T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SZASZ-CHARLIER OPERATÖRLERİNİN GAMA TİPİ GENELLEŞTİRİLMESİ

Bilal ÇAVDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs-2017
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Bilal ÇAVDAR tarafından hazırlanan "Szasz-Charlier Operatörlerinin Gama Tipi Genelleştirilmesi" adlı tez çalışması 24/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ	…………………..
Danışman	
Prof. Dr. Nesip AKTAN	…………………..
Üye	
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ	…………………..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet COŞKUN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Bilal ÇAVDAR

Tarih: 24.05.2017

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SZASZ-CHARLIER TİPİ OPERATÖRLERİN GAMA TİPİ GENELLEŞTİRİLMESİ

Bilal ÇAVDAR

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2017, 45 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Bu tezde Szasz-Charlier operatörlerinin Gama tipi genelleştirilmesi tanımlanarak bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde yaklaşımlar teorisi hakkında bilgiler verilip, bu teori hakkında literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde lineer pozitif operatörler tanıtılmış ve lineer pozitif operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Szasz-Charlier operatörlerinin Gama tipi genelleşmesini tanımlayarak bazı yaklaşım özelliklerini incelenmiş ve tanımladığımız operatörün merkezi momentleri hesaplanmıştır. Ayrıca operatörün süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı tahmin edilmiştir.

Dördüncü bölümde tanımladığımız operatörün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra tanımladığımız operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızı ağırlıklı süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla hesaplanmıştır. Son olarak tanımladığımız operatörler için Voronovskaja tipi teorem verilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Korovkin teoremi, Lineer pozitif operatörler, Lipschitz sınıfı, Peetre-K fonksiyoneli, Süreklilik modülü, Szasz-Charlier operatörleri, Szasz-Charlier Operatörlerinin Gama tipi genelleştirilmesi, Voronowskaja teoremi.

ABSTRACT

MS THESIS

GAMMA TYPE GENERALIZATION SZASZ-CHARLIER OPERATORS

Bilal ÇAVDAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2017, 45 Pages

Jury
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

In this thesis, the approximation properties were studied by defining Gamma Type Generalization Szasz-Charlier Operators.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, informations were given about the approximation theory, literature scan was done about this theory.

In the second part, linear positive operators were introduced and main properties which are supplied by linear pozitive operators were studied.

In the third part, the approximation properties were studied by defining Gamma Type Generalization of Szasz-Charlier Operators and central moments of the operator that we defined were calculated. Besides, speed of approximation of these operators was estimated with the help of modulus of continuity and the function in the Lipschitz class.

In the fourth part, approximation properties to continuous functions in weighted space of this operator that we defined were studied. After that, speed of approximation in a weighted space of the operator that we defined was calculated by the help of both weighted modulus of continuity and Peetre-K functional. At last, Voronowskaja type theorem was given for operators that we defined.

Finally, in the fifth part, results were given.

Keywords: Gamma Type Generalization Szasz-Charlier Operators, Lipschitz class, Modulus of continuity, Peetre's K-functionals, Positive linear operators, Szasz-Charlier operators, the Korovkin theorem, the Voronowskaja theorem.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı tez çalışması olarak sunulmuştur. Bu çalışmada yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a ve Yrd. Doç. Dr. Ümit KARABIYIK'a teşekkür ederim.

Bilal ÇAVDAR
KONYA-2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$L_n(f;x)$	$n \in IN$ olmak üzere bir operatör dizisi.
$C[a,b]$	Bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı.
$\lVert f \rVert_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı norm.
$f_n(x)$	$n \in IN$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi.
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması.
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonun süreklilik modülü.
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar.
$B_n(f;x)$	Bernstein Polinomları.
$S_n(f;x)$	Szasz operatörleri.
$A_n(f;x)$	Szasz-Charlier operatörleri
$S_n^{**}(f;x)$	Szasz-Charlier operatörlerinin Gama tipi genelleşmesi.
$C_{x^2}^{*}[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında tanımlı $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty}\dfrac{f(x)}{1+x^2}$ ile sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı.
$K_2(f,\delta)$	Peetre-K fonksiyoneli.
$\Omega(f;\delta)$	f fonksiyonun ağırlıklı süreklilik modülü.

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisinde önemli bir çalışma konusu olan lineer pozitif operatörlerle yaklaşımlar teorisi tüm disiplinlerde, fizikten, bilgisayar destekli geometrik dizayn, mühendislik bilimlerinde model oluşturmaya kadar pek çok farklı disiplinde yoğun bir şekilde kullanılmaktadır.

Szasz ve Mirakjan (Szasz, 1950, Mirakjan,1941) Bernstein operatörünün sonlu aralıktan sonsuz aralığa genelleştirerek aşağıdaki operatörü tanımlamıştır.

$$S_n(f,x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ , x>0}$$

bu operatörün birçok yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Tanımlanan bu operatör literatürde Szasz-Mirakjan veya Szasz operatörü olarak bilinir. Szasz operatörlerinin birçok genelleştirmesi çeşitli yazarlar tarafından çalışılmıştır.

Son yıllarda, Varma ve Tasdelen (S. Varma, F. Tasdelen, 2012) Szasz tipi operatörleri çalışmış ve Charlier polinomlarını içeren bir genelleştirmesini aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$A_n\left(f;x,a\right)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)nx\right)}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right);a>1$$

Burada $C_k^{(a)}(u)$ Charlier polinomlarını göstermektedir. Charlier polinomları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$e^t\left(1-\frac{t}{a}\right)^u=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{(a)}(u)\frac{t^k}{k!},|t|<a$$

Burada $C_k^{(a)}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{r}(-u)_r\left(\frac{1}{a}\right)^r$ ve $(m)_0=1,(m)_j=m(m+1)\ldots(m+j-1),\, j\geq 1$ dir.

Szasz-Charlier operatörleri ve bu operatörlerin genelleştirmeleri ve yaklaşım özellikleri literatürde yoğun bir şekilde çalışılmıştır. [(A. Kajla ve P.N. Agrawal,2015, S. Varma ve F. Taşdelen,2012)].

Bu çalışmamızda, Gama tipi Szasz-Charlier operatörlerini tanımlayıp bazı yaklaşım özelliklerini araştıracağız.

$x\in[0,\infty)$ için, Gama tipi Szasz-Charlier operatörlerini

$$S_n^{**}\left(f;x,a\right)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}f(t)\,dt$$

şeklinde tanımlayacağız.

Bu tezde yaklaşımlar teorisi hakkında literatür taraması yapılacak, lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve bu operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenecektir. Daha sonra bu tezde kullanılacak olan bazı tanımlar verilecektir. İlerleyen bölümlerde Szasz-Charlier operatörlerinin Gama tipi genelleşmesi tanımlanıp bu operatörün kapalı aralıkta Korovkin teoremi yardımıyla yakınsama özellikleri incelenecektir. Ayrıca süreklilik modülü, Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar tanımlanıp bunlar yardımıyla tanımladığımız operatörün yaklaşım hızı tahmin edilecektir. Daha sonra ağırlıklı uzaylarda yaklaşım kavramları incelenip tanımladığımız operatörün ağırlıklı uzaylarda bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir. Ayrıca ağırlıklı uzaylardaki süreklilik modülü tanımlanıp özellikleri incelenecektir. Daha sonra ağırlıklı süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla tanımladığımız operatörün yaklaşım hızı tahmin edilecektir. Bununla birlikte son olarak tanımladığımız operatör için Voronovskaja teoremi tipinde bir teorem verilip ispat edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve lineer pozitif operatörlerin sağladığı temel özellikler incelenecektir. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 2.1.1 X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere, eğer X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu L kuralına X den Y ye bir *operatör* denir. Bu durumda X uzayında tanımlı her f fonksiyonuna Y uzayında bir fonksiyon karşılık gelir. Bu fonksiyonun x noktasında aldığı değer $L(f;x)$ ile gösterilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.2 X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere; $L: X \to Y$ şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım. Eğer L operatörü her $f,g \in X$ ve her $a_1, a_2 \in IR$ için

$$L(a_1 f + a_2 g) = a_1 L(f) + a_2 L(g)$$

koşulunu sağlıyorsa, L operatörüne *lineer operatör* denir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.3 $L: X \to Y$ bir operatör ve $f \in X$ olsun. Eğer

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f;x) \geq 0$$

oluyorsa L operatörüne *pozitif operatör* denir (Korovkin 1960).

Hem lineerlik hem de pozitiflik koşullarını sağlayan L operatörüne *lineer pozitif operatörler* denir.

Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Aşağıdaki yardımcı teoremler lineer pozitif operatörlerin literatürde var olan özellikleridir.

Yardımcı Teorem 2.1.1 $L: X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. $f,g \in X$ olmak üzere $f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$ eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

İspat: X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere; $L: X \rightarrow Y$ şeklindeki L lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. $f, g \in X$ için kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan $L(g-f) \geq 0$ elde edilir. Diğer taraftan L operatörü lineer olduğundan $L(g-f) = L(g) - L(f) \geq 0$ elde edilir. Böylece $L(f) - L(g) \leq 0$ olur ki ispat tamamlanır..

