A(y) > 0\} \tag{1.1.4}$$

dir (Bede, 2013).

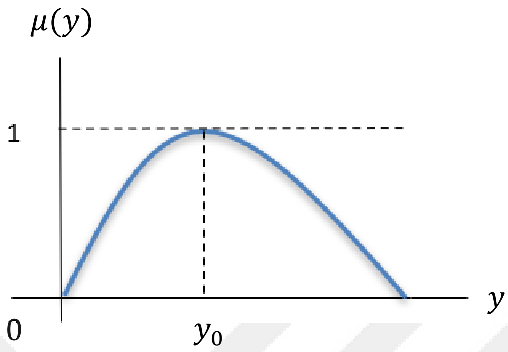



**Şekil 1.1.6.** $\mathrm{supp}(A) = (a,b) \cup (c,d)$

**Tanım 1.1.8.** Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $y_1, y_2 \in Y$ için

$$\mu_A\left(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2\right) \geq \min\left\{\mu_A(y_1), \mu_A(y_2)\right\} \tag{1.1.5}$$

ise $Y$ de tanımlı $A$ kümesi bulanık konvekstir (bulanık dışbükeydir) denir (Zadeh, 1965).




**Şekil 1.1.7.** *A* konveks bulanık kümesi

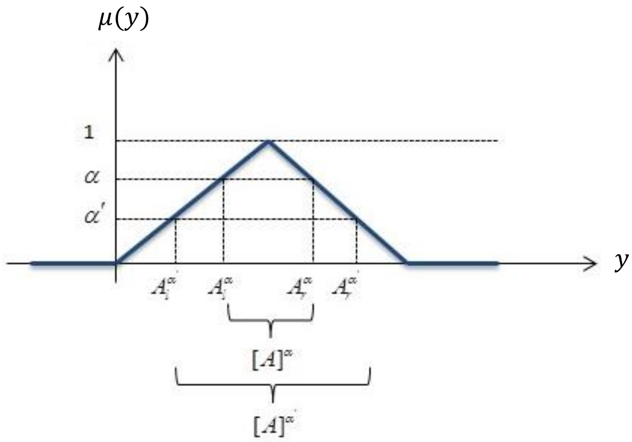
**Uyarı 1.1.1.**

**(a)** Bir bulanık kümenin $\alpha$ kesimlerine karşılık gelen aralıklar ayrık aralıkların birleşimi değil yalnız bir aralığa eşit ise bu bulanık küme konvekstir.

**(b)** $A$ bulanık kümesinin $\alpha$ kesim kümesi olan $[A]^\alpha = \left[A_l^\alpha, A_r^\alpha\right]$ aralığı için

$$\alpha' < \alpha \text{ ise } [A]^\alpha \subset [A]^{\alpha'} \text{ ya da } \alpha' < \alpha \text{ ise } A_l^{\alpha'} \leq A_l^\alpha \text{ ve } A_r^\alpha \leq A_r^{\alpha'}$$

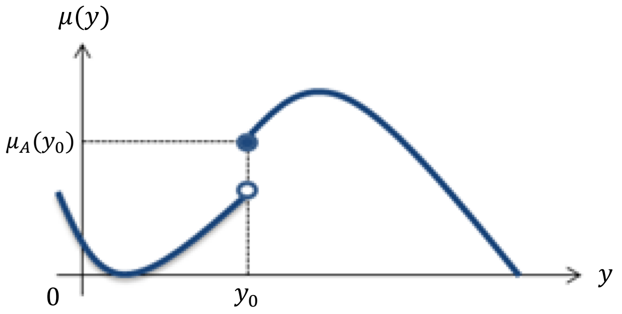
şartı sağlanıyorsa ve $A$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu sürekli ise $A$ bulanık kümesi konvekstir.




**Şekil 1.1.8.** *A* konveks bulanık kümesi

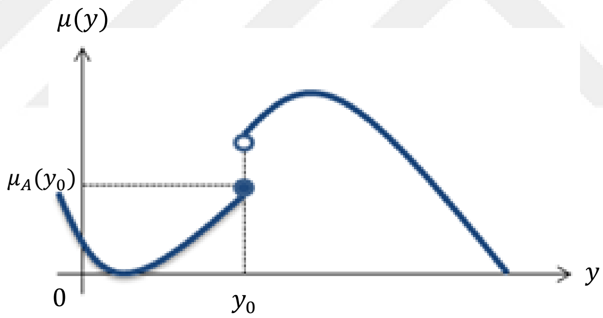
**Tanım 1.1.9.** $A$ kümesi $Y$ de bir bulanık küme olsun.

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $|y - y_0| < \delta$ şartını sağlayan her $y \in Y$ için $\mu_A(y) < \mu_A(y_0) + \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $\mu_A$ ile karakterize edilen $A$ bulanık kümesi $y_0$ da üst-yarı süreklidir.




**Şekil 1.1.9.** Üst-yarı sürekli

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $|y - y_0| < \delta$ şartını sağlayan her $y \in Y$ için $\mu_A(y_0) - \varepsilon < \mu_A(y)$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $\mu_A$ ile karakterize edilen $A$ bulanık kümesi $y_0$ da alt-yarı süreklidir (Bede, 2013).




**Şekil 1.1.10.** Alt-yarı sürekli

## 1.2. BULANIK SAYILAR

**Tanım 1.2.1.** $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $\mathbb{R}$ nin bir $A$ bulanık kümesi;

**(a)** $A$ bulanık kümesi normaldir.

**(b)** $A$ bulanık kümesi konvekstir.

**(c)** $\mu_A$ üst-yarı süreklidir.

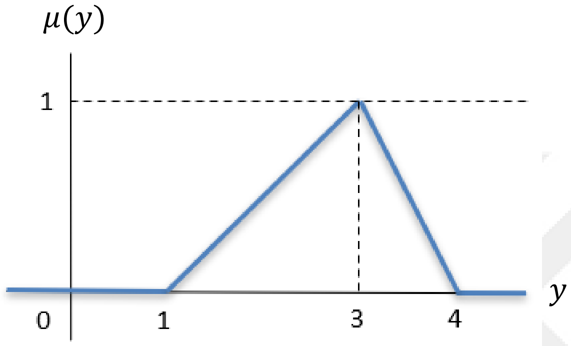
**(d)** $supp(A)$ kümesinin kapanışı kompakttır.

özelliklerini sağlıyorsa, $A$ ya bir bulanık (fuzzy) sayı denir. $\mathbb{R}$ deki tüm bulanık sayıların kümesi $F(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).

**Örnek 1.2.1.**

$$\mu_A(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \dfrac{y-1}{2}, & 1 \le y \le 3 \\ 4-y, & 3 \le y \le 4 \\ 0, & 4 \le y \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilen $A$ bulanık kümesi bir bulanık sayıdır.




**Şekil 1.2.1.** *A* bulanık sayısı

**Tanım 1.2.2.** Eğer $supp(A) \subset (0,\infty)$ ise $A$ bulanık sayısı pozitiftir denir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).

**Örnek 1.2.2.** $$\mu_A(y) = \begin{cases} 0, & y < 0.3 \\ \dfrac{10y-3}{2}, & 0.3 \le y \le 0.5 \\ \dfrac{7-10y}{2}, & 0.5 \le y \le 0.7 \\ 0, & 0.7 \le y \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilen $A$ bulanık kümesi bir bulanık sayıdır. $A$ bulanık kümesinin $\alpha$ kesimi $[A]^\alpha = [A_l^\alpha, A_r^\alpha] = \left[\dfrac{2\alpha+3}{10}, \dfrac{7-2\alpha}{10}\right]$ olarak elde edilir.

**Uyarı 1.2.1.** Bulanık sayılarda aritmetik işlemler, sayıların $\alpha$ kesimleri üzerinden tanımlanır.

**Tanım 1.2.3.** $A$ ile $B$ iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için $A$ ile $B$ nin $\alpha$ kesimleri sırasıyla $[A]^\alpha = [A_l^\alpha, A_r^\alpha]$ ve $[B]^\alpha = [B_l^\alpha, B_r^\alpha]$ olsun. Her $\alpha \in (0,1]$ için $A$ ve $B$ bulanık sayılarının toplamı

$$A+B=[A]^{\alpha}+[B]^{\alpha}=\left[A_l^{\alpha}+B_l^{\alpha},A_r^{\alpha}+B_r^{\alpha}\right] \tag{1.2.1}$$

ile tanımlanır. Her $x,y,z\in\mathbb{R}$ için $A+B$ nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A+B}(z)=\bigcup_{z=x+y}\left(\mu_A(x)\cap\mu_B(y)\right) \tag{1.2.2}$$

şeklindedir.

**Örnek 1.2.3.** Her $y\in\mathbb{R}$ için

$$\mu_A(y)=\begin{cases}0, & y\le -2\\ \dfrac{y+2}{2}, & -2\le y\le 0\\ \dfrac{2-y}{2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & 2\le y\end{cases}$$

ve

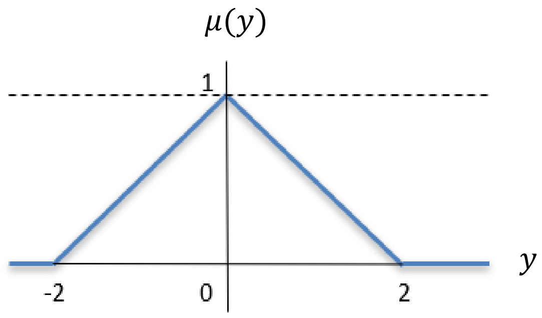
$$\mu_B(y)=\begin{cases}0, & y\le -2\\ \dfrac{y+2}{4}, & -2\le y\le 2\\ 3-y, & 2\le y\le 3\\ 0, & 3\le y\end{cases}$$

ile tanımlı *A* ve *B* bulanık sayıları için $[A]^{\alpha}+[B]^{\alpha}$ toplamını bulup, $\mu_{A+B}$ yi elde edelim.

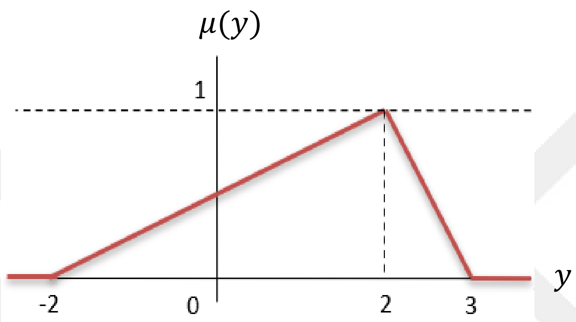
**Çözüm.** $[A]^{\alpha}+[B]^{\alpha}=[6\alpha-4,-3\alpha+5]$ olduğundan

$$\mu_{A+B}(y)=\begin{cases}0, & y\le -4\\ \dfrac{y+4}{6}, & -4\le y\le 2\\ \dfrac{5-y}{3}, & 2\le y\le 5\\ 0, & 5\le y\end{cases}$$

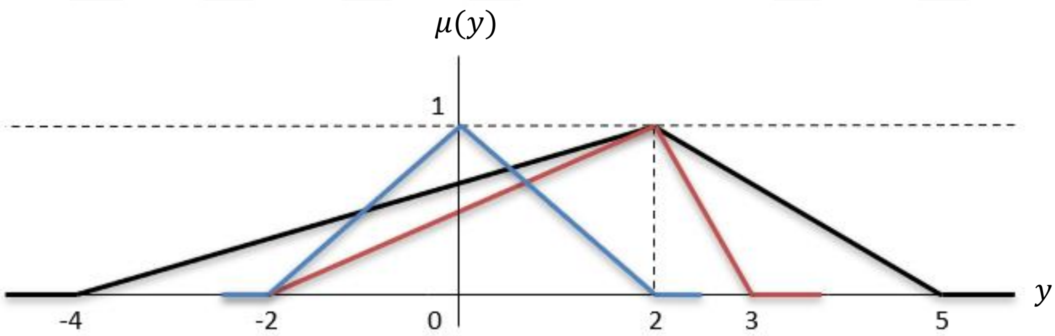
elde edilir.




