T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA SABİT ORANLI EĞRİ ÇİFTLERİ

Serkan ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Ana Bilim Dalı

Ağustos-2018
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Serkan ÖZTÜRK tarafından hazırlanan "Öklid Uzayında Sabit Oranlı Eğri Çiftleri" adlı tez çalışması 09/08/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof.Dr. Nesip AKTAN	....
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet AVCI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Serkan ÖZTÜRK

Tarih: 09.08.2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD UZAYINDA SABİT ORANLI EĞRİ ÇİFTLERİ

Serkan ÖZTÜRK

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

2018, 66 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

Bu tezde; Öklid uzayında sabit oran eğrileri ile ilgili daha önce yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Öklid uzayında eğrilere ilişkin temel bilgiler, birim hızlı ve birim hızlı olmayan eğriler için Frenet formülleri ifade edilmiştir. Öklid uzayındaki sabit oranlı eğriler, T – sabit eğriler ve N – sabit eğriler tanıtılmıştır. Son olarak; sabit oranlı Bertrand ve İnvolüt – Evolüt eğri çiftlerine dair elde edilen yeni sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, Sabit oranlı eğri, T – sabit eğri, N – sabit eğri, Bertrand eğrileri, İnvolüt – Evolüt eğrileri.

ABSTRACT

MS THESIS

ON CONSTANT – RATIO CURVES COUPLES IN EUCLIDEAN SPACE

Serkan ÖZTÜRK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assist. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2018, 66 Pages

Jury
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Assist. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU
Assist. Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

In this thesis; the previous studies about constant ratio curves in Euclidean space have been mentioned. The fundamental imformations about curves in Euclidean space, Frenet formulas for unit speed and arbitrary speed curves are stated. Constant ratio curves, T – constant and N – constant curves are introduced. Finally; new obtained results on constant ratio Bertrand and Involute – Evolute curve couples are given.

Keywords: Euclidean space, Constant - ratio curve, T – constant curve, N – constant curve, Bertrand curves, Involute – Evolute curves.

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasında ilgi ve desteğini gördüğüm, her adımda bilgi ve görüşlerinden faydalandığım, önerileri ile beni yönlendiren ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU'ya içtenlikle teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca beni büyük bir sabırla destekleyen, çalışmalarım süresince anlayış gösterip, beni her konuda cesaretlendiren ve her zaman yanımda olan aileme de teşekkürlerimi sunarım.

Serkan ÖZTÜRK
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^3$	:	Üç boyutlu Öklid uzayı
α	:	Üç boyutlu Öklid uzayında bir eğri
κ	:	Üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin eğrilik fonksiyonu
τ	:	Üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin burulma fonksiyonu
T	:	Üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin teğet vektör alanı
N	:	Üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin asli normal vektör alanı
B	:	Üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin binormal vektör alanı
α^T	:	α eğrisinin pozisyon vektörünün teğet bileşeni
α^N	:	α eğrisinin pozisyon vektörünün normal bileşenleri
$grad$	:	Gradient fonksiyonu
m_i	:	Diferansiyellenebilir fonksiyonlar
α^*	:	α eğrisinin Bertrand eğri çifti
$\tilde{\alpha}$	:	α eğrisinin İnvolüt eğri çifti
${m_i}^*$	:	α eğrisinin Bertrand eğri çifti için diferansiyellenebilir fonksiyonlar
$\widetilde{m}_i$	:	α eğrisinin İnvolüt eğri çifti için diferansiyellenebilir fonksiyonlar
κ^*	:	α eğrisinin Bertrand eğri çifti için eğrilik fonksiyonu
τ^*	:	α eğrisinin Bertrand eğri çifti için burulma fonksiyonu
$\tilde{\kappa}$	:	α eğrisinin İnvolüt eğri çifti için eğrilik fonksiyonu
$\tilde{\tau}$	:	α eğrisinin İnvolüt eğri çifti için burulma fonksiyonu
T^*	:	α eğrisinin Bertrand eğri çifti için teğet vektör alanı
N^*	:	α eğrisinin Bertrand eğri çifti için asli normal vektör alanı
B^*	:	α eğrisinin Bertrand eğri çifti için binormal vektör alanı
$\tilde{T}$	:	α eğrisinin İnvolüt eğri çifti için teğet vektör alanı
$\tilde{N}$	:	α eğrisinin İnvolüt eğri çifti için asli normal vektör alanı
$\tilde{B}$	:	α eğrisinin İnvolüt eğri çifti için binormal vektör alanı

1. GİRİŞ

Yücesan ve ark., 2007'deki çalışmalarında, rektifiyan eğrilerinin dual uzayda bazı karakterizasyonu verilmiştir. Rektifiyan dual uzay eğrileri, dual birim küresel eğriler yardımıyla incelenmiştir. Ayrıca rektifiyan dual uzay eğrileri ile yüzeyler arasındaki bağlantı ifade edilmiştir (Yücesan ve ark., 2007).

Chen, 2001'deki çalışmasında, pozisyon vektör fonksiyonun teğet ve normal bileşenlerinin oranı sabit ise Öklid uzayının alt manifoldlarındaki eğrileri, sabit oranlı olarak tanımlamıştır. Ayrıca, Öklid uzayının sabit oranlı hiperyüzlerinin sınıflandırılmasını incelemiştir (Chen, 2001).

Chen, 2002'deki çalışmasında, Riemann manifoldlarındaki konvolüsyon ve kıvrım kavramına yer vermiştir. Ayrıca Riemann manifoldlarının temel özelliklerine değinmiştir. Segre gömülmesinin Öklid versiyonun kurup, karakterize etmiştir. Son olarak çarpık ürün kavramını genişletmiştir (Chen, 2002).

Chen, 2003'deki çalışmasında, 2001'deki çalışmanın devamı olarak tensör çarpımı kullanarak konvolüsyon manifold örneklerini üretmiş ve bunların temel özelliklerini incelemiştir. Ayrıca konvolüsyon Riemann yüzeylerini de incelemiştir (Chen, 2003-1).

Chen, 2003'deki bir başka çalışmasında, rektifiyan eğrilerinin bazı karakterizasyonu verilmiştir. Rektifiyan eğriler ile burulmuş eğriler arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Sonuç olarak, $\mathbb{R}^3$'deki bütün rektifiyan eğrilerin nasıl elde edildiği ifade edilmiştir (Chen, 2003-2).

Chen, 2005'deki çalışmasında, rektifiyan eğriler ile mekaniğin ani dönme merkezinin uzayda izlediği yol arasındaki ilişki verilmiş ve rektifiyan eğrilerin geometrik özellikleri incelenmiştir (Chen, 2005).

Bozkurt ve ark., 2013'deki çalışmalarında, üç boyutlu kompakt Lie gruplarında rektifiyan, normal ve oskülatör eğrilerini iki değişmeyen bir metrik ile incelenmiştir. Ayrıca üç boyutlu kompakt Lie gruplarında rektifiyan, normal ve oskülatör eğrilerin karakterizasyonu ifade edilmiştir (Bozkurt ve ark., 2013).

Kişi ve Öztürk, 2015'deki çalışmalarında, Minkowski 3-uzayında pozisyon vektörü Bishop çatı vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilen eğriler incelenmiştir. Ayrıca null olmayan eğrilerin Bishop eğrilikleri cinsinden bazı karakterizasyonu elde edilmiştir (Kişi ve Öztürk, 2015).

Öztürk ve ark., 2008'deki çalışmalarında, $\mathbb{R}^m$'de ardışık eğrilikleri oranı sabit olan eğriler çalışılmıştır (Öztürk ve Ark., 2008).

İlarslan ve ark., 2003'deki çalışmalarında, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında null ve null olmayan rektifiyan eğriler ele alınmıştır. Ayrıca eğrinin karakterine göre rektifiyan eğrilerin bazı parametrizasyonu verilmiştir (İlarslan ve ark., 2003).

İlarslan ve Nesoviç, 2007'deki çalışmalarında, Minkowski 3-uzayında spacelike, timelike ve null rektifiyan eğrilerin karakterizasyonu farklı bir açıdan ele alınmıştır (İlarslan ve Nesoviç, 2007).

İlarslan ve Boyacıoğlu, 2007'deki çalışmalarında, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında spacelike W-eğrileri çalışılmıştır. Yarı küresel uzayda ve Lorentzian kürede yatan spacelike W-eğrilerin bazı karakterizasyonu, eğrinin pozisyon vektörü kullanılarak elde edilmiştir (İlarslan ve Boyacıoğlu, 2007).

Ezentaş ve ark., 2004'deki çalışmalarında, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayında rektifiyan eğrilerin bir karakterizasyonu verilmiştir (Ezentaş ve ark., 2004).

Solouma ve Wageeda, 2016'daki çalışmalarında, Minkowski 4-uzayında pozisyon vektörü Bishop çatı vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilen eğriler ele alınmıştır. Ayrıca null olmayan eğrilerin Bishop eğrilikleri cinsinden bazı karakterizasyonu ifade edilmiştir (Solouma ve Wageeda, 2016).

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Öklid uzayında sabit oranlı eğriler üzerine yapılan çalışmalar incelenmiştir.

İkinci bölümde; konu ile ilişkili temel kavramlar olarak, üç boyutlu Öklid uzayı, eğri tanımı, hız vektörü, parametre değişimi, birim hızlı ve birim hızlı olmayan eğriler için Frenet formülleri ifade edilmiştir. Ayrıca Bertrand ve İnvolüt – Evolüt eğri çiftlerinin tanımlarıyla birlikte temel özelliklerine değinilmiştir.

Üçüncü bölümde; üç boyutlu Öklid uzayındaki sabit oran eğrilerinin karakterizasyonu ifade edilmiştir. Bu amaçla; burulmuş eğri, sabit oranlı eğri ve W eğrilerinin tanımları verilmiştir. Bir W eğrisinin pozisyon vektörünü, eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonuna bağlı diferansiyellenebilir fonksiyonlar cinsinden ifade edildiğini ispatladık. Bir eğrinin sabit oranlı eğri olması için gerek ve yeter şartın $\|grad\rho\| = sbt$ olması gerektiğini ifade edip, bir örnek ile açıkladık ve $\|grad\rho\|$ ifadesinin sabit olduğu durumlar için Gürpınar ve ark., 2014'deki çalışmasında elde edilen bazı sonuçları verdik. Ayrıca T – sabit ve N – sabit eğrilerin tanımlarıyla birlikte, bu eğrilere ait bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde; sabit oranlı Bertrand eğrileri ile ilgili yeni sonuçlar ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde; sabit oranlı İnvolüt - Evolüt eğri çiftlerine dair yeni sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu kısımda Öklid uzayında eğrilere dair temel kavramlara değinilecektir. Bu kısım oluşturulurken (Sabuncuoğlu, 2014) ve (Yüce, 2017) kaynaklarından faydalanılmıştır.

2.1. Öklid Uzayı

$\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere $\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n)\}$ eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n) \tag{2.1}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n) \tag{2.2}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur.

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n \tag{2.3}$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(p, q) \to \langle p, q \rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı adı verilir.

$p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$ diyelim. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \to \|p\|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$d(p, q) = \|p - q\|$ biçiminde tanımlanan $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid Uzayı denir.

Tezimizde $\mathbb{R}^3$ uzayında çalışılacağından, yukarıda verilen tanımların $n = 3$ durumu ele alınacaktır.

2.2. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler

2.2.1. Eğri tanımı

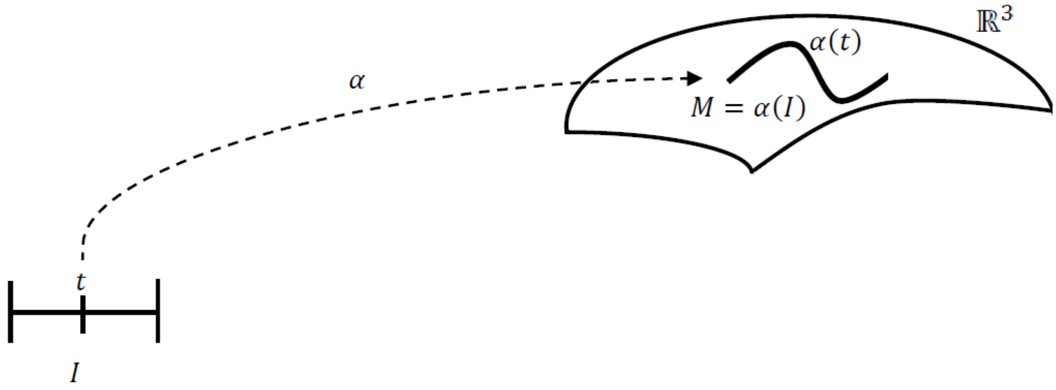
Tanım 2.2.1.1. $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^3 \tag{2.4}$$

$$s \to \alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)\big) \tag{2.5}$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ alt kümesine $\mathbb{R}^3$'de diferansiyellenebilir bir eğri (veya parametrik bir eğri) denir. Ayrıca (I, α) ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu, I alt kümesine eğrinin parametre aralığı ve $s \in I$ reel sayısına da eğrinin parametresi denir. Bir eğri $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ şeklinde veya kısaca α ile gösterilir.

Eğer $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$, C^k sınıfından ise α eğrisine C^k sınıfından eğri adı verilir.



Şekil 2.2.1.1. $\mathbb{R}^3$'de diferansiyellenebilir bir eğri

$\alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)\big)$ olmak üzere

$$\alpha: I \to \mathbb{R} \tag{2.6}$$

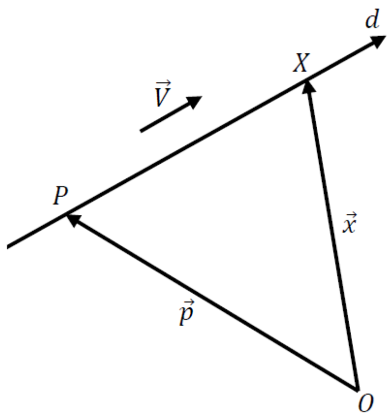
$$s \to \alpha_i(s),\ 1 \leq i \leq 3 \tag{2.7}$$

fonksiyonlarına da α eğrisinin koordinat fonksiyonları denir.

Örnek 2.2.1.1. $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$s \to \alpha(s) = (p_1 + sv_1, p_2 + sv_2, p_3 + sv_3) = \vec{p} + s\vec{V} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlı eğri $P = (p_1, p_2, p_3)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ olan bir doğru belirtir.



Şekil 2.2.1.2. $\mathbb{R}^3$'de P noktasından geçen $\vec{V}$ doğrultmanına sahip doğru

$\mathbb{R}^3$'de P noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{V}$ olan doğru d olmak üzere, d üzerindeki X temsili noktası için $\overrightarrow{OX} = \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$ veya $\vec{x} = \vec{p} + s\vec{V}$ yazılabilir. O halde doğrunun parametrik denklemi aşağıdaki gibidir;

$$\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \tag{2.9}$$

$$s \to \alpha(s) = (p_1 + sv_1, p_2 + sv_2, p_3 + sv_3). \tag{2.10}$$

2.2.2. Hız vektörü

Tanım 2.2.2.1. $\mathbb{R}^3$'de bir α eğrisi verilsin. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ olmak üzere $\alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)\big) \subset \mathbb{R}^3$ yazılabilir. Buradan elde edilen

$$\frac{d}{ds}\alpha(s) = \left(\frac{d}{ds}\alpha_1(s), \frac{d}{ds}\alpha_2(s), \frac{d}{ds}\alpha_3(s)\right) \tag{2.11}$$

vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir.

Örnek 2.2.2.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha(s) = (a\cos s\,, b\sin s\,, bs)$ eğrisi verilsin. α eğrisinin hız vektörü,

$$\alpha'(s) = \frac{d}{ds}\alpha(s) = \left(\frac{d}{ds}\alpha_1(s), \frac{d}{ds}\alpha_2(s), \frac{d}{ds}\alpha_3(s)\right) = (-a\sin s\,, b\cos s\,, b) \tag{2.12}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.2.2.2. $\mathbb{R}^3$'de bir α eğrisi verilsin.

$$\|\alpha'\|: I \to \mathbb{R} \tag{2.13}$$

$$s \to \|\alpha'(s)\| \tag{2.14}$$

olarak tanımlanan fonksiyona α eğrisinin hız fonksiyonu adı verilir ve $\|\alpha'(s)\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hızı denir.

Tanım 2.2.2.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin $\forall s \in I$ noktasındaki hız vektörü birim, yani $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir ve bu durumda $s \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi adı verilir.