Yardımcı Teorem 2.1.2 $L: X \rightarrow Y$ bir lineer pozitif operatör ise o taktirde $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

İspat: X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere; $L: X \rightarrow Y$ şeklindeki L lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. Her hangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.1.1}$$

dir. L operatörü lineer pozitif olduğu için Yardımcı Teorem 2.1.1 den dolayı monoton artan olduğu için (2.1.1)'den

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \tag{2.1.2}$$

elde edilir. L operatörü lineer olduğundan

$L(-|f|) = -L(|f|)$'dir. Bunun (1.1.2)'de kullanılmasıyla;

$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.4 $A \subseteq R$ ve $f : A \rightarrow IR$ bir fonksiyon olsun. Her $n \in IN$ için $f_n(x)'$ e bir *fonksiyon dizisi* denir ve (f_n) ile gösterilir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.5 X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere; $L: X \rightarrow Y$ şeklindeki L operatörü ve her $n \in IN$ için $L_n(f;x)$'e bir *operatör dizisi* denir ve (L_n) ile gösterilir. $L_n(f;x)$, L_n operatörünün f'e uygulandığını ve sonucun x' e bağlı olduğunu gösterir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.6 Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bütün reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ *fonksiyon uzayı* denir. Bu uzaydaki norm

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \underset{a<x<b}{\text{maks}}|f(x)|$$

şeklinde tanımlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.7 Bir (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsak olması için $\Leftrightarrow$ her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

ya da daha açık olarak;

$$\lim_{n\to\infty} \underset{a<x<b}{\text{maks}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Düzgün yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilir. (Musayev ve ark. 2003).

Korovkin, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.1.1 $f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende

$$|f(x)| \leq M_f \tag{2.1.3}$$

olsun. Eğer $L_n(f)$ lineer pozitif operatör dizisi, $\forall\, x \in [a,b]$ ve $e_i = t^i$ olmak üzere $i = 0,1,2$ için

$$L_n(\mathrm{e}_i; x) \rightrightarrows x^i$$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $[a,b]$ aralığında

$$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$$

dir (Korovkin 1953).

İspat: Kabul edelim ki $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından dolayı her $\varepsilon > 0$ için $|t-x| \leq \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı $\delta > 0$ reel sayısı vardır. $|t-x| > \delta$ olduğunda ise (2.1.3)'ten ve üçgen eşitsizliğinden dolayı:

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \tag{2.1.4}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan eğer; $|t-x| > \delta$ ise $\dfrac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından;

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \tag{2.1.5}$$

sağlanır.

(2.1.4) ve (2.1.5)'ten

$$\left| f(t) - f(x) \right| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılır. O halde;

$$|t-x| \leq \delta \text{ için } \left| f(t) - f(x) \right| < \varepsilon$$

$$|t-x| > \delta \text{ için } \left| f(t) - f(x) \right| < 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla her $t \in IR$ ve her $x \in [a,b]$ için:

$$\left| f(t) - f(x) \right| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.1.6}$$

dir. Şimdi $i = 0,1,2$ koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n\left(f(t);x \right) - f(x) \right\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığını gösterelim;

Lineerlikten:

$$\begin{aligned}
\left| L_n\left(f(t);x \right) - f(x) \right| &= \left| L_n\left(f(t);x \right) - f(x) + L_n\left(f(x);x \right) - L_n\left(f(x);x \right) \right| \\
&= \left| L_n\left(f(t);x \right) - L_n\left(f(x);x \right) + L_n\left(f(x);x \right) - f(x) \right| \\
&= \left| L_n\left(\left(f(t) - f(x) \right);x \right) + f(x)\left(L_n\left(f(x);x \right) - 1 \right) \right| \\
&= \left| L_n\left(\left(f(t) - f(x) \right);x \right) + f(x)\left(L_n(1;x) - 1 \right) \right|
\end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\left| L_n\left(f(t);x \right) - f(x) \right| \leq \left| L_n\left(\left(f(t) - f(x) \right);x \right) \right| + \left| f(x) \right| \left| \left(L_n(1;x) - 1 \right) \right|$$

yazılabilir. Diğer taraftan Lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$\left(f(t) - f(x) \right) \leq \left| f(t) - f(x) \right|$$

olduğundan;

$$\left| L_n\left(\left(f(t) - f(x) \right);x \right) \right| \leq \left| L_n\left(\left| f(t) - f(x) \right|;x \right) \right|$$

elde edilir. Operatör pozitif ve

$$\left| f(t) - f(x) \right| \geq 0$$

olduğundan;

$$\left|L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\right|=L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)$$

dir. Böylece;

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\leq L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|\left(L_n(1,x)-1\right)\right|$$

olduğu gösterilir. (2.1.3)'ten

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\leq L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+M_f\left|\left(L_n(1,x)-1\right)\right|$$

elde edilir. $\left(L_n\right)$ monoton artan olduğundan (2.1.6)'nın kullanılmasıyla;

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\leq L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)+M_f\left|\left(L_n(1,x)-1\right)\right| \tag{2.1.7}$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)&=L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}L_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}L_n\left(t^2;x\right)-x^2-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)\\ +x^2L_n(1;x)\end{bmatrix}\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}L_n\left(t^2;x\right)-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)\\ +x^2L_n(1;x)-x^2\end{bmatrix}\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)+2x\left(x-L_n(t;x)\right)\\ +x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son bulduğumuz ifadenin (2.1.7)'de kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned}
\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\leq&\,\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\begin{bmatrix}\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)+2x\left(x-L_n(t;x)\right)\\ +x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\end{bmatrix}\\
&+M_f\left|\left(L_n(1,x)-1\right)\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. $i=0,1,2$ koşullarının son eşitsizlikte kullanılmasıyla;

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|<\varepsilon$$

bulunur. O halde;

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\leq x\leq b}\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|=0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.8 X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere; $L: X \rightarrow Y$ şeklindeki L operatörü ve $\forall\ n \in IN$ için (L_n) operatör dizisi verilsin.

$$L_n\left((t-x)^k ;x\right),\ \{k=0,1,2,\ldots\}$$

ile tanımlanan ifadelere (L_n) operatör dizisinin *k-yıncı merkezi momenti* denir (Lorentz 1953).

Tanım 2.1.9 (α_n) ve (β_n), her $n \in N$ için $\alpha_n \le \beta_n$ ve $n \to \infty$ için $\alpha_n \to 0$ ve $\beta_n \to 0$ koşullarını sağlayan fonksiyon dizileri olsunlar. Bu durumda (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (β_n) dizisininkinden daha *hızlıdır* denir.

Teorem 2.1.1' de lineer pozitif bir $\left(L_n(f;x)\right)$ operatör dizisinin belirli şartlar altında $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını göstermiştik. Bu durumda $\left\|L_n(f)-f\right\|$ ifadesini sıfıra yakınsayan bir dizi olarak düşünebiliriz. Böylece $n \to \infty$ için $\beta_n \to 0$ olmak üzere; eğer

$$\left\|L_n(f)-f\right\| \le M\beta_n$$

olacak şekilde bir (β_n) dizisi bulabilirsek, (β_n)'nin sıfıra yaklaşım hızı $L_n(f;x)$'in $f(x)$'e yaklaşma hızını değerlendirmemize yardımcı olur. Bu değerlendirmeyi yapmak için birçok yöntem vardır. Şimdi bu yöntemleri açıklayalım:

Tanım 2.1.10 $f \in C[a,b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |t-x|\le\delta}} \left|f(t)-f(x)\right|$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *Süreklilik Modülü* denir (Altomare ve Campiti 1994).

Süreklilik Modülünün Özellikleri

i. $\omega(f;\delta) \ge 0$

ii. $\delta_1 \le \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \le \omega(f;\delta_2)$

iii. $\omega(f+g;\delta) \le \omega(f;\delta) + \omega(\mathrm{g};\delta)$

iv. $m \in IN$ için $\omega(f;\mathrm{m}\delta) \le \mathrm{m}\,\omega(f;\delta)$

v. $\lambda \in IR^+$ için $\omega(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\,\omega(f;\delta)$

vi. $|f(t) - f(x)| \le \omega(f;|t-x|)$

vii. $|f(t) - f(x)| \le \left(\dfrac{|t-x|}{\delta} + 1\right)\omega(f;\delta)$

viii. $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$

dir (Altomare ve Campiti 1994).

Tanım 2.1.11 $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $|f(t) - f(x)| \le M\,|t-x|^{\alpha}$ koşulunu sağlayan fonksiyonlara *Lipschitz sınıfındandır* denir. M 'ye de *Lipschitz sabiti* denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir. (Ersan 2008)

Tanım 2.1.12 $[0,\infty)$ aralığında tanımlı, M_f, f 'ye bağlı sabit olmak üzere $|f(x)| \le M_f(1+x^2)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan kümeye $B_{x^2}[0,\infty)$ *ağırlıklı fonksiyon uzayı* denir. $B_{x^2}[0,\infty)$ uzayının sürekli fonksiyonlardan oluşan alt uzayına $C_{x^2}[0,\infty)$ *ağırlıklı fonksiyon* uzayı denir. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{f(x)}{1+x^2}$ ile sınırlı ve sürekli fonksiyonlardan oluşan $C_{x^2}[0,\infty)$ uzayının alt uzayına $C^*_{x^2}[0,\infty)$ *ağırlıklı fonksiyon uzayı* denir. $C^*_{x^2}[0,\infty)$ uzayındaki norm

$$\|f\|_{x^2} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

şeklinde tanımlıdır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Tanım 2.1.13 $f \in C^*_{x^2}[0,\infty)$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{x\in[0,\infty),\, h\le\delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

şeklinde tanımlı olan $\Omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *ağırlıklı süreklilik modülü* denir (Atakut, Ispir 2002).