**Şekil 1.2.2.** *A* bulanık sayısı




**Şekil 1.2.3.** *B* bulanık sayısı




**Şekil 1.2.4.** $C = A + B$ bulanık sayısı

**Tanım 1.2.4.** $A$ ile $B$ iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için $A$ ile $B$ nin $\alpha$ kesimleri sırasıyla $[A]^{\alpha} = \left[A_l^{\alpha}, A_r^{\alpha}\right]$ ve $[B]^{\alpha} = \left[B_l^{\alpha}, B_r^{\alpha}\right]$ olsun. Her $\alpha \in (0,1]$ için $A$ ve $B$ bulanık sayıları için çıkarma işlemi

$$A - B = [A]^{\alpha} - [B]^{\alpha} = \left[A_l^{\alpha} - B_r^{\alpha}, A_r^{\alpha} - B_l^{\alpha}\right] \qquad (1.2.3)$$

ile tanımlanır. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $A-B$ nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A-B}(z) = \bigcup_{z=x-y} \left(\mu_A(x) \cap \mu_B(y)\right) \tag{1.2.4}$$

şeklindedir.

**Örnek 1.2.4.** Her $y \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_A(y) = \begin{cases} 0, & y \le -3 \\ \dfrac{y+3}{2}, & -3 \le y \le -1 \\ \dfrac{-y+1}{2}, & -1 \le y \le 1 \\ 0, & 1 \le y \end{cases}$$

ve

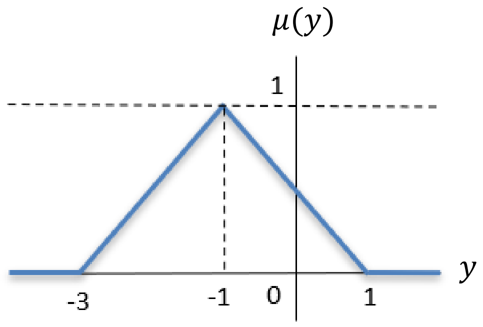
$$\mu_B(y) = \begin{cases} 0, & y \le -3 \\ \dfrac{y+3}{5}, & -3 \le y \le 2 \\ \dfrac{8-y}{6}, & 2 \le y \le 8 \\ 0, & 8 \le y \end{cases}$$

ile tanımlı *A* ve *B* bulanık sayıları için $[A]^\alpha - [B]^\alpha$ farkını bulup, $\mu_{A-B}$ yi elde edelim.

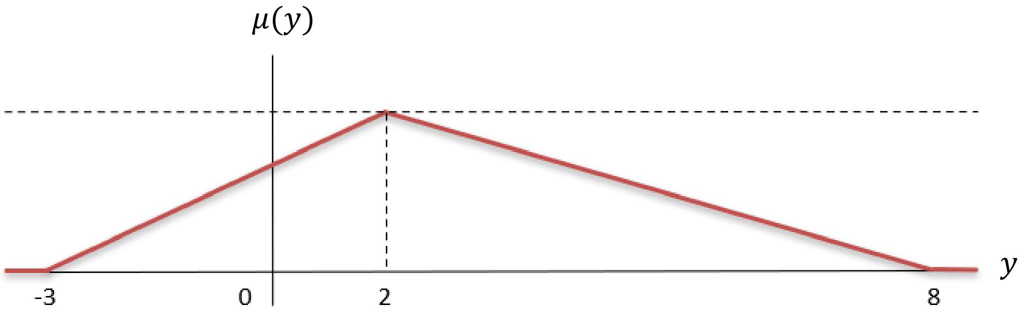
**Çözüm.** $[A]^\alpha - [B]^\alpha = [8\alpha - 11, -7\alpha + 4]$ olduğundan

$$\mu_{A-B}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -11 \\ \dfrac{y+11}{8}, & -11 \le y \le -3 \\ \dfrac{-y+4}{7}, & -3 \le y \le 4 \\ 0, & 4 \le y \end{cases}$$

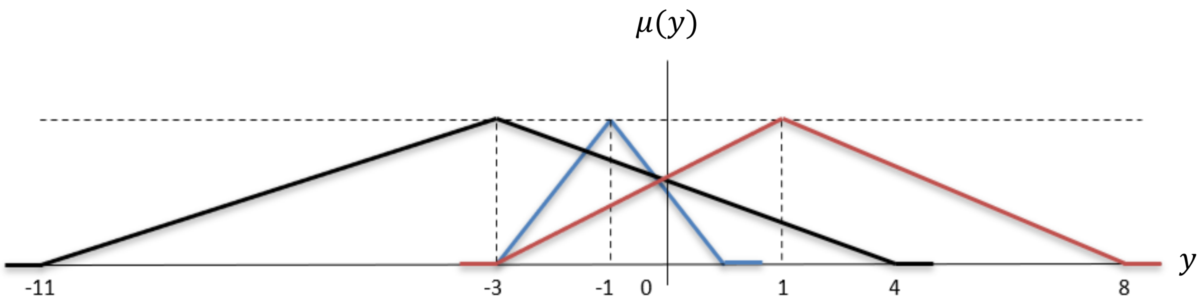
elde edilir.




**Şekil 1.2.5.** *A* bulanık sayısı




**Şekil 1.2.6.** *B* bulanık sayısı




**Şekil 1.2.7.** $C = A - B$ bulanık sayısı

**Tanım 1.2.5.** $A$ ile $B$ iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için $A$ ile $B$ nin $\alpha$ kesimleri sırasıyla $[A]^\alpha = \left[A_l^\alpha, A_r^\alpha\right]$ ve $[B]^\alpha = \left[B_l^\alpha, B_r^\alpha\right]$ olsun. Her $\alpha \in (0,1]$ için $A$ ve $B$ bulanık sayılarının çarpımı

$$A \times B = [A]^\alpha \times [B]^\alpha$$

$$= \left[min\left\{A_l^\alpha B_l^\alpha, A_l^\alpha B_r^\alpha, A_r^\alpha B_l^\alpha, A_r^\alpha B_r^\alpha\right\}, max\left\{A_l^\alpha B_l^\alpha, A_l^\alpha B_r^\alpha, A_r^\alpha B_l^\alpha, A_r^\alpha B_r^\alpha\right\}\right] \qquad (1.2.5)$$

ile tanımlanır. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $A \times B$ nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A\times B}(z) = \bigcup_{z=x.y} \left(\mu_A(x) \cap \mu_B(y)\right) \tag{1.2.6}$$

şeklindedir. Özel olarak, $A$ ile $B$ bulanık sayıları $\mathbb{R}^+$ da tanımlı ise

$$A \times B = [A]^\alpha \times [B]^\alpha = \left[A_l^\alpha B_l^\alpha, A_r^\alpha B_r^\alpha\right] \tag{1.2.7}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 1.2.6.** $A$ ile $B$ iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için $A$ ile $B$ nin $\alpha$ kesimleri sırasıyla $[A]^\alpha = [A_l^\alpha, A_r^\alpha]$ ve $[B]^\alpha = [B_l^\alpha, B_r^\alpha]$ olsun. $A$ ile $B$ bulanık sayıları $\mathbb{R}^+$ da tanımlı ve $B_l^\alpha . B_r^\alpha > 0$ ise $A$ ve $B$ bulanık sayıları için bölme işlemi

$$A / B = [A]^\alpha / [B]^\alpha = \left[\frac{A_l^\alpha}{B_r^\alpha}, \frac{A_r^\alpha}{B_l^\alpha}\right] \tag{1.2.8}$$

şeklinde tanımlanır. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $A / B$ nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A/B}(z) = \bigcup_{z=\frac{x}{y}} \left(\mu_A(x) \cap \mu_B(y)\right) \tag{1.2.9}$$

şeklindedir.

**Tanım 1.2.7. (a)** $A$ ile $B$ iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için $A$ ile $B$ nin $\alpha$ kesimleri sırasıyla $[A]^\alpha = [A_l^\alpha, A_r^\alpha]$ ve $[B]^\alpha = [B_l^\alpha, B_r^\alpha]$ olmak üzere, her $\alpha \in (0,1]$ için $A$ bulanık sayısının boyu

$$\|A\| = sup\left\{max\left\{\left|A_l^\alpha\right|, \left|A_r^\alpha\right|\right\}\right\} \tag{1.2.10}$$

şeklinde ve $A$ ile $B$ bulanık sayıları arasındaki uzaklık

$$D(A, B) = sup\left\{max\left\{\left|A_l^\alpha - B_l^\alpha\right|, \left|A_r^\alpha - B_r^\alpha\right|\right\}\right\} \tag{1.2.11}$$

şeklinde tanımlanır.

**(b)** $(y_n)$ bir pozitif bulanık sayı dizisi ve $y$ bir bulanık sayı olmak üzere, $\lim_{n\to\infty}(y_n) = y$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} D(y_n, y) = 0$ olmasıdır (Diamond ve Kloeden, 1994).

**Tanım 1.2.8.** $A$ ile $B$ iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için $A$ ile $B$ nin $\alpha$ kesimleri sırasıyla, $[A]^{\alpha} = [A_l^{\alpha}, A_r^{\alpha}]$ ve $[B]^{\alpha} = [B_l^{\alpha}, B_r^{\alpha}]$ olmak üzere,

$$MIN(A,B) = \left[ min\left\{ A_l^{\alpha}, B_l^{\alpha} \right\}, min\left\{ A_r^{\alpha}, B_r^{\alpha} \right\} \right] \qquad (1.2.12)$$

ve

$$MAX(A,B) = \left[ max\left\{ A_l^{\alpha}, B_l^{\alpha} \right\}, max\left\{ A_r^{\alpha}, B_r^{\alpha} \right\} \right] \qquad (1.2.13)$$

şeklinde tanımlanır (Klir ve Yuan, 1995).

**Tanım 1.2.9.** Eğer her $n \geq n_0$ için $MIN(y_n, C) = C$ ve $MAX(y_n, D) = D$ olacak şekilde $C$ ve $D$ bulanık sayıları varsa $(y_n)$ bulanık sayı dizisi sınırlı ve dirençlidir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

**Tanım 1.2.10.** $(y_n)$ bir pozitif bulanık sayı dizisi ve $y$ bir pozitif bulanık sayı olsun. Eğer her $n \geq n_0$ için

$$MIN(y_m, y) = y_m \text{ ve } MIN(y_s, y) = y \qquad (1.2.14)$$

veya

$$MIN(y_m, y) = y \text{ ve } MIN(y_s, y) = y_s \qquad (1.2.15)$$

olacak şekilde $s, m \geq n_0$ şartını sağlayan $s, m$ doğal sayıları varsa $(y_n)$ dizisi $y$ civarında salınımlıdır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

**Lemma 1.2.1.** Eğer $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \ldots \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon ve $B_0, B_1, \ldots, B_k$ bulanık sayılar ise

$$\left[ f(B_0, B_1, \ldots, B_k) \right]^{\alpha} = f\left( [B_0]^{\alpha}, [B_1]^{\alpha}, \ldots, [B_k]^{\alpha} \right) \qquad (1.2.16)$$

dır (Papaschinopoulos ve Stefanidou, 2003).

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde; bulanık fark denklemleri ile ilgili son yıllarda yayımlanmış olan makalelerden bazıları verilmiştir:

Khastan (2018);

$$w_{n+1} = \beta w_n (1 - w_n),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.1}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmıştır.