Tanım 2.2.2.4. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir parametrik eğrisi verilsin. Her $s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir.

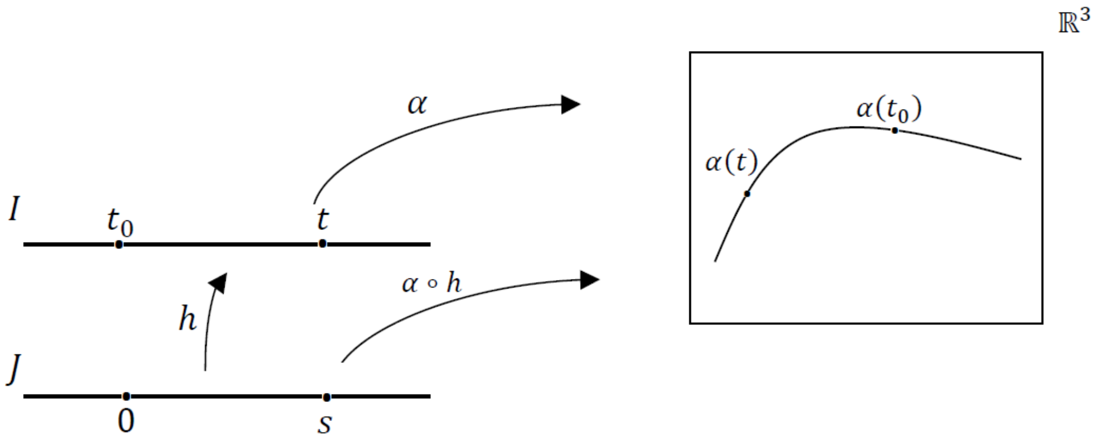
2.2.3. Parametre değişimi

Tanım 2.2.3.1. $\alpha: (a, b) \to \mathbb{R}^3$ ve $\beta: (c, d) \to \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir eğrileri verilsin. $\beta = \alpha \circ h$ ve $\forall u \in (c, d)$ için $h'(u) > 0$ olacak şekilde $h: (c, d) \to (a, b)$

diferansiyellenebilir fonksiyonu varsa β eğrisine α eğrisinin yön koruyan bir yeniden parametrizasyonu denir.

Benzer şekilde, $\beta = \alpha \circ h$ ve $\forall u \in (c, d)$ için $h'(u) < 0$ olacak şekilde $h: (c, d) \to (a, b)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu varsa β eğrisine α eğrisinin yönünü değiştiren bir yeniden parametrizasyonu adı verilir.

Bu durumda h fonksiyonuna da, sırasıyla, pozitif yada negatif parametre değişim fonksiyonu denir.



Şekil 2.2.3.1. $\mathbb{R}^3$'de bir eğrinin yeniden parametrizasyonu

Örnek 2.2.3.1. $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, t)$ olsun.

(a) $\alpha(0)$ ve $\alpha(\pi)$ noktaları arasındaki eğri parçasının uzunluğunu hesaplayalım.

(b) $t_0 = 0$ alarak yay uzunluğu fonksiyonunu bulalım.

(c) Bu eğriyi, birim hızlı olacak biçimde yeniden parametrelendirelim.

Çözüm. (a) Verilen α eğrisinin türevi $\alpha'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 1)$ olduğundan

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \tag{2.15}$$

elde edilir. Buna göre

$$L = \int_0^\pi \|\alpha'(t)\|\, du = \int_0^\pi \sqrt{10}\, dt = \sqrt{10}\int_0^\pi dt = \sqrt{10}\pi \tag{2.16}$$

olur.

(b) $t_0 = 0$ olmak üzere yay uzunluğu fonksiyonu aşağıdaki gibidir;

$$f(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| \, du = \int_0^t \sqrt{10} \, du = \sqrt{10} \int_0^t du = \sqrt{10}t. \tag{2.17}$$

(c) f fonksiyonunun tersini h ile gösterelim ve $\alpha \circ h = \beta$ diyelim. Böylece elde edilen $\beta: J \to \mathbb{R}^n$ eğrisinin birim hızlı olduğunu biliyoruz.

$$f(t) = s \Leftrightarrow \sqrt{10}t = s \Leftrightarrow t = \frac{s}{\sqrt{10}} = (f^{-1})(s) \tag{2.18}$$

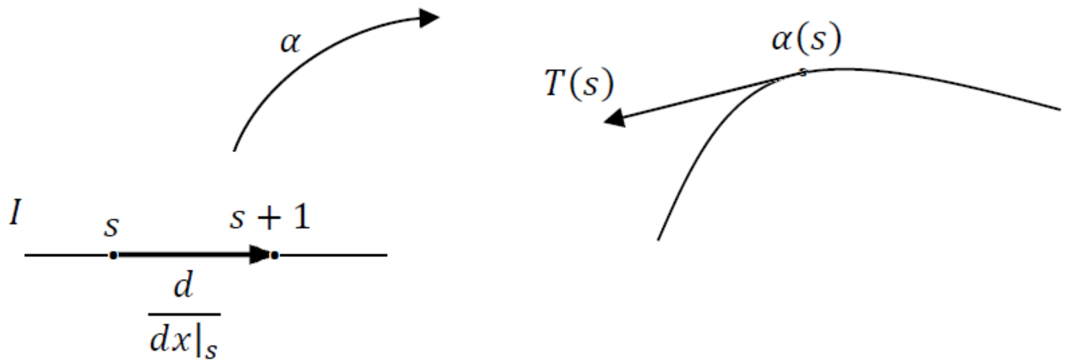
olduğundan, $(f^{-1})(s) = \frac{s}{\sqrt{10}}$ dur. Dolayısıyla $h(s) = \frac{s}{\sqrt{10}}$ olur.

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha(h(s)) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{10}}\right) = \left(3\cos\frac{s}{\sqrt{10}}, 3\sin\frac{s}{\sqrt{10}}, \frac{s}{\sqrt{10}}\right) \tag{2.19}$$

dir. Sonuç olarak α eğrisinin, birim hızlı olacak biçimde yeniden parametrelendirilmişi β eğrisidir.

2.3. Birim Hızlı Eğriler İçin Frenet Formülleri

Tanım 2.3.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $T(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir.



Şekil 2.3.1. $\mathbb{R}^3$'de bir eğrinin teğet vektörü

Tanım 2.3.2. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\kappa: I \to \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği adı verilir.

Tanım 2.3.3. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$ eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normali denir. N vektör alanına, α eğrisinin asli normal vektör alanı adı verilir.

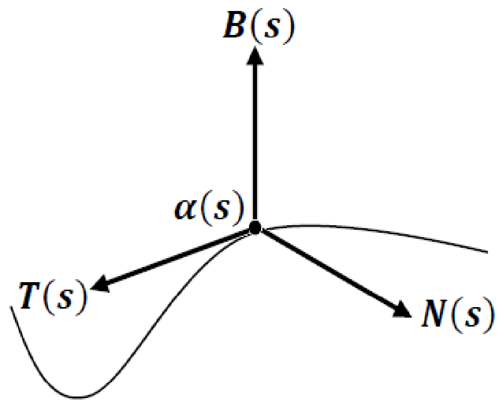
N vektör alanının kısaca $N = \frac{1}{\kappa} T'$ biçiminde yazılabileceği görülebilir.

Tanım 2.3.4. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $B(s) = T(s) \times N(s)$ eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormali denir. B vektör alanına, α eğrisinin binormal vektör alanı adı verilir.

Vektörel çarpımın özelliklerinden dolayı $B(s)$ vektörü, $T(s)$ ve $N(s)$ vektörlerinin her ikisine de diktir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi pozitif yönlü bir çatıdır. Ayrıca her $s \in I$ için

$$\|B(s)\| = \|T(s)\| \|N(s)\| \left|\sin \frac{\pi}{2}\right| = 1 \tag{2.20}$$

dir. Sonuç olarak $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi $T_{\alpha(s)}(\mathbb{R}^3)$ uzayının ortonormal bir tabanıdır ve şekil 2.3.2.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3.2. $\mathbb{R}^3$'de bir eğrinin Frenet vektörleri

Tanım 2.3.5. $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine de α eğrisinin Frenet çatısı denir.

$T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektör alanlarına, α eğrisi üstündeki Frenet vektör alanları denir.

Tanım 2.3.6. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ olmak üzere

$$\tau: I \to \mathbb{R}, \tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle \tag{2.21}$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir.

Teorem 2.3.1. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ ise

$$\begin{bmatrix} \dot{T}(s) \\ \dot{N}(s) \\ \dot{B}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

dir. Burada $\frac{d}{ds}$ “ $\dot{}$ ” ile ifade edilmiştir.

İspat. $N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\dot{T}(s)$ eşitliğinden $\dot{T}(s) = \kappa(s)N(s)$ elde edilir.

$\dot{N}(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$ olduğunu varsayalım. Bu eşitliğin her iki yanının T ile iç çarpımı yapılarak, $\langle \dot{N}(s), T(s)\rangle = a$ olarak bulunur. Öte yandan

$$\langle N(s), T(s)\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{N}(s), T(s)\rangle + \langle N(s), \dot{T}(s)\rangle = 0 \tag{2.23}$$

$$\Rightarrow \langle \dot{N}(s), T(s)\rangle = -\langle N(s), \dot{T}(s)\rangle = -\langle N(s), \kappa(s)N(s)\rangle = -\kappa(s) \tag{2.24}$$

olduğundan $a = -\kappa(s)$ olur.

$\dot{N}(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$ eşitliğinin her iki tarafı $N(s)$ ile çarpılırsa, $\langle N(s), \dot{N}(s)\rangle = b$ bulunur. Diğer taraftan

$$\langle N(s), N(s)\rangle = 1 \Rightarrow \langle \dot{N}(s), N(s)\rangle + \langle N(s), \dot{N}(s)\rangle = 0 \tag{2.25}$$

$$\Rightarrow 2\langle \dot{N}(s), N(s)\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{N}(s), N(s)\rangle = 0 \tag{2.26}$$

olduğundan $b = 0$ olur.

$\dot{N}(s) = aT(s) + bN(s) + cB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $B(s)$ ile iç çarpımı yapılarak, $\langle \dot{N}(s), B(s)\rangle = c$ elde edilir. Daha sonra

$$\langle N(s), B(s)\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{N}(s)B(s)\rangle + \langle N(s), \dot{B}(s)\rangle = 0 \tag{2.27}$$

$$\Rightarrow \langle \dot{N}(s), B(s)\rangle = -\langle N(s), \dot{B}(s)\rangle = \tau(s) \tag{2.28}$$

olduğundan, $c = \tau(s)$ bulunur. Öyleyse $\dot{N}(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$ olur.

Şimdi $\dot{B}(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$ olduğunu varsayalım. Bu eşitliğin her iki yanının $T(s)$ ile çarpımı yapılarak, $\langle \dot{B}(s), T(s)\rangle = d$ elde edilir. Daha sonra

$$\langle B(s), T(s)\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{B}(s), T(s)\rangle + \langle B(s), \dot{T}(s)\rangle = 0 \tag{2.29}$$

$$\Rightarrow \langle \dot{B}(s), T(s)\rangle = -\langle B(s), \dot{T}(s)\rangle = -\langle B(s), \kappa(s)N(s)\rangle = 0 \tag{2.30}$$

olduğundan $d = 0$ ifadesi elde edilir.

$\dot{B}(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$ eşitliğin her iki yanının $N(s)$ ile çarpımı yapılarak, $\langle \dot{B}(s), N(s)\rangle = e = -\tau(s)$ bulunur.

$\dot{B}(s) = dT(s) + eN(s) + fB(s)$ eşitliğinin her iki yanının $B(s)$ ile çarpımı yapılarak, $\langle \dot{B}(s), B(s)\rangle = f$ elde edilir. Öte yandan

$$\langle B(s), B(s)\rangle = 1 \Rightarrow \langle \dot{B}(s), B(s)\rangle + \langle B(s), \dot{B}(s)\rangle = 0 \tag{2.31}$$

olduğundan $f = 0$ bulunur.

Bu teoremde elde edilen eşitliklere, birim hızlı α eğrisi için Frenet formülleri denir.

Tanım 2.3.7. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ olsun.

$\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlem denir. Eğer α eğrisinin pozisyon vektörü oskülatör düzlemde yatıyorsa α'ya oskülatör eğri adı verilir.

$\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlem denir. Eğer α eğrisinin pozisyon vektörü rektifiyan düzlemde yatıyorsa α'ya rektifiyan eğri adı verilir.

$\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlem denir. Eğer α eğrisinin pozisyon vektörü normal düzlemde yatıyorsa α'ya normal eğri adı verilir.

Örnek 2.3.1. $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, olmak üzere

$$\alpha(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\sin\frac{s}{5}, \frac{4}{5}s\right) \tag{2.32}$$

eğrisi verilsin. α eğrisinin Frenet vektör alanlarını, eğrilik ve burulma fonksiyonlarını bulalım.

Çözüm. α eğrisi bir dairesel helistir. Bu eğrinin s yay parametresine göre türevi

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right) \tag{2.33}$$

şeklindedir. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ olduğundan, α birim hızlı bir eğridir. T vektör alanının tanımına göre $T(s) = \alpha'(s)$ olduğundan $T(s) = \left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right)$ olur. Buradan

$$T'(s) = \left(-\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5}, -\frac{3}{25}\sin\frac{s}{25}, 0\right),\ \kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{3}{25} \tag{2.34}$$

bulunur. Demek ki α eğrisinin eğrilik fonksiyonu sabit bir fonksiyondur.

$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}T'(s) = \left(-\cos\frac{s}{5}, -\sin\frac{s}{5}, 0\right)$ olduğundan

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \left(\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5}, -\frac{4}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\right) \tag{2.35}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $B'(s) = \left(\frac{4}{25}\cos\frac{s}{5}, \frac{4}{25}\sin\frac{s}{5}, 0\right)$ olduğundan

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle = \frac{4}{25} \tag{2.36}$$

olur. Sonuç olarak α eğrisinin burulma fonksiyonu da sabittir.

2.4. Birim Hızlı Olmayan Eğriler İçin Frenet Formülleri

$\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ bir regüler eğri olmak üzere α'nın yay parametresi ile ifade edilen birim hızlı eğrisi $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları ile eğrilikleri T_γ, N_γ, B_γ, κ_γ ve τ_γ olarak verilsin. O halde

$$T(t) = T_\gamma(s(t)),\ N(t) = N_\gamma(s(t)), \tag{2.37}$$

$$B(t) = B_\gamma(s(t)),\ \kappa(t) = \kappa_\gamma(s(t)), \tau(t) = \tau_\gamma\left(s(t)\right) \tag{2.38}$$

tanımlanır. Bundan dolayı α'nın Frenet elemanları γ birim hızlı eğrisine yeniden parametrelendirilmesidir. ($\frac{d}{dt} = "\,'\,"$ şeklinde gösterilir). Ayrıca $\alpha(t) = \gamma(s(t))$ olmak üzere, eşitliğin t parametresine göre türevi

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\gamma}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \Rightarrow \left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = \left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\|\cdot\frac{ds}{dt} \Rightarrow \left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = \frac{ds}{dt} = V \tag{2.39}$$

olur. Yani V, α eğrisinin bir hız fonksiyonudur. Son olarak α eğrisinin Frenet vektör alanları ve eğrilikleri

$$T(t) = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, N(t) = B(t) \times T(t), B(t) = \frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|}, \tag{2.40}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}\ ,\ \ \tau(t) = \frac{det(\alpha',\alpha'',\alpha''')}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2} \tag{2.41}$$

şeklinde ifade edilir. α eğrisinin Frenet formülleri ise

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V\kappa(s) & 0 \\ -V\kappa(s) & 0 & V\tau(s) \\ 0 & -V\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

dir.

2.5. Bertrand Eğri Çiftleri

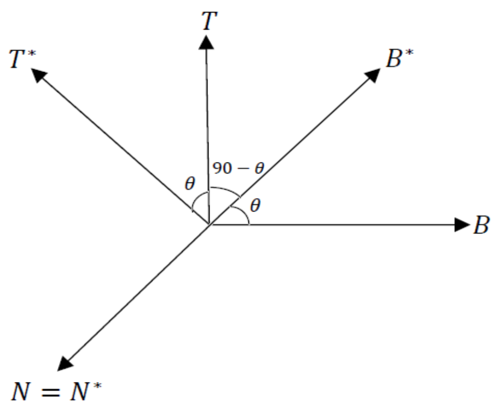
Tanım 2.5.1. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^*: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha^*(s)$ noktası ile $\alpha(s)$ noktasını birleştiren doğru, α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki asli normalini ve α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normalini kapsıyorsa, α^* eğrisi α eğrisi ile Bertrand eğiri çifti oluşturuyor denir.

Teorem 2.5.1. α^* eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa h sabit bir sayı olmak üzere α^* eğrisi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s) \tag{2.43}$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 2.5.1. Verilen bir α^* eğrisi eğer α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluşturuyor ise $(\alpha^*)'(s) = \big(1 - h\kappa(s)\big)T(s) + h\tau(s)B(s)$ eşitliği sağlanır.



Şekil 2.5.1. α^* ve α Bertrand eğri çiftinin Frenet vektör alanları

Teorem 2.5.2. Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktalardaki teğet vektörleri arasındaki açının ölçüsü sabittir.

Teorem 2.5.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere $\alpha^*: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi, α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluştursun. α^* eğrisinin Frenet vektör alanları T^*, N^*, B^* ile gösterilsin. $\cos\theta = \langle T^*(s), T(s)\rangle$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır:

$$T^*(s) = (\cos\theta)T(s) - (\sin\theta)B(s), \tag{2.44}$$

$$N^*(s) = N(s), \tag{2.45}$$

$$B^*(s) = (\sin\theta)T(s) + (\cos\theta)B(s). \tag{2.46}$$

Teorem 2.5.4. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere $\alpha^*: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi, α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluştursun. α^* eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları κ^* ve τ^* olduğuna göre, aşağıdaki ilişkiler mevcuttur:

$$\kappa^*(s) = \frac{h\kappa(s) - (\sin\theta)^2}{h\big(1 - h\kappa(s)\big)}, \tag{2.47}$$

$$\tau^*(s) = \frac{1}{h^2\tau(s)}(\sin\theta)^2. \tag{2.48}$$

Sonuç 2.5.2. α^* eğrisi, α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa τ^* ve τ ifadeleri aynı işaretlidir.

2.6. İnvolüt ve Evolüt Eğri Çiftleri

Tanım 2.6.1. Birim hızlı bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile bir $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\tilde{\alpha}(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle \tilde{T}(s), T(s)\rangle = 0$ ise $\tilde{\alpha}$ eğrisine, α eğrisinin bir İnvolütü denir.

Teorem 2.6.1. $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir İnvolütü ise, λ sabit bir reel sayı olmak üzere

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s) \tag{2.49}$$

dir.

Teorem 2.6.2. $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir İnvolütü olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\tilde{T}$, $\tilde{N}$, $\tilde{B}$ olduğuna göre

$$\tilde{T}(s) = N(s), \tag{2.50}$$

$$\tilde{N}(s) = \frac{-\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}T(s) + \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}B(s), \tag{2.51}$$

$$\tilde{B}(s) = \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}T(s) + \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}B(s) \tag{2.52}$$

dir.

Teorem 2.6.3. $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir İnvolütü olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin eğrilik ve burulması $\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{\tau}$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır:

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}{|-s+\lambda|\kappa(s)}, \tag{2.53}$$

$$\tilde{\tau}(s) = \frac{\kappa(s)\tau'(s)-\kappa'(s)\tau(s)}{(-s+\lambda)\kappa(s)\left(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right)}. \tag{2.54}$$

Tanım 2.6.2. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için $\tilde{\alpha}$ eğrisinin $\tilde{\alpha}(s)$ noktasındaki teğet doğrusu $\alpha(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle \tilde{T}(s), T(s) \rangle = 0$ ise α eğrisine $\tilde{\alpha}$ eğrisinin bir Evolütü denir.

3. ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABİT ORANLI EĞRİLER

Bu bölümde üç boyutlu Öklid uzayında sabit oranlı eğrilerin bazı karakterizasyonları ifade edilmiştir.

3.1. Sabit Oranlı Eğriler

Tanım 3.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Eğer her $s \in I$ için $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ sıfırdan farklı ise α eğrisine burulmuş (gergin) eğri adı verilir (Gürpınar ve ark., 2014).

Tanım 3.1.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Eğer α eğrisinin pozisyon vektörü her $s \in I$ için normal düzleminde yatıyorsa α eğrisine küre üzerindedir denir (Gürpınar ve ark., 2014).

Her regüler α eğrisi için, $\alpha(s)$ pozisyon vektörü,

$$\alpha(s) = \alpha^T + \alpha^N \tag{3.1}$$

olacak şekilde teğet ve normal bileşenlerine ayrılabilir.

Tanım 3.1.3. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ve $\kappa(s) > 0$ verilsin. Eğer $\frac{\|\alpha^T\|}{\|\alpha^N\|}$ oranı sabit ise $\alpha(s)$ eğrisine sabit oranlı eğri denir. Buna ek olarak, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir α eğrisinin sabit oranlı olması için gerek ve yeter şart $\alpha^T = 0$ ya da $\frac{\|\alpha^T\|}{\|\alpha\|}$ oranının sabit olmasıdır (Gürpınar ve ark., 2014).

Tanım 3.1.4. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$'de bir koordinat fonksiyonu olsun.

$$Grad = \nabla: C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to X(\mathbb{R}^n), \tag{3.2}$$

$$f \to Gradf = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona gradient fonksiyonu denir (Yüce, 2017).

Tanım 3.1.5. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ bir birim hızlı eğri olsun. Eğer α pozisyon vektörünün teğet bileşenin uzunluğu (normal bileşenin uzunluğu) sabit ise α eğrisine T-sabit (N-sabit) eğrisi denir (Gürpınar ve ark., 2014).

Chen'nin (2001)'deki çalışmasında, m_0, m_1, m_2 birer diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere her $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ burulmuş (gergin) eğrisinin

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabileceğini ifade etmiştir.

Tanım 3.1.6. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ birer sabit fonksiyon ise α eğrisine W- eğrisi adı verilir (Gürpınar ve ark., 2014).

Bu kısımda birim hızlı olmayan burulmuş eğrilerin eğrilik fonksiyonları cinsinden karakterize edilmiş hali verilecektir. Bunun için her $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş eğrisinin (3.4) ile verilen eşitlikle ifade edildiğini kullanacağız. (3.4) denkleminde her iki tarafının yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak

$$\begin{aligned}\alpha'(s) = {} & {m_0}'(s)T(s) + m_0(s)T'(s) + {m_1}'(s)N(s) + m_1(s)N'(s) + \\ & {m_2}'(s)B(s) + m_2(s)B'(s)\end{aligned} \tag{3.5}$$

eşitliğini elde ederiz. O halde (2.42) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\alpha'(s) = {} & \big({m_0}'(s) - m_1(s)V\kappa(s)\big)T(s) + \\ & \big({m_1}'(s) + m_0(s)V\kappa(s) - m_2(s)V\tau(s)\big)N(s) + \\ & \big({m_2}'(s) + m_1(s)V\tau(s)\big)B(s)\end{aligned} \tag{3.6}$$

olur. Buradan,

$${m_0}'(s) - \ V\kappa(s)m_1(s) = V, \tag{3.7}$$

$${m_1}'(s) + V\kappa(s)m_0(s) - V\tau(s)m_2(s) = 0, \tag{3.8}$$

$${m_2}'(s) + V\tau(s)m_1(s) = 0 \tag{3.9}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $V = 1$ olup, birim hızlı olmayan eğriler için (3.7), (3.8) ve (3.9) ile verilen eşitlikleri yeniden düzenlersek,

$$m_0{}'(s) - \kappa(s)m_1(s) = 1, \tag{3.10}$$

$$m_1{}'(s) + \kappa(s)m_0(s) - \tau(s)m_2(s) = 0, \tag{3.11}$$

$$m_2{}'(s) + \tau(s)m_1(s) = 0 \tag{3.12}$$

birim hızlı eğriler için yukarıdaki denklemler elde edilir.

Önerme 3.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş eğrisi verilsin. α bir W- eğrisi ise pozisyon vektörü $\alpha(s)$

$$m_0(s) = c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s, \tag{3.13}$$

$$m_1(s) = c_1 a\sin(as) + c_2 a\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2}, \tag{3.14}$$

$$m_2(s) = c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s \tag{3.15}$$

diferansiyellenebilir fonksiyonları ile ifade edilir. Burada c_i $(0 \leq i \leq 2)$ reel sabitler ile $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ dir.

İspat: α bir burulmuş W- eğrisi ve $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ olsun. O halde (3.10), (3.11) ve (3.12) ile verilen diferansiyel denklemin katsayıları sabittir ve

$$\begin{bmatrix} m_0{}'(s) \\ m_1{}'(s) \\ m_2{}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0(s) \\ m_1(s) \\ m_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabilir. Homojen olmayan bu diferansiyel denklemin katsayılar matrisine ait özdeğer ve özvektörleri sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

$$\lambda_2 = ai \quad \Rightarrow \quad V_2 = \begin{bmatrix} -\kappa \\ -ai \\ \tau \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

$$\lambda_3 = -ai \quad \Rightarrow \quad V_3 = \begin{bmatrix} -\kappa \\ ai \\ \tau \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Burada $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ dir. Buna göre diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0 \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} -\kappa\cos(as) \\ a\sin(as) \\ \tau\cos(as) \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} -\kappa\sin(as) \\ -a\cos(as) \\ \tau\cos(as) \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} -\kappa\cos(as) \\ a\sin(as) \\ \tau\cos(as) \end{pmatrix}$$
$$+ d_4 \begin{pmatrix} \kappa\sin(as) \\ a\cos(as) \\ -\tau\sin(as) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

olarak elde edilir. Burada c_0, d_1, d_2, d_3 ve d_4 birer sabit ve $d_1 + d_3 = c_1$, $d_4 - d_2 = c_2$ olmak üzere homojen çözümü düzenlersek

$$X_h(s) = c_0 \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -\kappa\cos(as) \\ a\sin(as) \\ \tau\cos(as) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \kappa\sin(as) \\ a\cos(as) \\ -\tau\sin(as) \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

eşitliği elde edilir. Özel çözümü için temel (fundamental) matrisi

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} \tau & -\kappa\cos(as) & \kappa\sin(as) \\ 0 & a\sin(as) & a\cos(as) \\ \kappa & \tau\cos(as) & -\tau\sin(as) \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

şeklinde yazılabilir. (3.10), (3.11) ve (3.12) eşitlikleri ile verilen diferansiyel denkleminin özel çözümünü bulmak için $X_p(s) = \varphi(s)u(s)$ eşitliğinden yararlanırsak, burada $u(s)$ vektörü

$$\varphi(s)u'(s)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{3.23}$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen 3×3 lineer denklem sistemini Kramer metodu yardımıyla çözersek

$$u_1{}'(s)=\frac{\begin{vmatrix}1 & -\kappa\cos(as) & \kappa\sin(as)\\ 0 & a\sin(as) & a\cos(as)\\ 0 & \tau\cos(as) & -\tau\sin(as)\end{vmatrix}}{det(\varphi(s))}=\frac{-a\tau}{-a^3}=\frac{\tau}{a^2}, \tag{3.24}$$

$$u_2{}'(s)=\frac{\begin{vmatrix}\tau & 1 & \kappa\sin(as)\\ 0 & 0 & a\cos(as)\\ \kappa & 0 & -\tau\sin(as)\end{vmatrix}}{det(\varphi(s))}=\frac{a\kappa\cos(as)}{-a^3}=-\frac{\kappa\cos(as)}{a^2}, \tag{3.25}$$

$$u_3{}'(s)=\frac{\begin{vmatrix}\tau & -\kappa\cos(as) & 1\\ 0 & a\sin(as) & 0\\ \kappa & \tau\cos(as) & 0\end{vmatrix}}{det(\varphi(s))}=\frac{-a\kappa\sin(as)}{-a^3}=\frac{\kappa\sin(as)}{a^2} \tag{3.26}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifadelerin sırasıyla integrali yardımıyla

$$u_1(s)=\frac{\tau}{a^2}s,\ u_2(s)=-\frac{\kappa\sin(as)}{a^3},\ u_3(s)=-\frac{\kappa\cos(as)}{a^3} \tag{3.27}$$

şeklinde elde edilir. Burada integral sabitleri genelliği bozmadığından sıfır alınabilir. O halde

$$X_p(s)=\varphi(s)u(s)=\begin{pmatrix}\frac{\tau^2}{a^2}s\\ \frac{-\kappa}{a^2}\\ \frac{\kappa\tau}{a^2}s\end{pmatrix} \tag{3.28}$$

ifadesi (3.10), (3.11) ve (3.12)'deki diferansiyel denklem sisteminin özel çözümüdür. Sonuç olarak $X_g(s)=X_h(s)+X_p(s)$ eşitliğinden,

$$m_0(s)=c_0\tau-c_1\kappa\cos(as)+c_2\kappa\sin(as)+\frac{\tau^2}{a^2}s, \tag{3.29}$$

$$m_1(s) = c_1 a \sin(as) + c_2 a \cos(as) - \frac{\kappa}{a^2}, \tag{3.30}$$

$$m_2(s) = c_0 \kappa + c_1 \tau \cos(as) - c_2 \tau \sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2} s \tag{3.31}$$

olduğu görülür.

□

Her $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisi için $\rho = \|\alpha(s)\|$ uzaklık fonksiyonun gradienti

$$grad\rho = \frac{d\rho}{ds}\alpha'(s) = \frac{\langle \alpha(s), T(s)\rangle}{\|\alpha(s)\|} T(s) \tag{3.32}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $T(s)$, $\alpha(s)$'in teğet vektör alanıdır. Ayrıca α eğrisinin sabit oranlı bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\|grad\rho\| = c$ olmasıdır. Yani

$$\frac{\|\alpha^T\|}{\|\alpha\|} = c \Leftrightarrow \|grad\rho\| = c \tag{3.33}$$

dir. Sonuç olarak, her sabit oran eğrisi için $\|grad\rho\| = c \leq 1$'dir (Gürpınar ve ark., 2014).

Örnek 3.1.1. a, c birer reel sayı, $0 \leq a \leq c < 1$ ve $s > 0$ olmak üzere

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{c^2 - a^2}\, s \sin\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}} \ln s\right), \sqrt{c^2 - a^2}\, s \cos\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}} \ln s\right), as\right) \tag{3.34}$$

eğrisi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir birim hızlı regüler eğri ise $\|grad\rho\| = c$'dir ve bu eğri, bir sabit oranlı eğridir.

Çözüm. $\|grad\rho\| = c$ olduğunu göstermek için (3.32) eşitliğini kullanmamız gerekir. Bunun için, $\alpha(s)$ eğrisinin yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak

$$\alpha'(s) = (\sqrt{c^2-a^2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right) + \sqrt{c^2-a^2}s\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\tfrac{1}{s}\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right),$$

$$\sqrt{c^2-a^2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right) - \sqrt{c^2-a^2}s\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\tfrac{1}{s}\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right), a) \quad (3.35)$$

$$\alpha'(s) = \left(\sqrt{c^2-a^2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right) + \sqrt{1-c^2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right),\right.$$

$$\left(\sqrt{c^2-a^2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right) - \sqrt{1-c^2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right), a\right) \quad (3.36)$$

elde edilir. Daha sonra $\alpha(s)$ ile $\alpha'(s)$'in iç çarpımını alıp, düzenlersek

$$\langle\alpha(s),\alpha'(s)\rangle = (c^2-a^2)s\left(\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\right)^2 + \sqrt{c^2-a^2}\sqrt{1-c^2}s$$

$$\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right) + (c^2-a^2)s\left(\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\right)^2$$

$$-\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{1-c^2}s\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right) \quad (3.37)$$

$$\langle\alpha(s),\alpha'(s)\rangle = (c^2-a^2)s\left(\left(\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\right)^2\right) \quad (3.38)$$

$$\langle\alpha(s),\alpha'(s)\rangle = c^2s - a^2s + a^2s = c^2s \quad (3.39)$$

elde edilir. Şimdi de verilen eğrinin pozisyon vektörünün uzunluğunu bulalım.

$$\|\alpha(s)\| = \left[(c^2-a^2)s^2\left(\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\right)^2 + \right.$$

$$\left.(c^2-a^2)s^2\left(\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\right)^2 + a^2s^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.40)$$

$$\|\alpha(s)\| = \sqrt{(c^2-a^2)s^2\left[\left(\sin\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\tfrac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\ln s\right)\right)^2\right] + a^2s^2} \quad (3.41)$$

$$\|\alpha(s)\| = \sqrt{c^2s^2 - a^2s^2 + a^2s^2} = \sqrt{c^2s^2} = |cs| = cs. \quad (3.42)$$

Bulunan bu değerleri (3.32) eşitliğinde yerine yazarsak $grad\rho = cT(s)$ ifadesi elde edilecektir. Daha sonra bu eşitliğin normu alınırsa $\|grad\rho\| = \|cT(s)\| = c\|T(s)\|$

olacaktır. α eğrisi birim hızlı bir eğri olduğundan $\|\alpha'(s)\| = \|T(s)\| = 1$ dir. Dolayısıyla $\|grad\rho\| = c$ elde edilir.