Ağırlıklı Süreklilik Modülünün Özellikleri

$f \in C^*_{x^2}[0,\infty)$ için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir (Ashieser 1956 ve Ispir 2001).

i. $\Omega(f;\delta) \geq 0$

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\Omega(f;\delta_1) \leq \Omega(f;\delta_2)$

iii. $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \Omega(f;\delta) = 0$

iv. $m \in N$ için $\Omega(f;m\delta) \leq 2m(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

v. Herhangi $\delta > 0$ için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

vi. $\left| f(t) - f(x) \right| \leq (1+x^2)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega(f;|t-x|)$

vii. $\left| f(t) - f(x) \right| \leq 2(1+\delta^2)(1+x^2)\left(1+\dfrac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega(f;\lambda\delta)$

Tanım 2.1.14 $[0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm reel değerli sınırlı ve sürekli f fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye $C_B[0,\infty)$ ağırlıklı fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f(x)|$ şeklinde tanımlıdır. $\forall \delta > 0$ için Peetre-K fonksiyoneli

$$K_2(f,\delta) = \inf_{x \in C_B^2[0,\infty)} \left\{ \|f-h\| + \delta \|h''\| \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$C_B^2[0,\infty) = \left\{ h \in C_B[0,\infty) : h', h'' \in C_B[0,\infty) \right\} \text{'dir.}$$

$\exists C > 0$ öyle ki $K_2(f,\delta) \leq C\omega_2(f,\delta)$ burada $\omega_2(f,\delta)$ ikinci dereceden süreklilik modülü olmak üzere

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{0<p<\sqrt{\delta}} \sup_{x\in[0,\infty)} \left| f(x+2p) - 2f(x+p) + f(x) \right|$$

şeklinde tanımlanır (Lorentz 1953). Ayrıca $\omega(f,\delta)$, $f \in C_B[0,\infty)$'nin genel süreklilik modülüdür.

Tanım 2.1.15 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ ise (α_n) dizisine sonsuz küçülendir denir. (α_n) ve (β_n) dizileri sonsuz küçülen diziler olsun. Buna göre

i. $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ ise (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (β_n) dizisinden *daha hızlıdır* denir.

ii. $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$ ise (β_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (α_n) dizisinden *daha hızlıdır* denir.

iii. $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$ ise (α_n) ve (β_n) dizilerinin sıfıra yaklaşma *hızı aynıdır* denir.

iv. $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = c$ ise c ye *asimptotik değer*, (β_n) dizisine de (α_n) dizisinin *asimptotik hızı* denir. Yani (α_n)'nin sıfıra yaklaşım hızı (β_n)'nin sıfıra yaklaşım hızıyla belirlenir. Çünkü c, n'ye bağlı olmayan bir sabittir. Operatörlerde

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|L_n(f;x) - f(x)\right|}{\beta_n} = A(n,x)$ ise $A(n,x)$ fonksiyonu asimptotik değer, (β_n) dizisi de $\left|L_n(f;x) - f(x)\right|$'in asimptotik hızıdır.

3. SZASZ-CHARLIER OPERATÖRLERİNİN GAMA TİPİ GENELLEŞMESİ

Bu bölümde Szasz-Charlier operatörlerinin Gama tipi genelleştirilmesini tanımlayarak bazı yaklaşım özelliklerini inceleyip tanımladığımız operatörün merkezi momentlerini hesaplayacağız. Ayrıca süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı incelenecektir.

3.1. Operatörün Oluşturulması ve Yaklaşım Özellikleri

Szasz-Charlier operatörlerinin Gama tipi genelleştirilmesi a>1 için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S_n^{**}(f;x,a) = e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!} \frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \int_0^{\infty} e^{-\alpha_n t} t^{\lambda+k} f(t)\,dt \tag{3.1.1}$$

(α_n) ve (β_n) sınırsız ve pozitif artan dizilerde, $(\alpha_n) \geq 1$ $(\beta_n) \geq 1$ şeklinde tanımlanır ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} = 0 \ , \ \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 + O\left(\frac{1}{\alpha_n}\right).$$

$\dfrac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha_n t} t^{\lambda+k} f(t)\,dt = f\left(\frac{k}{n}\right)$ ve $\beta_n = n$ alınırsa Szasz-Charlier operatörü elde edilir.

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz-Charlier operatörünün yaklaşım özellikleri ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 3.1.1 $n \in IN$ olmak üzere $\forall x \in [0,\infty)$ ve için

$$A_n(1;x) = 1$$

$$A_n(\mathrm{t};x) = x + \frac{1}{n}$$

$$A_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x}{n}\left(3 + \frac{1}{a-1}\right) + \frac{2}{n^2}$$

$$A_n\left(t^3;x\right)=x^3+\frac{x^2}{n}\left(6+\frac{3}{a-1}\right)+\frac{2x}{n^2}\left(\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{3}{a-1}+5\right)+\frac{5}{n^3}$$

$$A_n\left(t^4;x\right)=x^4+\frac{x^3}{n}\left(10+\frac{6}{a-1}\right)+\frac{x^2}{n^2}\left(31+\frac{30}{a-1}+\frac{11}{(a-1)^2}\right)$$
$$+\frac{x}{n^3}\left(67+\frac{31}{a-1}+\frac{20}{(a-1)^2}+\frac{6}{(a-1)^3}\right)+\frac{15}{n^4}$$

eşitlikleri sağlanır(Kajla, 2015).

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleştirilmesinin yaklaşım özellikleri ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 3.1.2 $n\in IN$ olmak üzere $\forall x\in[0,\infty)$ ve için

$$S_n^{**}(1;x)=1$$

$$S_n^{**}(t;x)=\frac{\beta_n}{\alpha_n}x+\frac{\lambda+2}{\alpha_n}$$

$$S_n^{**}\left(t;^2x\right)=\frac{\beta_n^{\;2}}{\alpha_n^{\;2}}x^2+\frac{\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\;2}}x+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)}{\alpha_n^{\;2}}$$

$$S_n^{**}\left(t^3;x\right)=\frac{\beta_n^{\;3}}{\alpha_n^{\;3}}x^3+\frac{\beta_n^{\;2}\left((3\lambda+6)+\left(6+\frac{3}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\;3}}x^2$$
$$+\frac{\beta_n\left(\left(3\lambda^2+12\lambda+11\right)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)(3\lambda+6)+\left(\frac{2}{(a-1)^2}+\frac{6}{a-1}+10\right)\right)}{\alpha_n^{\;3}}x$$
$$+\frac{(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+3\lambda^2+12\lambda+11+5}{\alpha_n^{\;3}}$$

$$S_n^{**}\left(t^4;x\right)=\frac{\beta_n^{\;4}}{\alpha_n^{\;4}}x^4+\frac{\beta_n^{\;3}\left((4\lambda+10)+\left(10+\frac{6}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\;4}}x^3$$
$$+\frac{\beta_n^{\;2}\left(\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)+(4\lambda+10)\left(6+\frac{3}{a-1}\right)+\left(31+\frac{30}{a-1}+\frac{11}{(a-1)^2}\right)\right)}{\alpha_n^{\;4}}x^2$$

$$+\frac{\beta_n\left(\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n{}^4}x$$

$$+\frac{\beta_n\left((8\lambda+20)\left(\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{3}{a-1}+5\right)+\left(\frac{6}{(a-1)^3}+\frac{20}{(a-1)^2}+\frac{31}{a-1}+67\right)\right)}{\alpha_n{}^4}x$$

$$+\frac{(\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+20\lambda+50+15}{\alpha_n{}^4}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: Yardımcı Teorem 3.1.1 ve $S_n^{**}(\mathrm{f};x)$ tanımından;

i)

$$\begin{aligned}S_n^{**}(1;x)&=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n{}^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt\\&=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}e\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)\beta_n x}1\\&=1\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}S_n^{**}(t;x)&=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n{}^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}t\,dt\\&=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\left(\frac{\lambda+k+1}{\alpha_n}\right)\\&=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\left(\frac{\lambda+1}{\alpha_n}\right)\\&\quad+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\left(\frac{k}{\alpha_n}\right)\\&=\frac{\beta_n}{\alpha_n}x+\frac{\lambda+2}{\alpha_n}\end{aligned}$$

iii)

$$S_n^{**}(t^2;x)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n{}^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}t^2dt$$

$$=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\left(\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+k(2\lambda+3)+k^2}{\alpha_n^{\ 2}}\right)$$

$$=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\left(\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)}{\alpha_n^{\ 2}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k\left(\frac{2\lambda+3}{\alpha_n^{\ 2}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k^2\left(\frac{1}{\alpha_n^{\ 2}}\right)$$

$$=\frac{\beta_n^{\ 2}}{\alpha_n^{\ 2}}x^2+\frac{\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\ 2}}x+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)}{\alpha_n^{\ 2}}$$