Lavanya ve Lovenia (2018);

$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i w_n + w_{n-i}}{B_i w_{n-i}^{p_i}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.2}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Rahman ve ark. (2018);

$$w_{n+1} = \frac{w_{n-1}}{A + B w_{n-1} w_n} \tag{2.3}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Sun ve ark. (2018);

$$w_n = \max\{\frac{1}{w_{n-m}}, \frac{\alpha_n}{w_{n-r}}\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.4}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Wang ve Zhang (2018);

$$w_{n+1} = A + B w_n e^{-C w_n},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.5}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Khastan ve Alijani (2019);

$$w_{n+1} = A + \frac{B}{w_n} \tag{2.6}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Wang ve ark. (2019);

$$w_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{w_n}, \frac{A}{w_{n-1}}, \ldots, \frac{A}{w_{n-(k-1)}}, w_{n-k}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.7}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Han ve ark. (2020);

$$w_n = \max\left\{C, \frac{w_{n-m-k}}{w_{n-m}}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.8}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Sun ve ark. (2020);

$$w_n = F(w_{n-1}, w_{n-k}),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.9}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Wang ve ark. (2021);

$$w_{n+1} = \frac{A w_{n-m}}{B + C\prod_{i=0}^{m} w_{n-i}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.10}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Yalçınkaya ve ark. (2021);

$$w_{n+1} = \frac{w_{n-2}}{C + w_{n-2} w_{n-1} w_n},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.11}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Jia ve ark. (2022);

$$w_{n+1}=\frac{Aw_{n-1}w_{n-2}+Bw_{n-3}}{D+Cw_{n-4}} \tag{2.12}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Sun ve ark. (2022);

$$w_{n+1}=\max\left\{C,\frac{w_n}{w_{n-1}}\right\},\quad n\in\mathbb{N}_0 \tag{2.13}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Yalçınkaya ve ark. (2022);

$$w_{n+1}=\frac{Aw_{n-1}}{1+w_{n-2}^{p}},\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{2.14}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Yalçınkaya ve ark. (2023);

$$w_{n+1}=A+\frac{B}{w_{n-m}},\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{2.15}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Yalçınkaya ve ark. (2023a);

$$w_{n+1}=\frac{Aw_{n-s}}{B+C\prod_{i=0}^{s}w_{n-i}},\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{2.16}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Yalçınkaya ve ark. (2023b);

$$w_{n+1} = A + \frac{B}{w_{n-m_1}} + \frac{C}{w_{n-m_2}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.17}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Jia ve ark. (2023);

$$w_{n+1} = \frac{Aw_{n-1}}{B + Cw_{n-2}^{p} w_{n-4}^{q} w_{n-6}^{r}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.18}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Zhang ve Pan (2023);

$$w_{n+1} = 1 + \frac{w_n}{T + w_{n-k}},\ n \in \mathbb{N} \tag{2.19}$$

bulanık fark denklemi üzerine çalışmışlardır.

Atpinar ve Yazlik (2023);

$$v_{n+1} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 e^{-v_{n-1}}}{\gamma_1 + w_n},\quad w_{n+1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 e^{-w_{n-1}}}{\gamma_2 + v_n},\quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.20}$$

bulanık fark denklem sistemi üzerine çalışmışlardır.

## 3. $\omega_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{\omega_n}, \frac{A}{\omega_{n-1}}, \omega_{n-2}\right\}$ BULANIK FARK DENKLEMİ

Bu bölümde; Changyou Wang ile Jiahui Li'nin 2020 yılında yayımlanmış olan "Periodic Solution for a Max-Type Fuzzy Difference Equation" başlıklı makalesi ele alınarak bir derleme çalışması yapılmıştır.

Bu makalede; $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ ve $A$ pozitif bulanık sayıları için

$$\omega_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{\omega_n}, \frac{A}{\omega_{n-1}}, \omega_{n-2}\right\},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.1}$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

**Lemma 3.1.** (3.1) in bir çözümü $\{\omega_n\}_{n=-2}^{\infty}$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \omega_{k_0} &= \omega_{k_0+3}, \\ \omega_{k_0+1} &= \omega_{k_0+4}, \\ \omega_{k_0+2} &= \omega_{k_0+5} \end{aligned} \tag{3.2}$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}_0 \cup \{-2,-1\}$ varsa $\{\omega_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü er geç üç periyotludur.

**İspat**. Her $m \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} \omega_{k_0} &= \omega_{k_0+3m}, \\ \omega_{k_0+1} &= \omega_{k_0+1+3m}, \\ \omega_{k_0+2} &= \omega_{k_0+2+3m} \end{aligned} \tag{3.3}$$

olduğunu tümevarım yöntemi ile ispat edelim.

$m=1$ için (3.3) eşitlikleri (3.2) eşitliklerine dönüşeceğinden (3.3) eşitlikleri doğrudur.

$1 \le m \le m_0$ için (3.3) eşitliklerinin doğru olduğunu kabul edelim.

$m = m_0 + 1$ için (3.3) eşitliklerinin doğru olduğunu gösterelim:

Kabulümüz, (3.1) denklemi ve (3.2) eşitliklerinden iterasyon ile

$$
\begin{aligned}
\omega_{k_0+3(m_0+1)} &= \max\left\{\frac{A}{\omega_{k_0+3m_0+2}}, \frac{A}{\omega_{k_0+3m_0+1}}, \omega_{k_0+3m_0}\right\} \\
&= \max\left\{\frac{A}{\omega_{k_0+2}}, \frac{A}{\omega_{k_0+1}}, \omega_{k_0}\right\} = \omega_{k_0+3} = \omega_{k_0}, \\
\omega_{k_0+1+3(m_0+1)} &= \max\left\{\frac{A}{\omega_{k_0+3m_0+3}}, \frac{A}{\omega_{k_0+3m_0+2}}, \omega_{k_0+3m_0+1}\right\} \\
&= \max\left\{\frac{A}{\omega_{k_0+3}}, \frac{A}{\omega_{k_0+2}}, \omega_{k_0+1}\right\} = \omega_{k_0+4} = \omega_{k_0+1}, \\
\omega_{k_0+2+3(m_0+1)} &= \max\left\{\frac{A}{\omega_{k_0+3m_0+4}}, \frac{A}{\omega_{k_0+3m_0+3}}, \omega_{k_0+3m_0+2}\right\} \\
&= \max\left\{\frac{A}{\omega_{k_0+4}}, \frac{A}{\omega_{k_0+3}}, \omega_{k_0+2}\right\} = \omega_{k_0+5} = \omega_{k_0+2}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.1.** $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ ve $A$ pozitif bulanık sayılar ise (3.1) in bir tek pozitif $\{\omega_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü vardır.

**Lemma 3.2.** $u_{-2}, u_{-1}, u_0, v_{-2}, v_{-1}, v_0$ ve $A$ pozitif reel sayılar ise $n \geq 0$ için

$$u_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{v_n}, \frac{A}{v_{n-1}}, u_{n-2}\right\}, \quad v_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{u_n}, \frac{A}{u_{n-1}}, v_{n-2}\right\} \tag{3.5}$$

sisteminin bütün pozitif çözümleri er geç 3 periyotludur.

**İspat.** (3.5) in pozitif bir çözümü $(u_n, v_n)$ olsun. Bu durumda,

$$u_1 = \max\left\{\frac{A}{v_0}, \frac{A}{v_{-1}}, u_{-2}\right\}, \quad v_1 = \max\left\{\frac{A}{u_0}, \frac{A}{u_{-1}}, v_{-2}\right\} \tag{3.6}$$

olup $u_1 \geq A / v_{-1}$ ve $v_1 \geq A / u_{-1}$ elde edilir. $v_{-1} \geq A / u_1$ ve $u_{-1} \geq A / v_1$ olduğundan

$$u_2 = \max\left\{\frac{A}{v_1}, \frac{A}{v_0}, u_{-1}\right\} = \max\left\{\frac{A}{v_0}, u_{-1}\right\},$$
$$v_2 = \max\left\{\frac{A}{u_1}, \frac{A}{u_0}, v_{-1}\right\} = \max\left\{\frac{A}{u_0}, v_{-1}\right\} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.5) ten eğer $n \geq 2$ ise o zaman

$$u_n \geq \frac{A}{v_{n-2}},\ u_{n-1} \geq \frac{A}{v_{n-2}},\ v_n \geq \frac{A}{u_{n-2}},\ v_{n-1} \geq \frac{A}{u_{n-2}}, \tag{3.8}$$

ve

$$v_{n-2} \geq \frac{A}{u_n},\ v_{n-2} \geq \frac{A}{u_{n-1}},\ u_{n-2} \geq \frac{A}{v_n},\ u_{n-2} \geq \frac{A}{v_{n-1}} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) dan $n \geq 2$ için

$$u_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{v_n}, \frac{A}{v_{n-1}}, u_{n-2}\right\} = u_{n-2},\quad v_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{u_n}, \frac{A}{u_{n-1}}, v_{n-2}\right\} = v_{n-2} \tag{3.10}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} u_{3n} &= u_0, \\ u_{3n+1} &= u_1, \\ u_{3n+2} &= u_2, \\ v_{3n} &= v_0, \\ v_{3n+1} &= v_1, \\ v_{3n+2} &= v_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Buradan (3.5) in çözümü

$$\begin{aligned} u &= \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots\} \\ &= \left\{u_0, \max\left\{\frac{A}{v_0}, \frac{A}{v_{-1}}, u_{-2}\right\}, \max\left\{\frac{A}{v_0}, u_{-1}\right\}, u_0, \max\left\{\frac{A}{v_0}, \frac{A}{v_{-1}}, u_{-2}\right\}, \max\left\{\frac{A}{v_0}, u_{-1}\right\}, \ldots\right\}, \\ v &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \ldots\} \\ &= \left\{v_0, \max\left\{\frac{A}{u_0}, \frac{A}{u_{-1}}, v_{-2}\right\}, \max\left\{\frac{A}{u_0}, v_{-1}\right\}, v_0, \max\left\{\frac{A}{u_0}, \frac{A}{u_{-1}}, v_{-2}\right\}, \max\left\{\frac{A}{u_0}, v_{-1}\right\}, \ldots\right\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 3.2.** $\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0$ ve $A$ pozitif bulanık sayılar ise (3.1) in her pozitif çözümü er geç üç periyotludur.

**İspat.** (3.1) in pozitif bir çözümü $\{\omega_n\}_{n=-2}^{\infty}$ olmak üzere $\alpha\in(0,1]$ için

$$\begin{aligned}&[\omega_i]^\alpha=\left[L_i^\alpha,R_i^\alpha\right],\ i=-2,-1,0,\\&[\omega_n]^\alpha=\left[L_n^\alpha,R_n^\alpha\right],\ n=1,2,3,...\end{aligned}\tag{3.13}$$

ve

$$[A]^\alpha=\left[A_l^\alpha,A_r^\alpha\right]=[A,A]\tag{3.14}$$

olsun. Teorem 3.1 den $\alpha\in(0,1]$, $i=1,2,3,...$ ve $n\geq 0$ için

$$L_{n+1}^\alpha=\max\left\{\frac{A}{R_n^\alpha},\frac{A}{R_{n-1}^\alpha},L_{n-2}^\alpha\right\},\ \ R_{n+1}^\alpha=\max\left\{\frac{A}{L_n^\alpha},\frac{A}{L_{n-1}^\alpha},R_{n-2}^\alpha\right\}\tag{3.15}$$

elde edilir. Lemma 3.2 yi kullanarak $n\geq 1$ ve $\alpha\in(0,1]$ için

$$\begin{aligned}&L_{3n}^\alpha=L_0^\alpha,\ L_{3n+1}^\alpha=L_1^\alpha,\ L_{3n+2}^\alpha=L_2^\alpha,\\&R_{3n}^\alpha=R_0^\alpha,\ R_{3n+1}^\alpha=R_1^\alpha,\ R_{3n+2}^\alpha=R_2^\alpha\end{aligned}\tag{3.16}$$

elde edilir. Bu ise çözümün er geç 3 periyotlu olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

**Lemma 3.3.** $B$ ve $C$ pozitif reel sabitler, $B<C$, $u_{-2},u_{-1},u_0$, $v_{-2},v_{-1},v_0$ pozitif reel sayılar ise $n\geq 0$ için

$$u_{n+1}=\max\left\{\frac{B}{v_n},\frac{B}{v_{n-1}},u_{n-2}\right\},\ \ v_{n+1}=\max\left\{\frac{C}{u_n},\frac{C}{u_{n-1}},v_{n-2}\right\}\tag{3.17}$$

sisteminin her pozitif çözümü er geç 3 periyotludur.

**İspat**. (3.17) nin pozitif bir çözümü $(u_n,v_n)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}&u_1=\max\left\{\frac{B}{v_0},\frac{B}{v_{-1}},u_{-2}\right\},\\&v_1=\max\left\{\frac{C}{u_0},\frac{C}{u_{-1}},v_{-2}\right\}\end{aligned}\tag{3.18}$$

olup $v_1\geq C/u_{-1}\geq B/u_{-1}$ elde edilir. $u_{-1}\geq B/v_1$ olduğundan,

$$u_2 = \max\left\{\frac{B}{v_1}, \frac{B}{v_0}, u_{-1}\right\} = \max\left\{\frac{B}{v_0}, u_{-1}\right\},$$
$$v_2 = \max\left\{\frac{C}{u_1}, \frac{C}{u_0}, v_{-1}\right\} \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.17) den $n \geq 2$ için

$$v_n \geq \frac{C}{u_{n-2}} \geq \frac{B}{u_{n-2}},\ v_{n-1} \geq \frac{C}{u_{n-2}} \geq \frac{B}{u_{n-2}} \tag{3.20}$$

ve

$$u_{n-2} \geq \frac{B}{v_n},\ u_{n-2} \geq \frac{B}{v_{n-1}} \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.21) den, $n \geq 2$ için

$$u_{n+1} = \max\left\{\frac{B}{v_n}, \frac{B}{v_{n-1}}, u_{n-2}\right\} = u_{n-2} \tag{3.22}$$

ve $n \geq 1$ için

$$u_{3n} = u_0,$$
$$u_{3n+1} = u_1, \tag{3.23}$$
$$u_{3n+2} = u_2$$

elde edilir. Şimdi, $\{v_n\}_{n=3}^{\infty}$ in periyot yapısını ele alalım:

$(a_1)$ $B/v_0 \geq B/v_{-1}$, $B/v_0 \geq u_{-2}$ ve $u_1 = B/v_0$ olduğunu kabul edelim.

