



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



EKSPONANSİYEL TİPTEN FARK  
DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Mustafa AKDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak - 2018  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır

## TEZ KABUL VE ONAYI

Mustafa AKDAĞ tarafından hazırlanan “EKSPONANSİYEL TİPTEN FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA” adlı tez çalışması 17/01/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

.....

#### Danışman

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

.....

#### Üye

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Emre ERDOĞAN

.....

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum.

Enstitü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

Mustafa AKDAĞ  
17/01/2018

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### EKSPONANSİYEL TIPTEN FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Mustafa AKDAĞ

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2018, 30 Sayfa

#### Jüri

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER  
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA  
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Emre ERDOĞAN

Bu çalışma toplam dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; eksponansiyel tipten fark denklemleri ve fark denklem sistemlerinin pozitif çözümleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde;  $a, b$  pozitif sabitler ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-x_n}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; çalışmaya dair sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Eksponansiyel tipten fark denklemi, Denge noktası, Asimptotik davranış, Sınırlılık.

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**A STUDY ON THE EXPONENTIAL TYPE DIFFERENCE EQUATIONS**

**Mustafa AKDAĞ**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS**

**Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA**

**2018, 30 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER**

**Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA**

**Yrd. Doç. Dr. Mehmet Emre ERDOĞAN**

This study consists of four sections. In the first section, general definitions and theorems related to difference equations were given.

In the second section, informations about some of the studies regarding positive solutions of the exponential type difference equations and systems studied before were given.

In the third section, we study the boundedness and asymptotic behavior of positive solutions for the difference equation

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-x_n}$$

where  $a, b$  are positive constants, and the initial values  $x_{-1}, x_0$  are nonnegative numbers

In the fourth section, some conclusions and suggestions were given.

**Keywords:** Exponential type difference equation, Equilibrium point, Asymptotic behavior, Boundedness.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' nın yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarımın her aşamasında beni büyük bir sabır ve itina ile yönlendiren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' ya ve her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa AKDAĞ  
KONYA-2018



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Fark Denklemleri İle İlgili Genel Tanım Ve Teoremler .....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	9
3. $x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-x_{n-1}}$ FARK DENKLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ .....	14
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	27
KAYNAKLAR .....	28
ÖZGEÇMİŞ .....	30

## 1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemlerin ayrık benzerleri ve nümerik çözümleri olarak ortaya çıkan fark denklemleri uygulama alanlarının genişliğinden dolayı son yıllarda pek çok bilim adamının ilgisini çekmiş ve bu durum fark denklemlerinin teorik olarak hızla gelişmesine katkı sağlamıştır.

Fark denklemleri mühendislik, tıp, ekonomi, iktisat, fizik, genetik, biyoloji gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, ekonomide arz-talep denklemlerinin oluşturulmasında, ekonomik dalgalanmaların açıklanmasında, işsizlik oranının hesaplanmasında, genetik alanda kuşaklar arasındaki genetik başkalaşım problemlerinde, biyolojide popülasyon sayılarının araştırılmasında, tıpta hücre hareketlerinin takibinde kullanılmaktadır. Bu nedenle, fark denklemleri üzerine yapılacak çalışmalar uygulamalı matematiğin yanı sıra diğer bilim dallarının da gelişimine olumlu yönde katkı sağlayacaktır.

Tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; fark denklemleriyle ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; eksponansiyel tipten fark denklemleri ile ilgili literatür araştırması yapılmıştır.

Üçüncü bölümde; literatürde var olan denklemlerden yola çıkılarak eksponansiyel tipten yeni bir fark denklemi tanımlanmış ve tanımlanan denklemin pozitif çözümlerinin sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

Dördüncü bölüm ise sonuç ve önerilerden meydana gelmektedir.

### 1.1. Fark Denklemleri İle İlgili Genel Tanım Ve Teoremler

Bu kısımda fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 1.1.1.** Bir  $x: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için  $\Delta$  fark operatörü (ileri fark) veya  $x$  in birinci mertebeden (basamaktan) farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (1.1.1)$$

şeklinde tanımlanır; burada  $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$  doğal sayılar kümesi ve  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesidir.

Buna göre  $x$  in ikinci mertebeden farkı ( $\Delta^2 x$ )

$$\Delta^2 x(n) = \Delta(\Delta x(n)) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) \quad (1.1.2)$$

ve böyle devam ederek  $x$  in  $k$  . mertebeden farkı ( $\Delta^k x$ )

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j) \quad (1.1.3)$$

şeklinde hesaplanır; burada  $k \geq j$  olmak üzere,

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} \quad (1.1.4)$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Teorem 1.1.1.**  $\Delta$  fark operatörü lineerdir; yani

$$\Delta(ax(n) + by(n)) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n) \quad (1.1.5)$$

dir; burada  $a$  ve  $b$  sabitlerdir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Örnek 1.1.1.**  $\Delta(7n^2 - 5n + 1) = 7\Delta n^2 - 5\Delta n + \Delta 1 = 14n + 2$  (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Tanım 1.1.2.**  $E$  öteleme (kaydırma) operatörü

$$Ex(n) = x(n+1) \quad (1.1.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre

$$E^k x(n) = x(n+k) \quad (1.1.7)$$

dır. Ayrıca,  $a$  ve  $b$  sabitleri için

$$E(ax(n) + by(n)) = aEx(n) + bEy(n) \quad (1.1.8)$$

dir; yani  $E$  operatörü lineerlik özelliğine sahiptir.

$\Delta$  ve  $E$  operatörleri arasında

$$\Delta = E - I \quad (1.1.9)$$

ilişkisi vardır; burada  $I$  özdeşlik operatörüdür; yani  $Ix(n) = x(n)$ .

Buradan

$$\Delta E = E \Delta \quad (1.1.10)$$

değişme özelliği ortaya çıkar. Binom formülünden,  $k$ . mertebeden fark ve öteleme operatörleri sırasıyla,

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j E^{k-j} \quad (1.1.11)$$

ve

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \Delta^{k-j} \quad (1.1.12)$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Teorem 1.1.2.**

(a) Her  $k, l \in \mathbb{Z}^+$  için  $\Delta^k \Delta^l = \Delta^l \Delta^k = \Delta^{k+l}$  ve  $E^k E^l = E^l E^k = E^{k+l}$ ;

(b)  $\Delta(x(n)y(n)) = y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n)$ ;

(c)  $\Delta \left( \frac{x(n)}{y(n)} \right) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)}$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Tanım 1.1.3.**  $n \in \mathbb{N}_0$  bağımsız değişken ve  $x$  bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0 \quad (1.1.13)$$

eşitliğine bir fark denklemi denir.

$E = \Delta + I$  operatörü göz önüne alınırsa, (1.1.13) fark denklemi

$$G(n, x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^k x(n)) = 0 \quad (1.1.14)$$

formunda yazılabilir.