iv)

$$S_n^{**}\left(t^3;x\right)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\ \lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}t^3dt$$

$$=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\left(\frac{(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+k\left(3\lambda^2+12\lambda+11\right)+k^2(3\lambda+6)+k^3}{\alpha_n^{\ 3}}\right)$$

$$=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\left(\frac{(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)}{\alpha_n^{\ 3}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k\left(\frac{3\lambda^2+12\lambda+11}{\alpha_n^{\ 3}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k^2\left(\frac{3\lambda+6}{\alpha_n^{\ 3}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k^3\left(\frac{1}{\alpha_n^{\ 3}}\right)$$

$$=\frac{\beta_n^{\ 3}}{\alpha_n^{\ 3}}x^3+\frac{\beta_n^{\ 2}\left((3\lambda+6)+\left(6+\frac{3}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\ 3}}x^2$$

$$+\frac{\beta_n\left(\left(3\lambda^2+12\lambda+11\right)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)(3\lambda+6)+\left(\frac{2}{(a-1)^2}+\frac{6}{a-1}+10\right)\right)}{\alpha_n^{\ 3}}x$$

$$+\frac{(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+3\lambda^2+12\lambda+11+5}{\alpha_n^{\ 3}}$$

v)

$$S_n^{**}\left(t^4;x\right)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\ \lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}t^4dt$$

$$=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}$$

$$\left(\frac{(\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+k\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)}{\alpha_n^{\ 4}}\right.$$

$$\left.+\frac{k^2\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)+k^3(4\lambda+10)+k^4}{\alpha_n^{\ 4}}\right)$$

$$=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\left(\frac{(\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)}{\alpha_n^{\ 4}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k\left(\frac{4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50}{\alpha_n^{\ 4}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k^2\left(\frac{6\lambda^2+30\lambda+35}{\alpha_n^{\ 4}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k^2\left(\frac{6\lambda^2+30\lambda+35}{\alpha_n^{\ 4}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k^3\left(\frac{4\lambda+10}{\alpha_n^{\ 4}}\right)$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}k^4\left(\frac{1}{\alpha_n^{\ 4}}\right)$$

$$=\frac{\beta_n^{\ 4}}{\alpha_n^{\ 4}}x^4+\frac{\beta_n^{\ 3}\left((4\lambda+10)+\left(10+\frac{6}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\ 4}}x^3$$

$$+\frac{\beta_n^{\ 2}\left(\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)+(4\lambda+10)\left(6+\frac{3}{a-1}\right)+\left(31+\frac{30}{a-1}+\frac{11}{(a-1)^2}\right)\right)}{\alpha_n^{\ 4}}x^2$$

$$+\frac{\beta_n\left(\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n{}^4}x$$

$$+\frac{\beta_n\left((8\lambda+20)\left(\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{3}{a-1}+5\right)+\left(\frac{6}{(a-1)^3}+\frac{20}{(a-1)^2}+\frac{31}{a-1}+67\right)\right)}{\alpha_n{}^4}x$$

$$+\frac{(\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+20\lambda+50+15}{\alpha_n{}^4}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgilidir.

Teorem 3.1.1 $E=\left\{f: x\in[0,\infty), \frac{f(x)}{x^2+1} \text{ yakınsaktır, x} \to\infty\right\}$, $f\in C[0,\infty)\cap E$ ve $A\in IR^+$ olmak üzere (3.1.1) ile verilen $S_n^{**}(f;x)$ operatörü f fonksiyonuna $[0,A]$ aralığında düzgün yakınsar.

İspat: Korovkin teoremi (Altomare ve Campiti 1994) gereğince $i=0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{**}(t^i;x)-x^i\right\|_{C[0,A]}=0$$

olduğu gösterilmelidir.

i) $i=0$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|S_n^{**}(1;x)-1\right|=0$$

olduğu açıktır.

ii) $i=1$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|S_n^{**}(\mathrm{t};x)-x\right| &= \lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|\frac{\beta_n}{\alpha_n}x+\frac{\lambda+2}{\alpha_n}-x\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|\frac{\beta_n-\alpha_n}{\alpha_n}x+\frac{\lambda+2}{\alpha_n}\right| \\ &\le \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x}{\alpha_n} \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $i=2$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|S_n^{**}\left(t^2;x\right)-x^2\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|\frac{\beta_n^{\,2}}{\alpha_n^{\,2}}x^2+\frac{\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\dfrac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\,2}}x+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}}-x^2\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left|\frac{1}{\alpha_n^{\,2}}\left\{\beta_n^{\,2}x^2+\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)\beta_n x+(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)\right\}-x^2\right|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n^{\,2}}\left\{\max_{0\le x\le A}\left(\left|\beta_n^{\,2}-\alpha_n^{\,2}\right|x^2+\left|(2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right|\beta_n x+\left|(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)\right|\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n^{\,2}}\left\{\max_{0\le x\le A}\left(\left(\beta_n^{\,2}-\alpha_n^{\,2}\right)x^2+\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)\beta_n x+(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)\right)\right\}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n^{\,2}}\left\{\left(\beta_n^{\,2}-\alpha_n^{\,2}\right)A^2+\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)\beta_n A+(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)\right\}$$

$$=0$$

elde edilir. Böylece Korovkin teoreminden (Altomare ve Campiti 1994) $[0,A]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|S_n^{**}(f;x)-f\right\|_{C[0,A]}=0$ sağlanır ki böylece $S_n^{**}(f;x)$ operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu gösterilir.

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin Tanım 1.1.8 ile verilen merkezi momentleri ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 3.1.3 (3.1.1) ile verilen $S_n^{**}(f;\mathrm{x})$ operatörlerinin Tanım 2.1.8 ile verilen merkezi momentlerinin bazılarının eşitleri;

$$S_n^{**}\left((t-x)^0;x\right)=1$$

$$S_n^{**}\left((t-x)^1;x\right)=x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)+\frac{\lambda+2}{\alpha_n}$$

$$S_n^{**}\left((t-x)^2;x\right)=x^2\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)^2+x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n{}^2}\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)-\frac{2\lambda+4}{\alpha_n}\right)$$
$$+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+2\lambda+3}{\alpha_n{}^2}$$

$$S_n^{**}\left((t-x)^4;x\right)=x^4\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)^4$$
$$+x^3\left(\frac{\beta_n{}^3}{\alpha_n{}^4}\left((4\lambda+10)+\left(10+\frac{6}{a-1}\right)\right)-\frac{\beta_n{}^2}{\alpha_n{}^3}\left((12\lambda+24)+24+\frac{12}{a-1}\right)\right)$$
$$+x^3\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n{}^2}\left((12\lambda+18)+18+\frac{6}{a-1}\right)-\frac{4\lambda+8}{\alpha_n}\right)$$
$$+x^2\left(\frac{\beta_n{}^2}{\alpha_n{}^4}\left(\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)+(4\lambda+10)\left(6+\frac{3}{a-1}+31+\frac{30}{a-1}+\frac{11}{(a-1)^2}\right)\right)\right)$$
$$+x^2\left(-\frac{\beta_n}{\alpha_n{}^3}\left(\left(12\lambda^2+48\lambda+44\right)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)(12\lambda+24)+\frac{8}{(a-1)^2}+\frac{24}{a-1}+40\right)\right)$$
$$+x^2\left(\frac{6(\lambda+2)(\lambda+1)+12\lambda+18}{\alpha_n{}^2}\right)$$
$$+x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n{}^4}\left(\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+(8\lambda+20)\left(\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{3}{a-1}+5\right)\right)\right)$$
$$+x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n{}^4}\left(\frac{6}{(a-1)^3}+\frac{20}{(a-1)^2}+\frac{31}{a-1}+67\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\alpha_n{}^3}\left(4(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+12\lambda^2+48\lambda+44+20\right)\right)$$
$$+\frac{1}{\alpha_n{}^4}\left((\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+20\lambda+50+15\right)$$

şeklindedir.