$(a_{11})$ $C/u_0 \geq C/u_{-1}$, $C/u_0 \geq v_{-2}$ ve $v_1 = C/u_0$ olduğunu kabul edelim.

$(a_{111})$ Eğer $B/v_0 \geq u_{-1}$ ise $u_2 = B/v_0$ dır. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
v_3 &= \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_1}, \frac{C}{u_1}, \frac{B}{u_1}\right\} = \frac{C}{u_1}, \\
v_4 &= \max\left\{\frac{C}{u_3}, \frac{C}{u_2}, v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0}, \frac{C}{u_1}, \frac{C}{u_0}\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_1}, \frac{C}{u_0}\right\}, \\
v_5 &= \max\left\{\frac{C}{u_4}, \frac{C}{u_3}, v_2\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_1}, \frac{C}{u_0}, v_2\right\} = v_2, \\
v_6 &= \max\left\{\frac{C}{u_5}, \frac{C}{u_4}, v_3\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_3\right\} = v_3, \\
v_7 &= \max\left\{\frac{C}{u_6}, \frac{C}{u_5}, v_4\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0}, \frac{C}{u_2}, v_4\right\} = v_4, \\
v_8 &= \max\left\{\frac{C}{u_7}, \frac{C}{u_6}, v_5\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_1}, \frac{C}{u_0}, v_2\right\} = v_5
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
v_{3n} &= v_3 = \frac{C}{u_1} = \frac{C}{B} v_0, \\
v_{3n+1} &= v_4 = \max\left\{\frac{C}{B} v_0, \frac{C}{u_0}\right\}, \\
v_{3n+2} &= v_5 = \max\left\{\frac{C}{B} v_0, \frac{C}{u_0}, v_{-1}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

elde edilir.

$(a_{112})$ Eğer $u_{-1} \geq B / v_0$ ise $u_2 = u_{-1}$ dir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
v_3 &= \max\left\{\frac{C}{u_2},\frac{C}{u_1},v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_{-1}},\frac{C}{u_1},\frac{B}{u_1}\right\} = \frac{C}{u_1},\\
v_4 &= \max\left\{\frac{C}{u_3},\frac{C}{u_2},v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0},\frac{C}{u_{-1}},v_1\right\} = v_1,\\
v_5 &= \max\left\{\frac{C}{u_4},\frac{C}{u_3},v_2\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_1},\frac{C}{u_0},v_2\right\} = v_2,\\
v_6 &= \max\left\{\frac{C}{u_5},\frac{C}{u_4},v_3\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_2},\frac{C}{u_1},v_3\right\} = v_3,\\
v_7 &= \max\left\{\frac{C}{u_6},\frac{C}{u_5},v_4\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0},\frac{C}{u_{-1}},v_4\right\} = v_4,\\
v_8 &= \max\left\{\frac{C}{u_7},\frac{C}{u_6},v_5\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_1},\frac{C}{u_0},v_2\right\} = v_5
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
v_{3n} &= v_3 = \frac{C}{B}v_0,\\
v_{3n+1} &= v_4 = \frac{C}{u_0},\\
v_{3n+2} &= v_5 = \max\left\{\frac{C}{B}v_0,\frac{C}{u_0},v_{-1}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

elde edilir.

$(a_{12})$ $C/u_{-1} \geq C/u_0$, $C/u_{-1} \geq v_{-2}$ ve $v_1 = C/u_{-1}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.19) sağlanır.

$(a_{121})$ Eğer $B/v_0 \geq u_{-1}$ ise $u_2 = B/v_0$ olduğundan, $v_3, v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.24) te elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$
v_4 = \max\left\{\frac{C}{u_3},\frac{C}{u_2},v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0},\frac{C}{u_1},\frac{C}{u_{-1}}\right\} = \frac{C}{u_{-1}}
\tag{3.28}
$$

elde edilir. Dolaysıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$v_{3n}=v_3=\frac{C}{B}v_0,$$
$$v_{3n+1}=v_4=\frac{C}{u_{-1}}, \tag{3.29}$$
$$v_{3n+2}=v_5=\max\left\{\frac{C}{B}v_0,\frac{C}{u_0},v_{-1}\right\}$$

elde edilir.

$(a_{122})$ Eğer $u_{-1}\geq B/v_0$ ise $u_2=u_{-1}$ olduğundan $v_3,v_5,v_6,v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.26) da elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_4=\max\left\{\frac{C}{u_3},\frac{C}{u_2},v_1\right\}=\max\left\{\frac{C}{u_0},\frac{C}{u_{-1}},\frac{C}{u_{-1}}\right\}=\frac{C}{u_{-1}} \tag{3.30}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6=v_3$, $v_7=v_4$ ve $v_8=v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n\geq 2$ için

$$v_{3n}=v_3=\frac{C}{B}v_0,$$
$$v_{3n+1}=v_4=\frac{C}{u_{-1}}, \tag{3.31}$$
$$v_{3n+2}=v_5=\max\left\{\frac{C}{B}v_0,\frac{C}{u_0},v_{-1}\right\}$$

elde edilir.

$(a_{13})$ $v_{-2}\geq C/u_0$, $v_{-2}\geq C/u_{-1}$, $v_1=v_{-2}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.19) sağlanır.

$(a_{131})$ Eğer $B/v_0\geq u_{-1}$ ise $u_2=B/v_0$ olduğundan $v_3,v_5,v_6,v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.24) te elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_4=\max\left\{\frac{C}{u_3},\frac{C}{u_2},v_1\right\}=\max\left\{\frac{C}{u_0},\frac{C}{u_1},v_{-2}\right\}=v_{-2} \tag{3.32}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6=v_3$, $v_7=v_4$ ve $v_8=v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n\geq 2$ için

$$v_{3n}=v_3=\frac{C}{B}v_0,$$
$$v_{3n+1}=v_4=v_{-2}, \tag{3.33}$$
$$v_{3n+2}=v_5=\max\left\{\frac{C}{B}v_0,\frac{C}{u_0},v_{-1}\right\}$$

elde edilir.

$(a_{132})$ Eğer $u_{-1} \geq B/v_0$ ise $u_2 = u_{-1}$ olduğundan $v_3, v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.26) da elde edilenlerle aynıdır. Bu durumda,

$$v_4 = \max\left\{\frac{C}{u_3}, \frac{C}{u_2}, v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0}, \frac{C}{u_{-1}}, v_{-2}\right\} = v_{-2} \tag{3.34}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} v_{3n} &= v_3 = \frac{C}{B}v_0, \\ v_{3n+1} &= v_4 = v_{-2}, \\ v_{3n+2} &= v_5 = \max\left\{\frac{C}{B}v_0, \frac{C}{u_0}, v_{-1}\right\} \end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir.

$(b_1)$ $B/v_{-1} \geq B/v_0$, $B/v_{-1} \geq u_{-2}$ ve $u_1 = B/v_{-1}$ olduğunu kabul edelim.

$(b_{11})$ Eğer $C/u_0 \geq C/u_{-1}$ ve $C/u_0 \geq v_{-2}$ ise $v_1 = C/u_0$ dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} u_2 &= \max\left\{\frac{B}{v_1}, \frac{B}{v_0}, u_{-1}\right\} = \max\left\{\frac{B}{v_0}, u_{-1}\right\}, \\ v_2 &= \max\left\{\frac{C}{u_1}, \frac{C}{u_0}, v_{-1}\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_1}, \frac{C}{u_0}\right\} = \max\left\{\frac{C}{B}v_{-1}, \frac{C}{u_0}\right\} \end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir.

$(b_{111})$ Eğer $B/v_0 \geq u_{-1}$ ise $u_2 = B/v_0$ olduğundan, $v_3, v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.24) te elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} v_3 &= \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{B}{u_2}\right\} = \frac{C}{u_2} = \frac{C}{B}v_0, \\ v_4 &= \max\left\{\frac{C}{u_3}, \frac{C}{u_2}, v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0}, \frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_0}\right\} = \max\left\{\frac{C}{B}v_0, \frac{C}{u_0}\right\} \end{aligned} \tag{3.37}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$v_{3n} = v_3 = \frac{C}{B} v_0,$$
$$v_{3n+1} = v_4 = \max\left\{\frac{C}{B} v_0, \frac{C}{u_0}\right\}, \tag{3.38}$$
$$v_{3n+2} = v_5 = \max\left\{\frac{C}{B} v_{-1}, \frac{C}{u_0}\right\}$$

elde edilir.

$(b_{112})$ Eğer $u_{-1} \geq B / v_0$ ise $u_2 = u_{-1}$ olduğundan, $v_4, v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.26) da elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_{-1}}, \frac{C}{B} v_{-1}, v_0\right\} \tag{3.39}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$v_{3n} = v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_{-1}}, \frac{C}{B} u_{-1}, v_0\right\},$$
$$v_{3n+1} = v_4 = \frac{C}{u_0}, \tag{3.40}$$
$$v_{3n+2} = u_5 = \max\left\{\frac{C}{B} v_{-1}, \frac{C}{u_0}\right\}$$

elde edilir.

$(b_{12})$ $C / u_{-1} \geq C / u_0$, $C / u_{-1} \geq v_{-2}$ ve $v_1 = C / u_{-1}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.36) sağlanır.

$(b_{121})$ Eğer $B / v_0 \geq u_{-1}$ ise $u_2 = B / v_0$ olduğundan, $v_3, v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.24) te elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}\right\} = \frac{C}{u_2} = \frac{C}{B} v_0,$$
$$v_4 = \max\left\{\frac{C}{u_3}, \frac{C}{u_2}, v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0}, \frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_{-1}}\right\} = \max\left\{\frac{C}{B} v_0, \frac{C}{u_{-1}}\right\} \tag{3.41}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$v_{3n} = v_3 = \frac{C}{B} v_0,$$
$$v_{3n+1} = v_4 = \max\left\{\frac{C}{B} v_0, \frac{C}{u_{-1}}\right\}, \tag{3.42}$$
$$v_{3n+2} = v_5 = \max\left\{\frac{C}{B} v_{-1}, \frac{C}{u_0}\right\}$$

elde edilir.

$(b_{122})$ Eğer $u_{-1} \geq B / v_0$ ise $u_2 = u_{-1}$ olduğundan, $v_4, v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.26) da elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_{-1}}, \frac{C}{B} v_{-1}, v_0\right\} \tag{3.43}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$v_{3n} = v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_{-1}}, \frac{C}{B} v_{-1}, v_0\right\},$$
$$v_{3n+1} = v_4 = \frac{C}{u_{-1}}, \tag{3.44}$$
$$v_{3n+2} = v_5 = \max\left\{\frac{C}{B} v_{-1}, \frac{C}{u_0}\right\}$$

elde edilir.

$(b_{13})$ $v_{-2} \geq C / u_0$, $v_{-2} \geq C / u_{-1}$ ve $v_1 = v_{-2}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.36) sağlanır.

$(b_{131})$ Eğer $B / v_0 \geq u_{-1}$ ise $u_2 = B / v_0$ olduğundan, $v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.24) te elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \frac{C}{u_2} = \frac{C}{B} v_0,$$
$$v_4 = \max\left\{\frac{C}{u_3}, \frac{C}{u_2}, v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0}, \frac{C}{B} v_0, v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{B} v_0, v_{-2}\right\} \tag{3.45}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
v_{3n} &= v_3 = \frac{C}{B}v_0, \\
v_{3n+1} &= v_4 = \max\left\{\frac{C}{B}v_0, v_{-2}\right\}, \\
v_{3n+2} &= v_5 = \max\left\{\frac{C}{B}v_{-1}, \frac{C}{u_0}\right\}
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

elde edilir.