(1.1.13) denklemi

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)) \quad (1.1.15)$$

ya da

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^{k-1} x(n)) \quad (1.1.16)$$

ya da

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)) \quad (1.1.17)$$

formunda ise, normal fark denklemi adını alır (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Örnek 1.1.2.** Bir  $S$  cümlesi üzerinde tanımlı olan

$$\Delta x(n) + 3x(n) = 0, \quad (1.1.18)$$

$$\Delta^2 x(n) + 2\Delta x(n) + x(n) = 0, \quad (1.1.19)$$

$$\Delta^2 x(n) - nx(n) = 2n + 7, \quad (1.1.20)$$

$$x(n)\Delta^3 x(n) = \frac{1}{2}, \quad (1.1.21)$$

$$(\Delta x(n))^2 + x^2(n) = -1, \quad (1.1.22)$$

fark denklemlerini göz önüne alalım; burada  $S$ , bir  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  sayısından başlayan ardışık doğal sayıların sonlu ya da sonsuz bir kümesidir. Bu denklemlerin hepsinde bağımsız değişken  $n$  ve bilinmeyen fonksiyon  $x$  tir. (1.1.22) hariç diğerleri normal formda yazılabilen denklemlerdir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Fark denklem literatüründe  $x(n)$  yerine sık sık  $x_n$  sembolü kullanılabilir.

Buna göre  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$  olup yukarıdaki denklemlerin eşdeğerleri sırasıyla,

$$x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad (1.1.23)$$

$$x_{n+2} = 0, \quad (1.1.24)$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + (1-n)x_n = 2n + 7, \quad (1.1.25)$$

$$x_n x_{n+3} - 3x_n x_{n+2} + 3x_n x_{n+1} - x_n^2 = \frac{1}{2}, \quad (1.1.26)$$

$$(x_{n+1} - x_n)^2 + x_n^2 = -1 \quad (1.1.27)$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Tanım 1.1.4.** Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin (indislerinin) farkına o denklemin mertebesi (basamağı) denir.

Örneğin,  $x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} = 0$  ve  $x_{n+4} + x_n x_{n+2} = 1$  denklemlerinin mertebeleri, sırasıyla,  $n+3-(n+1)=2$  ve  $n+4-n=4$  tür.  $x_{n+7} = n(n-2)$  ise sıfırıncı mertebeden bir denklemdir; yani, açık olarak bir fonksiyondur (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Tanım 1.1.5.**  $\mathbb{N}_0$  üzerinde tanımlı bir  $x(n)$  fonksiyonu her  $n \in \mathbb{N}_0$  için (1.1.13) denklemini sağlıyorsa, o zaman  $x(n)$  fonksiyonuna  $\mathbb{N}_0$  üzerinde (1.1.13) denkleminin bir çözümü denir.  $k$  . mertebeden bir fark denkleminin,

$$\psi(n, x, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0 \quad (1.1.28)$$

veya

$$x = \varphi(n, c_1, c_2, \dots, c_k) \quad (1.1.29)$$

şeklinde  $k$  tane  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  keyfi sabit içeren çözüme genel çözüm adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de özel çözüm denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

**Teorem 1.1.3.**  $I$  reel sayıların bir aralığı ve  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $f : I^{k+1} \rightarrow I$  sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in I$  başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.1.30)$$

fark denkleminin bir tek  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.6.** Eğer  $\bar{x}$  için (1.1.30) denkleminde  $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$  ise  $\bar{x}$  noktasına (1.1.30) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.7.** Eğer her  $n > 0$  için  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in J$  iken  $x_n \in J$  olacak şekilde bir  $J \subseteq I$  alt aralığı varsa, bu  $J$  aralığına (1.1.30) denkleminin değişmez aralığı denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.8.**  $\bar{x}$ , (1.1.30) denkleminin denge noktası olmak üzere:

- (i) Eğer  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  için  $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$  iken her  $n \geq -k$  için  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası kararlıdır denir.
- (ii) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  olacak şekilde  $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$  şartını sağlayan  $\gamma > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.
- (iii) Eğer her  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  ise  $\bar{x}$  denge noktasına çekim noktası denir.
- (iv) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve çekim noktası ise  $\bar{x}$  denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.
- (v) Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.
- (vi) Eğer  $x_0, \dots, x_{-k} \in I$  iken  $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$  ve bazı  $N \geq -k$  sayıları için  $|x_N - \bar{x}| \geq r$  olacak şekilde bir  $r > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktasına repeller denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.9.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ , (1.1.30) fark denkleminin bir çözümü olsun. Eğer  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü  $n \geq -k$  için  $x_{n+p} = x_n$  şartını sağlıyorsa,  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü  $p$  periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif  $p$  tam sayısına da asal periyod denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.10.** Eğer  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için  $x_{n+p} = x_n$  şartını sağlıyorsa,  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümü er geç  $p$  periyotludur denir ve  $p$  bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.11.**  $I$  reel sayıların bir aralığı,  $k \in \mathbb{Z}^+$  ve  $i = 0, 1, \dots, k$  olmak üzere

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad (1.1.31)$$

ifadesi  $f : I^{k+1} \rightarrow I$  fonksiyonunun  $x_i$  lere göre kısmi türevlerinin  $\bar{x}$  denge noktasındaki değerleri olsun. Bu durumda,

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^k q_i z_{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.1.32)$$

denkleminin (1.1.30) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir.

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k q_i \lambda^{k-i} = 0 \quad (1.1.33)$$

polinom denkleminin ise (1.1.30) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktasındaki karakteristik denklemi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Teorem 1.1.4. (Lineer Kararlılık Teoremi)**

- (i) Eğer (1.1.33) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- (ii) Eğer (1.1.33) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.12.**  $\bar{x}$ , (1.1.30) denkleminin denge noktası olsun.  $l \geq -k$ ,  $m \leq \infty$  olmak üzere,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından büyük veya eşit,  $x_{l-1} < \bar{x}$  ve  $x_{m+1} < \bar{x}$  oluyorsa,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde,  $l \geq -k$ ,  $m \leq \infty$  olmak üzere,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından küçük,  $x_{l-1} \geq \bar{x}$  ve  $x_{m+1} \geq \bar{x}$  oluyorsa,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.13.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümlerinin hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir denir. (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.14.**  $\{x_n - \bar{x}\}$  dizisi salınımlı ise  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümüne  $\bar{x}$  denge noktası civarında salınımlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Tanım 1.1.15.**  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisinde her  $n$  için  $P \leq x_n \leq Q$  olacak şekilde  $P$  ve  $Q$  pozitif sayıları varsa  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  dizisi sınırlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

**Teorem 1.1.5. (Clark Teoremi)** (1.1.32) fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için yeter şart  $\sum_{i=0}^k |q_i| < 1$  olmasıdır.

**Lemma 1.1.1.**  $f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b]$  sürekli bir fonksiyon ve  $a, b$  pozitif reel sayılar olmak üzere

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.34)$$

denklemini ele alalım. Eğer  $f$  fonksiyonu,

- (a)  $f(u, v)$  fonksiyonu  $u$  ya göre azalmayan ve  $v$  ye göre artmayan bir fonksiyondur.
- (b)  $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ ,  $m = f(m, M)$  ve  $M = f(M, m)$  sisteminin bir çözümü ise  $m = M$  dir.

özelliklerine sahip ise (1.1.34) denklemi tek bir  $\bar{y}$  pozitif denge noktasına sahiptir ve bütün pozitif çözümler bu denge noktasına yakınsar (DeVault ve ark., 2001).

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, eksponansiyel tipten fark denklemleri ve fark denklem sistemleri konu edilerek yapılan çalışmalarla ilgili bilgi verilmiştir.