İspat:

i)

$S_n^{**}\left((t-x)^0;x\right)=S_n^{**}(1;x)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$S_n^{**}\left((t-x)^0;x\right)=1$ dir.

ii)

Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve lineerlikten

$$S_n^{**}\left((t-x)^1;x\right)=S_n^{**}(t;x)-xS_n^{**}(1;x)$$
$$=\frac{\beta_n}{\alpha_n}x+\frac{\lambda+2}{\alpha_n}-x$$
$$=x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)+\frac{\lambda+2}{\alpha_n}$$

dir.

iii)

Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve lineerlikten

$$S_n^{**}\left((t-x)^2;x\right)=S_n^{**}\left(t^2;x\right)-2xS_n^{**}(t;x)+x^2S_n^{**}(1;x)$$

$$=\frac{\beta_n^{\,2}}{\alpha_n^{\,2}}x^2+\frac{\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\,2}}x+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}}$$
$$-2x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}x+\frac{\lambda+2}{\alpha_n}\right)+x^2$$
$$=x^2\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)^2+x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n^{\,2}}\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)-\frac{2\lambda+4}{\alpha_n}\right)+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+2\lambda+3}{\alpha_n^{\,2}}$$

dir.

iv)

Yardımcı Teorem 3.1.2 den ve lineerlikten

$$S_n^{**}\left((t-x)^4;x\right)=S_n^{**}\left(t^4;x\right)-4xS_n^{**}\left(t^3;x\right)+6x^2S_n^{**}\left(t^2;x\right)-4x^3S_n^{**}(t;x)$$
$$+x^4S_n^{**}(1;x)$$
$$=\frac{\beta_n^{\,4}}{\alpha_n^{\,4}}x^4+\frac{\beta_n^{\,3}\left((4\lambda+10)+\left(10+\frac{6}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\,4}}x^3$$

$$+\frac{\beta_n^{\ 2}\left(\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)+\left(4\lambda+10\right)\left(6+\frac{3}{a-1}\right)+\left(31+\frac{30}{a-1}+\frac{11}{\left(a-1\right)^2}\right)\right)}{\alpha_n^{\ 4}}x^2$$

$$+\frac{\beta_n\left(\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\ 4}}x$$

$$+\frac{\beta_n\left(\left(8\lambda+20\right)\left(\frac{1}{\left(a-1\right)^2}+\frac{3}{a-1}+5\right)+\left(\frac{6}{\left(a-1\right)^3}+\frac{20}{\left(a-1\right)^2}+\frac{31}{a-1}+67\right)\right)}{\alpha_n^{\ 4}}x$$

$$+\frac{\left(\lambda+4\right)\left(\lambda+3\right)\left(\lambda+2\right)\left(\lambda+1\right)+\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+20\lambda+50+15}{\alpha_n^{\ 4}}$$

$$-4x\left(\frac{\beta_n^{\ 3}}{\alpha_n^{\ 3}}x^3+\frac{\beta_n^{\ 2}\left(\left(3\lambda+6\right)+\left(6+\frac{3}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\ 3}}x^2\right)$$

$$-4x\left(\frac{\beta_n\left(\left(3\lambda^2+12\lambda+11\right)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\left(3\lambda+6\right)+\left(\frac{2}{\left(a-1\right)^2}+\frac{6}{a-1}+10\right)\right)}{\alpha_n^{\ 3}}x\right)$$

$$-4x\left(\frac{\left(\lambda+3\right)\left(\lambda+2\right)\left(\lambda+1\right)+3\lambda^2+12\lambda+11+5}{\alpha_n^{\ 3}}\right)$$

$$+6x^2\left(\frac{\beta_n^{\ 2}}{\alpha_n^{\ 2}}x^2+\frac{\beta_n\left(\left(2\lambda+3\right)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\ 2}}x+\frac{\left(\lambda+2\right)\left(\lambda+1\right)+\left(2\lambda+3\right)}{\alpha_n^{\ 2}}\right)$$

$$-4x^3\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}x+\frac{\lambda+2}{\alpha_n}\right)$$

$$+x^4$$

$$=x^4\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)^4$$

$$+x^3\left(\frac{\beta_n^{\ 3}}{\alpha_n^{\ 4}}\left(\left(4\lambda+10\right)+\left(10+\frac{6}{a-1}\right)\right)-\frac{\beta_n^{\ 2}}{\alpha_n^{\ 3}}\left(\left(12\lambda+24\right)+24+\frac{12}{a-1}\right)\right)$$

$$+x^3\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n^{\ 2}}\left((12\lambda+18)+18+\frac{6}{a-1}\right)-\frac{4\lambda+8}{\alpha_n}\right)$$

$$+x^2\left(\frac{\beta_n^{\ 2}}{\alpha_n^{\ 4}}\left(\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)+\left(4\lambda+10\right)\left(6+\frac{3}{a-1}+31+\frac{30}{a-1}+\frac{11}{(a-1)^2}\right)\right)\right)$$

$$+x^2\left(-\frac{\beta_n}{\alpha_n^{\ 3}}\left(\left(12\lambda^2+48\lambda+44\right)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)(12\lambda+24)+\frac{8}{(a-1)^2}+\frac{24}{a-1}+40\right)\right)$$

$$+x^2\left(\frac{6(\lambda+2)(\lambda+1)+12\lambda+18}{\alpha_n^{\ 2}}\right)$$

$$+x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n^{\ 4}}\left(\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+\left(6\lambda^2+30\lambda+35\right)\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+(8\lambda+20)\left(\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{3}{a-1}+5\right)\right)\right)$$

$$+x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n^{\ 4}}\left(\frac{6}{(a-1)^3}+\frac{20}{(a-1)^2}+\frac{31}{a-1}+67\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha_n^{\ 3}}\left(4(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+12\lambda^2+48\lambda+44+20\right)\right)$$

$$+\frac{1}{\alpha_n^{\ 4}}\left((\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)+\left(4\lambda^3+30\lambda^2+70\lambda+50\right)+20\lambda+50+15\right)$$

dir.

3.2. Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin Yaklaşım Hızı

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen $S_n^{**}(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızını daha önce tanımlarını ve özelliklerini verdiğimiz süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yapacağız.

Aşağıdaki teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin süreklilik modülü yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Teorem 3.2.1 $f\in C[0,\infty)\cap E$ olmak üzere (4.1.1.1) ile verilen $S_n^{**}(f;x)$ operatörünün süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|\le 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right),$$

şeklindedir ve ayrıca

$$\delta_{n,x}=\left(x^2\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)^2+x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n^{\,2}}\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)-\frac{2\lambda+4}{\alpha_n}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+2\lambda+3}{\alpha_n^{\,2}}\right)^{1/2}$$

dır.

İspat:

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|$$
$$=\left|e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}f(t)\,dt\right.$$
$$\left.-f(x)e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt\right|$$
$$=\left|\int_0^{\infty}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\left(f(t)-f(x)\right)dt\right|$$

elde edilir.

$$e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\geq 0\ ,\ \frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\geq 0\ ,\ e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\geq 0$$

olduğunu ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|$$
$$\leq\int_0^{\infty}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\left|f(t)-f(x)\right|dt$$

elde edilir. Süreklilik modülünün $(vii.)$ özelliğinden

$$\int_0^{\infty}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\left|f(t)-f(x)\right|dt$$
$$\leq\int_0^{\infty}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)dt\,\omega(f;\delta)$$

$$=\left(\int_0^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\,\frac{|t-x|}{\delta}dt\right)\omega(f;\delta)$$

Yardımcı Teorem 3.1.1 den

$$=\omega(f;\delta)\left\{1+\int_0^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\,\frac{|t-x|}{\delta}dt\right\}$$

$$=\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\int_0^\infty\sum_{k=0}^{\infty}|t-x|\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt\right\}$$

(3.2.1)

Bu ifadede

$$M=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{\infty}|t-x|\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt$$

$$=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{\infty}\left(|t-x|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt$$

olarak düşünülürse

$$M=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{\infty}\left(|t-x|^2\,\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\cdot e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt$$

elde edilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$M \le \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!} \cdot e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!} \cdot e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} e^{-\alpha_n t} t^{\lambda+k} dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!} \cdot e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(S_n(1;x)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} e^{-\alpha_n t} t^{\lambda+k} dt$$

elde edilir ve Yardımcı Teorem 3.1.1 den

$$M \le \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!} \cdot e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} e^{-\alpha_n t} t^{\lambda+k} dt$$

elde edilir. Bunun yerine yazılmasıyla

$$\left|S_n^{**}(f;\mathrm{x}) - f(x)\right|$$

$$\le \omega(f;\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}\int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty |t-x|^2 \frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!} \cdot e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} e^{-\alpha_n t} t^{\lambda+k} dt\right\}$$

$$= \omega(f;\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}\left[e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x} \sum_{k=0}^\infty \frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!} \right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \int_0^\infty e^{-\alpha_n t} t^{\lambda+k} \left(|t-x|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt\right\}$$

$$= \omega(f;\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}\left(S_n^{*}\left((t-x)^2\right);x\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

elde edilir. Burada $\delta = \delta_{n,x}$ olarak seçilirse ve Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|\leq 2\omega\left(f,\delta_{n,x}\right)$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Teorem 3.2.2 $f\in Lip_M(\alpha),\ 0<\alpha\leq 1$ olmak üzere (3.1.1) ile verilen $S_n^{**}(f;x)$ operatörünün Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile yaklaşım hızı; $M\in IR^+$ olmak üzere

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|\leq M\left(\delta_{n,x}\right)^{\alpha},$$

şeklindedir.