$(b_{132})$ Eğer $u_{-1} \geq B/v_0$ ise $u_2 = u_{-1}$ olduğundan, $v_4, v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.26) da elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$
v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_{-1}}, \frac{C}{B}v_{-1}, v_0\right\} \tag{3.47}
$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
v_{3n} &= v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_{-1}}, \frac{C}{B}v_{-1}, v_0\right\}, \\
v_{3n+1} &= v_4 = v_{-2}, \\
v_{3n+2} &= v_5 = \max\left\{\frac{C}{B}v_{-1}, \frac{C}{u_0}\right\}
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

elde edilir.

$(c_1)$ $u_{-2} \geq B/v_{-1}$, $u_{-2} \geq B/v_0$ ve $u_1 = u_{-2}$ olduğunu kabul edelim.

$(c_{11})$ Eğer $C/u_0 \geq C/u_{-1}$ ve $C/u_0 \geq v_{-2}$ ise $v_1 = C/u_0$ dır. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \max\left\{\frac{B}{v_1}, \frac{B}{v_0}, u_{-1}\right\} = \max\left\{\frac{B}{v_0}, u_{-1}\right\}, \\
v_2 &= \max\left\{\frac{C}{u_1}, \frac{C}{u_0}, v_{-1}\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_{-2}}, \frac{C}{u_0}, v_{-1}\right\}
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

elde edilir.

$(c_{111})$ Eğer $B/v_0 \geq u_{-1}$ ise $u_2 = B/v_0$ olduğundan, $v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.24) te elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
v_3 &= \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}\right\} = \max\left\{\frac{C}{B}v_0, \frac{C}{u_{-2}}\right\}, \\
v_4 &= \max\left\{\frac{C}{u_3}, \frac{C}{u_2}, v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_0}, \frac{C}{u_2}, \frac{C}{v_0}\right\} = \max\left\{\frac{C}{B}v_0, \frac{C}{u_0}\right\}
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} v_{3n} &= v_3 = \max\left\{\frac{C}{B}v_0, \frac{C}{u_{-2}}\right\}, \\ v_{3n+1} &= v_4 = \max\left\{\frac{C}{B}v_0, \frac{C}{u_0}\right\}, \\ v_{3n+2} &= v_5 = \max\left\{\frac{C}{u_{-2}}, \frac{C}{u_0}, v_{-1}\right\} \end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir.

$(c_{112})$ Eğer $u_{-1} \geq B/v_0$ ise $u_2 = u_{-1}$ olduğundan, $v_4, v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.26) da elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_{-1}}, \frac{C}{u_{-2}}, v_0\right\} \tag{3.52}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} v_{3n} &= v_3 = \max\left\{\frac{C}{u_{-1}}, \frac{C}{u_{-2}}, v_0\right\}, \\ v_{3n+1} &= v_4 = \frac{C}{u_0}, \\ v_{3n+2} &= v_5 = \max\left\{\frac{C}{u_{-2}}, \frac{C}{u_0} v_{-1}\right\} \end{aligned} \tag{3.53}$$

elde edilir.

$(c_{12})$ $C/u_{-1} \geq C/u_0$, $C/u_{-1} \geq v_{-2}$ ve $v_1 = C/u_{-1}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.49) sağlanır.

$(c_{121})$ Eğer $B/v_0 \geq u_{-1}$ ise $u_2 = B/v_0$ olduğundan, $v_5, v_6, v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.24) te elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} v_3 &= \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_1}, v_0\right\} = \max\left\{\frac{C}{B}v_0, \frac{C}{u_{-2}}\right\}, \\ v_4 &= \max\left\{\frac{C}{u_3}, \frac{C}{u_2}, v_1\right\} = \max\left\{\frac{C}{u_2}, \frac{C}{u_{-1}}\right\} = \max\left\{\frac{C}{B}v_0, \frac{C}{u_{-1}}\right\} \end{aligned} \tag{3.54}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6 = v_3$, $v_7 = v_4$ ve $v_8 = v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n \geq 2$ için

$$v_{3n}=v_3=\max\left\{\frac{C}{B}v_0,\frac{C}{u_{-2}}\right\},$$
$$v_{3n+1}=v_4=\max\left\{\frac{C}{B}v_0,\frac{C}{u_{-1}}\right\}, \tag{3.55}$$
$$v_{3n+2}=v_5=\max\left\{\frac{C}{u_{-2}},\frac{C}{u_0},v_{-1}\right\}$$

elde edilir.

$(c_{122})$ Eğer $u_{-1}\geq B/v_0$ ise $u_2=u_{-1}$ olduğundan, $v_5,v_6,v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.26) da elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_3=\max\left\{\frac{C}{u_2},\frac{C}{u_1},v_0\right\}=\max\left\{\frac{C}{u_{-1}},\frac{C}{u_1},v_0\right\}=\max\left\{\frac{C}{u_{-1}},\frac{C}{u_{-2}},v_0\right\},$$
$$v_4=\max\left\{\frac{C}{u_3},\frac{C}{u_2},v_1\right\}=\max\left\{\frac{C}{u_0},\frac{C}{u_{-1}},\frac{C}{u_{-1}}\right\}=\frac{C}{u_{-1}} \tag{3.56}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6=v_3$, $v_7=v_4$ ve $v_8=v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n\geq 2$ için

$$v_{3n}=v_3=\max\left\{\frac{C}{u_{-1}},\frac{C}{u_{-2}},v_0\right\},$$
$$v_{3n+1}=v_4=\frac{C}{u_{-1}}, \tag{3.57}$$
$$v_{3n+2}=v_5=\max\left\{\frac{C}{u_{-2}},\frac{C}{u_0}v_{-1}\right\}$$

elde edilir.

$(c_{13})$ $v_{-2}\geq C/u_0$, $v_{-2}\geq C/u_{-1}$ ve $v_1=v_{-2}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.49) sağlanır.

$(c_{131})$ Eğer $B/v_0\geq u_{-1}$ ise $u_2=B/v_0$ olduğundan, $v_5,v_6,v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.24) te elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_3=\max\left\{\frac{C}{u_2},\frac{C}{u_1},v_0\right\}=\max\left\{\frac{C}{B}v_0,\frac{C}{u_{-2}}\right\},$$
$$v_4=\max\left\{\frac{C}{u_3},\frac{C}{u_2},v_1\right\}=\max\left\{\frac{C}{B}v_0,v_{-2}\right\} \tag{3.58}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6=v_3$, $v_7=v_4$ ve $v_8=v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n\geq 2$ için

$$v_{3n}=v_3=\max\left\{\frac{C}{B}v_0,\frac{C}{u_{-2}}\right\},$$
$$v_{3n+1}=v_4=\max\left\{\frac{C}{B}v_0,v_{-2}\right\}, \tag{3.59}$$
$$v_{3n+2}=v_5=\max\left\{\frac{C}{u_{-2}},\frac{C}{u_0},v_{-1}\right\}$$

elde edilir.

$(c_{132})$ Eğer $u_{-1}\geq B/v_0$ ise $u_2=u_{-1}$ olduğundan, $v_5,v_6,v_7$ ve $v_8$ değerleri (3.26) da elde edilenler ile aynıdır. Bu durumda,

$$v_3=\max\left\{\frac{C}{u_2},\frac{C}{u_1},v_0\right\}=\max\left\{\frac{C}{u_{-1}},\frac{C}{u_{-2}},v_0\right\} \tag{3.60}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v_6=v_3$, $v_7=v_4$ ve $v_8=v_5$ tir. Bu durumda, Lemma 3.1 den $n\geq 2$ için

$$v_{3n}=v_3=\max\left\{\frac{C}{u_{-1}},\frac{C}{u_{-2}},v_0\right\},$$
$$v_{3n+1}=v_4=v_{-2}, \tag{3.61}$$
$$v_{3n+2}=v_5=\max\left\{\frac{C}{u_{-2}},\frac{C}{u_0},v_{-1}\right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.3.** $\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0$ ve $A$ pozitif bulanık sayılar ise (3.1) denkleminin her pozitif çözümü er geç üç periyotludur.

**İspat.** $\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0$ başlangıç şartları (3.13) ü sağlamak üzere (3.1) denkleminin bir pozitif çözümü $\{\omega_n\}_{n=-2}^{\infty}$ olsun. $A$ bulanık sayısı için

$$[A]^{\alpha}=\left[A_l^{\alpha},A_r^{\alpha}\right]=[B,C],\ \alpha\in(0,1] \tag{3.62}$$

olduğunu kabul edelim.

Teorem 3.1'den, $i=1,2,3,...$ ve $\alpha\in(0,1]$ için $\left(L_n^{\alpha},R_n^{\alpha}\right)$ nın, $n\geq 0$ için

$$L_{n+1}^{\alpha} = \max\left\{\frac{B}{R_n^{\alpha}}, \frac{B}{R_{n-1}^{\alpha}}, L_{n-2}^{\alpha}\right\},$$
$$R_{n+1}^{\alpha} = \max\left\{\frac{C}{L_n^{\alpha}}, \frac{C}{L_{n-1}^{\alpha}}, R_{n-2}^{\alpha}\right\} \tag{3.63}$$

sistemini sağladığı açıktır. Bu durumda, Lemma 3.3 ten $\alpha \in (0,1]$ ve $n \geq 2$ için

$$L_{3n}^{\alpha} = L_3^{\alpha},\ L_{3n+1}^{\alpha} = L_4^{\alpha},\ L_{3n+2}^{\alpha} = L_5^{\alpha},$$
$$R_{3n}^{\alpha} = R_3^{\alpha},\ R_{3n+1}^{\alpha} = R_4^{\alpha},\ R_{3n+2}^{\alpha} = R_5^{\alpha} \tag{3.64}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.1) denkleminin $\{\omega_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü er geç üç periyotludur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.4.** $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ ve $A$ pozitif bulanık sayılar ise (3.1) denkleminin her pozitif çözümü sınırlı ve dirençlidir.

**İspat.** Teorem 3.3 ten $i = 1, 2, 3, \ldots$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $(L_n^{\alpha}, R_n^{\alpha})$, $n \geq 0$ için

$$L_{n+1}^{\alpha} = \max\left\{\frac{A_l^{\alpha}}{R_n^{\alpha}}, \frac{A_l^{\alpha}}{R_{n-1}^{\alpha}}, L_{n-2}^{\alpha}\right\},$$
$$R_{n+1}^{\alpha} = \max\left\{\frac{A_r^{\alpha}}{L_n^{\alpha}}, \frac{A_r^{\alpha}}{L_{n-1}^{\alpha}}, R_{n-2}^{\alpha}\right\} \tag{3.65}$$

denklem sistemini sağlar. $\alpha \in (0,1]$ ve $n \geq 2$ için

$$L_{3n}^{\alpha} = L_3^{\alpha},\ L_{3n+1}^{\alpha} = L_4^{\alpha},\ L_{3n+2}^{\alpha} = L_5^{\alpha},$$
$$R_{3n}^{\alpha} = R_3^{\alpha},\ R_{3n+1}^{\alpha} = R_4^{\alpha},\ R_{3n+2}^{\alpha} = R_5^{\alpha} \tag{3.66}$$

Lemma 3.3 ten, $L_n^{\alpha}$ nın aşağıda verilen (i)-(iii)'den birine eşit olduğu elde edilir.