Aboutaleb ve ark. (2001), yaptıkları çalışmada  $\alpha, \beta, \gamma$  katsayıları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + x_{n-1}} \quad (2.1)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik davranışını incelemiştir.

El-Metwally ve ark. (2001), yaptıkları çalışmada  $\alpha, \beta$  katsayıları pozitif reel sayılar ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1} e^{-x_n} \quad (2.2)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığını, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Öztürk ve ark. (2006), yaptıkları çalışmada  $\alpha, \beta, \gamma$  katsayıları pozitif reel sayılar ve  $y_{-1}, y_0$  başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-y_n}}{\gamma + y_{n-1}} \quad (2.3)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin yakınsaklığını, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Ding ve Zhang (2008), yaptıkları çalışmada  $\alpha \in (0,1), \beta \in (0,\infty)$  ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = (\alpha x_n + \beta x_{n-1}) e^{-x_n} \quad (2.4)$$

fark denkleminin çözümlerinin kararlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Öztürk ve ark. (2008), yaptıkları çalışmada  $\alpha, \beta$  katsayıları pozitif reel sayılar ve  $y_{-k}, \dots, y_{-1}, y_0$  başlangıç koşulları keyfi reel sayılar olmak üzere,

$$y_{n+1} = \frac{\alpha e^{-(ny_n + (n-k)y_{n-k})}}{\beta + ny_n + (n-k)y_{n-k}} \quad (2.5)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve global asimptotik davranışını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve ark. (2010), yaptıkları çalışmada  $A, B \in (0, \infty)$  ve  $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = (1 - y_n - y_{n-1})(1 - e^{-Ay_n}), \quad y_{n+1} = (1 - x_n - x_{n-1})(1 - e^{-Bx_n}) \quad (2.6)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini ve pozitif çözümlerin negatif olmayan denge noktasına yakınsaklığını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve ark. (2011), yaptıkları çalışmada  $a, b, c, d$  katsayıları ve  $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-y_n}, \quad y_{n+1} = c + dy_{n-1}e^{-x_n} \quad (2.7)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Fotiades ve Papaschinopoulos (2012(a)), yaptıkları çalışmada  $a, b$  katsayıları ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-x_n} \quad (2.8)$$

fark denkleminin iki periyotlu çözümlerinin varlığını, tekliğini ve kararlılığını incelemiştir.

Fotiades ve Papaschinopoulos (2012(b)), yaptıkları çalışmada  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $a_i, b_i$  katsayıları ve  $x_{i,n}, n = -1, 0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{i,n+1} = a_i + b_i x_{i,n-1} e^{-x_{i+1,n}} \quad (2.9)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve ark. (2012), yaptıkları çalışmada  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$  katsayıları ve  $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-y_n}}{\gamma + y_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{\delta + \varepsilon e^{-x_n}}{\zeta + x_{n-1}}, \quad (2.10)$$

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-y_n}}{\gamma + x_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{\delta + \varepsilon e^{-x_n}}{\zeta + y_{n-1}}, \quad (2.11)$$

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + y_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{\delta + \varepsilon e^{-y_n}}{\zeta + x_{n-1}} \quad (2.12)$$

fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2012), yaptıkları çalışmada  $a, b, c, d$  katsayıları ve  $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + b y_{n-1} e^{-x_n}, y_{n+1} = c + d x_{n-1} e^{-y_n} \quad (2.13)$$

ve

$$x_{n+1} = a + b y_{n-1} e^{-y_n}, y_{n+1} = c + d x_{n-1} e^{-x_n} \quad (2.14)$$

fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışını incelemiştir.

Khuong ve Phong (2013), yaptıkları çalışmada  $a, b, c$  katsayıları ve  $x_0, y_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a + b e^{-x_n}}{c + y_n}, y_{n+1} = \frac{a + b e^{-y_n}}{c + x_n} \quad (2.15)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Din ve Elsayed (2014), yaptıkları çalışmada  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$  katsayıları ve  $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1} e^{-y_n}, \quad y_{n+1} = \delta + \varepsilon y_n + \zeta y_{n-1} e^{-x_n} \quad (2.16)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve ark. (2014), yaptıkları çalışmada  $a, b, c, d$  katsayıları ve  $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = ax_n + by_{n-1} e^{-x_n}, \quad y_{n+1} = cy_n + dx_{n-1} e^{-y_n} \quad (2.17)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve ark. (2014), yaptıkları çalışmada  $0 < a < 1$  ve  $b, c, d, k$  katsayıları ile  $x_0$  başlangıç koşulu pozitif reel sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^2}{x_n + b} + c \frac{e^{k-dx_n}}{1 + e^{k-dx_n}} \quad (2.18)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin karalılığını ve sınırlılığını incelemiştir.

Din (2015), yaptığı çalışmada  $\alpha \in (0, \infty), \beta \in (0, \infty), \gamma \in (0, 1), \alpha + \beta > 1 + \beta/\gamma$  ve  $x_0, y_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{\beta x_n + e^{y_n}}, \quad y_{n+1} = \gamma(x_n + 1)y_n \quad (2.19)$$

fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının lokal ve global davranışını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve ark. (2015), yaptıkları çalışmada  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $a_i, b_i$  katsayıları ve  $x_{-1}^i, x_0^i$  başlangıç koşulları pozitif sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1}^{(i)} = a_i x_n^{(i+1)} + b_i x_{n-1}^{(i)} e^{-x_n^{(i+1)}}, \quad x_{n+1}^{(m)} = a_m x_n^{(1)} + b_m x_{n-1}^{(m)} e^{-x_n^{(1)}} \quad (2.20)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışını incelemiştir.

Wang ve Feng (2016), yaptıkları çalışmada  $a, b$  parametreleri ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları negatif olmayan sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + bx_n e^{-x_{n-1}} \quad (2.21)$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Feng ve ark. (2016), yaptıkları çalışmada (2.2) denklemini genelleştirerek  $a \in (0, \infty)$ ,  $b \in (0, 1)$ ,  $c \in (0, \infty)$  ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları negatif olmayan sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1} + cx_{n-1} e^{-x_n} \quad (2.22)$$

fark denklemini tanımlamışlar ve bu denklemin pozitif çözümlerinin global kararlılığını ve sınırlılığını incelemiştir.

Cömert (2017), hazırladığı yüksek lisans tezinde (2.3) denkleminin mertebesini artırarak

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-2}} \quad (2.23)$$

fark denklemini tanımlamış ve pozitif katsayılar ile negatif olmayan başlangıç koşulları için (2.23) denkleminin pozitif çözümlerinin yakınsaklığını, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemiştir. Ayrıca, (2.23) denklemi için elde ettiği sonuçları,  $\alpha, \beta, \gamma$  katsayıları pozitif reel sayılar,  $k$  bir çift doğal sayı ve  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}, x_0$  negatif olmayan başlangıç koşulları olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-k}} \quad (2.24)$$

fark denklemini için genelleştirmiştir.