İspat:

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|=\left|e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}f(t)dt\right.$$

$$\left.-f(x)e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}f(t)dt\right|$$

$$=\left|e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\left(f(t)-f(x)\right)dt\right|$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|$$

$$\leq e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\left|f(t)-f(x)\right|dt$$

(3.2.2)

olur. Diğer taraftan

$$f\in Lipm(\alpha)\Rightarrow\left|f(t)-f(x)\right|\leq M\left|t-x\right|^{\alpha}$$

dır. Bu eşitliğin (3.2.2)'de kullanılmasıyla

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|$$

$$\leq e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}M\left|t-x\right|^{\alpha}dt$$

$$=M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}M\left|t-x\right|^{\alpha}dt\left(e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right)$$

(3.2.3)

elde edilir. $p=\frac{2}{\alpha}$ ve $q=\frac{2}{2-\alpha}$ seçersek $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olur ve (3.2.3)'ten

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|$$

$$\leq\int_0^{\infty}M\sum_{k=0}^{\infty}\left|t-x\right|^{\alpha}\left[\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left[\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right]^{\frac{2-\alpha}{2}}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt$$

$$=M\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left|t-x\right|^{2}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left[\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right]^{\frac{2-\alpha}{2}}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt$$

$$=M\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left|t-x\right|^{2}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\right]^{\frac{\alpha}{2}}\left[S_n(1;x)\right]^{\frac{2-\alpha}{2}}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.1 den

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|$$

$$\leq M\left(e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}M\left(\left|t-x\right|^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}dt$$

olur ve buradan

$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|\leq M\left(S_n^{**}(t-x)^2;x\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.3'ten

$\delta_{n,x} =$

$$\left(x^2\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)^2 + x\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n{}^2}\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)-\frac{2\lambda+4}{\alpha_n}\right)+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+2\lambda+3}{\alpha_n{}^2}\right)^{1/2}$$

seçimiyle

$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|\leq M\left(\delta_{n,x}\right)^{\alpha}$ elde edilir böylece ispat tamamlanır.

4. OPERATÖRÜN AĞIRLIKLI UZAYLARDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen $S_n^{**}(f;x)$ operatörünün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenecektir. Daha sonra $S_n^{**}(f;x)$ operatörünün ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızı ağırlıklı süreklilik modülü ve Peetre-*K* fonksiyoneli yardımıyla tahmin edilecektir. Son olarak $S_n^{**}(f;x)$ operatörü için Voronovskaja tipi teorem verilecektir.

4.1. Operatörün Ağırlıklı Uzaylarda Düzgün Yakınsaklığı

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen $S_n^{**}(f;x)$ operatörünün ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 4.1.1 $\rho(x)=1+x^2$ ağırlıklı fonksiyon olsun. Eğer $f\in C_{x^2}[0,\infty)$ ise M pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$\left\|S_n^{**}(\rho,x)\right\|_{x^2}\leq 1+M$$

dir.

İspat: Yardımcı Teorem 3.1.2'den ve lineerlikten

$$S_n^{**}(p,x)=S_n^{**}\left(1+x^2,x\right)=S_n^{**}(1,x)+S_n^{**}\left(\mathrm{t}^2,x\right)$$

$$S_n^{**}(p,x)=1+\frac{\beta_n^{\,2}}{\alpha_n^{\,2}}x^2+\frac{\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\dfrac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\,2}}x+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}}$$

yazabiliriz. $C_{x^2}[0,\infty)$ uzayındaki norma göre

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left\{ \frac{1+\dfrac{\beta_n^{\,2}}{\alpha_n^{\,2}}x^2 + \dfrac{\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\dfrac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\,2}}x + \dfrac{(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}}}{1+x^2} \right\}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left\{ \frac{1}{1+x^2} + \frac{\beta_n^{\,2}}{\alpha_n^{\,2}\left(1+x^2\right)}x^2 + \frac{\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\dfrac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\,2}\left(1+x^2\right)}x \right.$$

$$\left. + \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}\left(1+x^2\right)} \right\}$$

$$\left\|S_n^{**}(p,x)\right\|_{x^2} \le 1+\frac{\beta_n^{\,2}}{\alpha_n^{\,2}} + \frac{\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\dfrac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\,2}} + \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n^{\,2}}{\alpha_n^{\,2}}=1 \ , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\dfrac{1}{a-1}\right)\right)}{\alpha_n^{\,2}}=0 \ , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+(2\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}}=0$$

olduğundan buradan pozitif bir M reel sayısı elde edilir. Dolayısıyla

$$\left\|S_n^{**}(p,x)\right\|_{x^2} \le 1+M$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin ağırlıklı uzaylarda sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgilidir.

Teorem 4.1.1 Her $f \in C_{x^2}^{*}\left[0,\infty\right)$ için (3.1.1) ile verilen $S_n^{**}\left(f;x\right)$ operatörü

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{**}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{x^2}=0$$

eşitliğini sağlar.

İspat: Gadzhiev tarafından verilen ağırlıklı Korovkin teoremi gereğince (Gadzhiev 1974) $\upsilon = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{**}(e_\upsilon;x)-e_\upsilon\left(x\right)\right\|_{x^2}=0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

i) $\upsilon = 0$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\left\| S_n^{**}(1;x) - 1 \right\|_{x^2} = 0$$

yazabiliriz.

ii) $\upsilon = 1$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\left\| S_n^{**}(\mathrm{e}_1;x) - e_1(x) \right\|_{x^2} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left| \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} x + \dfrac{\lambda+2}{\alpha_n} - x \right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left| \frac{(\beta_n - \alpha_n)x + \lambda + 2}{\alpha_n (1+x^2)} \right| \le \frac{\beta_n - \alpha_n + \lambda + 2}{\alpha_n}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S_n^{**}(e_1;x) - e_1(x) \right\|_{x^2} = 0$$

elde edilir.

iii) $\upsilon = 2$ için Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$\left\| S_n^{**}(\mathrm{e}_2;x) - e_2(x) \right\|_{x^2}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left| \dfrac{\beta_n^{\,2}}{\alpha_n^{\,2}} x^2 + \dfrac{\beta_n \left((2\lambda+3) + \left(3 + \dfrac{1}{a-1} \right) \right)}{\alpha_n^{\,2}} x + \dfrac{(\lambda+2)(\lambda+1) + (12\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}} - x^2 \right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left| \frac{(\beta_n^{\,2} - \alpha_n^{\,2})x^2}{\alpha_n^{\,2}(1+x^2)} + \frac{\beta_n \left((2\lambda+3) + \left(3 + \dfrac{1}{a-1} \right) \right)}{\alpha_n^{\,2}(1+x^2)} x + \frac{(\lambda+2)(\lambda+1) + (12\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}(1+x^2)} \right|$$

$$\le \frac{\beta_n^{\,2} - \alpha_n^{\,2}}{\alpha_n^{\,2}} + \frac{\beta_n \left((2\lambda+3) + \left(3 + \dfrac{1}{a-1} \right) \right)}{\alpha_n^{\,2}} + \frac{(\lambda+2)(\lambda+1) + (12\lambda+3)}{\alpha_n^{\,2}}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{**}\left(e_2;x\right)-e_2\left(x\right)\right\|_{x^2}=0$$

elde edilir.

Elde ettiğimiz bu bağıntılardan $\nu=0,1,2$ için $\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{**}\left(e_\nu;x\right)-e_\nu\left(x\right)\right\|_{x^2}=0$ şartları sağlanır böylece ispat tamamlanır.

4.2. Operatörün Ağırlıklı Süreklilik Modülüyle Yaklaşım Hızı

Bu bölümde $S_n^{**}\left(f;x\right)$ operatörünün ağırlıklı uzaylarda yaklaşım hızı Tanım 2.1.13 ile verilen ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla tahmin edilecektir.

Aşağıdaki teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Teorem 4.2.1 $f\in C_{x^2}^{*}\left[0,\infty\right)$ ve C_1 n'den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\sup_{x\ge 0}\frac{\left|S_n^{**}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|}{\left(1+x^2\right)^3}\le C_1\Omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{\alpha_n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Tanım 2.1.13 ile verilen ağırlıklı süreklilik modülünün vii. özelliğinde

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\le 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\left(1+\frac{\left|t-x\right|}{\delta}\right)\left(1+\left(t-x\right)^2\right)\Omega\left(f;\lambda\delta\right)$$

idi. Böylece

$$\begin{aligned}\left|S_n^{**}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &\le e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\left(-\left(a-1\right)\beta_n x\right)}{k!}\\ &\quad\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma\left(\lambda+k+1\right)}\int_0^{\infty}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|dt\\ &\le 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\Omega\left(f;\delta\right)\\ &\quad\left\{\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-\left(a-1\right)\beta_n x\right)}{k!}\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma\left(\lambda+k+1\right)}\right.\end{aligned}$$

$$e^{-\alpha_n t} t^{\lambda+k}\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+(t-x)^2\right)dt\Bigg\}$$

$$\Bigg\{\int_0^\infty\left(\sum_{k=0}^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right.$$

$$+\sum_{k=0}^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}(t-x)^2$$

$$+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}|t-x|$$

$$\left.+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}|t-x|(t-x)^2\right)\frac{\alpha_n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}e^{-\alpha_n t}t^{\lambda+k}dt\Bigg\}$$

Burada

$$A=\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}|t-x| \text{ ve}$$

$$B=\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}|t-x|(t-x)^2 \text{ olsun.}$$

$$A=\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^\infty |t-x|\left(e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde yazılabilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$A\le\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^\infty (t-x)^2 e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sum_{k=0}^\infty e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^\infty (t-x)^2 e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(S_n^*(1;x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

olup Yardımcı Teorem 3.1.2 den

$$A \le \frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(t-x)^2 e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$B = \frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}|t-x|\left(e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}(t-x)^2$$
$$\left(e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

yazılabilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$B \le \frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(t-x)^2 e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(t-x)^4 e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)\beta_n x}\frac{C_k^{(a)}\left(-(a-1)\beta_n x\right)}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilen bu A ve B eşitsizliklerinin yerine yazılmasıyla

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right| \le 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta)$$
$$\left(1+S_n^{**}\left((t-x)^2;x\right)+\frac{1}{\delta}\sqrt{S_n^{**}\left((t-x)^2;x\right)}+\frac{1}{\delta}\sqrt{S_n^{**}\left((t-x)^2;x\right)S_n^{**}\left((t-x)^4;x\right)}\right)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$S_n^{**}\left((t-x)^2;x\right) = O\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(x^2+x+1\right)$$
$$S_n^{**}\left((t-x)^4;x\right) = O\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)$$

eşitsizliklerini elde edip bunların yerine yazılmasıyla

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right| \le 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta)$$
$$\left\{1+O\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\delta}\sqrt{O\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(x^2+x+1\right)}\right.$$

$$+\frac{1}{\delta}\sqrt{\left(O\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(x^2+x+1\right)\right)\left(O\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\right)}\Bigg\}$$

eşitsizliğinde $\delta=\sqrt{O\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)}$ seçilip her iki taraf $\left(1+x^2\right)^3$ e bölünüp her iki tarafın $x\geq 0$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\left|S_n^{**}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|}{\left(1+x^2\right)^3}\leq C_1\Omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{\alpha_n}}\right)$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

4.3. Operatörün Voronovskaja Asimptotik Yaklaşımı

Bu bölümde (3.1.1) ile verilen $S_n^{**}\left(f;x\right)$ operatörü için Voronovskaja tipi teoremi verilecektir.