(i) $L_{3n}^{\alpha} = L_0^{\alpha}$

(ii) $L_{3n+1}^{\alpha} = L_1^{\alpha} = \max\left\{A_l^{\alpha} / R_0^{\alpha}, A_l^{\alpha} / R_{-1}^{\alpha}, L_{-2}^{\alpha}\right\}$

(iii) $L_{3n+2}^{\alpha} = L_2^{\alpha} = \max\left\{\min\left\{A_l^{\alpha} / A_r^{\alpha} L_0^{\alpha}, A_l^{\alpha} / A_r^{\alpha} L_{-1}^{\alpha}, A_l^{\alpha} / R_{-2}^{\alpha}\right\}, A_l^{\alpha} / R_0^{\alpha}, L_{-1}^{\alpha}\right\}$

Dolayısıyla, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\operatorname{supp} L_n^{\alpha} \in [M, N] \tag{3.67}$$

olmak üzere, $M,N\in(0,\infty)$ sayıları mevcuttur. Benzer şekilde, $R_n^\alpha$'da $R_3^\alpha, R_4^\alpha$ ve $R_5^\alpha$ dan birine eşittir. (3.25), (3.27) - (3.35), (3.38) - (3.48) ve (3.51) - (3.61) den şu sonuçlara ulaşırız:

(1) $R_3^\alpha$ aşağıda verilen $(a_i)-(a_{iv})$'den birine eşittir:

$$\begin{aligned}
&(a_i)\frac{A_r^\alpha}{A_l^\alpha}R_0^\alpha,\\
&(a_{ii})\max\left\{\frac{A_r^\alpha}{L_{-1}^\alpha},\frac{A_r^\alpha}{A_l^\alpha}R_{-1}^\alpha,R_0^\alpha\right\},\\
&(a_{iii})\max\left\{\frac{A_r^\alpha}{A_l^\alpha}R_0^\alpha,\frac{A_r^\alpha}{L_{-2}^\alpha}\right\},\\
&(a_{iv})\max\left\{\frac{A_r^\alpha}{L_{-1}^\alpha},\frac{A_r^\alpha}{L_{-2}^\alpha},R_0^\alpha\right\}.
\end{aligned}\tag{3.68}$$

(2) $R_4^\alpha$ aşağıda verilen $(b_i)-(b_{vi})$'den birine eşittir:

$$\begin{aligned}
&(b_i)\frac{A_r^\alpha}{L_0^\alpha},\\
&(b_{ii})\max\left\{\frac{A_r^\alpha}{A_l^\alpha}R_0^\alpha,\frac{A_r^\alpha}{L_0^\alpha}\right\},\\
&(b_{iii})\frac{A_r^\alpha}{L_{-1}^\alpha},\\
&(b_{iv})R_{-2}^\alpha,\\
&(b_v)\max\left\{\frac{A_r^\alpha}{A_l^\alpha}R_0^\alpha,\frac{A_r^\alpha}{L_{-1,\alpha}}\right\},\\
&(b_{vi})\max\left\{\frac{A_r^\alpha}{A_l^\alpha}R_0^\alpha,R_{-2}^\alpha\right\}.
\end{aligned}\tag{3.69}$$

(3) $R_5^\alpha$ aşağıda verilen $(c_i)-(c_{iii})$'den birine eşittir:

$$\begin{aligned}
&(c_i)\max\left\{\frac{A_r^\alpha}{A_l^\alpha}R_0^\alpha,\frac{A_r^\alpha}{L_0^\alpha},R_{-1}^\alpha\right\},\\
&(c_{ii})\max\left\{\frac{A_r^\alpha}{A_l^\alpha}R_{-1}^\alpha,\frac{A_r^\alpha}{L_0^\alpha}\right\},\\
&(c_{iii})\max\left\{\frac{A_r^\alpha}{L_{-2}^\alpha},\frac{A_r^\alpha}{L_0^\alpha},R_{-1}^\alpha\right\}.
\end{aligned}\tag{3.70}$$

Dolayısıyla, $n=1,2,3,\ldots$ için

$$\operatorname{supp}R_n^\alpha\in[P,Q]\tag{3.71}$$

olmak üzere, $P,Q \in (0,\infty)$, $P \geq N$ sayıları mevcuttur. (3.67) ve (3.71) den herhangi bir $\omega_n$ için

$$\operatorname{supp}\omega_n \in [\mu,\nu] \tag{3.72}$$

olmak üzere, $\mu,\nu \in (0,\infty)$ mevcuttur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

**Örnek 3.1.**

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}, & 3\leq x\leq 5\\ \dfrac{8-x}{3}, & 5\leq x\leq 8\end{cases} \tag{3.73}$$

ve

$$\begin{gathered}\omega_0(x)=\begin{cases}x-4, & 4\leq x\leq 5\\ \dfrac{8-x}{3}, & 5\leq x\leq 8\end{cases}\\ \omega_{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}, & 2\leq x\leq 5\\ \dfrac{7-x}{2}, & 5\leq x\leq 7\end{cases}\\ \omega_{-2}(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{2}, & 1.5\leq x\leq 2.5\\ -2x+6, & 2.5\leq x\leq 3\end{cases}\end{gathered} \tag{3.74}$$

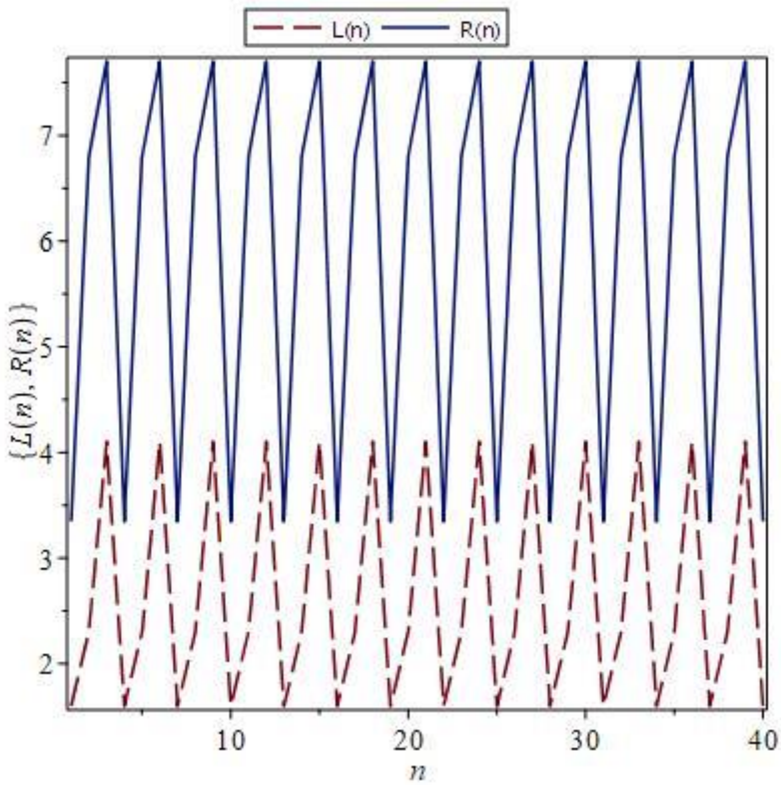
olsun. Bu durumda, (3.73) ve (3.74) ten $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned}[A]^\alpha &= [3+2\alpha,\ 8-3\alpha],\\ [\omega_0]^\alpha &= [4+\alpha,\ 8-3\alpha],\\ [\omega_{-1}]^\alpha &= [2+3\alpha,\ 7-2\alpha],\\ [\omega_{-2}]^\alpha &= \left[\frac{3}{2}+\alpha,\ 3-\frac{1}{2}\alpha\right]\end{aligned} \tag{3.75}$$

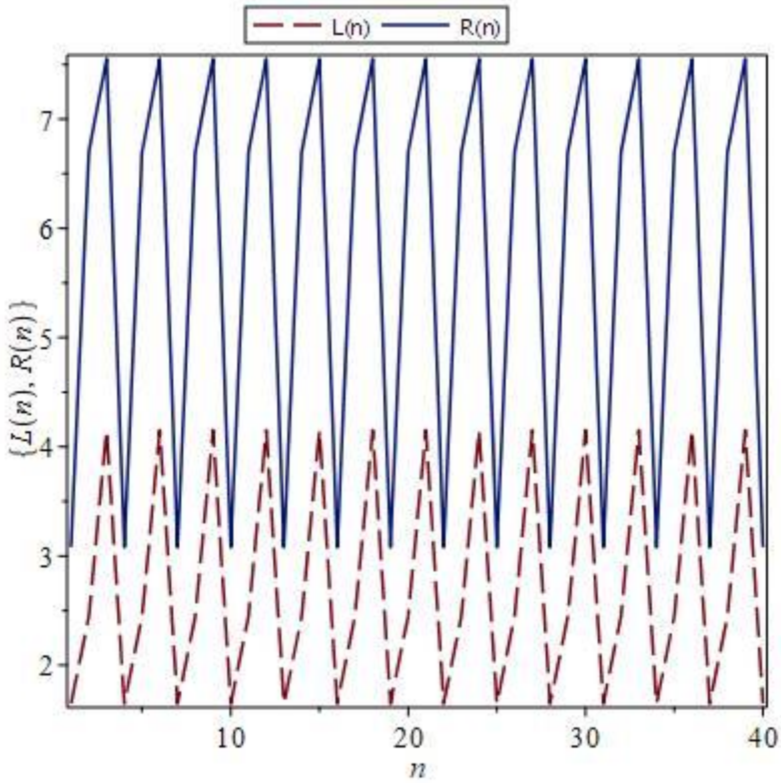
elde edilir. $A$ ile $\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0$ için

$$L_{n+1}^{\alpha} = \max\left\{\frac{3+2\alpha}{R_n^{\alpha}}, \frac{3+2\alpha}{R_{n-1}^{\alpha}}, L_{n-2}^{\alpha}\right\},\ R_{n+1}^{\alpha} = \max\left\{\frac{8-3\alpha}{L_n^{\alpha}}, \frac{8-3\alpha}{L_{n-1}^{\alpha}}, R_{n-2}^{\alpha}\right\} \tag{3.76}$$

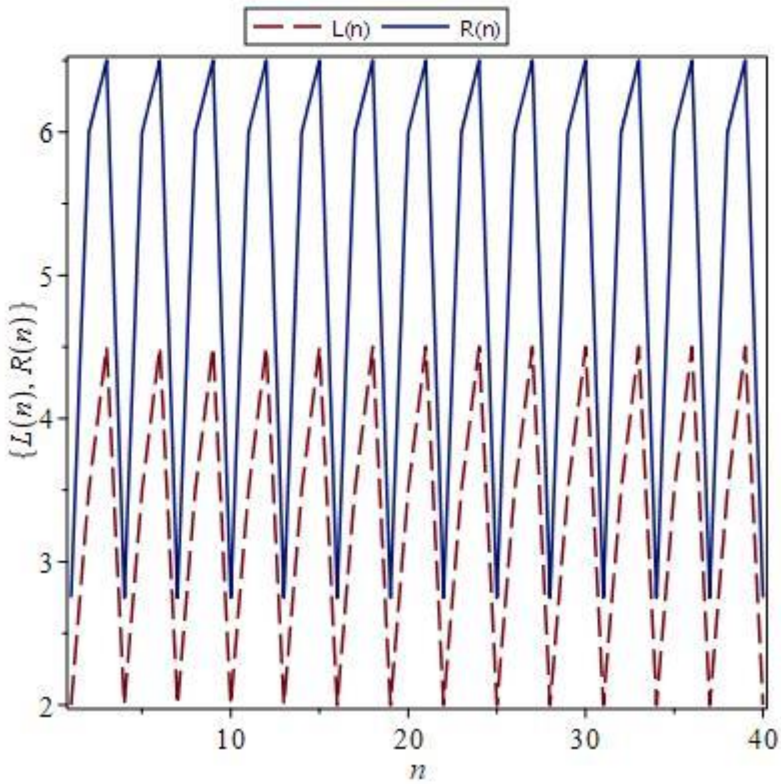
sistemi elde edilir. (3.76) sistemi hem er geç 3 periyotlu çözümlere sahiptir hem de çözümler sınırlı ve dirençlidir. $\alpha$ nın farklı değerleri için elde edilen grafikler aşağıda verilmiştir.



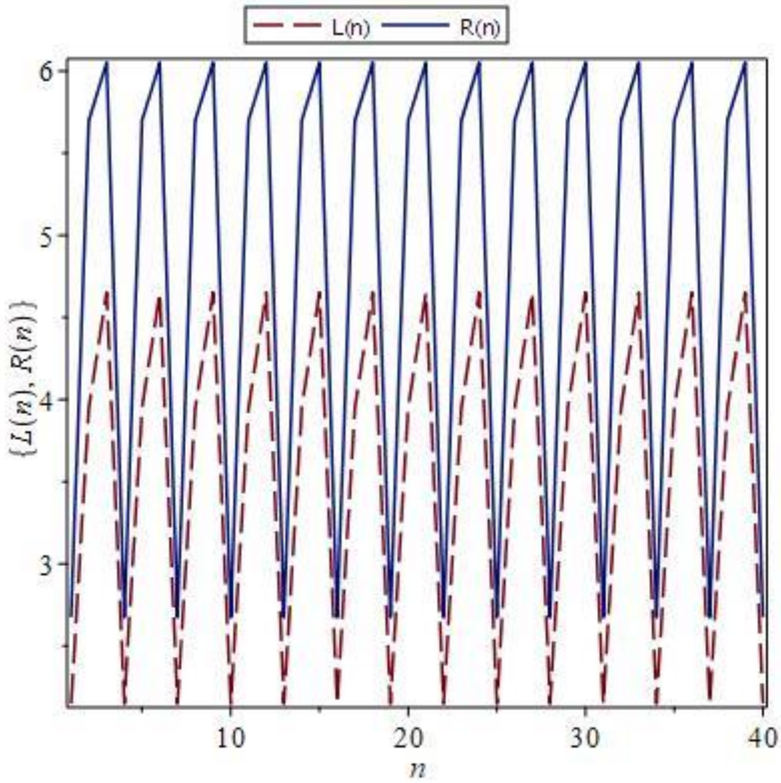

**Şekil 3.1.** $\alpha = 0.10$ için çözümler



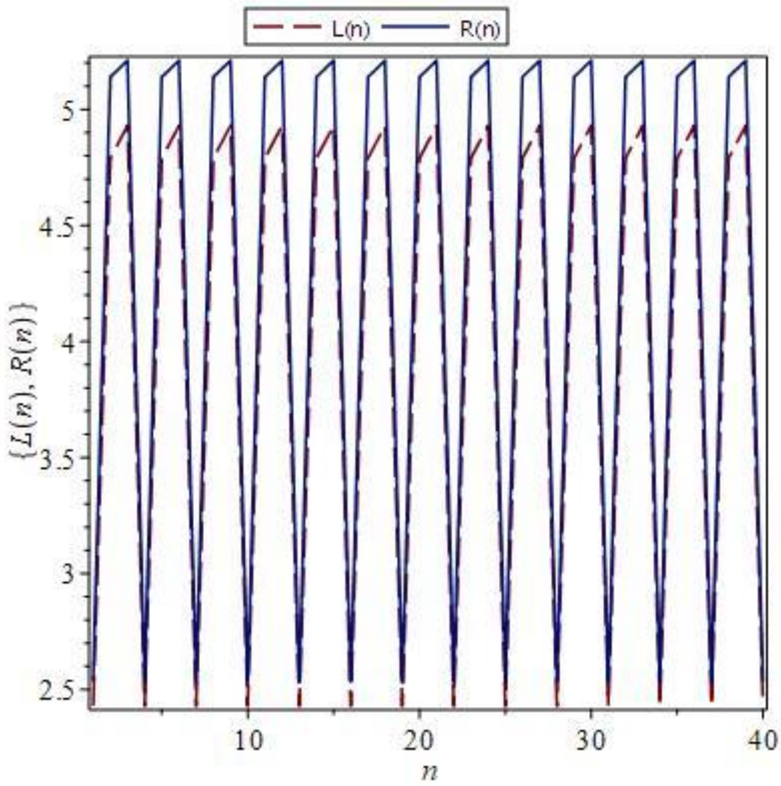

**Şekil 3.2.** $\alpha = 0.15$ için çözümler



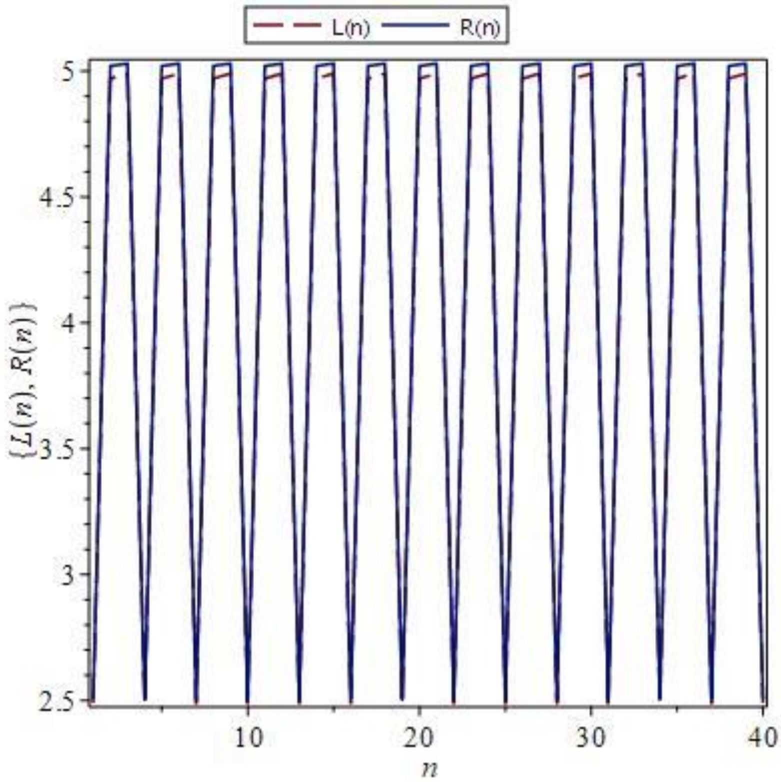

**Şekil 3.3.** $\alpha = 0.50$ için çözümler




**Şekil 3.4.** $\alpha = 0.65$ için çözümler




**Şekil 3.5.** $\alpha = 0.93$ için çözümler




**Şekil 3.6.** $\alpha = 0.99$ için çözümler

**Örnek 3.2.**

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{10x-3}{2}, & 0.3\le x\le 0.5\\ \dfrac{7-10x}{2}, & 0.5\le x\le 0.7\end{cases} \tag{3.77}$$

ve

$$\begin{aligned}\omega_0(x)&=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}, & 1\le x\le 3\\ 4-x, & 3\le x\le 4\end{cases}\\ \omega_{-1}(x)&=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, & -2\le x\le 0\\ \dfrac{2-x}{2}, & 0\le x\le 2\end{cases}\\ \omega_{-2}(x)&=\begin{cases}\dfrac{x+2}{4}, & -2\le x\le 2\\ 3-x, & 2\le x\le 3\end{cases}\end{aligned} \tag{3.78}$$

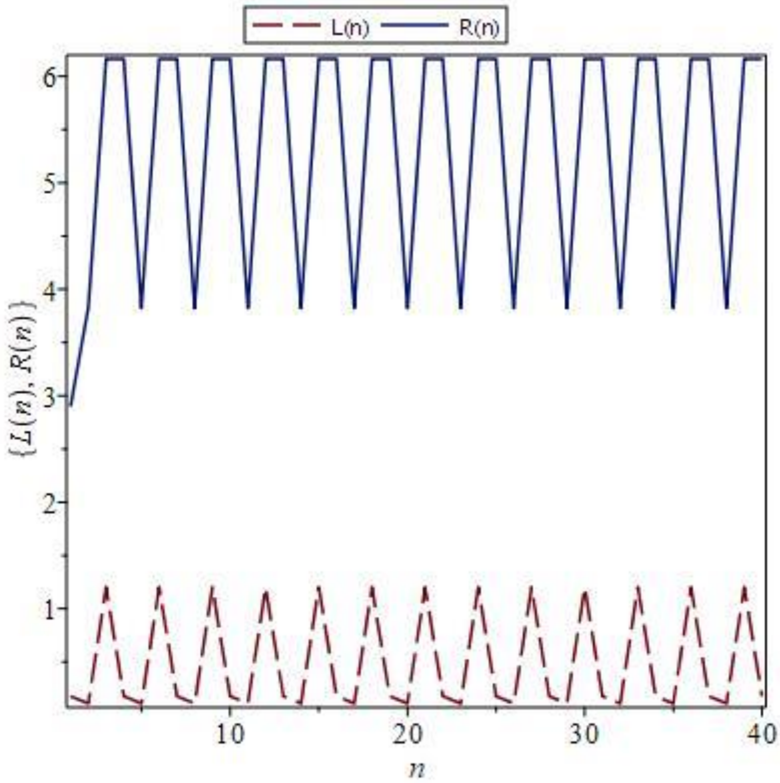
olsun. Bu durumda, (3.77) ve (3.78) den $\alpha\in(0,1]$ için

$$\begin{aligned}[A]^{\alpha}&=\left[\frac{2\alpha+3}{10},\ \frac{7-2\alpha}{10}\right],\\ [\omega_0]^{\alpha}&=[2\alpha+1,\ 4-\alpha],\\ [\omega_{-1}]^{\alpha}&=[2\alpha-2,\ 2-2\alpha],\\ [\omega_{-2}]^{\alpha}&=[4\alpha-2,\ 3-\alpha]\end{aligned} \tag{3.79}$$

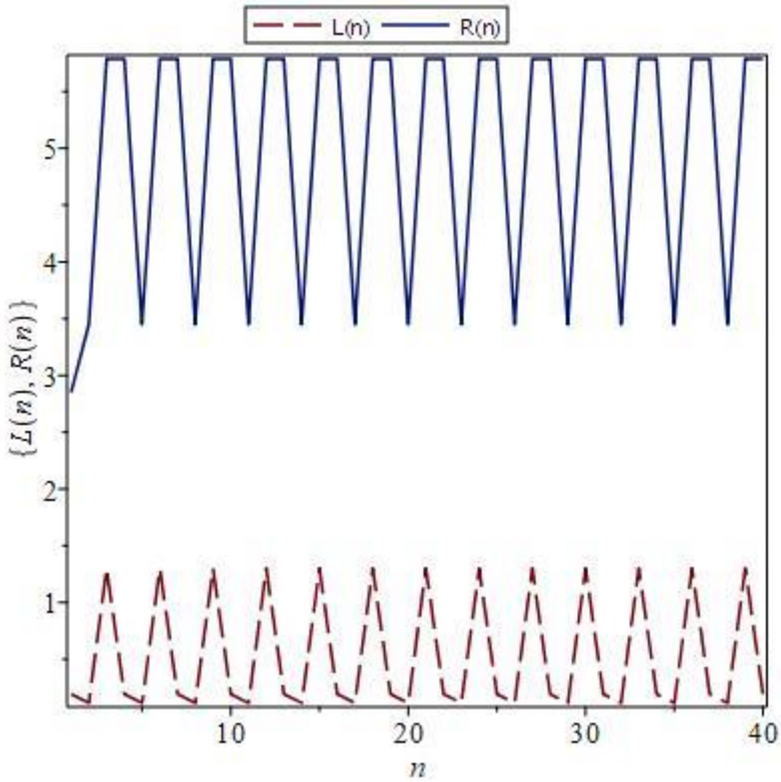
elde edilir. *A* ile $\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0$ için

$$L_{n+1}^{\alpha}=\max\left\{\frac{2\alpha+3}{10.R_n^{\alpha}},\frac{2\alpha+3}{10.R_{n-1}^{\alpha}},L_{n-2}^{\alpha}\right\},\ R_{n+1}^{\alpha}=\max\left\{\frac{7-2\alpha}{10.L_n^{\alpha}},\frac{7-2\alpha}{10.L_{n-1}^{\alpha}},R_{n-2}^{\alpha}\right\} \tag{3.80}$$

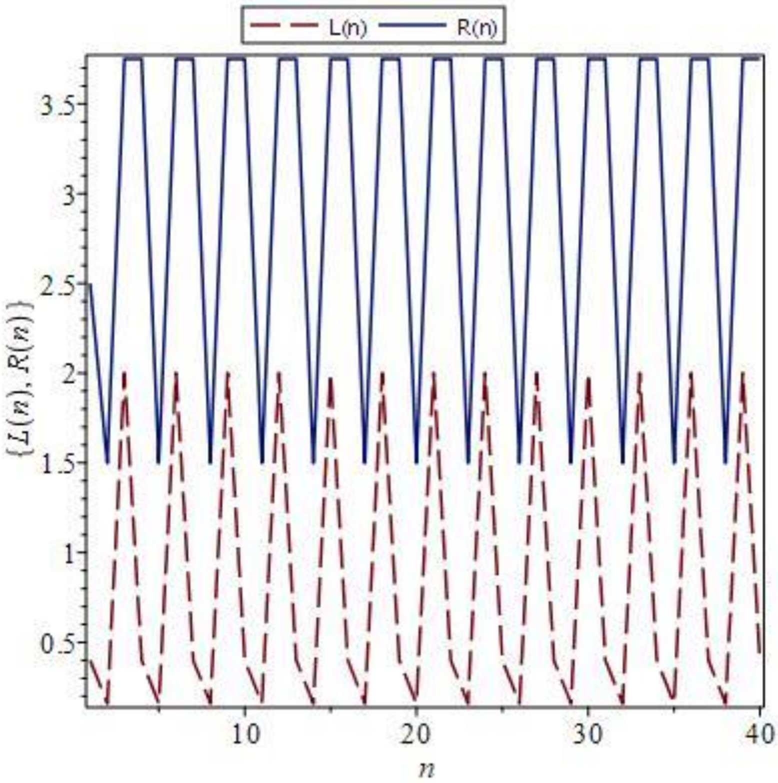
sistemi elde edilir. (3.80) sistemi hem er geç 3 periyotlu çözümlere sahiptir hem de çözümler sınırlı ve dirençlidir. $\alpha$ nın farklı değerleri için elde edilen grafikler aşağıda verilmiştir.