Gürpınar ve ark.,'nın (2014)'deki çalışmasında, $\|grad\rho\|$ ifadesinin sabit olduğu durumlar için elde edilen bazı sonuçlar aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 3.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\alpha(I)$ eğrisinin orjin merkezli bir küre tarafından içerilmesi için gerek ve yeter şart $\|grad\rho\| = 0$ olmasıdır (Chen, 2003-1).

İspat. **⇒:** $\alpha(I)$ eğrisi orjin merkezli bir küre tarafından içerilsin.

$\mathbb{R}^3$ uzayında orjin merkezli c yarıçaplı küre denklemi ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = c^2$ şeklindedir. Kabulümüz gereği $\alpha(I)$ eğrisi yukarıda denklemi verilen küre tarafından içeriliyorsa $\alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)\big)$ olarak verilen eğri, küre denklemini sağlar. Yani

$$ {\alpha_1}^2(s) + {\alpha_2}^2(s) + {\alpha_3}^2(s) = c^2 \tag{3.43} $$

olur ve yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının karekökünü alırsak

$$ \sqrt{{\alpha_1}^2(s) + {\alpha_2}^2(s) + {\alpha_3}^2(s)} = \sqrt{c^2} = c \tag{3.44} $$

elde edilir. Daha sonra

$$ \|\alpha(s)\| = \sqrt{{\alpha_1}^2(s) + {\alpha_2}^2(s) + {\alpha_3}^2(s)} \tag{3.45} $$

olduğundan $\|\alpha(s)\| = c$ ifadesi yazılabilir. Dolayısıyla $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = \sqrt{c} = c_0$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafının yay uzunluğu parametresine göre türevini alıp, düzenlersek

$$ \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle = 0 \tag{3.46} $$

ifadesi elde edilir. Son olarak bulunan bu eşitliği (3.32)'de yerine yazarsak $\|grad\rho\| = 0$ olduğu görülür.

$\Leftarrow$: $\|grad\rho\| = 0$ olsun. Dolayısıyla $grad\rho = 0$ dır. (3.32) eşitliğinden

$$grad\rho = \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} T(s) = 0 \tag{3.47}$$

ifadesi yazılabilir. Burada $T(s) \neq 0$ olduğundan

$$\frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} = 0 \tag{3.48}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan ise $T(s) = \alpha'(s)$ olduğundan $\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafını 2 ile çarpıp, düzenlersek

$$2\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \tag{3.49}$$

$$\frac{d}{ds} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = 0 \tag{3.50}$$

ifadesi bulunur. Buradan ise, her iki tarafın yay uzunluğu parametresine göre integralini alırsak

$$\int \frac{d}{ds} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle \, ds = \int 0 \, ds \Rightarrow \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = c_0 \tag{3.51}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra $\|\alpha(s)\|^2 = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = c_0$ yazılabilir. Yani $\|\alpha(s)\| = c$ dir. $\alpha(s)$ eğrisinin uzunluğunun $c \in \mathbb{R}$ sabitine eşit olması demek, eğrinin orjin merkezli bir küre tarafından içerilmesi anlamına gelir. Yani eğri $\alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)\big)$ olmak üzere, $\|\alpha(s)\| = c$ eşitliğini

$$\sqrt{(\alpha_1(s) - 0)^2 + (\alpha_2(s) - 0)^2 + (\alpha_3(s) - 0)^2} = c \tag{3.52}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan da

$$\alpha_1{}^2(s) + \alpha_2{}^2(s) + \alpha_3{}^2(s) = c^2 \tag{3.53}$$

ifadesi bulunur. Dolayısıyla $\alpha(s)$ eğrisi orjin merkezli kürenin denklemini sağladığı açıkça görülür.

□

Teorem 3.1.2. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. Eğer $\|grad\rho\| = 1$ ise $\alpha(I)$ eğrisi bir doğrunun açık bir parçasıdır (Chen, 2003-1).

İspat. $\|grad\rho\| = 1$ olsun. (3.32) eşitliğinden

$$\|grad\rho\| = \left\| \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} T(s) \right\| = 1 \Rightarrow \left| \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} \right| \|T(s)\| = 1 \tag{3.54}$$

olarak yazılabilir. Daha sonra, α eğrisi birim hızlı olduğundan $\|T(s)\| = 1$ dir. Dolayısıyla $|\langle \alpha(s), T(s) \rangle| = \|\alpha(s)\|$ elde edilir ve eşitliğin her iki tarafını 2 ile çarpıp düzenlersek

$$2|\langle \alpha(s), T(s) \rangle| = 2\|\alpha(s)\| \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 2\|\alpha(s)\| \tag{3.55}$$

$$\frac{d}{ds} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = 2\|\alpha(s)\| \Rightarrow \frac{d}{ds} (\|\alpha(s)\|^2) = 2\|\alpha(s)\| \tag{3.56}$$

ifadesi bulunur. Eşitliğin sol tarafının yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak

$$2\|\alpha(s)\| \frac{d}{ds} (\|\alpha(s)\|) = 2\|\alpha(s)\| \Rightarrow \frac{d}{ds} (\|\alpha(s)\|) = 1 \tag{3.57}$$

olduğu görülür. Son olarak eşitliğin her iki tarafını integralini alırsak

$$\int \frac{d}{ds} (\|\alpha(s)\|)\, ds = \int 1\, ds \Rightarrow \|\alpha(s)\| = s + a \tag{3.58}$$

ifadesi elde edilir. Yani α eğrisi bir doğrunun açık bir parçasıdır. Buradaki $a \in \mathbb{R}$ integral sabitidir.

□

Teorem 3.1.3. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\alpha(I)$ eğrisi orjinden geçen bir doğrunun açık bir parçası ise $\|grad\rho\| = 1$'dir (Chen, 2003-1).

İspat. $\alpha(I)$, orjinden geçen bir doğrunun açık bir parçası olsun. Dolayısıyla $\alpha(s)$ eğrisi $\alpha(s) = \vec{U}s$ şeklinde ifade edilebilir. Daha sonra eşitliğin her iki tarafının yay uzunluğu parametresine göre türevi $\alpha'(s) = \vec{U}$ şeklindedir. Bu eşitliğin normu ise $\|\alpha'(s)\| = \|\vec{U}\|$ olarak yazılabilir. Daha sonra $\|\alpha'(s)\| = \|T(s)\| = 1$ olduğundan $\|\vec{U}\|^2 = \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle = 1$ ifadesi elde edilir. Öte yandan α eğrisinin pozisyon vektörünün normu ve $\alpha(s)$ ile $\alpha'(s)$'in iç çarpımı aşağıdaki gibidir;

$$\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = \langle \alpha(s), T(s) \rangle = s\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle \tag{3.59}$$

$$\|\alpha(s)\| = \sqrt{s^2} = s. \tag{3.60}$$

Bu ifadeleri (3.32) eşitliğinde yerine yazıp düzenlersek,

$$\|grad\rho\| = \left\| \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} T(s) \right\| = \left| \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} \right| \|T(s)\| = \left| \frac{s\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle}{s} \right| \tag{3.61}$$

olduğu görülür. Buradan da $\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle = 1$ olduğundan $\|grad\rho\| = 1$ ifadesi elde edilir.

□

Teorem 3.1.4. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. α eğrisinin, $\alpha(s) = (cs + b)y(u)$ olarak yazılabilmesi için gerek ve yeter şart $\|grad\rho\| = c$ olmasıdır. Buradaki $y(u)$ eğrisi orjin merkezli birim küre üzerinde bulunan birim hızlı bir regüler eğridir ve $u = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} \ln(cs + b)$'dir. Ayrıca $c \in (0,1)$ ve $b \in \mathbb{R}$'dir (Chen, 2003-1).

İspat. **⇒:** α eğrisinin, $\alpha(s) = (cs + b)y(u)$ eşitliğiyle yazılabileceğini kabul edelim. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak

$$\alpha'(s) = cy(u) + (cs + b)y'(u)\frac{du}{ds} \tag{3.62}$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra $\alpha(s)$ ile $\alpha'(s)$'in iç çarpımı

$$\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = c(cs+b)\langle y(u), y(u) \rangle + (cs+b)^2 \langle y(u), y'(u) \rangle \frac{du}{ds} \tag{3.63}$$

olarak bulunur. Öte yandan hem $\langle y(u), y'(u) \rangle = 0$ hem de $\langle y(u), y(u) \rangle = 1$ olduğundan, $\alpha(s)$ ile $\alpha'(s)$'in iç çarpımı $\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = c(cs+b)$ şeklinde elde edilir. Diğer taraftan α'nın pozisyon vektörünün uzunluğu $\|\alpha(s)\| = cs + b$ dir. Son olarak bulunan bu ifadeleri (3.32) eşitliğinde yerine yazıp, düzenlersek

$$\|grad\rho\| = \left\| \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} T(s) \right\| = \left| \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} \right| \|T(s)\| = \left| \frac{c(cs+b)}{cs+b} \right| \|T(s)\| \tag{3.64}$$

olur. Burada $\|T(s)\| = 1$ olduğundan $\|grad\rho\| = c$ olduğu görülür.

$\Leftarrow$: $\|grad\rho\| = c$ olsun. α, birim hızlı bir eğri ise (3.32) eşitliğinden

$$\|grad\rho\| = \left\| \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} T(s) \right\| = c \Rightarrow \left| \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} \right| \|T(s)\| = c \tag{3.65}$$

$$\|grad\rho\| = \left| \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} \right| = c \Rightarrow \frac{\langle \alpha(s), T(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} = c \tag{3.66}$$

ifadesini elde ederiz. Daha sonra $\|\alpha(s)\|^2 = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle$ eşitliğinin her iki tarafını yay uzunluğu parametresine göre türevini alıp, düzenlersek

$$\frac{d}{ds}(\|\alpha(s)\|^2) = \frac{d}{ds}\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle \tag{3.67}$$

$$2\|\alpha(s)\| \frac{d}{ds}(\|\alpha(s)\|) = \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle \tag{3.68}$$

$$2\|\alpha(s)\| \frac{d}{ds}(\|\alpha(s)\|) = 2\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle \Rightarrow \frac{d}{ds}(\|\alpha(s)\|) = \frac{\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle}{\|\alpha(s)\|} \tag{3.69}$$

olduğu görülür. Bu ifade de (3.32) eşitliğinden $\frac{d}{ds}(\|\alpha(s)\|) = c$ olur. Daha sonra yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı yay uzunluğu parametresine göre integrali alınırsa

$$\int \frac{d}{ds}(\|\alpha(s)\|)\, ds = \int c\, ds \Rightarrow \|\alpha(s)\| = cs + b \tag{3.70}$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak $y(u)$ orjin merkezli birim küre üzerinde birim hızlı bir eğri olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisi, $\alpha(s) = (cs + b)y(u)$ şeklinde yazılabilir.

Şimdi de $c \in (0,1)$ olmak üzere $u = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs + b)$ olduğunu gösterelim. $\alpha(s) = (cs + b)y(u)$ olarak ifade edilen eğrinin yay uzunluğu parametresine göre türevinin

$$\alpha'(s) = cy(u) + (cs + b)y'(u)\frac{du}{ds} \tag{3.71}$$

olduğunu görmüştük. Diğer taraftan α eğrisi birim hızlı olduğundan $\|\alpha'(s)\|^2 = \langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 1$ dir. Buradan

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = c^2\langle y(u), y(u)\rangle + 2c(cs + b)\frac{du}{ds}\langle y(u), y'(u)\rangle$$

$$+\big((cs + b)\big)^2 \frac{d^2u}{ds^2}\langle y'(u), y'(u)\rangle = 1 \tag{3.72}$$

olur. Öte yandan $y(u)$ eğrisi hem birim küre üzerinde hem de birim hızlı bir eğri olduğundan $\langle y(u), y(u)\rangle = 1$ ve $\langle y'(u), y'(u)\rangle = 1$ dir. O halde $\langle y(u), y(u)\rangle = 1$ eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak, $\langle y(u), y'(u)\rangle = 0$ olduğu görülür. Bu ifadeleri (3.72)'de yerine yazıp, düzenlersek

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = c^2 + (cs + b)^2\frac{d^2u}{ds^2} = 1 \tag{3.73}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{ds^2}(cs + b)^2 = 1 - c^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1-c^2}{(cs+b)^2} \tag{3.74}$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra eşitliğin her iki tarafının karekökünü alalım.

$$\sqrt{\frac{d^2u}{ds^2}} = \sqrt{\frac{1-c^2}{(cs+b)^2}} \Rightarrow \frac{du}{ds} = \frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b} \tag{3.75}$$

elde edilir. Son olarak, eşitliğin her iki tarafını yay uzunluğu parametresine göre integrali alınırsa

$$\int \frac{du}{ds} ds = \int \frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b} ds \Rightarrow u = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} \ln(cs+b) \tag{3.76}$$

olduğu görülür.

□

Sonuç 3.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir regüler eğri olsun. Yukarıdaki teoremler gereğince aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

i. $\|grad\rho\| = 0 \Leftrightarrow \alpha(I)$ orjin merkezli bir küre tarafından içerilir.

ii. $\|grad\rho\| = 1$ ise $\alpha(I)$ herhangi bir doğrunun açık bir parçasıdır.

iii. $\alpha(I)$ orjinden geçen bir doğrunun açık bir parçası ise $\|grad\rho\| = 1$ dir.

iv. $\|grad\rho\| = c \Leftrightarrow \rho = \|\alpha(s)\| = cs + b$, $c \in (0,1)$ ve $b \in \mathbb{R}$ dir.

v. Eğer $n = 2$ ve $\|grad\rho\| = c$ ise $c \in (0,1)$ için α eğrisinin eğriliği bazı b reel sabitleri için,

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b} \tag{3.77}$$

şeklindedir.

Sonuç 3.1.1.'de verilen v. maddenin ispatı şu şekildedir:

İspat: α eğrisinin, Teorem 3.1.4. gereğince $\alpha(s) = (cs + b)y(u)$ şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Bu eşitliğin her iki tarafını s yay uzunluğu parametresine göre birinci türevini alırsak,

$$\alpha'(s) = cy(u) + (cs + b)\frac{dy}{du}\frac{du}{ds} \tag{3.78}$$

eşitliği elde edilir. Teorem 3.1.4.'den,

$$u = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} \ln(cs+b) \Rightarrow \frac{du}{ds} = \frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b} \tag{3.79}$$

olur. (3.79) ifadesini (3.78) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\alpha'(s) = cy(u) + (cs + b\,)\frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b}\frac{dy}{du} = cy(u) + \sqrt{1-c^2}\frac{dy}{du} \tag{3.80}$$

olduğu görülür. (3.80) eşitliğinin tekrar türevini alalım.

$$\alpha''(s) = c\frac{dy}{du}\frac{du}{ds} + \sqrt{1-c^2}\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{ds} = c\frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b}\frac{dy}{du} + \sqrt{1-c^2}\frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b}\frac{d^2y}{du^2} \tag{3.81}$$

$$\alpha''(s) = c\frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b}\frac{dy}{du} + \frac{(1-c^2)}{cs+b}\frac{d^2y}{du^2} \tag{3.82}$$

Daha sonra son eşitliğin her iki tarafının $\alpha''(s)$ ile iç çarpımını alırsak

$$\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle = c^2\frac{(1-c^2)}{(cs+b)^2}\langle y'(u),y'(u)\rangle + 2\frac{c(1-c^2)}{(cs+b)^2}\langle y'(u),y''(u)\rangle$$
$$+\frac{(1-c^2)^2}{(cs+b)^2}\langle y''(u),y''(u)\rangle \tag{3.83}$$

eşitliği elde edilir. Buradan da $y(u)$ eğrisi birim hızlı olduğundan $\langle y'(u),y'(u)\rangle = 1$ ve $\langle y'(u),y''(u)\rangle = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle = c^2 + \frac{(1-c^2)^2}{(cs+b)^2}\langle y''(u),y''(u)\rangle \tag{3.84}$$

elde edilir. $y(u)$ eğrisi birim küre üzerinde olduğundan eğriliği 1'dir. Yani $\langle y''(u),y''(u)\rangle = 1$ olur. Buradan da

$$\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle = \frac{c^2(1-c^2)}{(cs+b)^2} + \frac{(1-c^2)^2}{(cs+b)^2} = \frac{(1-c^2)(c^2+1-c^2)}{(cs+b)^2} \tag{3.85}$$

olur. Öte yandan, $\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle = \|\alpha''(s)\|^2 = \kappa^2(s)$ ise aşağıdaki ifade sağlanır;

$$\kappa^2(s) = \frac{1-c^2}{(cs+b)^2} \Rightarrow \kappa(s) = \frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b}. \tag{3.86}$$

□

Örnek 3.1.2. $\alpha\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ve $c\in(0,1)$ olmak üzere

$$\alpha(s)=(cs+1)\left(cos\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right),\sin\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right)\right) \tag{3.87}$$

eğrisi birim hızlı regüler bir eğri ise $\|grad\rho\|=c$ ve $\kappa(s)=\frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+1}$ olduğunu gösterelim.

Eğrinin s yay uzunluğu yay parametresine göre türevi

$$\alpha'(s)=c\left(cos\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right),\sin\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right)\right)+$$
$$\left(-\sqrt{1-c^2}\sin\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right)\right),\sqrt{1-c^2}cos\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right) \tag{3.88}$$

şeklindedir. Daha sonra $\alpha(s)$ ile $\alpha'(s)$'in iç çarpımı $\langle\alpha(s)\,,\alpha'(s)\rangle=c(cs+1)$ dir. Son olarak, eğrinin pozisyon vektörünün uzunluğu ise $\|\alpha(s)\|=cs+1$ olarak bulunur. Bu ifadeler (3.32)'de yerine yazılırsa $\|grad\rho\|=c$ olduğu görülür. Şimdi de $\alpha(s)$ eğrisinin eğriliğini bulalım. Bunun için $\alpha'(s)$ ifadesinin bir daha türevini alırsak,

$$\alpha''(s)=\left(-\frac{c\sqrt{1-c^2}}{cs+1}\sin\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right)-\frac{1-c^2}{cs+1}cos\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right),\right.$$
$$\left.\frac{c\sqrt{1-c^2}}{cs+1}cos\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right)-\frac{1-c^2}{cs+1}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+1)\right) \tag{3.89}$$

eşitliği elde edilir. İkinci türevin kendisi ile iç çarpımı

$$\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle=\frac{1-c^2}{(cs+1)^2} \tag{3.90}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle=\|\alpha''(s)\|^2=\kappa^2(s)$ olduğundan $\alpha(s)$ eğrisinin eğriliği,

$$\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle=\|\alpha''(s)\|^2=\frac{1-c^2}{(cs+1)^2}\Rightarrow\kappa^2(s)=\frac{1-c^2}{(cs+1)^2}\Rightarrow\kappa(s)=\frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+1} \tag{3.91}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Önerme 3.1.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) eğrisi verilsin. Eğer α eğrisi, sabit oranlı ise eğrinin pozisyon vektörü, $b \in \mathbb{R}$, $c \in [0,1)$ ile birlikte $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(s) = (c^2 s + cb)T(s) + \left(\frac{c^2-1}{\kappa(s)}\right)N(s) + \left(\frac{\kappa(s)c(c^2+b)}{\tau(s)} - \frac{(c^2-1)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)B(s) \quad (3.92)$$

eşitliği ile ifade edilir (Gürpınar ve ark., 2014).

İspat. α birim hızlı burulmuş (gergin) eğrisi

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (3.93)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin $T(s) = \alpha'(s)$ ile çarpımını alırsak $\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = m_0(s)$ olur. Sonuç 3.1.1. gereği $\rho = \|\alpha(s)\| = cs + b$ olduğundan, $\alpha(s)$ eğrisi $\alpha(s) = (cs + b)y(u)$ olarak ifade edilebilir ve yay uzunluğu parametresine göre türevi de $\alpha'(s) = cy(u)$ dir. Buradan eğrinin kendisiyle türevinin iç çarpımı

$$\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = c(cs + b)\langle y(u), y(u) \rangle = c^2 s + cb \quad (3.94)$$

dir. Buradan da $m_0(s) = c^2 s + cb$ elde edilir. Şimdi de $m_1(s)$ ve $m_2(s)$ katsayılarını bulalım. $m_0{}'(s) = c^2$ eşitliğini (3.10)'da yerine yazarsak,

$$m_0{}'(s) - \kappa(s)m_1(s) = 1 \Rightarrow c^2 - \kappa(s)m_1(s) = 1 \Rightarrow m_1(s) = \frac{c^2-1}{\kappa(s)} \quad (3.95)$$

olduğu görülür. Son olarak $m_2(s)$ katsayısını bulabilmek için son eşitliğin s yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak

$$m_1{}'(s) = -\frac{(c^2-1)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \quad (3.96)$$

olur. (3.96) eşitliğini ve $m_0(s) = c^2 s + cb$ ifadesini (3.11)'de yazarsak,

$$-\frac{(c^2-1)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} + \kappa(s)(c^2 s + cb) - \tau(s)m_2(s) = 0 \tag{3.97}$$

$$m_2(s) = \frac{\kappa(s)(c^2 s + cb)}{\tau(s)} - \frac{(c^2-1)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} \tag{3.98}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $\alpha(s)$ eğrisi,

$$\alpha(s) = (c^2 s + cb)T(s) + \left(\frac{c^2-1}{\kappa(s)}\right)N(s) + \left(\frac{\kappa(s)c(c^2+b)}{\tau(s)} - \frac{(c^2-1)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)B(s) \tag{3.99}$$

eşitliği ile yazılabilir.

□

3.2. T – Sabit Eğriler

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere; eğer eğrinin pozisyon vektörünün teğet bileşeninin uzunluğu ($\|\alpha^T\|$) sabit ise α eğrisine T – sabit eğri denir. α, bir T – sabit eğri ise $\|\alpha^T\| = 0$ ya da $\|\alpha^T\| = \lambda$ dır. Burada λ, sıfırdan farklı bir sabit fonksiyondur. Eğer $\|\alpha^T\| = 0$ ise eğriye, birinci türden T – sabit eğri denir, diğer durumlarda ikinci türdendir (Chen, 2002).

(3.10), (3.11) ve (3.12) eşitliklerinden aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

Teorem 3.2.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) eğri ile $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ olsun. Eğer α, birinci türden bir T – sabit eğrisi ise,

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} - \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)' = 0 \tag{3.100}$$

eşitliği sağlanır (Gürpınar ve ark., 2014).

İspat. α, birinci türden T – sabit burulmuş (gergin) eğrisi olsun. Buna göre tanım gereği $\|\alpha^T\| = 0$ dir. Yani $m_0 = 0$ olur ve (3.10) eşitliğinden, $m_1(s) = -\frac{1}{\kappa(s)}$ elde edilir ve s yay uzunluğu parametresine göre türevi ise $m_1{}'(s) = \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}$ olarak bulunur. Bu türevi (3.12) denkleminde yerine koyarsak,

$$\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} - \tau(s)m_2(s) = 0 \Rightarrow m_2(s) = \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} \tag{3.101}$$

olduğu görülür. (3.101) eşitliğini ve $m_1{}'(s)$ değerini, $m_2{}'(s) + \tau(s)m_1(s) = 0$ denkleminde yerine koyup düzenlersek,

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} - \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)' = 0. \tag{3.102}$$

olduğu görülür.

□

Açıklama 3.2.1. (3.100)'deki eşitliği sağlayan herhangi bir burulmuş (gergin) eğri $\mathbb{R}^3$ uzayında $S^2(r)$ küresi üzerinde uzanan bir küresel eğridir. Bu nedenle birinci türden her T – sabit burulmuş eğrisi küreseldir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

Teorem 3.2.2. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) eğrisi verilsin, öyle ki α ikinci türden bir T – sabit eğrisi ise

$$\left(\frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)' - \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = 0 \tag{3.103}$$

dir. Burada $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$'dır (Gürpınar ve ark., 2014).

İspat. α ikinci türden T – sabit burulmuş (gergin) eğrisi ise $m_0{}' = 0$'dır. Buna göre (3.11) ve (3.12) denklemlerinden, $m_1(s)$ ve $m_2(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarını yeniden elde edebiliriz. Aynı zamanda bu fonksiyonların s yay uzunluğu parametresine göre türevlerini de yazabiliriz.

$$m_1(s) = -\frac{1}{\kappa(s)} \Rightarrow m_1{}'(s) = \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}, \tag{3.104}$$

$$m_2(s) = \frac{m_1{}'(s)+\kappa(s)m_0(s)}{\tau(s)} \Rightarrow m_2{}'(s) = \left(\frac{m_1{}'(s)+\kappa(s)m_0(s)}{\tau(s)}\right)', m_2{}'(s) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \tag{3.105}$$

(3.105)'deki ifadeler birbirine eşitlenip, (3.104) ile verilen denklem de yerine yazılırsa

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \left(\frac{\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}+\kappa(s)m_0}{\tau(s)}\right)' \Rightarrow \left(\frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)' - \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = 0 \tag{3.106}$$

olduğu görülür.

□

Sonuç 3.2.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) eğrisi verilsin. Eğer α eğrisi, ikinci türden bir T – sabit ve κ sıfırdan farklı bir sabit ise

$$\tau(s) = \pm\sqrt{\frac{a}{2s+c_1a}} \tag{3.107}$$

dir. Burada c_1 ve $a = \kappa^2 m_0$ birer sabittir (Gürpınar ve ark., 2014).

İspat. α, ikinci türden T – sabit burulmuş (gergin) bir eğri ve κ sıfırdan farklı bir sabit olsun. O halde $m_0 = sbt$ ve $\kappa' = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla (3.103) eşitliğinden

$$\left(\frac{m_0\kappa}{\tau(s)}\right)' - \frac{\tau(s)}{\kappa} = 0 \Rightarrow \tau'(s)(m_0\kappa^2) + \tau^3(s) = 0 \tag{3.108}$$

$$\tau'(s) = -\frac{\tau^3(s)}{a} \Rightarrow \frac{d\tau}{ds} = -\frac{\tau^3(s)}{a} \Rightarrow \frac{ds}{d\tau} = -\frac{a}{\tau^3(s)} \tag{3.109}$$

dir. Son eşitliğin integralinden ise

$$\tau^2(s) = \frac{a}{2s+2c} \Rightarrow \tau(s) = \pm\sqrt{\frac{a}{2s+2c}} \tag{3.110}$$

elde edilir. Burada $2c = c_1a$ seçilebilir. Sonuç olarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\tau(s) = \pm\sqrt{\frac{a}{2s+c_1a}}. \tag{3.111}$$

□

Teorem 3.2.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ ikinci türden T – sabit burulmuş (gergin) eğrisi olsun. $\rho = \|\alpha(s)\|$ uzaklık fonksiyonu, bazı sabit $c_1 = 2m_0$ ve c_2 değerleri için aşağıdaki eşitlikle ifade edilir;

$$\rho = \sqrt{c_1 s + c_2} \tag{3.112}$$

(Gürpınar ve ark., 2014).

İspat. α, ikinci türden T – sabit burulmuş (gergin) eğrisi ise $\|\alpha^T\| = sbt$ yazılabilir. Yani $m_0 = sbt$ dir. Öte yandan ρ uzaklık fonksiyonu

$$\rho = \|\alpha(s)\| \Rightarrow \rho^2 = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle \tag{3.113}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan (3.113) eşitliğinin her iki tarafının yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak,

$$2\rho\rho' = \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle \Rightarrow \rho\rho' = \langle \alpha(s), T(s) \rangle \Rightarrow \rho\rho' = m_0 \tag{3.114}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının integralini alırsak

$$\int \rho \, d\rho = \int m_0 \, ds \Rightarrow \rho^2 = 2m_0 s + 2c \Rightarrow \rho^2 = c_1 s + c_2 \Rightarrow \rho = \sqrt{c_1 s + c_2} \tag{3.115}$$

ifadesi elde edilir.

□

Teorem 3.2.4. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ ikinci türden T – sabit burulmuş (gergin) eğrisi verilsin, α eğrisi $\mathbb{R}^3$'de bir genel helistir ancak ve ancak

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2 = -\lambda^2 s^2 - 2\lambda s c_1 + 2m_0 s + c_2 \tag{3.116}$$

dir. Burada $\lambda = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ sıfırdan farklı bir sabit ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$'dir.

İspat. ⇒: α, ikinci türden T – sabit bir burulmuş (gergin) eğrisi olsun. $\lambda = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ olduğundan Teorem 3.2.2.'den

$$\left(\frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)' = \lambda \tag{3.117}$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int \left(\frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)' ds = \int \lambda\, ds \tag{3.118}$$

$$\frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} = \lambda s + c \Rightarrow \kappa'(s) + m_0\kappa^3(s) = (\lambda s + c)\kappa^2(s)\tau(s) \tag{3.119}$$

olur. $\tau(s) = \lambda\kappa(s)$ ifadesini (3.119) eşitliğinde yerine yazıp düzenlersek,

$$\kappa'(s) + m_0\kappa^3(s) = (\lambda s + c)\kappa^3(s)\lambda \Rightarrow \frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^3(s)} = \lambda^2 s + \lambda c \tag{3.120}$$

$$\frac{\kappa'(s)}{\kappa^3(s)} + m_0 = \lambda^2 s + \lambda c \Rightarrow \frac{\kappa'(s)}{\kappa^3(s)} = \lambda^2 s + \lambda c - m_0 \tag{3.121}$$

$$\frac{1}{\kappa(s)}\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} = \lambda^2 s + \lambda c - m_0 \Rightarrow -\frac{1}{\kappa(s)}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)' = \lambda^2 s + \lambda c - m_0 \tag{3.122}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\kappa(s)}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)' = 2\lambda^2 s + 2\lambda c - 2m_0 \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2\right]' = -2\lambda^2 s - 2\lambda c + 2m_0 \tag{3.123}$$

olduğu görülür. Buradan son eşitliğin integrali alınırsa,

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2 = -\lambda^2 s^2 - 2\lambda s c_1 + 2m_0 s + c_2 \tag{3.124}$$

ifadesi elde edilir.

⇐: (3.112) eşitliğinin her iki tarafının s yay uzunluğuna göre türevi,

$$\frac{1}{\kappa(s)}\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} = \lambda\lambda' s^2 + \lambda^2 s + \lambda' s c_1 + \lambda c_1 - m_0 \tag{3.125}$$

şeklindedir. Ayrıca $\lambda = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ ifadesini son eşitlikte yazıp düzenlersek,

$$\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} = \kappa(s)\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\lambda' s^2 + \kappa(s)\frac{\tau^2(s)}{\kappa^2(s)} s + \kappa(s)\lambda' s c_1 + \kappa(s)\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} c_1 - m_0\kappa(s) \tag{3.126}$$

$$\frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} = \lambda'\left(s^2 + \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} s c_1\right) + \lambda s + c_1 \tag{3.127}$$

olarak bulunur. (3.127) ile bulunan eşitliğin yeniden türevi alınır ve (3.117) eşitliği kullanılırsa

$$\lambda = \lambda''\left(s^2 + \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} s\right) + \lambda'\left(2s + \frac{\left(\kappa'(s)sc_1+\kappa(s)\right)\tau(s) - \kappa(s)sc_1\tau'(s)}{\tau^2(s)}\right) + \lambda' s + \lambda \tag{3.128}$$

$$0 = \lambda''\left(s^2 + \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} s\right) + \lambda'\left(3s + \frac{\left(\kappa'(s)sc_1+\kappa(s)\right)\tau(s) - \kappa(s)sc_1\tau'(s)}{\tau^2(s)}\right) \tag{3.129}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için λ'nın bir sabit değere eşit olması gerekir. Dolayısıyla (3.127) eşitliğinden,

$$\frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} = \lambda s + c_1 \Rightarrow \left(\frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)' = \lambda \Rightarrow \left(\frac{\kappa'(s)+m_0\kappa^3(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)' - \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = 0 \tag{3.130}$$

olduğu görülür ve sonuç olarak $\lambda = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ sabit olduğundan, α eğrisi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir genel helistir.

□

3.3. N – Sabit Eğriler

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, eğer eğrinin pozisyon vektörünün normal bileşeninin uzunluğu ($\|\alpha^N\|$) sabit ise α eğrisine N – sabit eğri denir. α, bir N – sabit eğri ise $\|\alpha^N\| = 0$ ya da $\|\alpha^N\| = \mu$ dür. Burada μ, sıfırdan farklı bir sabit fonksiyondur. Eğer $\|\alpha^N\| = 0$ ise eğriye, birinci türden N – sabit eğri denir, diğer durumlarda ikinci türdendir (Chen, 2002).

α bir N – sabit burulmuş eğri ise

$$\|\alpha^N(s)\|^2 = {m_1}^2(s) + {m_2}^2(s) \tag{3.131}$$

eşitliği sabittir.

(3.4), (3.10), (3.11), (3.12) ve (3.131) eşitliklerinden aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Lemma 3.3.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olsun. α, N – sabit bir burulmuş (gergin) eğridir ancak ve ancak

$$m_0{}'(s) = 1 + \kappa(s)m_1(s), \tag{3.132}$$

$$m_1{}'(s) = \tau(s)m_2(s) - \kappa(s)m_0(s), \tag{3.133}$$

$$m_2{}'(s) = -\tau(s)m_1(s), \tag{3.134}$$

$$0 = m_1(s)m_1{}'(s) + m_2(s)m_2{}'(s) \tag{3.135}$$

olur. Burada $m_0(s)$, $m_1(s)$ ve $m_2(s)$ türevlenebilir fonksiyonlardır (Gürpınar ve ark., 2014).

Önerme 3.3.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olmak üzere, α birinci türden bir N – sabit burulmuş (gergin) eğri ise $\alpha(I)$, orjinden geçen bir doğrunun açık bir parçasıdır.

İspat. α, birinci türden bir N – sabit bir burulmuş (gergin) eğri olsun. Dolayısıyla $\|\alpha^N\| = 0$ dır. Yani (3.131)'den $m_1 = 0$ ve $m_2 = 0$ bulunur. Bulunan bu değerleri (3.132), (3.133) ve (3.134) eşitliklerinde yerlerine yazarsak,

$$m_0{}'(s) = 1,\ -\kappa(s)m_0(s) = 0,\ -\tau(s)m_1(s) = 0 \tag{3.136}$$

ifadeleri elde edilir. Buradan $m_0'(s) = 1 \Rightarrow m_0(s) = s + c$ olduğundan $\kappa(s) = 0$ dır. Dolayısıyla α eğrisi $\alpha(s) = (s + c)T(s)$ olarak yazılabilir. Bu eşitliğin s yay uzunluğu parametresine göre ikinci türevi ise,

$$\alpha'(s) = T(s) + (s + c\,)T'(s) = T(s) + (s + c\,)\kappa(s)N(s) = T(s), \tag{3.137}$$

$$\alpha''(s) = 0 \tag{3.138}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $\alpha(s) = \vec{U}\, s$ dir. Yani $\alpha(I)$, orjinden geçen bir doğrunun açık bir parçasıdır.

□

Tanım 3.3.1. Bir $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin pozisyon vektörü rektifiyan düzlem üzerinde ise bu eğriye rektifiyan eğri denir. α rektifiyan eğrisinin pozisyon vektörünün basit denklemi $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$ olur. $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ türevlenebilir bazı fonksiyonlardır (Chen, 2002).

Teorem 3.3.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir rektifiyan eğri, $\kappa(s) > 0$ ve s yay uzunluğu parametresi olsun. O zaman:

- **i.** $\rho = \|\alpha(s)\|$ uzaklık fonksiyonu olmak üzere, $\rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2$ dir. Burada c_1 ve c_2 birer sabittir.
- **ii.** Eğrinin pozisyon vektörünün teğet bileşeni, $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = m_0(s) = s + b$ şeklindedir. Burada b sabittir.
- **iii.** Eğrinin pozisyon vektörünün normal bileşenleri (α^N) sabit uzunluktadır. Ayrıca ρ uzunluk fonksiyonu ise sabit değildir.
- **iv.** Eğrinin pozisyon vektörünün binormal bileşeni sabittir. Ayrıca $\tau(s) \neq 0$'dır.

ifadeleri sağlanır (Chen, 2002).

İspat. i-) ⇒: α bir rektifiyan eğri ve $\kappa(s) > 0$ olsun. Tanım 3.3.1. gereği $\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_2(s)B(s)$ eşitliği yazılabilir. Aynı zamanda ρ uzaklık fonksiyonu olmak üzere $\rho = \|\alpha(s)\| = \sqrt{m_0{}^2(s) + m_2{}^2(s)}$ olarak ifade edilebilir. α rektifiyan eğri olduğundan $m_1 = 0$ dır. Bu değer (3.10), (3.11) ve (3.12) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$m_0{}'(s) - \kappa(s)m_1 = 1 \Rightarrow m_0{}'(s) = 1, \tag{3.139}$$

$$m_1{}' + \kappa(s)m_0(s) - \tau(s)m_2(s) = 0 \Rightarrow \kappa(s)m_0(s) - \tau(s)m_2(s) = 0, \tag{3.140}$$

$$m_2{}'(s) + \tau(s)m_1 = 0 \Rightarrow m_2{}'(s) = 0 \tag{3.141}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.139) ve (3.141) ifadelerinin integrali, $m_0(s) = s + c$ ve $m_2(s) = d$ dir. Bulunan bu değerler (3.140)'da yerine yazarsak, $\tau(s)d - \kappa(s)(s + c) = 0$ eşitliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\rho^2 = \|\alpha(s)\|^2 = m_0{}^2(s) + m_2{}^2(s) \Rightarrow \rho\rho' = m_0(s)m_0{}'(s) + m_2(s)m_2{}'(s) \tag{3.142}$$

yazılabilir. (3.139) ve (3.140) ifadelerinden

$$\rho\rho' = m_0(s) = s + c \Rightarrow 2\rho\rho' = 2s + 2c \tag{3.143}$$

dir. Son eşitliğin integralinden ise

$$\rho^2 = s^2 + 2cs + c_2 \Rightarrow \rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2 \tag{3.144}$$

eşitliği elde edilir.

⇐: $\rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2$ eşitliği verilsin. (3.4) ifadesinden, $\rho^2 = m_0{}^2(s) + m_1{}^2(s) + m_2{}^2(s)$ yazılabilir. Bu eşitliğin türevi ise

$$\rho\rho' = m_0(s)m_0{}'(s) + m_1(s)m_1{}'(s) + m_2(s)m_2{}'(s) \tag{3.145}$$

olarak bulunur. (3.132), (3.133), (3.134) denklemlerini, (3.145) eşitliğinde yerine yazdığımızda $m_0(s) = s + c$ ifadesi elde edilir. Buradan $m_0{}'(s) = 1$ olur. Bulunan bu ifadeyi de $m_0{}'(s) = 1 + \kappa(s)m_1(s)$ eşitliğinde yerine koyarsak $\kappa(s)m_1(s) = 0$ elde edilir. Buradan $\kappa(s) > 0$ olduğundan $m_1(s) = 0$ olur. Dolayısıyla $\langle \alpha(s), N(s) \rangle = 0$ dır. Yani α eğrisi bir rektifiyan eğri olur.

□

ii-) ⇒: α, rektifiyan bir eğri olmak üzere, $m_0{}'(s) = 1$ dir. Buradan $m_0(s) = s + b$ elde edilir. Dolayısıyla $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = m_0(s) = s + b$ yazılabilir.

⇐: $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = m_0(s) = s + b$ olsun. $m_0{}'(s) = 1$ olmak üzere bu eşitlik (3.10)'da yerine yazılırsa $\kappa(s)m_1(s) = 0$ eşitliği elde edilir. Buradan $\kappa(s) > 0$ olduğundan $m_1(s) = 0$ dır. Sonuç olarak α, bir rektifiyan eğri olur.

□

iii-) **⇒:** α, rektifiyan bir eğri olmak üzere ρ uzunluk fonksiyonunun sabit olmadığı i-) ile verilen kısımda ispatlanmıştır. Eğrinin pozisyon vektörünün normal bileşenlerinin uzunluğunun sabit olduğunu göstermeliyiz. i-) ile verilen ispatta ve $m_2(s) = d$ olduğunu göstermiştik. Ayrıca α, rektifiyan bir eğri olduğundan $m_1(s) = 0$'dır. Bulunan bu değerler (3.131) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\|\alpha^N(s)\|^2 = d^2 \Rightarrow \|\alpha^N(s)\| = d \tag{3.146}$$

olarak bulunur. Böylece eğrinin pozisyon vektörünün normal bileşenlerinin uzunluğunun sabit olduğu ispatlanmıştır.

⇐: Eğrinin pozisyon vektörünün normal bileşenlerinin uzunluğu sabit olsun, aynı zamanda ρ uzunluk fonksiyonu ise sabit olmasın. (3.131) eşitliğinin her iki tarafının yay uzunluğu parametresine göre türevi

$$\|\alpha^N(s)\|^2 = m_1{}^2(s) + m_2{}^2(s) \Rightarrow 0 = m_1(s)m_1{}'(s) + m_2(s)m_2{}'(s) \tag{3.147}$$

olarak elde edilir. (3.10), (3.11) ve (3.12) eşitliklerini (3.147)'de yerine yazarsak, $\kappa(s)m_0(s)m_1(s) = 0$ elde edilir. Burada $\kappa(s) > 0$ ve $m_0(s) > 0$ olduğundan $m_1(s) = 0$ dır. Yani α eğrisi, bir rektifiyan eğri olur.

□

iv-) **⇒:** α, rektifiyan bir eğri olsun. Dolayısıyla $\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_2(s)B(s)$ yazılabilir. i-)'in ispatından $m_0(s) = s + c$ ve $m_2 = d$ olduğunu biliyoruz. Öte yandan yukarıdaki eşitliği $B(s)$ binormal vektör alanı ile iç çarparsak

$$\langle \alpha(s), B(s) \rangle = m_0(s)\langle T(s), B(s) \rangle + m_2(s)\langle B(s), B(s) \rangle = m_2 \qquad (3.148)$$

ifadesi elde edilir. m_2 sabit olduğundan α eğrisinin pozisyon vektörünün binormal bileşeni de sabit olur. Şimdi de burulma fonksiyonun sıfırdan farklı olduğunu gösterelim. (3.11) eşitliğinden

$$\tau(s)d - \kappa(s)(s + c\,) = 0 \Rightarrow \tau(s) = \frac{\kappa(s)(s+c\,)}{d} \qquad (3.149)$$

ifadesi yazılabilir. $\kappa(s) > 0$ olduğundan $\tau(s) \neq 0$ elde edilir.

⇐: Eğrinin pozisyon vektörünün binormal bileşeni sabit olsun. Dolayısıyla $\langle \alpha(s), B(s) \rangle = m_2 = sbt$ dir. Son eşitliğin yay uzunluğu parametresine göre türevi

$$\langle \alpha'(s), B(s) \rangle + \langle \alpha(s), B'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle T(s), B(s) \rangle + \langle \alpha(s), -\tau(s)N(s) \rangle = 0 \qquad (3.150)$$

olarak bulunur. Buradan ise $-\tau(s)m_1 = 0$ elde edilir. $\tau(s) \neq 0$ olduğundan $m_1 = 0$ dır. Sonuç olarak α, rektifiyan bir eğridir.

□

Teorem 3.3.2. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri ve $\kappa(s) > 0$ olsun. α, rektifiyan bir eğriye congruent ise eğrinin eğrilikleri oranı yay uzunluğu cinsinden sabit olmayan lineer fonksiyon şeklinde yazılabilir. Yani $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2$ dir. c_1, c_2 birer sabit ve $c_1 \neq 0$'dır (Chen, 2002).

İspat. α, rektifiyan bir eğriye congruent olsun. Buradan α eğrisinin rektifiyan bir eğri olduğu sonucunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $m_1 = 0$ yazılabilir. Bu değeri (3.10), (3.11) ve (3.12) eşitliklerinde yerine yazarsak

$$m_0{}'(s) = 1, \tau(s)m_2(s) - \kappa(s)m_0(s) = 0, m_2{}'(s) = 0 \qquad (3.151)$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca Teorem 3.3.1.'deki i-)'in ispatından $m_0(s) = s + c$ ve $m_2 = d$ olduğunu biliyoruz. Bu denklemleri (3.151)'de yerine yazarsak

$$\tau(s)d-\kappa(s)(s+c)=0 \Rightarrow \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}=\frac{s+c}{d} \Rightarrow \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}=\frac{1}{d}s+\frac{c}{d} \tag{3.152}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\frac{1}{d}=c_1$ ve $\frac{c}{d}=c_2$ seçilirse, aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}=c_1s+c_2. \tag{3.153}$$

□

Örnek 3.3.1. $\alpha(s)=-\cos[\int\tau(s)\,ds]\,N(s)+\sin[\int\tau(s)\,ds]\,B(s)$ parametrizasyonu ile verilen α burulmuş eğrisi hem birinci türden bir T – sabit hem de ikinci türden bir N – sabit eğrisidir.

Teorem 3.3.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birinci türden T – sabit olmayan bir burulmuş (gergin) eğrisi ve s yay uzunluğu parametresi olsun. α, ikinci türden bir N – sabit eğrisi ise eğrinin pozisyon vektörünün parametrizasyonu, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\alpha(s)=(s+\lambda)T(s)+\mu B(s) \tag{3.154}$$

şeklindedir (Gürpınar ve ark., 2014).

İspat. α, birinci türden T – sabit olmayan ve ikinci türden bir N – sabit bir burulmuş (gergin) eğri olsun. (3.134) ile verilen ifadeyi (3.135)'de yerine yazdığımızda, $m_1(s)(m_1'(s)-\tau(s)m_2(s))=0$ elde edilir. Burada ya $m_1(s)=0$ yada $m_1'(s)-\tau(s)m_2(s)$ dir. $m_1'(s)-\tau(s)m_2(s)=0$ olduğunu kabul edelim. Bu eşitlikte $m_1'(s)$ yerine (3.133)'deki eşitlik yazılırsa $\kappa(s)m_0(s)=0$ elde edilir. Burada $\kappa(s)>0$ olduğundan $m_0(s)=0$ dır. Ancak α burulmuş eğrisi, birinci türden T – sabit olmayan bir eğri olduğundan $m_0(s)\neq 0$ olmalıdır. Sonuç olarak $m_0(s)=0$ olması kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla $m_1(s)=0$ olmalıdır. Bu ifadeyi de (3.132) ve (3.133) eşitliklerinde yerine yazarsak $m_0'(s)=1$ ve $m_2'(s)=0$ olur. Buradan da $m_0(s)=s+\lambda$ ve $m_2(s)=\mu$ elde edilir. Sonuç olarak α eğrisinin pozisyon vektörünün parametrizasyonu, $\alpha(s)=(s+\lambda)T(s)+\mu B(s)$ olarak elde edilir.

□

Sonuç 3.3.1. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ikinci türden bir N – sabit burulmuş (gergin) eğrisi verilsin. Eğrinin eğrilikleri oranı yay uzunluğu parametresi cinsinden sabit olmayan lineer fonksiyon şeklinde yazılabilir (Gürpınar ve ark., 2014).

İspat. α, ikinci türden bir N – sabit burulmuş (gergin) eğrisi verilsin. Teorem 3.3.3.'de $m_0(s) = s + \lambda$, $m_1(s) = 0$ ve $m_2(s) = \mu$ olduğunu ifade etmiştik. Bu eşitlikleri (3.133) ile verilen denklemde yerine yazdığımızda,

$$\tau(s)\mu - \kappa(s)(s + \lambda) = 0 \Rightarrow \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{(s+\lambda)}{\mu} \tag{3.155}$$

olduğu görülür.

□

4. SABİT ORANLI BERTRAND EĞRİLERİ

Teorem 4.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş eğrisi verilsin, öyle ki bu eğri

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir. α eğrisinin Bertrand eğri çifti olan α^* eğrisi

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)T^*(s) + m_1{}^*(s)N^*(s) + m_2{}^*(s)B^*(s) \tag{4.2}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$m_0{}^*(s) = m_0(s)\cos\theta - m_2(s)\sin\theta, \tag{4.3}$$

$$m_1{}^*(s) = m_1(s) + h, \tag{4.4}$$

$$m_2{}^*(s) = m_0(s)\sin\theta + m_2(s)\cos\theta \tag{4.5}$$

şeklinde olup $\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s)$ dir. θ, T ve T^* arasındaki açıdır. Ayrıca $m_0, m_1, m_2: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

İspat. α^* eğrisi, α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s) \tag{4.6}$$

dir. Teorem 2.5.3. ile verilen α^* eğrisinin Frenet vektör alanları (4.2)'de yerine yazılıp, düzenlenirse

$$\begin{aligned}\alpha^*(s) = {} & m_0{}^*(s)\big(\cos\theta\, T(s) - \sin\theta\, B(s)\big) + m_1{}^*(s)N(s) \\ & + m_2{}^*(s)\big(\sin\theta\, T(s) + \cos\theta\, B(s)\big)\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\alpha^*(s) = {} & T(s)(m_0{}^*(s)\cos\theta + m_2{}^*(s)\sin\theta) + N(s)m_1{}^*(s) \\ & + B(s)(-m_0{}^*(s)\sin\theta + m_2{}^*(s)\cos\theta)\end{aligned} \tag{4.8}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan (4.1) eşitliğini (4.6)'de yerine yazalım.

$$\alpha^*(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) + hN(s) \tag{4.9}$$

$$\alpha^*(s) = m_0(s)T(s) + (m_1(s) + h)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{4.10}$$

Daha sonra (4.8) ve (4.10)'dan

$$m_0(s) = m_0{}^*(s)\cos\theta + m_2{}^*(s)\sin\theta, \tag{4.11}$$

$$m_1(s) = \ m_1{}^*(s) - h, \tag{4.12}$$

$$m_2(s) = -m_0{}^*(s)\sin\theta + m_2{}^*(s)\cos\theta \tag{4.13}$$

olduğu görülür. Buradan

$$m_0{}^*(s) = m_0(s)\cos\theta - m_2(s)\sin\theta, \tag{4.14}$$

$$m_1{}^*(s) = m_1(s) + h, \tag{4.15}$$

$$m_2{}^*(s) = m_0(s)\sin\theta + m_2(s)\cos\theta. \tag{4.16}$$

eşitlikleri elde edilir.

□

Teorem 4.2. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş bir W- eğrisi olsun, öyle ki bu eğri

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{4.17}$$

şeklinde ifade edilsin. α eğrisinin Bertrand eğri çifti de

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)T^*(s) + m_1{}^*(s)N^*(s) + m_2{}^*(s)B^*(s) \tag{4.18}$$

olarak verilsin. Burada

$$m_0^*(s) = c_0(\tau\cos\theta - \kappa\sin\theta) + (\tau\sin\theta + \kappa\cos\theta)(c_2\sin(as) - c_1\cos(as)) + \frac{\tau^2}{a^2}s\cos\theta - \frac{\kappa\tau}{a^2}s\sin\theta, \quad (4.19)$$

$$m_1^*(s) = ac_1\sin(as) + ac_2\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2} + h, \quad (4.20)$$

$$m_2^*(s) = c_0(\tau\sin\theta + \kappa\cos\theta) + (\tau\cos\theta - \kappa\sin\theta)(c_1\cos(as) - c_2\sin(as)) + \frac{\tau^2}{a^2}s\sin\theta + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\cos\theta \quad (4.21)$$

dir. Ayrıca κ ve τ, α eğrisinin sırasıyla eğrilik ve burulması, $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sabitler, $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ve θ ise T ve T^* arasındaki açıdır.

İspat. Önerme 3.1.1.'de bilinen $m_0(s)$, $m_1(s)$ ve $m_2(s)$ değerlerini (4.3), (4.4) ve (4.5) ile verilen eşitliklerde yerine yazarsak,

$$m_0^*(s) = \cos\theta\left(c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s\right) - \sin\theta\left(c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\right), \quad (4.22)$$

$$m_1^*(s) = ac_1\sin(as) + ac_2\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2} + h, \quad (4.23)$$

$$m_2^*(s) = \sin\theta\left(c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s\right) + \cos\theta\left(c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\right) \quad (4.24)$$

ifadeleri elde edilir. Bu denklemleri düzenlersek,

$$m_0^*(s) = c_0(\tau\cos\theta - \kappa\sin\theta) + (\tau\sin\theta + \kappa\cos\theta)(c_2\sin(as) - c_1\cos(as)) + \frac{\tau^2}{a^2}s\cos\theta - \frac{\kappa\tau}{a^2}s\sin\theta, \quad (4.25)$$

$$m_1{}^*(s) = ac_1 \sin(as) + ac_2 \cos(as) - \frac{\kappa}{a^2} + h, \tag{4.26}$$

$$m_2{}^*(s) = c_0(\tau \sin\theta + \kappa \cos\theta) + (\tau \cos\theta - \kappa \sin\theta)(c_1 \cos(as) - c_2 \sin(as)) \\ + \frac{\tau^2}{a^2} s \sin\theta + \frac{\kappa\tau}{a^2} s \cos\theta \tag{4.27}$$

olduğu görülür.

□

Teorem 4.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin, öyle ki

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{4.28}$$

şeklinde ifade edilsin. α eğrisinin Bertrand eğri çifti α^* olmak üzere bu eğrinin, eğrilik ve burulması

$$(m_1(s) + h)\kappa^*(s) = \frac{1}{V^*}\left[\tau(s)m_1(s) \sin\theta + \big(1 + \kappa(s)m_1(s)\big) \cos\theta - V^*\right], \tag{4.29}$$

$$(m_1(s) + h)\tau^*(s) = \frac{1}{V^*}\left[\tau(s)m_1(s) \cos\theta - \big(1 + \kappa(s)m_1(s)\big) \sin\theta\right] \tag{4.30}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$, α eğrisinin eğrilikleri, $m_1(s)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve θ ise T ile T^* arasındaki açıdır. Ayrıca V^*, α^* eğrisinin bir hız fonksiyonudur ve

$$V^* = \sqrt{(1 - \kappa(s)h)^2 + (\tau(s)h)^2} \tag{4.31}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

İspat. α eğrisinin Bertrand eğri çifti olan α^* eğrisi

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)T^*(s) + m_1{}^*(s)N^*(s) + m_2{}^*(s)B^*(s) \tag{4.32}$$

şeklinde yazılabilir. (4.3), (4.4) ve (4.5)'deki eşitliklerin yay uzunluğu parametresine göre türevi

$$m_0{}^{*\prime}(s) = m_0{}'(s)\cos\theta - m_2{}'(s)\sin\theta, \tag{4.33}$$

$$m_1{}^{*\prime}(s) = m_1{}'(s), \tag{4.34}$$

$$m_2{}^{*\prime}(s) = m_0{}'(s)\sin\theta + m_2{}'(s)\cos\theta \tag{4.35}$$

olur. Bulunan bu türevleri (3.7), (3.8) ve (3.9) ile verilen eşitliklerde yerine yazarsak,

$$m_0{}'(s)\cos\theta - m_2{}'(s)\sin\theta - m_1{}^*(s)V^*\kappa^*(s) = V^*, \tag{4.36}$$

$$m_0{}'(s)\sin\theta + m_2{}'(s)\cos\theta + m_1{}^*(s)V^*\tau^*(s) = 0 \tag{4.37}$$

olur. Daha sonra $m_1{}^*(s) = m_1(s) + h$ olduğundan

$$m_0{}'(s)\cos\theta - m_2{}'(s)\sin\theta - (m_1(s) + h\,)V^*\kappa^*(s) = V^*, \tag{4.38}$$

$$m_0{}'(s)\sin\theta + m_2{}'(s)\cos\theta + (m_1(s) + h\,)V^*\tau^*(s) = 0 \tag{4.39}$$

dır. (3.10), (3.11) ve (3.12) ile verilen ifadeleri son eşitliklerde yerine yazıp, düzenlersek

$$(m_1(s) + h)\kappa^*(s) = \frac{1}{V^*}\left[\tau(s)m_1(s)\sin\theta + \big(1 + \kappa(s)m_1(s)\big)\cos\theta - V^*\right], \tag{4.40}$$

$$(m_1(s) + h)\tau^*(s) = \frac{1}{V^*}\left[\tau(s)m_1(s)\cos\theta - \big(1 + \kappa(s)m_1(s)\big)\sin\theta\right] \tag{4.41}$$

olduğu görülür.

□

Teorem 4.4. $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ bir T- sabit düzlemsel eğri olsun, öyle ki (4.1) ile ifade edilsin. Buna göre α eğrisinin Bertrand eğri çifti de bir T- sabit eğrisidir.

İspat. α eğrisi düzlemsel bir eğri olduğundan $\tau = 0$ dır. O halde (3.12) eşitliğinden $m_2{}'(s) = 0$ dır. Ayrıca α eğrisi birinci veya ikinci türden bir T- sabit eğri olduğundan $m_0{}'(s) = 0$ dır. Diğer taraftan $m_0{}^*(s) = m_0(s)\cos\theta - m_2(s)\sin\theta$ eşitliğinin yay uzunluğu parametresine göre türevi, $m_0{}^{*\prime}(s) = m_0{}'(s)\cos\theta - m_2{}'(s)\sin\theta$ dir. Bulunan bu türev fonksiyonunda yukarıdaki eşitlikler yazılırsa, $m_0{}^{*\prime}(s) = -m_2{}'(s)\sin\theta$ olur. Dolayısıyla $m_0{}^{*\prime}(s) = 0 \Rightarrow m_0{}^*(s) = sbt$ elde edilir. Sonuç olarak α^* eğrisi de bir T- sabit eğri olur.

□

Örnek 4.1. α eğrisi,

$$\alpha(s) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sin(\sqrt{3}s), \sqrt{2}, \cos(\sqrt{3}s)\right) \tag{4.42}$$

şeklinde verilsin. α eğrisi, birinci türden T- sabit düzlemsel bir eğri ise Bertrand eğri çifti olan $\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s)$ eğrisinin de, $h \in \mathbb{R}$ olmak üzere, birinci türden bir T- sabit eğri olduğunu gösterelim. $\|\alpha'(s)\| = 1$ olduğundan α eğrisi birim hızlı bir eğridir. Bu eğrinin Frenet vektör alanları ile eğrilik fonksiyonları

$$T(s) = \left(\cos(\sqrt{3}s), 0, -\sin(\sqrt{3}s)\right),\ N(s) = \left(-\sin(\sqrt{3}s), 0, \cos(\sqrt{3}s)\right), \tag{4.42}$$

$$B(s) = (0, -1, 0),\ \kappa(s) = \sqrt{3}\,,\ \tau(s) = 0 \tag{4.43}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan α eğrisi, $\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s)$ olarak yazılabilir. Burada $m_0(s) = 0$ olur. Dolayısıyla α eğrisi birinci türden düzlemsel bir T- sabit eğridir. Bu eğrinin Bertrand eğri çifti

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sin(\sqrt{3}s), h + \sqrt{2}, \cos(\sqrt{3}s)\right) \tag{4.44}$$

şeklinde olup, yay uzunluğu parametresine göre türevi $\alpha^{*\prime}(s) = \left(\cos(\sqrt{3}s), 0, -\sin(\sqrt{3}s)\right)$ olur. Ayrıca $\|\alpha^{*\prime}(s)\| = 1$ olduğundan $\alpha^{*\prime}(s) = T(s)$ dir. Yani α^* Bertrand eğrisi de birim hızlı bir eğri olur. Öte yandan α^* eğrisi (4.2) ile verilen denklemle ifade edilir. Buradan da $m_0{}^*(s) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, birinci türden düzlemsel bir T- sabit eğrinin Bertrand eğri çiftinin de birinci türden düzlemsel bir T-sabit eğri olduğu görülür.

Teorem 4.5. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi N- sabit ve birinci türden T- sabit düzlemsel bir eğri olsun, öyle ki bu eğrinin Bertrand eğri çifti olan α^* eğrisi de bir T- sabit ve N- sabit eğri olur. ($\kappa(s) > 0$).

İspat. α birinci türden bir T- sabit düzlemsel eğri ise bu eğrinin Bertrand eğri çiftinin de T- sabit bir eğri olduğunu Teorem 4.4.'de ispatladık. Şimdi ise N- sabit düzlemsel olan bir eğrinin Bertrand eğri çiftinin de N- sabit olduğunu gösterelim:

α eğrisi düzlemsel bir eğri olduğundan $\tau = 0$'dır. O halde (3.12) eşitliğinden ${m_2}'(s) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan α eğrisi hem birinci türden T- sabit hem de N- sabit ise

$$m_0(s) = 0, m_1(s){m_1}'(s) + m_2(s){m_2}'(s) = 0 \tag{4.45}$$

olur. ${m_2}'(s) = 0$ olduğundan $m_1(s){m_1}'(s) = 0$ olarak bulunur. Diğer taraftan eğri düzlemsel olup, (3.11) denkleminin düzenlersek, ${m_1}'(s) = -\kappa(s)m_0(s)$ olur ve $m_1(s)\kappa(s)m_0(s) = 0$ elde edilir. Öte yandan α^* eğrisinin N- sabit bir eğri olması için

$$m_1{}^*(s)\big(m_1{}^*(s)\big)' + m_2{}^*(s)\big(m_2{}^*(s)\big)' = 0 \tag{4.46}$$

eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz. (4.4), (4.5), (4.34) ve (4.35)'deki bilinen ifadeler ile birlikte, ${m_1}'(s) = -\kappa(s)m_0(s)$ ve ${m_2}'(s) = 0$ denklemleri (4.46)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &m_1{}^*(s)m_1{}^{*\prime}(s) + m_2{}^*(s)m_2{}^{*\prime}(s) = \big(h + m_1(s)\big){m_1}'(s) + \\ &(m_0(s)\sin\theta + m_2(s)\cos\theta)({m_0}'(s)\sin\theta + {m_2}'(s)\cos\theta) \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} &m_1{}^*(s)m_1{}^{*\prime}(s) + m_2{}^*(s)m_2{}^{*\prime}(s) = \big(h + m_1(s)\big)\big(-\kappa(s)m_0(s)\big) + \\ &(m_0(s)\sin\theta + m_2(s)\cos\theta){m_0}'(s)\sin\theta \end{aligned} \tag{4.48}$$

ifadesi elde edilir. $m_0(s) = 0$ olduğundan

$$m_1{}^*(s)\big(m_1{}^*(s)\big)' + m_2{}^*(s)\big(m_2{}^*(s)\big)' = 0 \tag{4.49}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak α^* eğrisi de N- sabit bir eğri olur.

□

Teorem 4.6. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ T- sabit bir helis eğrisi olsun, öyle ki $\theta = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ve $\kappa(s) > 0$ olmak üzere α eğrisinin Bertrand eğri çifti de bir T- sabit eğri olur.

İspat. α bir helis eğrisi ise

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c \Rightarrow \frac{1}{\kappa(s)} = \frac{c}{\tau(s)}, (c \neq 0) \tag{4.50}$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan α bir T- sabit eğri olduğundan $m_0{}'(s) = 0$ dır. Bu ifadeyi de (3.10) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$-\kappa(s)m_1(s) = 1 \Rightarrow m_1(s) = -\frac{1}{\kappa(s)} \tag{4.51}$$

olur. (4.50) ve (4.51) ifadelerinden,

$$m_1(s) = -\frac{1}{\kappa(s)} = -\frac{c}{\tau(s)} \tag{4.52}$$

elde edilir. Son eşitliği (3.12)'de yerine yazarsak

$$m_2{}'(s) + \tau(s)\left(-\frac{c}{\tau(s)}\right) = 0 \Rightarrow m_2{}'(s) = c \tag{4.53}$$

olduğu görülür. Öte yandan $m_0{}^*(s) = m_0(s)\cos\theta - m_2(s)\sin\theta$ eşitliğini s yay uzunluğu parametresine göre türevini alıp, düzenlersek

$$m_0{}^{*\prime}(s) = m_0{}'(s)\cos\theta - m_2{}'(s)\sin\theta \Rightarrow m_0{}^{*\prime}(s) = -m_2{}'(s)\sin\theta \tag{4.54}$$

olur. Buradan da $m_0{}^{*\prime}(s) = -c\sin\theta$ ifadesi yazılabilir. $\theta = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ olduğundan $\sin\theta = 0$ olur. Dolayısıyla

$$m_0{}^{*\prime}(s) = 0 \Rightarrow m_0{}^{*}(s) = \lambda, (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{4.55}$$

olacaktır. Sonuç olarak α^* eğrisi de bir T- sabit eğri olur.

□

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

- Bir T- sabit düzlemsel eğrisinin Bertrand eğrisi bir T- sabit eğrisidir.
- Hem birinci türden T- sabit hem de N- sabit düzlemsel eğrinin Bertrand eğrisi hem T- sabit hem de N- sabit eğridir.
- Bir T- sabit helis eğrisinin Bertrand eğrisi bir T- sabit eğrisidir.

5. SABİT ORANLI İNVOLÜT - EVOLÜT EĞRİLERİ

Teorem 5.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) eğrisi verilsin, öyle ki bu eğri

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{5.1}$$

şeklinde ifade edilsin. α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\tilde{\alpha}(s) = \widetilde{m_0}(s)\tilde{T}(s) + \widetilde{m_1}(s)\tilde{N}(s) + \widetilde{m_2}(s)\tilde{B}(s) \tag{5.2}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\widetilde{m_0}(s) = m_1(s), \tag{5.3}$$

$$\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}[-\kappa(s)(m_0(s) - s + \lambda) + \tau(s)m_2(s)], \tag{5.4}$$

$$\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(m_0(s) - s + \lambda) + \kappa(s)m_2(s)] \tag{5.5}$$

şeklinde olup $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s)$ dir. $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ sıfırdan farklı olmak üzere α eğrisinin eğrilik fonksiyonları, $m_0, m_1, m_2: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar, $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$'dir.

İspat. $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir involütü ise

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s) \tag{5.6}$$

dir. α ve $\tilde{\alpha}$ pozisyon vektörlerinin Frenet vektörleri cinsinden parametrize edilmiş hali sırasıyla,

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s), \tag{5.7}$$

$$\tilde{\alpha}(s) = \widetilde{m_0}(s)\tilde{T}(s) + \widetilde{m_1}(s)\tilde{N}(s) + \widetilde{m_2}(s)\tilde{B}(s) \tag{5.8}$$

şeklindedir. Teorem 2.6.2.'de verilen eşitlikleri (5.8)'de yerine yazarsak

$$\tilde{\alpha}(s) = \widetilde{m_0}(s)N(s) + \widetilde{m_1}(s)\left(\frac{-\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)$$
$$+\widetilde{m_2}(s)\left(\frac{\tau(s)T(s)+\kappa(s)B(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) \tag{5.9}$$

$$\tilde{\alpha}(s) = T(s)\left(\frac{-\kappa(s)\widetilde{m_1}(s)+\tau(s)\widetilde{m_2}(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) + N(s)\widetilde{m_0}(s)$$
$$+B(s)\left(\frac{\tau(s)\widetilde{m_1}(s)+\kappa(s)\widetilde{m_2}(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) \tag{5.10}$$

olduğu görülür. Öte yandan (5.7) eşitliğini (5.6)'da yerine yazıp, düzenlersek

$$\tilde{\alpha}(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) + (-s+\lambda)T(s) \tag{5.11}$$

$$\tilde{\alpha}(s) = (m_0(s) - s + \lambda)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{5.12}$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra (5.10) ile (5.12) ifadeleri birbirine eşitlenip, düzenlenirse

$$\frac{-\kappa(s)\widetilde{m_1}(s)+\tau(s)\widetilde{m_2}(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} = m_0(s) - s + \lambda, \tag{5.13}$$

$$\widetilde{m_0}(s) = m_1(s), \tag{5.14}$$

$$\frac{\tau(s)\widetilde{m_1}(s)+\kappa(s)\widetilde{m_2}(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} = m_2(s) \tag{5.15}$$

olur. Buradan da aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\widetilde{m_0}(s) = m_1(s), \tag{5.16}$$

$$\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}[-\kappa(s)(m_0(s) - s + \lambda) + \tau(s)m_2(s)], \tag{5.17}$$

$$\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(m_0(s) - s + \lambda) + \kappa(s)m_2(s)]. \tag{5.18}$$

□

Sonuç 5.1. $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) eğri ve

$$\tilde{\alpha}(s) = \widetilde{m_0}(s)\tilde{T}(s) + \widetilde{m_1}(s)\tilde{N}(s) + \widetilde{m_2}(s)\tilde{B}(s) \tag{5.19}$$

olarak verilsin. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin evolütü olan α eğrisi

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{5.20}$$

olarak yazılabilir. Burada (5.20) ile verilen diferansiyellenebilir katsayılar,

$$m_0(s) = \frac{1}{a}\left[-\kappa(s)\widetilde{m_1}(s) + \tau(s)\widetilde{m_2}(s)\right] + s - \lambda, \tag{5.21}$$

$$m_1(s) = \widetilde{m_0}(s), \tag{5.22}$$

$$m_2(s) = \frac{1}{a}\left[\tau(s)\widetilde{m_1}(s) + \kappa(s)\widetilde{m_2}(s)\right] \tag{5.23}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$'dir.

Teorem 5.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) bir W- eğrisi verilsin, öyle ki bu eğri

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{5.24}$$

şeklinde yazılsın. α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi ise

$$\tilde{\alpha}(s) = \widetilde{m_0}(s)\tilde{T}(s) + \widetilde{m_1}(s)\tilde{N}(s) + \widetilde{m_2}(s)\tilde{B}(s) \tag{5.25}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\widetilde{m_0}(s) = ac_1\sin(as) + ac_2\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2}, \tag{5.26}$$

$$\widetilde{m_1}(s) = ac_1\cos(as) - ac_2\sin(as) + \frac{\kappa}{a}(-s + \lambda), \tag{5.27}$$

$$\widetilde{m_2}(s) = ac_0 + \frac{\tau}{a}\lambda \tag{5.28}$$

olur. Ayrıca $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s)$ dir. κ ve τ sıfırdan farklı olmak üzere α eğrisinin eğrilikleri, c_i $(0 \le i \le 2)$ reel sabitler, $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$'dir.

İspat. Önerme 3.1.1.'de bilinen $m_0(s)$, $m_1(s)$ ve $m_2(s)$ değerlerini Teorem 5.1. ile ifade ettiğimiz eşitliklerde yerine yazarsak,

$$\widetilde{m_0}(s) = ac_1 \sin(as) + ac_2 \cos(as) - \frac{\kappa}{a^2}, \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}\Big[&-\kappa\left(c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s - s + \lambda\right) \\ &+\tau\left(c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\right)\Big],\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}\Big[&\tau\left(c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s - s + \lambda\right) \\ &+\kappa\left(c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\right)\Big]\end{aligned} \tag{5.31}$$

olur. Buradan da parantez içleri düzenlenirse,

$$\widetilde{m_0}(s) = ac_1 \sin(as) + ac_2 \cos(as) - \frac{\kappa}{a^2}, \tag{5.32}$$

$$\widetilde{m_1}(s) = ac_1 \cos(as) - ac_2 \sin(as) + \frac{\kappa}{a}(-s + \lambda), \tag{5.33}$$

$$\widetilde{m_2}(s) = ac_0 + \frac{\tau}{a}\lambda \tag{5.34}$$

ifadeleri elde edilir.

□

Teorem 5.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birinci türden bir N – sabit eğrisi ise α'nın involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi birinci türden bir T – sabit eğrisidir.

İspat. α birinci türden bir N – sabit eğrisi ise $m_1 = m_2 = 0$'dır. Bu ifadeleri (5.3) eşitliğinde yerine yazarsak $\widetilde{m_0} = 0$ olduğu görülür. Yani $\tilde{\alpha}$ eğrisi birinci türden bir T – sabit eğrisidir.

□

Teorem 5.4. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ bir T – sabit eğri olsun. α'nın involütü olan $\tilde{\alpha}$, N – sabit eğrisi olamaz.

İspat. α, birinci türden T – sabit eğri olsun. Bu durumda $m_0 = 0$ dır. Teorem 5.1.'den

$$\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}[-\kappa(s)(-s+\lambda) + \tau(s)m_2(s)], \tag{5.35}$$

$$\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(-s+\lambda) + \kappa(s)m_2(s)] \tag{5.36}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\widetilde{m_1}^2(s) + \widetilde{m_2}^2(s) = \frac{1}{a^2}\left[(-s+\lambda)^2\big(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\big) + m_2^2(s)\big(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\big)\right], \tag{5.32}$$

$$\widetilde{m_1}^2(s) + \widetilde{m_2}^2(s) = m_2^2(s) + (-s+\lambda)^2 \tag{5.37}$$

ifadesi hiçbir zaman sabit bir fonksiyon olamayacağından $\tilde{\alpha}$, N – sabit eğrisi olamaz. Eğer α, ikinci türden T – sabit eğrisi ise $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $m_0 = c$ dir. Bu durumda Teorem 5.1.'den

$$\widetilde{m_1}^2(s) + \widetilde{m_2}^2(s) = m_2^2(s) + (c - s + \lambda)^2 \tag{5.38}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{\alpha}$, N – sabit eğrisi değildir.

□

Teorem 5.5. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ ikinci türden bir T – sabit ve birinci türden N – sabit ise α'nın involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi N – sabit eğri olamaz.

İspat. α, ikinci türden T – sabit ve birinci türden N – sabit bir eğri ise sırasıyla $m_0 = c$ ve $m_1 = m_2 = 0$ dır. Teorem 5.1.'den

$$\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}[-\kappa(s)(c - s + \lambda)], \tag{5.39}$$

$$\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(c - s + \lambda)] \tag{5.40}$$

olduğu görülür. Buradan $\widetilde{m_1}^2(s) + \widetilde{m_2}^2(s) = (c - s + \lambda)^2$ elde edilir. Sonuç olarak $\tilde{\alpha}$, bir N – sabit eğri olamaz.

□

Teorem 5.6. $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı birinci türden bir T – sabit eğrisi olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin evolütü olan α eğrisi bir N – sabit eğrisidir.

İspat. $\tilde{\alpha}$ eğrisi birinci türden T – sabit eğri olduğundan $\widetilde{m_0} = 0$'dır. Sonuç 5.1. gereğince $m_1(s) = 0$ olduğu görülür. Bu durumda $m_2'(s) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Denklem (3.12)'de $m_1(s) = 0$ yerine yazılırsa $m_2'(s) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $m_1(s)$ ve $m_2(s)$ fonksiyonları sabit olduğundan, bunların kareleri toplamı da sabit olacaktır. Sonuçta, $\tilde{\alpha}$ eğrisinin evolütü olan α eğrisi de N – sabit eğrisidir.

□

Teorem 5.7. $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ birinci türden N – sabit ve ikinci türden T – sabit eğrisi ise $\tilde{\alpha}$'nın evolütü olan α eğrisi ikinci türden bir N – sabit eğrisidir.

İspat. $\tilde{\alpha}$, birinci türden N – sabit ve ikinci türden T – sabit eğrisi olsun. Buna göre $\widetilde{m_0} = c$ ve $\widetilde{m_1} = \widetilde{m_2} = 0$'dır. Sonuç 5.1.'e göre

$$m_1(s) = c, \tag{5.41}$$

$$m_2(s) = 0 \tag{5.42}$$

elde edilir. Buradan α eğrisinin ikinci türden N – sabit olduğu görülür.

□

Teorem 5.8. $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ birinci türden bir T – sabit eğrisi ise $\tilde{\alpha}$'nın evolütü olan α eğrisi hiçbir zaman T – sabit olamaz.

İspat. $\tilde{\alpha}$, birinci türden bir T – sabit eğrisi olduğuna göre $\widetilde{m_0} = 0$ dır. Sonuç 5.1. gereğince $m_1(s) = 0$ dır. Diğer taraftan (3.10) eşitliğinden $m_0{}'(s) = 1$ olduğu görülür. Yani $m_0(s)$ hiçbir zaman sabit bir fonksiyon olamaz. O halde $\tilde{\alpha}$'nın evolütü olan α eğrisi T – sabit olamaz.

□

Teorem 5.9. $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ birinci türden bir N – sabit eğrisi ise $\tilde{\alpha}$ eğrisinin evolütü olan α eğrisi hiçbir zaman T – sabit eğrisi olmaz.

İspat. $\tilde{\alpha}$ birinci türden N – sabit eğrisi ise $\widetilde{m_1}(s) = \widetilde{m_2}(s) = 0$ dır. Sonuç 5.1.'e göre $m_0(s) = s - \lambda$ elde edilir. O halde α eğrisi bir T – sabit eğri olamaz.

□

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

- Birinci türden bir N – sabit eğrisinin involütü birinci türden bir T – sabit eğrisidir.
- Bir T – sabit eğrisinin involütü hiçbir zaman N – sabit eğrisi olamaz.
- Hem ikinci türden T – sabit hem de birinci türden N – sabit eğrisinin involütü hiçbir zaman N – sabit eğri olamaz.
- Birinci türden bir T – sabit eğrisinin evolütü bir N – sabit eğrisidir.
- Hem birinci türden N – sabit hem de ikinci türden T – sabit eğrisinin evolütü bir N – sabit eğrisidir.
- Birinci türden bir T – sabit eğrisinin evolütü olan α hiçbir zaman T – sabit eğri olamaz.
- Birinci türden bir N – sabit eğrisinin evolütü hiçbir zaman T – sabit eğrisi olamaz.

KAYNAKLAR

Bozkurt, Z., Gök, I. and Ekmekçi, F. N., 2013, Characterization of rectifying, normal and osculating curves in there dimensional compact Lie groups, *Life Sci.*, 10, 353-362.

Chen, B. Y., 2001, Constant ratio Hypersurfaces, *Soochow J. Math.*, 27, 353-362.

Chen, B. Y., 2002, Convolution of Riemannian manifolds and its applications, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 66, 177-191.

Chen, B. Y., 2003, More on convolution of Riemannian manifolds, *Beitrage Algebra Geom.*, 44, 9-24.

Chen, B. Y., 2003, When does the position vector of space curve always lies in its rectifying plane?, *Amer. Math. Montly*, 110, 147-152.

Chen, B. Y. and Dillen F., 2005, Rectifying curves as centrodes and extremal curves, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, 33, 77-90.

Do Cormo, M. P. 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. *Prentice – Hall*, New Jersey, 511s.

Edwards, C.H., Penney, D.E., 2004. Differential Equations and Boundry Value Problems, Computing and Modelling, *Prentice – Hall*, New Jersey, 787s.

Ezentaş, R. and Türkay S., 2004, Helical versus of rectifying curves in Lorentzian spaces, *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi.* 6, 239-244.

Gürpınar, S., Arslan, K. and Öztürk, G., 2014, A Characterization of Constant-Ratio Curves in Euclidean 3-Space $\mathbb{R}^3$, *arXiv:1410.5577v1 [math.DG]*, 1-10.

İlarslan, K., Nesoviç, E. and Petroviç, T. M., 2003, Some characterization of rectifying curves in the Minkowski 3-space, *Novi Sad J. Math.*, 33, 23-32.

İlarslan, K. and Nesoviç, E., 2007, On rectifying curves as centrodes and extremal curves in the Minkowski-3 space $\mathbb{R}_1^3$, *Novi. Sad. J. Math.*, 37, 53-64.

İlarslan, K. and Boyacıoğlu, Ö., 2007, Position vectors of a spacelike W-curve in Minkowski space $\mathbb{R}_1^3$, *Bull. Korean Math. Soc.*, 44, 429-438.

Öztürk, G. and Kişi, İ., 2015, Constant ratio curves according to Bishop frame in Minkowski 3-space $\mathbb{R}_1^3$, *Ser. Math. İnform.,* 30, 527-538

Öztürk, G., Arslan, K. and Hacısalihoğlu, H., 2008, A characterization of ccr-curves in $\mathbb{R}^n$, *Proc. Estonian Acad. Sciences,* 57, 217-224.

Sabuncuoğlu, A., 2014, Diferensiyel Geometri, *Nobel,* Ankara-Türkiye, 74-79.

Solouma, E. M. and Wageeda, M. M., 2016, Some characterization of constant ratio curves according to Bishop frame in Minkowski 4-space, *Journal of Abstract and Computational Mathematics,* 1, 47-54.

Turgut, M., Yılmaz, S., 2008, Contributionss to classical differantial geometry of the curves in E^3, *Scientia Magna*, 4, 4-9.

Yüce, S., 2017, Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, *Pegem Akademi,* Ankara-Türkiye, 224-257.

Yücesan, A., Ayyıldız, N. and Çöken, A. C., 2007, On rectifying dual space curves, *Rev. Math. Comp*., 20, 497-506.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Serkan Öztürk
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Beyşehir 26.09.1989
Telefon	**:**	5538054223
Faks	**:**	
e-mail	**:**	ozturkserkan42@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Kulu Lisesi, Kulu, Konya	2006
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2012
Yüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya	2018
Doktora	:		

YAYINLAR

Öztürk, S., Erdoğdu, M., Constant – Ratio Bertrand Curves in Euclidean Space, 3^{rd} *International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences-ICANAS 2018*, Antalya-Turkey.