Aşağıdaki teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin Voronovskaja tipi teoremi ile ilgilidir.

Teorem 4.3.1 f fonksiyonu $\left[0,\infty\right)$ aralığında sınırlı ve $x\in\left[0,\infty\right)$ noktasında ikinci mertebeden türeve sahipse

$$\lim_{\alpha_n\to\infty}\alpha_n\left(S_n^{**}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right)$$

$$=\left(\lambda+2+\left(\beta_n-\alpha_n\right)x\right)f'\left(x\right)+\frac{\left[\left(2\lambda+3\right)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right]x}{2}f''\left(x\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonunun sabit bir x noktası için Taylor formülü

$$f\left(t\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)\left(t-x\right)+\frac{1}{2}\left[f''\left(x\right)\left(t-x\right)^2+g\left(t,x\right)\left(t-x\right)^2\right]$$

şeklindedir. Burada $g\left(\cdot,x\right)$ x noktasında sürekli ve $\lim_{t\to x}g\left(t,x\right)=0$ dır.

Taylor formülünün her iki tarafına $S_n^{**}\left(f;x\right)$ operatörü uygulanırsa

$$S_n^{**}(f;x) = f(x) + f'(x)S_n^{**}((t-x);x) + \frac{1}{2}f''(x)S_n^{**}\left((t-x)^2;x\right)$$
$$+S_n^{**}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)$$

elde edilir ve buradan da Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$S_n^{**}(f;x) - f(x) = f'(x)\frac{\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x}{\alpha_n}$$
$$+\frac{1}{2}f''(x)\left(\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)^2 x^2 + \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n^2}\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)\right)x + \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+2\lambda+3}{\alpha_n^2}\right)$$
$$+S_n^{**}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)$$

bulunur. Bu son ifade düzenlenirse

$$\alpha_n\left[S_n^{**}(f;x) - f(x)\right] = f'(x)\frac{\alpha_n\left(\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x\right)}{\alpha_n}$$
$$+\alpha_n\left[\frac{1}{2}f''(x)\left[\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}-1\right)^2 x^2 + \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n^2}\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)\right)x + \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+2\lambda+3}{\alpha_n^2}\right]\right]$$
$$+\alpha_n S_n^{**}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)$$

elde edilir. Buradan da

$$\lim_{\alpha_n\to\infty}\alpha_n\left(S_n^{**}(f;x) - f(x)\right) = \left(\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x\right)f'(x)$$
$$+\frac{\left[(2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right]x}{2}f''(x) + \lim_{\alpha_n\to\infty}\alpha_n S_n^{**}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{\alpha_n\to\infty}\alpha_n S_n^{**}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right) = 0$$

olduğu gösterilirse istenilen elde edilir. Cauchy Schwarz eşitsizliğinden

$$S_n^{**}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right) \le \left(S_n^{**}\left((t-x)^4;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(S_n^{**}\left(\varepsilon^2(t,x);x\right)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.3.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\varepsilon^2(x,x) = 0$ ve $\varepsilon(\cdot,x) \in C_2^{\phi}[0,\infty)$ olduğundan 3.1.1 gereğince

$$\lim_{\alpha_n\to\infty} S_n^{**}\left(\varepsilon^2(t,x);x\right)=\varepsilon^2(x,x)=0 \tag{4.3.2}$$

$[0,A]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla (4.3.1), (4.3.2) ve Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\lim_{\alpha_n\to\infty} \alpha_n S_n^{**}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x\right)=0$$

elde edilir ki buradan istenilen sonuca ulaşılır. Böylece

$$\lim_{\alpha_n\to\infty} \alpha_n\left(S_n^{**}(f;x)-f(x)\right)=\left(\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x\right)f'(x)+\frac{\left[(2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right]x}{2}f''(x)$$

elde edilir.

Burada $\left(\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x\right)f'(x)+\frac{\left[(2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right]x}{2}f''(x)$ asimptotik değer, $\frac{1}{\alpha_n}$ asimptotik hızdır.

4.4. Operatörün Peetre-*K* Fonksiyoneli Yaklaşım Hızı

Bu bölümde S_n^{**} operatörü ile ilgili Tanım 2.1.14 ile verilen Peetre-*K* fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızı tahmin edilecektir.. Bunun için önce $f\in C_B[0,\infty), x\geq 0$ olmak üzere S_n^{**} yardımcı operatörünü

$$S_n^{**}(f;x)=S_n^{**}(f;x)-f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}\right)+f(x)$$

şeklinde tanımlayıp daha sonra aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Aşağıdaki yardımcı teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 4.4.1 $h\in C_B^2[0,\infty)$ olmak üzere $\forall x\geq 0$ için

$$\left|S_n^{**}(f;x)-h(x)\right|\leq \phi_n(x)\|h''\|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\phi_n(x)=\frac{2\beta^2x^2+2\alpha^2+n(1+2\mu)x}{(n+\beta)^2}$$

şeklindedir.

İspat: Açık bir şeklide görülebilirki $S_n^{**}(e_1-x;x)=0$ dır. $h\in C_B^{\,2}[0,\infty)$ olsun. h 'nin Taylor açılımından

$$h(t)-h(x)=(t-x)h'(x)+\int_x^t(t-u)h''(u)du$$

elde edilir ki burada $t\in[0,\infty)$ dır. Yukarıdaki denklemin her iki yanına S_n^{**} operatörünü uyguladığımızda

$$\begin{aligned}S_n^{**}(f;x)-h(x)&=h'(x)S_n^{**}(\mathrm{t-x};x)+S_n^{**}\left(\int_x^t(t-u)h''(u)du;x\right)\\&=S_n^{**}\left(\int_x^t(t-u)h''(u)du;x\right)\\&=S_n^{**}\left(\int_x^t(t-u)h''(u)du;x\right)-\int_x^{\frac{\lambda+2+\beta_nx}{\alpha_n}}\left(\frac{\lambda+2+\beta_nx}{\alpha_n}-u\right)h''(u)du\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$\left|S_n^{**}(f;x)-h(x)\right|\le S_n^{**}\left(\left|\int_x^t(t-u)h''(u)du\right|;x\right)+\left|\int_x^{\frac{\lambda+2+\beta_nx}{\alpha_n}}\left(\frac{\lambda+2+\beta_nx}{\alpha_n}-u\right)h''(u)du\right|$$

(4.4.1)

yazılır. Buradan da

$$\left|\int_x^t(t-u)h''(u)du\right|\le(t-x)^2\left\|h''\right\| \qquad (4.4.2)$$

olduğundan

$$\left|\int_x^{\frac{\lambda+2+\beta_nx}{\alpha_n}}\left(\frac{\lambda+2+\beta_nx}{\alpha_n}-u\right)h''(u)du\right|\le\frac{\left(\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x\right)^2}{\alpha_n^{\,2}}\left\|h''\right\| \qquad (4.4.3)$$

yazılabilir.(4.4.2) ve (4.4.3) eşitsizliklerinin (4.4.1) de yerine yazılmasıyla

$$\left|S_n^{**}(f;x)-h(x)\right| \le \left\{S_n^{**}\left((t-x)^2;x\right)+\frac{\left(\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x\right)^2}{\alpha_n^{\,2}}\right\}\|h''\|$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.3 ten

$$\left|S_n^{**}(f;x)-h(x)\right|$$
$$\le \left\{\frac{2(\beta_n-\alpha_n)^2x^2+\left[\beta_n\left((2\lambda+3)+\left(3+\frac{1}{a-1}\right)\right)-2\alpha_n\lambda+4\alpha_n+2(\lambda+2)(\beta_n-\alpha_n)\right]x}{\alpha_n^{\,2}}\right.$$
$$\left.+\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)+2\lambda+3+(\lambda+2)^2}{\alpha_n^{\,2}}\right\}\|h''\|$$
$$=\Phi_n(x)\|h''\|$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem Szasz-Charlier Operatörünün Gama Tipi Genelleşmesinin Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı ile ilgilidir.