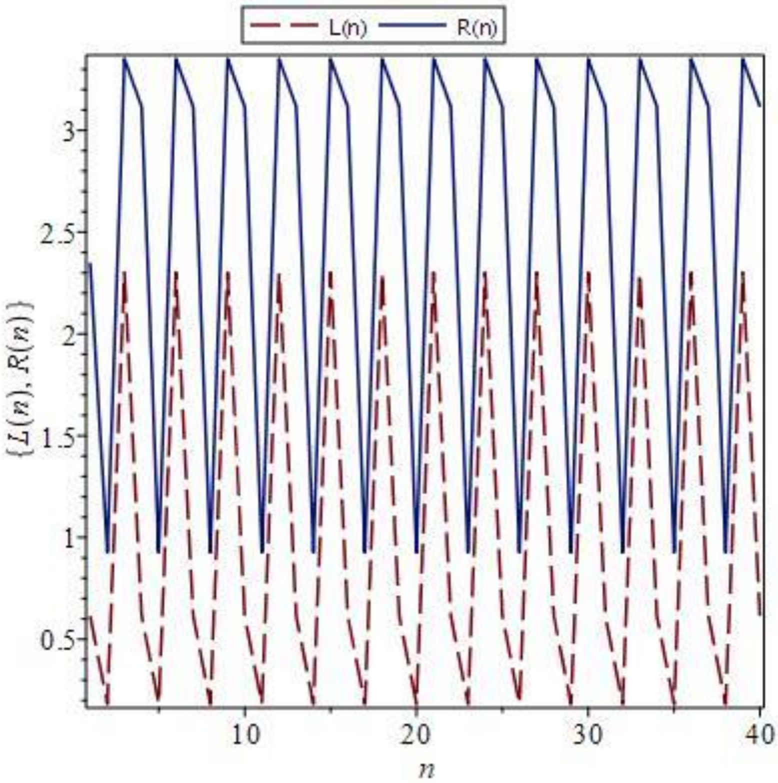

**Şekil 3.7.** $\alpha = 0.10$ için çözümler



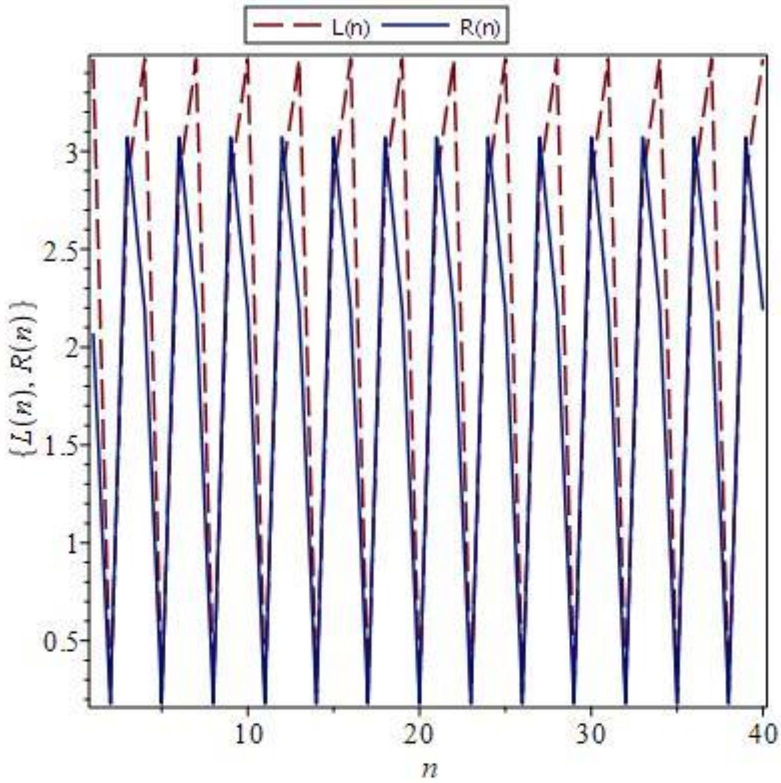

**Şekil 3.8.** $\alpha = 0.15$ için çözümler



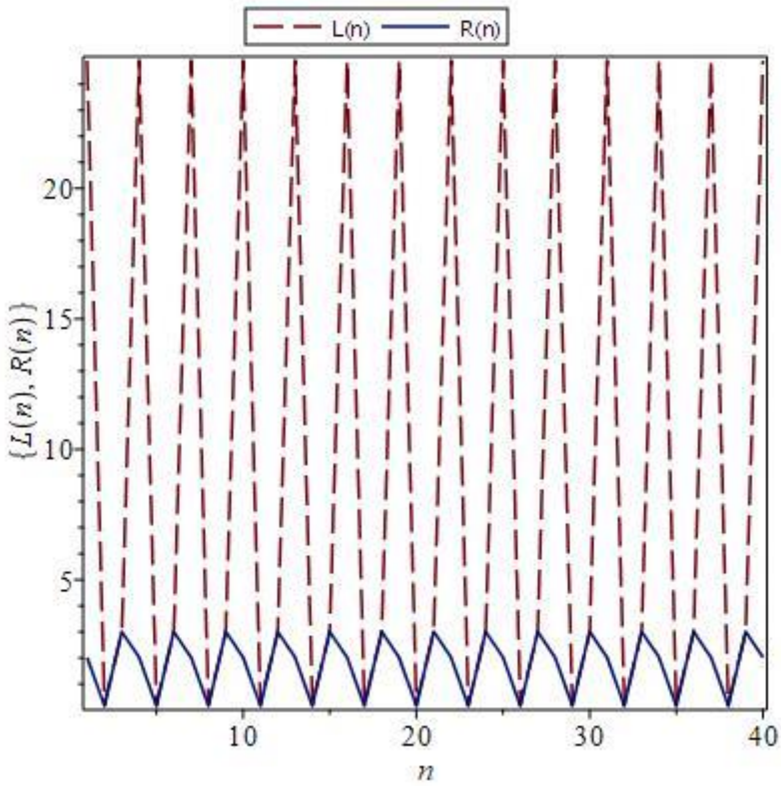

**Şekil 3.9.** $\alpha = 0.50$ için çözümler




**Şekil 3.10.** $\alpha = 0.65$ için çözümler




**Şekil 3.11.** $\alpha = 0.93$ için çözümler




**Şekil 3.12.** $\alpha = 0.99$ için çözümler

## 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; Changyou Wang ile Jiahui Li'nin 2020 yılında yayımlanmış olan "Periodic Solution for a Max-Type Fuzzy Difference Equation" başlıklı makalesi ele alınarak bir derleme çalışması yapılmıştır.

Bu makalede; $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0$ ve $A$ pozitif bulanık sayıları için

$$\omega_{n+1} = \max\left\{ \frac{A}{\omega_n}, \frac{A}{\omega_{n-1}}, \omega_{n-2} \right\},\ n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

Yapılacak yeni çalışmalarda, bu denklem genelleştirilerek daha genel denklemler tanımlanabilir ve çözümlerinin davranışı incelenebilir.

## 5. KAYNAKLAR


Atpinar, S. and Yazlik, Y., 2023, Qualitative behavior of exponential type fuzzy difference equations system, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 69, 4135-4162.

Bede, B., 2013, Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, *Springer*, New York.

Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets, World Scientific, Singapore.

Han, C., Su, G., Li, L., Xia, G. and Sun, T., 2020, Eventual periodicity of the fuzzy max-difference equation $x_n = \max\{C, x_{n-m-k} / x_{n-m}\}$, *Advances in Difference Equations*, 673, 10 pages.

Jia, L., Wang, C., Zhao, X. and Wei, W., 2022, Dynamic behavior of a fractional-type fuzzy difference system, *Symmetry*, 14, 1337.

Jia, L., Zhao, X., Wang, C. and Wang, Q., 2023, Dynamic behavior of a seven-order fuzzy difference equation, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 13(1), 486-501.

Khastan, A., 2018, Fuzzy logistic difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(7), 55-66.

Khastan, A. and Alijani, Z., 2019, On the new solutions to the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B / x_n$, *Fuzzy Sets and Systems*, 358, 64-83.

Klir, G. and Yuan, B., 1995, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall, New Jersey.

Lavanya, A. P. and Lovenia, J. D. L., 2018, Positive solutions of a fuzzy nonlinear difference equations, *Tamsui Oxford Journal of Informational and Mathematical Sciences*, 32(2), 27-37.

Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002a, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B / x_n$ , *Soft Computing*, 6, 456-461.

Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002b, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + x_n / x_{n-m}$ , *Fuzzy Sets and Systems*, 129, 73-81.

Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G., 2003, Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation, *Fuzzy Sets and Systems*, 140, 523-539.

Rahman, G., Din, Q., Faizullah, F. and Khan, F. M., 2018, Qualitative behavior of a second-order fuzzy difference equation, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 34, 745-753.

Sun, T., Xi, H., Su, G. and Qin, B., 2018, Dynamics of the fuzzy difference equation $z_n = \max\{1/z_{n-m}, \alpha_n / z_{n-r}\}$, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 11, 477-485.

Sun, T., Su, G. and Qin, B., 2020, On the fuzzy difference equation $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-k})$, *Fuzzy Sets and Systems*, 387, 81-88.

Sun, T., Su, G., Han, C., Zeng, F. and Qin, B., 2022, Eventual periodicity of a system of max-type fuzzy difference equations of higher order, *Fuzzy Sets and Systems*, 443, 286-303.

Wang, G. and Zhang, Q., 2018, Dynamical behavior of first-order nonlinear fuzzy difference equation, *International Journal of Computer Science*, 45(4), 552-559.

Wang, C., Wei, W., Yang, Q. and Li, Y., 2019, On the periodicity of a max-type fuzzy difference equations, *American Journal of Electromagnetics and Applications*, 7(2), 13-18.

Wang, C. and Li, J., 2020, Periodic Solution for a max-type fuzzy difference equation, *Journal of Mathematics*, Volume 2020, Article ID 3094391, 12 pages.

Wang, C., Li, J. and Jia, L., 2021, Dynamics of a high-order nonlinear fuzzy difference equations, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 11(1), 404-421.

Yalçınkaya, İ., Atak, N. and Tollu, D. T., 2021, On a third-order fuzzy difference equation, *Journal of Prime Research in Mathematics*, 17(1), 59-69.

Yalçınkaya, İ., Çalışkan, V. and Tollu, D. T., 2022, On a nonlinear fuzzy difference equation, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 68-78.

Yalçınkaya, İ., El-Metwally, H., Tollu, D. T. and Ahmad, H., 2023, Behavior of solutions to fuzzy difference equation $z_{n+1} = A + B / z_{n-m}$, *Mathematical Notes*, 113(2), 292-302.

Yalçınkaya, İ., Tollu, D. T., Khastan, A., Ahmad, H. and Botmart, T., 2023a, Qualitative behavior of a higher-order fuzzy difference equation, *AIMS Mathematics*, 8(3), 6309–6322.

Yalçınkaya, İ., El-Metwally, H., Bayram, M. and Tollu, D.T., 2023b, On the dynamics of a higher-order fuzzy difference equation with rational terms, *Soft Computing*, 27, 10469-10479.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

Zhang, Q. and Pan, B., 2023, Qualitative analysis of k-order rational fuzzy difference equation, *International Journal of Applied Mathematics*, 53(3), 839-845.