Bu çalışmada; eksponansiyel tipten fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan çalışmaların ışığında yeni bir denklem tanımlanmış ve tanımlanan denklemin pozitif çözümlerinin sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

### 3. $x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-x_{n-1}}$ FARK DENKLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Bu çalışmada  $a, b$  pozitif sabitler ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-x_{n-1}} \quad (3.1)$$

fark denklemi tanımlanmış ve bu denklemin pozitif çözümlerinin sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

**Teorem 3.1.** (3.1) denklemi tek bir  $\bar{x}$  pozitif denge noktasına sahiptir.

**İspat.** Denge noktası tanımına göre (3.1) denkleminin denge noktasını elde edelim:

$$\bar{x} = a + b\bar{x}e^{-\bar{x}} \text{ veya } a + b\bar{x}e^{-\bar{x}} - \bar{x} = 0 \quad (3.2)$$

dır.  $g(x) = a + bxe^{-x} - x$  fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon için

$$g(0) = a \text{ ve } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \rightarrow -\infty \quad (3.3)$$

olduğu açıktır.

$$g'(x) = be^{-x} - bxe^{-x} - 1 = be^{-x}(1-x) - 1 \quad (3.4)$$

olup  $g(x) = 0$  denkleminin tek bir pozitif çözüme sahip olduğunu göstermek için  $g'(x) < 0$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $\bar{x} > a$  olduğu göz önüne alınarak

$$g'(\bar{x}) = be^{-\bar{x}} - b\bar{x}e^{-\bar{x}} - 1 = \frac{\bar{x} - a}{\bar{x}} - (\bar{x} - a) - 1 = \frac{-a - \bar{x}^2 + a\bar{x}}{\bar{x}} < \frac{-a - \bar{x}^2 + \bar{x}^2}{\bar{x}} = \frac{-a}{\bar{x}} < 0$$

elde edilir.  $g'(x) < 0$  olduğundan  $g(x)$  fonksiyonu  $\bar{x}$  civarında azalandır. Dolayısıyla,  $g(x)$  fonksiyonunun  $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$  aralığında azalan olduğunu düşünebiliriz.  $g(x) = 0$  denkleminin  $\bar{x}$  den daha büyük köklerinin var olduğunu kabul edelim ve  $x_1$  bu köklerden en küçüğü olsun ( $x_1 > \bar{x}$ ). Yukarıdaki yöntemle,  $g'(x_1) < 0$  olduğunu da kolaylıkla gösterebiliriz. Bu durumda,  $g(x)$  fonksiyonu  $x_1$  civarında da azalandır. Yani,  $g(x)$  fonksiyonu  $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1)$  gibi bir aralıkta azalandır.  $g(\bar{x} + \varepsilon) < 0$ ,

$g(x_1 - \varepsilon_1) > 0$  ve  $g(x)$  sürekli bir fonksiyon olduğundan  $g(x) = 0$  denkleminin  $(\bar{x} + \varepsilon, x_1 - \varepsilon)$  aralığında bir kökü olmalıdır ki bu  $x_1$  in  $\bar{x}$  den büyük en küçük kök olmasıyla çelişir. Benzer şekilde,  $g(x) = 0$  denkleminin  $(a, \bar{x})$  aralığında da kökü olmadığı gösterilebilir. Bu durumda,  $g(x) = 0$  denkleminin  $(a, \infty)$  aralığında tek bir çözümü vardır.

**Teorem 3.2.** Eğer  $b < e^a$  ise (3.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlıdır.

**İspat.** (3.1) denkleminin herhangi bir çözümü  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  olsun.

$$x_1 = a + bx_{-1}e^{-x_1},$$

$$x_2 = a + bx_0e^{-x_0},$$

$$x_3 = a + bx_1e^{-x_1},$$

$$x_4 = a + bx_2e^{-x_2},$$

...

$$x_{2n+1} = a + bx_{2n-1}e^{-x_{2n-1}},$$

$$x_{2n+2} = a + bx_{2n}e^{-x_{2n}},$$

...

elde edilir.

Öncelikle,  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisinin  $\{x_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$  alt dizisini inceleyelim:

$$x_1 = a + bx_{-1}e^{-x_1} \quad (x_1 \geq a)$$

$$x_3 = a + bx_1e^{-x_1} \leq a + be^{-a}x_1$$

$$x_5 = a + bx_3e^{-x_3} \leq a + be^{-a}x_3$$

...

olduğundan  $n \geq 1$  için

$$x_{2n+1} = a + bx_{2n-1}e^{-x_{2n-1}} \leq a + be^{-a}x_{2n-1} \quad (3.5)$$

olur. Buradan hareketle,

$$y_{2n+1} = a + be^{-a}y_{2n-1}, \quad n \geq 1 \quad (3.6)$$

fark denklemini ele alalım.

$$y_3 = a + be^{-a}y_1$$

$$y_5 = a + be^{-a}y_3 = a + be^{-a}(a + be^{-a}y_1) = a + abe^{-a} + (be^{-a})^2y_1$$

$$y_7 = a + be^{-a}y_5 = a + be^{-a}(a + abe^{-a} + (be^{-a})^2y_1) = a + abe^{-a} + a(be^{-a})^2 + (be^{-a})^3y_1$$

...

$$y_{2n+1} = a + abe^{-a} + a(be^{-a})^2 + \dots + a(be^{-a})^{n-1} + (be^{-a})^ny_1 = \frac{a}{1-be^{-a}} + (be^{-a})^ny_1 \quad (3.7)$$

olduğundan (3.6) denkleminin herhangi bir çözümü,  $y_1 = r_1$  olmak üzere

$$y_{2n+1} = r_1(be^{-a})^n + \frac{a}{1-be^{-a}} \quad (3.8)$$

şeklindedir.  $b < e^a$  olduğundan

$$y_{2n+1} = r_1(be^{-a})^n + \frac{a}{1-be^{-a}} < r_1(e^ae^{-a})^n + \frac{a}{1-be^{-a}} = r_1 + \frac{a}{1-be^{-a}}$$

olup (3.6) denkleminin  $\{y_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$  çözümü sınırlı bir dizidir. Eğer  $x_1 = y_1$  olarak alınırsa, (3.5) ve (3.6) dan

$$x_{2n+1} - y_{2n+1} \leq b(x_{2n-1} - y_{2n-1})e^{-a}$$

dır. Buradan,

$$x_3 - y_3 \leq b(x_1 - y_1)e^{-a} \text{ ve } x_3 \leq y_3$$

$$x_5 - y_5 \leq b(x_3 - y_3)e^{-a} \text{ ve } x_5 \leq y_5$$

...

elde edilir. Dolayısıyla,  $n \geq 1$  için  $x_{2n+1} \leq y_{2n+1}$  olup  $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi de sınırlıdır.

Benzer şekilde,  $\{x_{2n+2}\}_{n=0}^{\infty}$  alt dizisini ele alalım:

$$x_2 = a + bx_0 e^{-x_0} \quad (x_2 \geq a)$$

$$x_4 = a + bx_2 e^{-x_2} \leq a + be^{-a} x_2$$

$$x_6 = a + bx_4 e^{-x_4} \leq a + be^{-a} x_4$$

...

olduğundan  $n \geq 1$  için

$$x_{2n+2} = a + bx_{2n} e^{-x_{2n}} \leq a + be^{-a} x_{2n} \quad (3.9)$$

olur. Buradan hareketle,

$$z_{2n+2} = a + be^{-a} z_{2n}, \quad n \geq 1 \quad (3.10)$$

fark denklemini ele alalım.

$$z_4 = a + be^{-a} z_2$$

$$z_6 = a + be^{-a} z_4 = a + be^{-a} (a + be^{-a} z_2) = a + abe^{-a} + (be^{-a})^2 z_2$$

$$z_8 = a + be^{-a} z_6 = a + be^{-a} (a + abe^{-a} + (be^{-a})^2 z_2) = a + abe^{-a} + a(be^{-a})^2 + (be^{-a})^3 z_2$$

...

$$z_{2n+2} = a + abe^{-a} + a(be^{-a})^2 + \dots + a(be^{-a})^{n-1} + (be^{-a})^n z_2 = \frac{a}{1-be^{-a}} + (be^{-a})^n z_2 \quad (3.11)$$

olduğundan (3.10) denkleminin herhangi bir çözümü,  $z_2 = r_2$  olmak üzere

$$z_{2n+2} = r_2 (be^{-a})^n + \frac{a}{1-be^{-a}} \quad (3.12)$$

şeklindedir.  $b < e^a$  olduğundan

$$z_{2n+2} = r_2 (be^{-a})^n + \frac{a}{1-be^{-a}} < r_2 (e^a e^{-a})^n + \frac{a}{1-be^{-a}} = r_2 + \frac{a}{1-be^{-a}}$$

olup (3.10) denkleminin  $\{z_{2n+2}\}_{n=1}^{\infty}$  çözümü sınırlı bir dizidir. Eğer  $x_2 = z_2$  olarak alınırsa, (3.9) ve (3.10) dan

$$x_{2n+2} - z_{2n+2} \leq b(x_{2n} - z_{2n})e^{-a}$$

dır. Buradan,

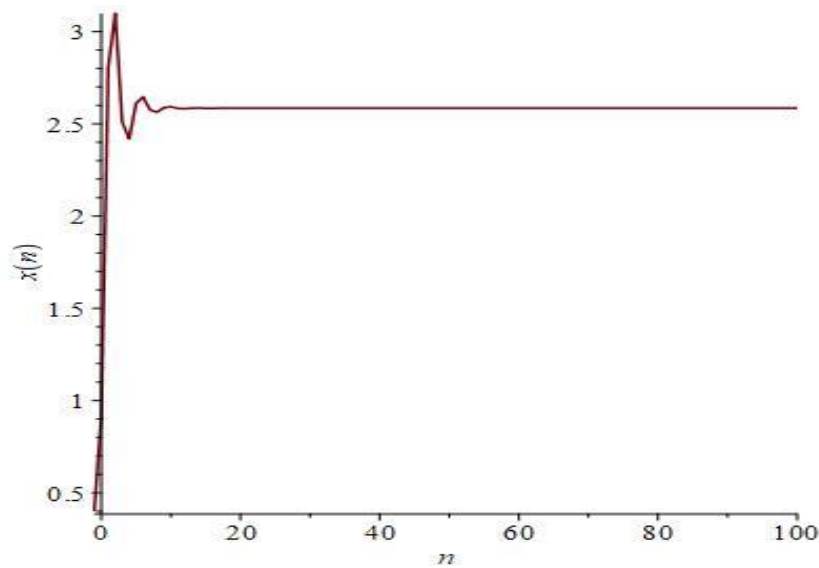
$$x_4 - z_4 \leq b(x_2 - z_2)e^{-a} \text{ ve } x_4 \leq z_4$$

$$x_6 - z_6 \leq b(x_4 - z_4)e^{-a} \text{ ve } x_6 \leq z_6$$

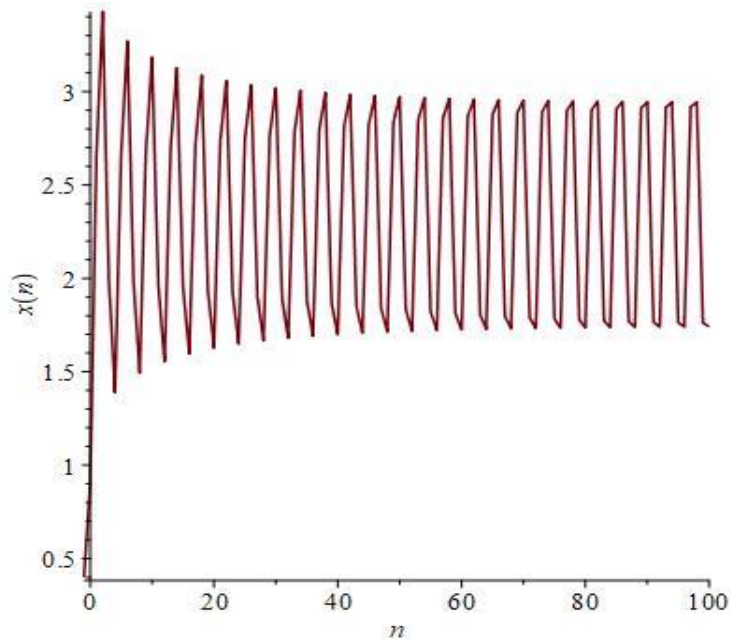
...

elde edilir. Dolayısıyla,  $n \geq 1$  için  $x_{2n+2} \leq z_{2n+2}$  olup  $\{x_{2n+2}\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi de sınırlıdır. Sonuç olarak, (3.1) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin sınırlı olduğu ispat edilmiş olur.

**Örnek 3.1.**  $x_{-1} = 0.4$ ,  $x_0 = 0.9$  olmak üzere  $a = 2$  ve  $b = 3$  değerleri için (3.1) denkleminin çözümü sınırlıdır.



**Örnek 3.2.**  $x_{-1}=0.4$ ,  $x_0=0.9$  olmak üzere  $a=0.5$  ve  $b=8$  değerleri için (3.1) denkleminin çözümü sınırlıdır.



**Teorem 3.3.** Eğer  $b < e^a$  ise (3.1) denklemini için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i)  $\left[ a, \frac{a}{1-be^{-a}} \right]$  aralığı (3.1) denkleminin değişmez aralığıdır.

(ii)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$  için bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki  $\forall n \geq n_0$  için  $x_n \in \left[ a, \frac{a+\varepsilon}{1-be^{-a}} \right]$  dir.

**İspat.**

(i)  $x_{-1}, x_0 \in \left[ a, \frac{a}{1-be^{-a}} \right]$  olmak üzere, (3.1) denkleminin bir çözümü  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  olsun. Bu

dizinin  $\{x_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$  alt dizisini ele alalım.  $b < e^a$  veya  $e^{-a} < \frac{1}{b}$  olduğu göz önüne alınırsa,

$$a \leq x_1 = a + bx_{-1}e^{-x_1} \leq a + b \left( \frac{a}{1-be^{-a}} \right) e^{-a} = \frac{a}{1-be^{-a}}$$

olup, bu durumda,

$$a \leq x_{2n+1} \leq \frac{a}{1-be^{-a}} \quad (3.13)$$

elde edilir. Benzer şekilde,  $\{x_{2n+2}\}_{n=0}^{\infty}$  alt dizisini ele alalım.

$$a \leq x_2 = a + bx_0 e^{-x_0} \leq a + b \left( \frac{a}{1-be^{-a}} \right) e^{-a} = \frac{a}{1-be^{-a}}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$a \leq x_{2n+2} \leq \frac{a}{1-be^{-a}} \quad (3.14)$$

olur ki (3.13) ve (3.14) te elde edilen eşitsizliklerden (i) şıkkının ispatı tamamlanır.

(ii) (3.1) denkleminin herhangi bir çözümü olan  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisinin  $\{x_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$  alt dizisini ele alalım. Bu durumda, Teorem 3.2 ye göre,

$$0 < l_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+1}) \text{ ve } L_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+1}) < \infty \quad (3.15)$$

olduğunu kabul edebiliriz. (3.1) ve (3.15) ten

$$L_1 \leq a + bL_1 e^{-L_1} \text{ ve } l_1 \geq a + bl_1 e^{-L_1}$$

yazılabilir.  $l_1 \geq a$  olduğundan

$$L_1 \leq a + bL_1 e^{-L_1} \leq a + bL_1 e^{-a}$$

$$L_1 - bL_1 e^{-a} \leq a$$

$$L_1(1 - be^{-a}) \leq a$$

$$L_1 \leq \frac{a}{1-be^{-a}}$$

dır. Buradan,

$$a \leq L_1 \leq \frac{a}{1-be^{-a}} \quad (3.16)$$

elde edilir. Dolayısıyla,  $x_{2n+1} \in \left[ a, \frac{a+\varepsilon_1}{1-be^{-a}} \right]$  olacak şekilde bir  $n_1$  sayısının var olduğu açıktır. Benzer şekilde,  $\{x_{2n+2}\}_{n=0}^{\infty}$  alt dizisini ele alalım. Bu durumda, Teorem 3.2 ye göre,

$$0 < l_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+2}) \text{ ve } L_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+2}) < \infty \quad (3.17)$$

olduğunu kabul edebiliriz. (3.1) ve (3.17) den

$$L_2 \leq a + bL_2e^{-l_2} \text{ ve } l_2 \geq a + bL_2e^{-L_2}$$

yazılabilir.  $l_2 \geq a$  olduğundan

$$L_2 \leq a + bL_2e^{-l_2} \leq a + bL_2e^{-a}$$

$$L_2 - bL_2e^{-a} \leq a$$

$$L_2(1-be^{-a}) \leq a$$

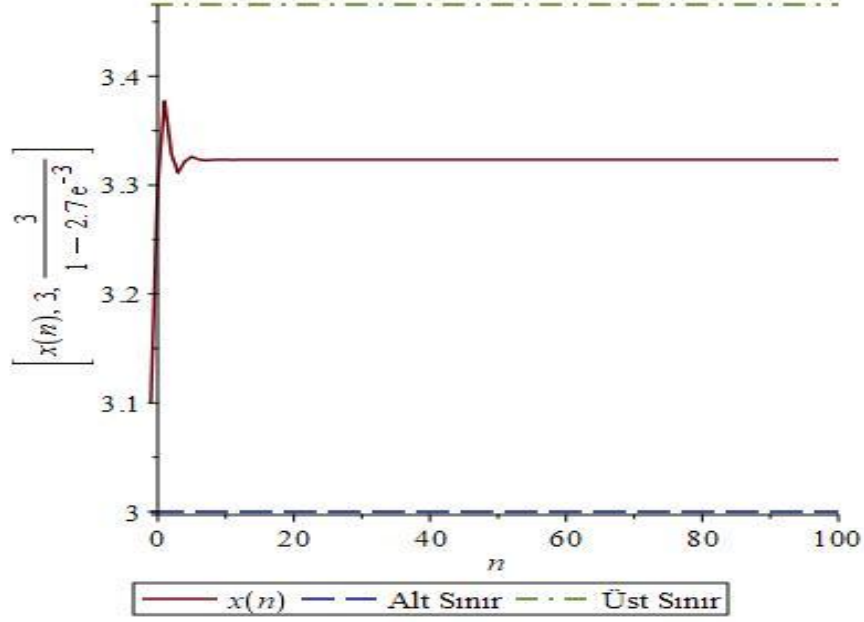
$$L_2 \leq \frac{a}{1-be^{-a}}$$

dır. Buradan,

$$a \leq L_2 \leq \frac{a}{1-be^{-a}} \quad (3.18)$$

elde edilir. Dolayısıyla,  $x_{2n+2} \in \left[ a, \frac{a+\varepsilon_2}{1-be^{-a}} \right]$  olacak şekilde bir  $n_2$  sayısının var olduğu açıktır. Bu durumda,  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  ve  $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$  olmak üzere  $x_n \in \left[ a, \frac{a+\varepsilon}{1-be^{-a}} \right]$  olacak şekilde  $n_0$  sayısının varlığı ispat edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

**Örnek 3.3.**  $x_{-1}=3.1$ ,  $x_0=3.3$  olmak üzere  $a=3$  ve  $b=2.7$  değerleri için (3.1) denkleminin çözümü Teorem 3.3 te verilen değişmez aralığın sınırları arasındadır.



**Teorem 3.4.**  $x_{-1}, x_0$  başlangıç şartları pozitif ve  $a, b$  parametreleri

$$b < e^a \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad (3.19)$$

şartını sağlayan negatif olmayan sabitler ise (3.1) denklemini bir tek  $\bar{x}$  pozitif denge noktasına sahiptir öyle ki

$$\bar{x} \in \left[ a, \frac{a}{1 - be^{-a}} \right] \quad (3.20)$$

dır. Dahası, (3.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri bu denge noktasına yakınsar.

**İspat.** Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 den (3.1) denkleminin bir tek  $\bar{x}$  pozitif denge noktasına sahip olduğu açıktır. İspatı tamamlamak için herhangi bir  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  pozitif

çözümünün  $\bar{x}$  denge noktasına yakınsadığını göstermek yeterlidir. Bu amaçla,

$$I = \left[ a, \frac{a + \varepsilon}{1 - be^{-a}} \right] \text{ ve } x, y \in I \text{ olmak üzere,}$$

$$f(x, y) = a + bxe^{-y} \quad (3.21)$$

fonksiyonunu ele alalım.  $b < e^a$  olduğundan (3.21) den  $x, y \in I$  için

$$a \leq f(x, y) \leq a + b \frac{a + \varepsilon}{1 - be^{-a}} e^{-a} = \frac{a + b\varepsilon e^{-a}}{1 - be^{-a}} < \frac{a + \varepsilon}{1 - be^{-a}} \quad (3.22)$$

yazılabilir. Bu nedenle,  $f : I \times I \rightarrow I$  şeklinde tanımlanır.  $b < e^a$  olduğundan (3.19) ve

Teorem 3.3 ten  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in I$  olacak şekilde bir  $n_0$  doğal sayısının var olduğu açıktır.

$m, M$  pozitif reel sayılarının

$$M = a + bMe^{-m} \text{ ve } m = a + bme^{-M} \quad (3.23)$$

eşitliklerini sağladığını kabul edelim. (3.23) ten

$$\frac{M - a}{bM} = e^{-m}, \quad \frac{m - a}{bm} = e^{-M} \quad (3.24)$$

olup

$$e^m = \frac{bM}{M - a}, \quad e^M = \frac{bm}{m - a} \quad (3.25)$$

ve

$$M = \ln\left(\frac{bM}{m - a}\right), \quad m = \ln\left(\frac{bm}{M - a}\right) \quad (3.26)$$

yazılabilir. (3.23) ve (3.26) dan

$$M - bMe^{-m} = a, \quad m - bme^{-M} = a$$

$$M(1 - be^{-m}) = a, \quad m(1 - be^{-M}) = a \quad (3.27)$$

$$\ln\left(\frac{bm}{m - a}\right)(1 - be^{-m}) = a, \quad \ln\left(\frac{bM}{M - a}\right)(1 - be^{-M}) = a \quad (3.28)$$

yazılabilir. Buradan hareketle,

$$F(x) = \ln\left(\frac{bx}{x-a}\right)(1-be^{-x}) - a \quad (3.29)$$

fonksiyonunu ele alalım.  $F(z) = 0$  olsun ve

$$F'(z) < 0 \quad (3.30)$$

olduğunu gösterelim. (3.29) dan

$$F'(z) = (1-be^{-z})\frac{-a}{z(z-a)} + \ln\left(\frac{bz}{z-a}\right)be^{-z} \quad (3.31)$$

yazılabilir. Ayrıca  $F(z) = 0$  olduğundan

$$\ln\left(\frac{bz}{z-a}\right) = \frac{a}{1-be^{-z}} \quad (3.32)$$

olduğu açıktır. (3.31) ve (3.32) den

$$F'(z) = (1-be^{-z})\frac{-a}{z(z-a)} + \frac{abe^{-z}}{1-be^{-z}} \quad (3.33)$$

ve

$$F'(z) = \frac{a(bz(z-a) - e^z(1-be^{-z})^2)}{z(z-a)(e^z - b)} \quad (3.34)$$

yazılabilir.

$$H(z) = bz(z-a), \quad G(z) = e^z(1-be^{-z})^2 \quad (3.35)$$

olarak tanımlanırsa,  $z > a$  olmak üzere (3.30) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için

$$H(z) - G(z) < 0 \quad (3.36)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. (3.35) ten

$$H'(z) = b(2z-a), \quad G'(z) = -b^2e^{-z} + e^z$$

$$H''(z) = 2b, \quad G''(z) = b^2e^{-z} + e^z \quad (3.37)$$

$$H'''(z) = 0, \quad G'''(z) = -b^2 e^{-z} + e^z$$

eşitlikleri elde edilir.  $z > a$  olmak üzere, (3.19) ve (3.37) den

$$H'''(z) - G'''(z) = b^2 e^{-z} - e^z < 0 \quad (3.38)$$

yazılabilir. (3.38) de integral alınır,

$$H''(z) - G''(z) < H''(a) - G''(a) = 2b - b^2 e^{-a} - e^a = -e^{-a} (b - e^a)^2 < 0 \quad (3.39)$$

elde edilir.  $z > a$  olmak üzere, (3.39) dan

$$H'(z) - G'(z) < H'(a) - G'(a) = ab + b^2 e^{-a} - e^a = e^{-a} (b^2 + abe^a - e^{2a}) \quad (3.40)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.19) dan

$$b^2 + abe^a - e^{2a} < 0 \quad (3.41)$$

olduğu açıktır. (3.40) ve (3.41) den

$$H'(z) - G'(z) = b(2z - a) + b^2 e^{-z} - e^z < 0 \quad (3.42)$$

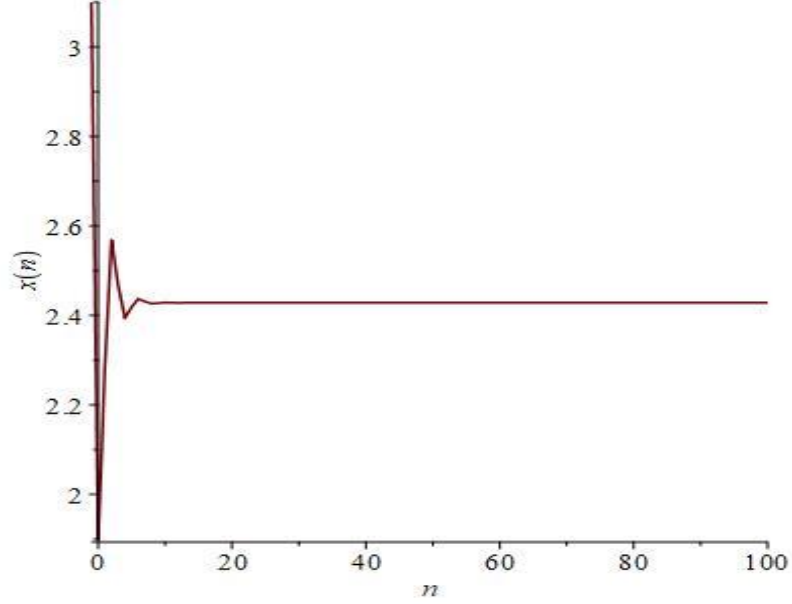
elde edilir.  $z > a$  olmak üzere (3.42) den

$$H(z) - G(z) < H(a) - G(a) < 0 \quad (3.43)$$

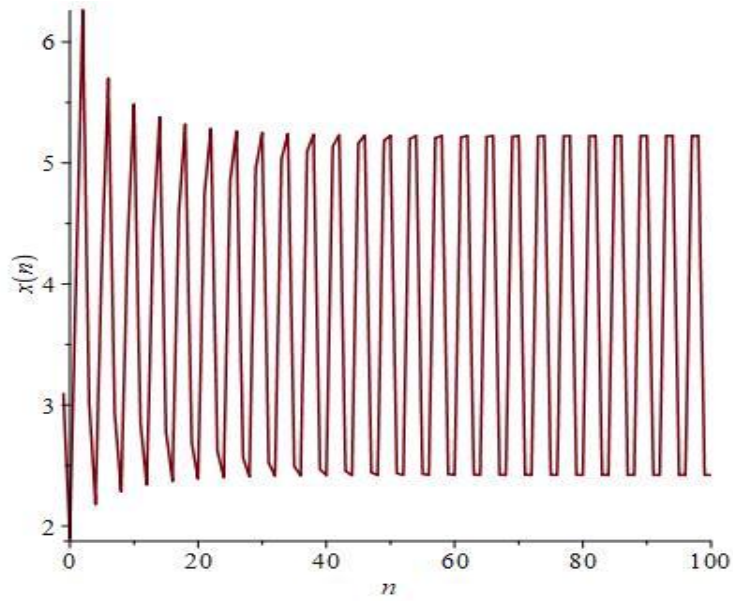
yazılabilir bu ise (3.30) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.  $F'(x) < 0$  olduğundan  $F(x)$  fonksiyonu  $z$  civarında azalandır. Dolayısıyla,  $F(x)$  fonksiyonunun  $(z - \varepsilon, z + \varepsilon)$  aralığında azalan olduğunu düşünebiliriz.  $F(x) = 0$  denkleminin  $z$  den daha büyük köklerinin var olduğunu kabul edelim ve  $z_1$  bu köklerden en küçüğü olsun ( $z_1 > z$ ). Yukarıdaki yöntemle  $F'(z_1) < 0$  olduğunu da gösterebiliriz. Bu durumda,  $F(x)$  fonksiyonu  $z_1$  civarında da azalandır. Yani,  $F(x)$  fonksiyonu  $(z_1 - \varepsilon_1, z_1 + \varepsilon_1)$  gibi bir aralıkta azalandır.  $F(z + \varepsilon) < 0$ ,  $F(z_1 - \varepsilon_1) > 0$  ve  $F(x)$  sürekli bir fonksiyon olduğundan  $F(x) = 0$  denkleminin  $(z + \varepsilon, z_1 - \varepsilon)$  aralığında bir kökü olmalıdır ki bu  $z_1$  in  $z$  den büyük en küçük kök olmasıyla çelişir. Benzer şekilde,  $F(x) = 0$  denkleminin  $(a, z)$  aralığında da kökü olmadığı gösterilebilir. Bu durumda,  $F(x) = 0$  denkleminin

tek bir çözümlü vardır. Buradan (3.26) ve (3.29) dan  $m = M$  elde edilir ki Lemma 1.1.1 gereği ispat tamamlanır.

**Örnek 3.4.**  $x_{-1} = 3.1$ ,  $x_0 = 1.9$  olmak üzere  $a = 2$  ve  $b = 2$  değerleri için (3.1) denkleminin çözümü denklemin denge noktasına yakınsar.



**Örnek 3.5.**  $x_{-1} = 3.1$ ,  $x_0 = 1.9$  olmak üzere  $a = 2$  ve  $b = 15$  değerleri için (3.1) denkleminin çözümü denklemin denge noktasına yakınsamaz.



#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; literatürde var olan denklemlerden yola çıkılarak,  $a, b$  pozitif sabitler ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-x_{n-1}}$$

fark denklemini tanımlanmış ve bu denklemin pozitif çözümlerinin sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir. Denklemin tek bir pozitif denge noktasına sahip olduğu, çözümlerin sınırlılığı ve denge noktasının kararlılığı için yeterli olan şartlar ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar nümerik örnekler ile desteklenmiştir.

Yapılacak yeni çalışmalarda (3.1) denklemini negatif başlangıç koşulları ya da negatif parametreler için tekrar ele alınabilir. (3.1) denklemden katsayıların yerine farklı diziler alınarak yeni çalışmalar yapılabileceği gibi denklemden bilinmeyen sayısı veya denklemin mertebesi artırılarak daha genel çalışmalar yapılabilir. Ayrıca, (3.1) denklemini ya da (3.1) den elde edilecek daha genel denklemler kullanılarak fark denklemlerini tanımlanabilir ve tanımlanan sistemlerin özellikleri incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- Aboutaleb, M. T., El-Sayed, M. A. and Hamza, A. E., 2001, Stability of the recursive sequence  $x_{n+1} = (\alpha - \beta x_n) / (\gamma + x_{n-1})$ , *Journal Mathematical Analysis Applications*, 261, 126-133.
- Bereketoğlu, H., ve Kutay, V., 2012, Fark Denklemleri, *Gazi Kitapevi*, Ankara.
- Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Cömert, T., 2017, Üstel Tipten Fark Denklemlerinin Pozitif Çözümleri Üzerine Bir Çalışma, Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- DeVault, R., Kosmala, W. and Schultz, S. W., 2001, Global behavior of  $y_{n+1} = (p + y_{n-k}) / (qy_n + y_{n-k})$ , *Nonlinear Analysis*, 47, 4743-4751.
- Din, Q. and Elsayed, E. M., 2014, Stability analysis of a discrete ecological model, *Computational Ecology and Software*, 4(2), 89-103.
- Din, Q., 2015, Global behavior of a plant-herbivore model, *Advances in Difference Equations*, 119.
- Ding, X. and Zhang, R., 2008, On the difference equation  $x_{n+1} = (\alpha x_n + \beta x_{n-1})e^{-x_n}$ , *Advances in Difference Equations*, Volume 2008, Article ID 876936, 7 pages.
- El-Metwally, H., Grove, E. A., Ladas, G., Levins, R. and Radin, M., 2001, On the difference equation  $x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1}e^{-x_n}$ , *Nonlinear Analysis*, 47, 4623-4634.
- Feng, H., Ma, H. and Ding, W., 2016, Global asymptotic behavior of positive solutions for exponential form difference equations with three parameters, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 6(3), 600-606.
- Fotiades, N. and Papaschinopoulos, G., 2012(a), Existence, uniqueness and attractivity of prime period two solution for a difference equation of exponential form, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 11648-11653.
- Fotiades, N. and Papaschinopoulos, G., 2012(b), Asymptotic behavior of the positive solutions of a system of  $k$  difference equations of exponential form, *Mathematical Analysis*, 19, 585-597.
- Khuong, V. V. and Phong, M. N., 2013, On a system of two difference equations of exponential form, *International Journal of Difference Equations*, ISSN 0973-6069, Volume 8, Number 2, 215-223.
- Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Volume 256, *Springer Science & Business Media*.

- Papaschinopoulos, G., Stefanidou, G. and Papadopoulos, K. B., 2010, On a modification of a discrete epidemic model, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3559-3569.
- Papaschinopoulos, G., Radin, M. A. and Schinas, C. J., 2011, On the system of two difference equations of exponential form  $x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-y_n}$ ,  $y_{n+1} = c + dy_{n-1}e^{-x_n}$ , *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 2969-2977.
- Papaschinopoulos, G., Radin, M. and Schinas, C. J., 2012, Study of the asymptotic behavior of the solutions of three systems of difference equations of exponential form, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 5310-5318.
- Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., 2012, On the dynamics of two exponential type systems of difference equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 64, 2326-2334.
- Papaschinopoulos, G., Ellina, G. and Papadopoulos, K. B., 2014, Asymptotic behavior of the positive solutions of an exponential type system of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 181-190.
- Papaschinopoulos, G., Schinas, C. J. and Ellina, G., 2014, On the dynamics of the solutions of biological model, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 20, No. 5-6, 694-705.
- Papaschinopoulos, G., Psarros, N. and Papadopoulos, K. B., 2015, On a cyclic system of  $m$  difference equations having exponential terms, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 5, 1-13.
- Ozturk, I., Bozkurt, F. and Ozen, S., 2006, On the difference equation  $y_{n+1} = (\alpha + \beta e^{-y_n}) / (\gamma + y_{n-1})$ , *Applied Mathematics and Computation*, 181, 1387-1393.
- Ozturk, I., Bozkurt, F. and Ozen, S., 2008, Global asymptotic behavior of the difference equation  $y_{n+1} = \alpha e^{-(ny_n + (n-k)y_{n-k})} / (\beta + ny_n + (n-k)y_{n-k})$ , *Applied Mathematics Letters*, 22, 595-599.
- Wang, W. and Feng, H., 2016, On the dynamics of positive solutions for the difference equation in a new population model, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 1748-1754.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Mustafa AKDAĞ  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Dinar – 02.11.1991  
**Telefon** : 0 541 315 41 89  
**e-mail** : makdag3232@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Sandıklı Anadolu Öğretmen Lisesi, Sandıklı, Afyonkarahisar	2009
Üniversite	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi, Konya	2014
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Konya	
Doktora	:	

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2015-2016 Bahar Dönemi	Konya Anadolu Lisesi, Konya	Öğretmen
2016-	Çayeli Vakıfbank Anadolu Lisesi, Rize	Öğretmen

### YABANCI DİLLER

İngilizce

### YAYINLAR

Ekspansiyel Tipten Fark Denklemleri Üzerine Bir Çalışma, *INES 2. International Academic Research Congress*, Antalya / Alanya, Türkiye, October 18-21, 2017 (Sözlü Sunum / Özet Metin).