Teorem 4.4.1 $f\in C_B[0,\infty)$ olmak üzere $\forall x\ge 0$ için $C\in IR^+$ olmak üzere

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|\le C\omega_2\left(f,\sqrt{\Phi_n(x)}\right)+\omega\left(f;\frac{\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x}{\alpha_n}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\phi_n(x)$ Yardımcı Teorem 4.4.1'deki gibidir.

İspat: $f\in C_B[0,\infty)$, $h\in C_B^{\,2}[0,\infty)$ için S_n^{**} tanımından

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|\le\left|S_n^{**}(f-h;x)\right|+\left|(f-h)(x)\right|+\left|S_n^{**}(h;x)-h(x)\right|$$
$$+\left|f\left(\frac{\lambda+2+\beta_nx}{\alpha_n}\right)-f(x)\right|$$

ve

$$\left|S_n^{**}(f;x)\right| \le \|f\| S_n^{**}(1;x) + 2\|f\| = 3\|f\|$$

yazılabilir. Böylece

$$\left|S_n^{**}(f;x) - f(x)\right| \le 4\|f-h\| + \left|S_n^{**}(\mathrm{h};x) - h(x)\right| + \omega\left(f;\frac{\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x}{\alpha_n}\right)$$

elde edilir. Burada Yardımcı Teorem 4.4.1 kullanılarak

$$\left|S_n^{**}(f;x) - f(x)\right| \le 4\left(\|f-h\| + \Phi_n(x)\|h''\|\right) + \omega\left(f;\frac{\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x}{\alpha_n}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafında tüm $h \in C_B^{\,2}[0,\infty)$ için infumumunun alınmasıyla

$$\left|S_n^{**}(f;x) - f(x)\right| \le C\omega_2\left(f,\sqrt{\Phi_n(x)}\right) + \omega\left(f;\frac{\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x}{\alpha_n}\right)$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde Szasz-Charlier operatörlerinin Gama tipi genelleşmesini $S_n^{**}(f;x)$ şeklinde tanımlayıp bu operatörün kapalı aralıkta bazı yaklaşım özellikleri ve süreklilik modülü, Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı incelenmiştir. Bununla birlikte ağırlıklı uzaylarda yaklaşım kavramları verilip tanımladığımız operatörün ağırlıklı uzaylarda bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra ağırlıklı uzaylardaki süreklilik modülü tanımlanıp özellikleri incelenmiş, ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla tanımladığımız operatörün yaklaşım hızı elde edilmiştir. Son olarak tanımladığımız operatör için Voronovskaja teoremi tipinde bir teorem verilip ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar şunlardır.

1. $E=\left\{ f: x\in\left[0,\infty\right), \dfrac{f(x)}{x^2+1} \text{ yakınsaktır, } x\to\infty \right\}$, $f\in C\left[0,\infty\right)\cap E$ ve $A\in IR^{+}$ olmak üzere $S_n^{**}(f;x)$ operatörü f fonksiyonuna $\left[0,A\right]$ aralığında düzgün yakınsaktır.
2. $f\in C\left[0,\infty\right)\cap E$ olmak üzere $S_n^{**}\left(f;x\right)$ operatörünün süreklilik modülüyle yaklaşım hızı
$$\left|S_n^{**}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right)$$
şeklindedir.
3. $f\in Lip_M\left(\alpha\right),\ 0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $S_n^{**}\left(f;x\right)$ operatörünün Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile yaklaşım hızı;
$$\left|S_n^{**}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left(\delta_{n,x}\right)^{\alpha}$$
şeklindedir.
4. Her $f\in C_{x^2}^{*}\left[0,\infty\right)$ için $S_n^{**}\left(f;x\right)$ operatörü
$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n^{**}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{x^2}=0$$
eşitliğini sağlar.

5. $f \in C^{*}_{x^2}[0,\infty)$ olmak üzere $S_n^{**}(f;x)$ operatörünün ağırlıklı süreklilik modülüyle yaklaşım hızı $\sup\limits_{x\geq 0} \dfrac{\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|}{\left(1+x^2\right)^3} \leq C_1 \Omega\left(f;\sqrt{\dfrac{1}{\alpha_n}}\right)$ şeklindedir.

6. f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sınırlı ve $x\in[0,\infty)$ noktasında ikinci mertebeden türeve sahipse

$$\lim_{\alpha_n\to\infty} \alpha_n\left(S_n^{**}(f;x)-f(x)\right)=\left(\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x\right)f'(x)+\frac{\left[(2\lambda+3)+\left(3+\dfrac{1}{a-1}\right)\right]x}{2}f''(x)$$

eşitliği sağlanır. (Voronovskaja tipi teorem.)

7. $f\in C_B[0,\infty)$ olmak üzere $\forall x\geq 0$ için

$$\left|S_n^{**}(f;x)-f(x)\right|\leq C\omega_2\left(f,\sqrt{\Phi_n(x)}\right)+\omega\left(f;\frac{\lambda+2+(\beta_n-\alpha_n)x}{\alpha_n}\right)$$

olacak şekilde sabit bir $C>0$ sayısı vardır. (Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızı.)

KAYNAKLAR

Acar, T., Gupta, V. and Aral, A. 2011, Rate of convergence for generalized Szasz operators, *Bull. Math. Sci*. 1.1, 99–113.

Altomare, F., Campiti, M. 1994, Korovkin type approximation theory and its applications. In: *De Gruyter Studies in Mathematics, vol.* 17. Walter de Gruyter Berlin, New York.

Aral, A. 2014, Inoan, D. and Raşa, I., On the Generalized Szasz–Mirakyan Operators, *Results in Mathematics* 65.3-4, 441–452.

Ashieser, N.I.1947, Lecture on Approximation Theory, *OGIZ*, Moscow-Leningrand, (in Russian), Theory of approximation (in English). Translated by Hymann, *C.J. Frederick Ungar Publishing Co.*, New York 1956.

Atakut, C., Ispir, V. 2002, Approximation by modified Szasz-Mirakjan operators on weighted spaces. *Proc. Indian Acad. Sci. Math.* 112, 571–578.

Atakut, C., İ. Büyükyazıcı. 2010, Stancu type generalization of the Favard–Szasz Operators, *Appl. Math. Lett.*, 23, 1479-1482.

Ersan, 2008, İki Değişkenli q-Bleimann, Butzer ve Hahn Operatörlerinin Yaklaşım

Özellikleri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Gadzhiev, A.D. 1974, The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P. P. Korovkin. *Sov. Math. Dokl*. 15(5), 1433–1436.

Gupta, V., Noor , M. A. and Man Singh Beniwal 2006, Rate of convergence in simultaneous approximation for Szasz-Mirakyan-Durrmeyer operators, *J. Math. Anal. Appl.* 322.2, 964–970.

Hacıyev, A., Hacısalihoğlu, H.H. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. *A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları*, 1-100 s, Ankara.

Ispir, N. 2001, On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turk. J. Math.* 26(3), 355–365.

Kajla, 2015, Approximation properties of Sz´asz type operators based on Charlier polynomials, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Roorkee, Roorkee, India

Karaisa, A., Tollu, D T. and Asar, Y. 2015, Stancu type generalization of *q*-Favard-Szasz operators, *Appl. Math. Comput*. 264, 249–257.

Karsli H. Rate of convergence of new gamma type operators for functions with derivatives of bounded variation. Math Comput Modelling 2007; 45: 617–624.

Korovkin, P.P. 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S*), Vol. 90, pp. 961- 964.

Korovkin, P.P. 1960, Linear Operators and Approximation Theory. *Russian Monographs and Texts on advanced Math*., III, 1-63p., Gordon&Breach.

Kreyszig, E. 1978, Introductory Functional Analysis with Applications. 82- 469. Toronto.

Lorentz, G.G. 1953, Bernstein Polynomials. *University of Toronto Press*, Toronto.

Mazhar SM, Totik V. Approximation by modified Szasz operators. Acta Sci Math 1985; 49: 257–269.

Musayev, B., Alp, M. ve Mustafayev, N. 2003. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz II. Tekağaç Eylül Yayıncılık. 1204 s., Kütahya.

Stancu, D.D. 1968, Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, *Rev. Roum. Math. Pure Appl*. 13, 1173-1194.

Szasz, O. 1950, Generalization of S. Bernstein polynomials to the infinite interval, *J.Research Nat. Bur. Standards*, 45, 239-245.

Varma S, Tasdelen F. Szasz type operators involving Charlier polynomials. Math Comput Modelling 2012; 56: 118–122.

Wood, B. 1969, Generalized Szasz operators for approximation in the complex domain, *SIAM J. Appl. Math.* 17 (4), 790–801.

Yılmaz, 2004, Szasz operatörleri ve bir genelleşmesinin yaklaşım ve diferansiyel özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Bilal ÇAVDAR
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Kırıkkale-30.09.1991
Telefon	**:**	0506 457 59 42
e-mail	**:**	bilalcavdar71@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Kırıkkale Anadolu Öğretmen Lisesi, Merkez, Kırıkkale	2009
Üniversite	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	2014
Yüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi(Tezsiz), Meram, Konya	2014

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015-2016	Bozkır Anadolu İmam Hatip Lisesi	Matematik Öğretmeni
2016-	Cihanbeyli Güven Belgin Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni