



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN
HEMEN α -KOSİMPLEKTİK
MANİFOLDLARIN BİR SINIFI ÜZERİNE**

Nurgül ARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Ağustos-2018
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Nurgül ARI tarafından hazırlanan “Nulluk Dağılımına Sahip Hemen Hemen α -Kosimplektik Manifoldların Bir Sınıfı Üzerine” adlı tez çalışması 09/08/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

Danışman

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet AVCI
FBE Müdürü

Bu tez çalışması BAP tarafından 171315001 nolu proje ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Nurgül ARI
09.08.2018

ÖZET**YÜKSEK LİSANS TEZİ****NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α -KOSİMPLEKTİK
MANİFOLDLARIN BİR SINIFI ÜZERİNE****Nurgül ARI****Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı****Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN****2018, 50 Sayfa****Jüri****Prof. Dr. Nesip AKTAN****Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU****Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM**

Bu tezin amacı; ξ vektör alanını içeren sırasıyla $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımı ve (k, μ) -nulluk dağılımına sahip Weyl yarı simetrik hemen hemen α -kosimplektik manifoldları karakterize etmektir. Ayrıca sırasıyla C Weyl konformal eğrilik tensörü ve S Ricci tensörü olmak üzere; $C.S = 0$ eğrilik koşulunu sağlayan, ξ karakteristik vektör alanını içeren $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına sahip hemen hemen α -kosimplektik manifoldları tanımlamaktır.

Anahtar Kelimeler: değme manifold, kosimplektik manifold, nulluk dağılımı

ABSTRACT

MS THESIS

ON A TYPE OF ALMOST α -COSYMPLECTIC MANIFOLDS WITH NULLITY DISTRIBUTIONS

Nurgül ARI

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTIN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN

2018, 50 Pages

Jury

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Assist. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

Assist. Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

The object of the thesis is to characterize Weyl semisymmetric almost α -cosymplectic manifolds with its characteristic vector field ξ belonging to the $(k, \mu)'$ -nullity distribution and (k, μ) -nullity distributions respectively. Also we characterize almost α -cosymplectic manifolds satisfying the curvature condition $C.S = 0$, where C and S are the Weyl conformal curvature tensor and Ricci tensor respectively with its characteristic vector field ξ belonging to the $(k, \mu)'$ -nullity distribution.

Keywords: contact manifold, cosymplectic manifold, nullity distribution

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde bana yol gösteren ve değerli bilgilerini benimle paylaşan, desteklerini her zaman gördüğüm değerli danışman hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a sonsuz teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren ve destek olan sevgili eşim M. Burak ARI' ya ve tüm aileme teşekkür ederim.

Nurgül ARI
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET	1
ABSTRACT.....	2
ÖNSÖZ	3
İÇİNDEKİLER	4
SİMGELER VE KISALTMALAR	5
1. GİRİŞ	6
2. TEMEL KAVRAMLAR	9
2.1.Riemann Manifoldları.....	9
2.2.Hemen Hemen Değme Manifoldlar.....	15
2.3. α - Kosimplektik Manifoldlar.....	21
3. $(k, \mu)'$-NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α- KOSİMPEKTİK MANİFOLDLAR.....	28
4. (k, μ)-NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α-KOSİMPEKTİK MANİFOLDLAR.....	39
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	46
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	50

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

g	: Metrik tensörü
ξ	: Karakteristik vektör alanı
ϕ	: Tensör alanı
η	: 1-form
M	: Manifold
\mathcal{L}	: Lie türev operatörü
$[,]$: Lie parantez operatörü
Φ	: Temel 2 –form
\otimes	: Tensör çarpımı
D	: Değme dağılımı
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
R	: Riemann eğrilik tensörü
S	: Ricci eğrilik tensörü
C	: Weyl konformal eğrilik tensörü
K	: Kesit eğriliği
Q	: Ricci operatörü
N	: Nijenhuis tensör alanı
$\chi(M)$: M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı

1. GİRİŞ

Değme geometri bundan iki yüzyıl önce, Huygens, Hamilton ve Jakobi'nin geometrik optikler üzerindeki çalışmalarından doğmuştur. Sophus Lie, Elie Carton ve Darbox gibi pek çok önemli matematikçi bu alanda çalışmalar yapmıştır. Değme geometrinin köklerine 1872'de Lie'nin değme transormasyonu diferensiyel denklem sistemlerinin çalışılmasında geometrik bir araç olarak kullanılmasıyla rastlanır. Değme geometrinin uygulamalarına optik, mekanik ve termodinamik gibi alanlarda da rastlanmaktadır (Küpelı Erken, 2010).

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldlar çok önemli bir yere sahiptir. $2n + 1$ -boyutlu bir (C^∞) sınıftan diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n) \times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M 'ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak J. Gray 1959 yılında tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n) \times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre $2n + 1$ -boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan ϕ ; $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı, ξ ; bir vektör alanı, ve η ; 1-form olmak üzere (ϕ, ξ, η) -üçlüsü ile ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $(J^2 = -I)$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

Hemen hemen değme metrik yapıya bağlı kalarak 1969 yılında Goldberg ve Yano tarafından kosimplektik manifold tanımlanmıştır (Goldberg ve Yano 1969). Bu tanımlamayı takip eden yıllarda özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde birçok çalışmaya imza atmıştır (Olszak 1981-89). 1972 yılında Kenmotsu hemen hemen

değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir karakterizasyon ve sınıflama ortaya koymuştur. Bu sınıflama Kenmotsu manifold olarak adlandırılmıştır (Kenmotsu 1972). 1981 yılında Vanhecke hemen hemen değme yapılarını ele aldığı çalışmasında hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını genişleterek hemen hemen α -Kenmotsu manifoldları tanımlamıştır (Janssens ve Vanhecke 1981).

Kim ve Pak hemen hemen α -Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapılarını birleştirerek hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir alt sınıfı olan hemen hemen α -kosimplektik manifold kavramını tanımlamışlardır (Kim ve Pak 2005). (M, ϕ, ξ, η, g) şeklindeki $2n + 1$ -boyutlu bir hemen hemen α -kosimplektik yapısı

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartlarını sağlar. Burada α keyfi bir reel sayı ve Φ temel 2-formdur. Özel olarak, $\alpha = 0$ durumunda hemen hemen kosimplektik, $\alpha \neq 0$ durumunda ise hemen hemen α -Kenmotsu manifoldları elde edilir. Normallik şartı altında ise; α -kosimplektik manifold ya kosimplektik ya da α -Kenmotsu manifoldudur.

Günümüzde nulluk dağılımının çalışılması hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerine oldukça ilgi çekici bir konu olmuştur. k -nulluk dağılımı notasyonu ($k \in \mathbb{R}$) Gray (1966) ve Tanno (1978) tarafından (M, g) Riemann manifoldları çalışmasında herhangi bir $p \in M$ ve $k \in \mathbb{R}$ için;

$$N_p(k) = \{Z \in T_p M : R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]\} \quad (1.1)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $X, Y \in T_p M$ olmak üzere $T_p M$; M 'nin herhangi bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektör uzayını ve R ; (1,3)-tipindeki Riemann eğrilik tensörünü gösterir.

Yakın zamanlarda Blair, Koufogiorgos ve Papantoniou (1995) tarafından bir değme metrik manifold olan $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ yapısı üzerinde (k, μ) -nulluk dağılımı isminde k -nulluk dağılımının genelleştirilmiş bir notasyonu herhangi bir $p \in M^{2n+1}$ ve $k, \mu \in \mathbb{R}$ için; $h = \frac{1}{2}E_\xi$ iken;

$$N_p(k, \mu) = \{Z \in T_p M : R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ + \mu[g(Y, Z)hX - g(X, Z)hY]\} \quad (1.2)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada \mathcal{E} ; Lie türevi gösterir.

2009 yılında Dileo ve Pastore tarafından bir hemen hemen Kenmotsu manifold olan $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ yapısı üzerinde k -nulluk dağılımının diğer bir genelleştirilmiş notasyonu olan $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımı notasyonu herhangi bir $p \in M^{2n+1}$ ve $k, \mu \in \mathbb{R}$ için; $h' = h \circ \phi$ iken;

$$\begin{aligned} N_p(k, \mu)' = \{Z \in T_p M: R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ + \mu[g(Y, Z)h'X - g(X, Z)h'Y] \} \end{aligned} \quad (1.3)$$

olarak tanımlanmıştır.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde konu ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölüm temel tanım ve kavramlar için ayrılmıştır. Bu bölüm üç alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci alt başlıkta Riemann manifoldları ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. İkinci alt başlıkta hemen hemen değme manifoldlara ait temel kavramlar yer almıştır. Üçüncü alt başlıkta hemen hemen α -kosimplektik manifoldlara ait temel tanım ve özelliklerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına sahip Weyl yarı simetrik hemen hemen α -kosimplektik manifoldlar karakterize edilmiştir.

Dördüncü bölümde (k, μ) -nulluk dağılımına sahip hemen hemen α -kosimplektik manifoldların bazı özellikleri elde edilmiştir.

Son bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar üç alt başlık altında verilmiştir.

2.1.Riemann Manifoldları

Bu kısımda Riemann manifoldlarına ait temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1. M ; n -boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n ; üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifoldda bir Riemann manifoldu denir. (O'Neill 1983).

M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için, M^n üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa; M^n 'ye bağlantılı manifold adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla: \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M^n) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M^n, \mathbb{R}), \forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

- (1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
- (2) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
- (3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(fY),$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

- (1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyon sıfır torsiyon özelliği),
- (2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M^n üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civata konneksiyonu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civata konneksiyonu olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} R: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\longrightarrow \chi(M^n) \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z \end{aligned} \quad (2.1)$$

ile tanımlanan (1,3)-tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir. Ayrıca $\forall X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

- (1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,
- (2) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$,
- (3) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,
- (4) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$

özelliklerini sağlar (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifold, ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civata konneksiyonu ve E , (1,1)-tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X E)Y = \nabla_X EY - E(\nabla_X Y)$$

dır (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'neill 1983).

Önerme 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X G)Z)$$

dir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı

$$g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, Y)W, V)}{g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2}$$

eşitliğinde Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.6. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal vektör alanları olmak üzere,

$$S: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \longrightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlı (0,2)-tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $(0,2)$ -tipli Q Ricci operatörü

$$S(X, Y) = g(QX, Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.7. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i)$$

değerine M^n nin skaler eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.8. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n nin eğrilik tensörü paralel ($\nabla R = 0$) ise o zaman, M^n ye lokal simetrik uzay denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.9. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^* = \rho^2 g$ eşitliği M^n üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ fonksiyonu özdeş olarak 1'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman, M^n Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.10. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin $(1,3)$ -tipli Weyl konformal eğrilik tensör alanı C , M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} [S(X, Z)Y - S(Y, Z)X + g(X, Z)QY - g(Y, Z)QX]$$

$$+ \frac{r}{(n-1)(n-2)} [g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Bundan başka, C nin divergensi c olmak üzere ($c = \text{div } C$),

$$c(X, Y) = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X - \frac{1}{2(n-2)} [(\nabla_X r)Y - (\nabla_Y r)X]$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için, $C = 0$ ve $n = 3$ için, $c = 0$ olmasıdır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.2. (M^n, g) bir sabit k eğriliğine sahip olan Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.11. k sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n -boyutlu bir M^n uzay formu $M^n(k)$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.12. M^n bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times M^n &\longrightarrow M^n \\ (t, p) &\longrightarrow \varphi_t(P) \end{aligned}$$

dönüşümü

- (1) $\forall t \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_t: P \longrightarrow \varphi_t(P)$ diffeomorfizm,
- (2) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $P \in M^n$ için, $\varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$,

şartlarını sağlıyorsa φ ye M^n nin diferensiyellenebilir bir 1-parametrelili grubu denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

- (1) $\mathcal{L}_X(Y \otimes Z) = (\mathcal{L}_X Y) \otimes Z + Y \otimes (\mathcal{L}_X Z)$, (Y, Z herhangi tensör alanları)
- (2) $\mathcal{L}_X f = X(f)$, (f, K cismi üzerinde bir fonksiyon)
- (3) $\mathcal{L}_X V = [X, V]$, $V \in \chi(M^n)$

özellikleri geçerlidir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.14. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $\mathcal{L}_X g = 0$ ise X vektör alanına Killing vektör alanı denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.15. (M^n, g) , $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanan H vektör alanına M^n nin ortalama eğrilik vektör alanı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.16. $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu (M^n, g) olsun. $\forall X, Y \in \chi(M^n)$ olmak üzere,

$$B(X, Y) = g(X, Y)H$$

eşitliği sağlanıyorsa M^n ye total umbilik alt manifold denir (Chen 1973).

Ayrıca $\forall X, Y \in \chi(M^n)$ için,

$$B(X, Y) = 0$$

ise, M^n manifolduna total geodeziktir denir (Chen 1973).

2.2.Hemen Hemen Değme Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M ; $2n + 1$ -boyutlu bir manifold, ϕ, ξ, η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer ϕ, ξ, η için, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= 1 \\ \phi^2 X &= -X + \eta(X)\xi\end{aligned}\quad (2.4)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.2. M^{2n+1} ; (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\begin{aligned}\eta(X) &= g(X, \xi), \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\end{aligned}\quad (2.5)$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.2.1. M^{2n+1} , (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y)\quad (2.6)$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.3. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.4. (M^n, g) bir Riemann manifold ve x_1, x_2, \dots, x_n M^n nin lokal koordinatları olsun. $\omega = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise ω ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i , M^n üzerindeki kotanjant uzayında 1-formlar ve $|g|$, M^n üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.2.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot, Hulin, Lafontaine 2004).

Sonuç 2.2.2. Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.2.5. gereğince $(M^n, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Chinea ve Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.6. M^n bir C^∞ manifold olsun. Eğer ω 1-form ise, keyfi X, Y vektör alanları için,

$$2d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega[X, Y]$$

dır. Eğer ω 2-form ise,

$$\begin{aligned} 3d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z(\omega(X, Y)) - \omega([X, Y], Z) \\ &\quad - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y) \end{aligned}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X, Y, Z vektör alanları için,

$$(i) (\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \Phi)Z)$$

$$(ii) (\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$$

$$(iii) (\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi Y)$$

$$(iv) 2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$$

$$(v) 3d\Phi(X, Y, Z) = \bigoplus_{X, Y, Z} (\nabla_X \Phi)(Y, Z)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\bigoplus_{X, Y, Z}$, X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$ $i = 1, 2, \dots, n$, olmak üzere, M^{2n+1} in açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = \sum_{i=1}^n \{(\nabla_X, \eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i} \eta)\phi X_i\}$$

şeklinde elde edilir (Chinea ve Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.7. M^n bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_p M$ tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left(X, f \frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada X , M manifolduna teğet bir vektör alanı; t , \mathbb{R} nin bir koordinatı ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f \cdot \xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.8. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1, 1)$ -tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8. yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \end{aligned}$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.2. M^{2n+1} üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_ϕ, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M^{2n} üzerindeki her X, Y vektör alanları için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifoldda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifoldda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.12. (M^{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifoldda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifoldda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Blair 2002).

Tanım 2.2.13. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman verilen bu yapı

$$d\phi = 0 \quad (\phi, \text{kapalıdır}), \quad d\eta = 0 \quad (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir.

Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifoldda kosimplektik manifold denir (Olszak 1981).

Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır (Olszak 1981).

Yardımcı Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer ϕ 2-formu kapalı ise,

$$\begin{aligned}
& (\nabla_{\phi X} \Phi)(\phi Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(Y, Z) - \eta(X)[d\eta(\phi Y, Z) + d\eta(Y, \phi Z)] \\
& + \eta(Y) \left[d\eta(\phi Z, X) - \frac{1}{2}(\mathcal{E}_\xi g)(Z, \phi X) \right] + \eta(Z)[d\eta(\phi X, Y)] = 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (Olszak 1981).

Yardımcı Teorem 2.2.2. Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde

$$(\nabla_{\phi X} \phi)(\phi Y) + (\nabla_X \phi)(Y) - \eta(Y)\nabla_{\phi X} \xi = 0$$

eşitliği geçerlidir (Olszak 1981).

Tanım 2.2.14. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer M manifoldu üzerinde her X, Y, Z vektör alanları ve $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartları geçerli ise M manifolduna bir hemen hemen α -Kenmotsu manifoldu denir. $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu 1972).

Önerme 2.2.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda,

$$\eta' = \frac{1}{\alpha}\eta, \quad \xi' = \alpha\xi, \quad \phi' = \phi, \quad g' = \frac{1}{\alpha^2}g, \quad \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlı homotetik deformasyon yardımıyla M^{2n+1} üzerinde bir (ϕ', ξ', η', g') hemen hemen α -Kenmotsu manifoldu elde edilir (Kim ve Pak 2005).

Teorem 2.2.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} nin bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \quad \nabla_X \xi = -\phi^2 X; \quad \forall X, Y \in \chi(M^{2n+1})$$

dır (Kenmotsu1972).

2.3. α -Kosimplektik Manifolddar

Bu kısımda hemen hemen α -kosimplektik manifoldlar ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.3.1. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Herhangi vektör alanları ve keyfi α reel sayısı için, M^{2n+1} üzerinde

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M^{2n+1} ye hemen hemen α -kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için hemen hemen kosimplektik, $\alpha \neq 0$ durumunda ise hemen hemen α -Kenmotsu manifoldu elde edilir (Kim ve Pak 2005).

Yardımcı Teorem 2.3.1. M^{2n+1} manifoldunun bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \phi)Y, Z) &= 2d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &\quad + g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\ &\quad + 2d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

dir. Burada $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ tensör alanları sırasıyla,

$$N^{(1)}(X, Y) = N_\phi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi \quad (2.10)$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (\mathcal{E}_{\phi X}\eta)Y - (\mathcal{E}_{\phi Y}\eta)X \quad (2.11)$$

dir (Blair 2002).

Önerme 2.3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$hX = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_\xi \phi)X, \quad h(\xi) = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi^2 X - \phi hX \quad (2.13)$$

$$\nabla_{\xi}\xi = 0, \quad \nabla_{\xi}\phi = 0 \quad (2.14)$$

$$(\phi \circ h)X + (h \circ \phi)X = 0 \quad (2.15)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + g(\phi Y, hX) \quad (2.16)$$

$$\delta_{\eta} = -2\alpha n, \quad \text{tr}(h) = 0 \quad (2.17)$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi = -\alpha \phi^2 \quad (2.18)$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

Yardımcı Teorem 2.3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, her X vektör alanı için,

$$(\nabla_{\xi} h) \circ \phi + \phi \circ (\nabla_{\xi} h) = 0$$

eşitliği geçerlidir (Blair 2002).

Önerme 2.3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi X} \phi)\phi Y = -\alpha[\eta(Y)\phi X + 2g(X, \phi Y)\xi] - \eta(Y)hX \quad (2.19)$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca, (2.19) eşitliği kullanılarak

$$\phi(\nabla_X \phi)Y - (\nabla_X \phi)Y = 2\alpha\eta(Y)\phi X - g(\alpha\phi X + hX, Y)\xi \quad (2.20)$$

elde edilir (Kim ve Pak 2005).

Önerme 2.3.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} & g(R_{\xi X} Y, Z) - g(R_{\xi X} \phi Y, \phi Z) + g(R_{\xi \phi X} \phi Y, \phi Z) + g(R_{\xi \phi X} \phi Y, Z) \\ &= 2(\nabla_{hX} \phi)(Y, Z) + 2\alpha^2 \eta(Y)g(X, Z) - 2\alpha^2 \eta(Z)g(X, Y) \\ & \quad - 2\alpha\eta(Y)g(\phi hX, Z) + 2\alpha\eta(Z)g(\phi hX, Y) \end{aligned} \quad (2.21)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. R Riemann eğrilik tensörü simetrik olduğundan $g(R_{\xi X}Y, Z) = g(X, R_{YZ}\xi)$ dır. Buradan (2.21) eşitliğinin sol tarafı

$$2\alpha^2\eta(Y)g(X, Z) - 2\alpha^2\eta(Z)g(X, Y) + B(X, Y, Z) - B(X, Z, Y) \quad (2.22)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$B(X, Y, Z) = g(X, (-\nabla_Y\phi h)Z + \phi(\nabla_Y\phi h)\phi Z) \\ + g(X, (\nabla_{\phi Y}\phi h)\phi Z) - g(\phi X, (\nabla_{\phi Y}\phi h)Z)$$

dır. Bu eşitlik göz önüne alınarak

$$\phi(\nabla_Y\phi h)\phi Z - (\nabla_Y\phi h)Z = -(\nabla_Y\phi)hZ + h(\nabla_Y\phi)Z \quad (2.23)$$

bulunur. metrik tensör alanı yardımıyla

$$g(X, (\nabla_{\phi Y}\phi h)\phi Z) - g(\phi X, (\nabla_{\phi Y}\phi h)Z) \\ = g\left(\phi X, \phi\left((\nabla_{\phi Y}\phi h)\phi Z\right) + \eta(Z)\eta\left((\nabla_{\phi Y}\phi h)\phi Z\right) - g(\phi X, (\nabla_{\phi Y}\phi h)Z)\right)$$

elde edilir. Bu son denkleme (2.23) uygulanarak

$$g(hZ, -\alpha\phi Y + hY) = \eta\left((\nabla_{\phi Y}\phi h)\phi Z\right) \quad (2.24)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.20) ve (2.24) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$B(X, Y, Z) = 2g(hX, (\nabla_Y\phi)Z) + 2\alpha\eta(Z)g(h\phi Y, X) - 2\alpha\eta(X)g(h\phi Y, Z) \quad (2.25)$$

bulunur. Ayrıca, $d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$ ve

$$3d\Phi(Y, Z, hX) = (\nabla_Y\Phi)(Z, hX) + (\nabla_Z\Phi)(hX, Y) + (\nabla_{hX}\Phi)(Y, Z)$$

eşitlikleri kullanılarak (2.25) eşitliği (2.21) ifadesinde Y ve Z vektör alanlarının yer değiştirilmesiyle istenen sonuca ulaşılır.

Tanım 2.3.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p \in M^n$ noktası için T_pM nin r -boyutlu alt uzayı ($r \leq n$) D ve D_p nin bir koleksiyonu $D = \{D_p\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞ sınıftan lineer bağımsız $\{X_1, \dots, X_r\}$ vektör alanları U nun her $q \in M^n$ noktasında hala D_p nin bir bazı oluyorsa D

ye M^n üzerinde bir r -boyutlu dağılım ve $\{X_1, \dots, X_r\}$ cümlesine U üzerinde D için bir lokal baz denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.3.3. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r -boyutlu dağılımı D olsun. M^n nin bir haritası $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ cümlesi D dağılımı için bir baz oluşturuyorsa x haritasına D dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan D dağılımı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa D dağılımına integrallenebilir denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.3.4. M^n bir C^∞ manifold, M^n nin r -boyutlu bağlantılı altmanifoldu N ve M^n nin bir r -boyutlu dağılımı olsun. Her $p \in N$ için, $D_p = T_p N$ ise N ye M^n nin r -boyutlu integral alt manifoldu denir (Sharpe 1997).

Önerme 2.3.4. M^n bir manifold ve ω M^n üzerinde C^∞ bir 1-form olsun. M^n nin her $p \in M^n$ noktası için $n = \text{boy}(ker \omega_p) = r$ sabit ise $ker \omega_p$ M^n üzerinde bir r -boyutlu dağılımdır (Sharpe 1997).

Teorem 2.3.1. (Frobenius Teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r -boyutlu dağılımı D olsun. D dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Önerme 2.3.5. M^n bir C^∞ manifold ω M^n üzerinde C^∞ bir 1-form ve her $p \in M^n$ noktası için $n = \text{boy}(ker \omega_p) = r$ sabit olsun. Böylece $D = \{ker \omega_p : p \in M^n\}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in ker \omega_p$ için $d\omega(X, Y) = 0$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Uyarı 2.3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. Her $p \in M^{2n+1}$ için,

$$\mathcal{D}_p = \text{kern}_p = \{X \in T_p M : \eta(X_p) = 0\}$$

ve $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ olmak üzere, $\text{boy}(\mathcal{D}_p) = 2n$ olduğundan Önerme 2.3.4. gereğince \mathcal{D} M^{2n+1} nin bir $2n$ -boyutlu dağılımı olur. Diğer yandan, M^{2n+1} bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olduğundan $d\eta = 0$ olup, Önerme 2.3.5. yardımıyla \mathcal{D} dağılımı

integrallenebilir. Böylece \mathcal{D} dağılımına $2n$ -boyutlu integral altmanifoldları karşılık gelir.

Önerme 2.3.6. Bir hemen hemen kosimplektik manifold bir hemen hemen Kaehler manifold ile \mathbb{R} veya S^1 nin bir lokal aşıkarpımını olması için gerek ve yeter koşul $h = 0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2007).

Teorem 2.3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu ve $h = 0$ olsun. O zaman, M manifoldu $M' \times_{f^2} N^{2n}$ olacak şekilde lokal bir katlı çarpımla ifade edilir. Burada N^{2n} bir hemen hemen Kaehler manifold, t koordinatı ile verilen açık aralık M' ve bazı c pozitif sabitleri için $f^2 = ce^{2t}$ dır (Pastore ve Dileo 2007).

Önerme 2.3.7. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

- (1) D dağılımının integral altmanifoldu hemen hemen Kaehler yapıdadır,
- (2) $\alpha = 0$ durumunda D dağılımının integral altmanifoldu total geodezik veya $\alpha \neq 0$ durumunda D dağılımının integral alt manifoldunun total umbilik olması için gerek ve yeter koşul $h = 0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2005).

Önerme 2.3.8. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin α -kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul D dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve $h = 0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2005).

Önerme 2.3.9. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, \mathcal{D} değme dağılımının integral altmanifoldları Kaehler olacak şekilde bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} in α -kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla \xi = -\alpha \phi^2$ olmasıdır.

İspat Herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, $N_\phi(X, \xi) = 2\phi hX$ eşitliği yazılır. Bu nedenle, yapının normal olduğunu kabul edersek $Y \in \mathcal{D}$ için, $h(Y) = 0$ elde edilir. $h(\xi) = 0$ olduğundan $h = 0$ bulunur ve (2.18) ifadesi $\nabla \xi = -\alpha \phi^2$ eşitliğini gerektirir. (2.18) ifadesi yardımıyla eğer $\nabla \xi = -\alpha \phi^2$ ise $h = 0$ dır. O halde, keyfi X vektör alanları için $N_\phi(X, \xi) = 0$ dır. $J_{\mathcal{D}}$ hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda her $X, Y \in \mathcal{D}$

için $N_\phi(X, Y) = N_{J_D}(X, Y) = 0$ dır. Böylece \mathcal{D} dağılımının integral manifoldları Kaehler yapıdadır.

Sonuç 2.3.1. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu bir hemen hemen α -kosimplektik manifoldu $\nabla\xi = -\alpha\phi^2$ şartını sağlıyorsa bir α -kosimplektik manifoldudur.

İspat Boyutun 3 olması durumunda, \mathcal{D} dağılımının integral altmanifoldları boyutu 2 olan hemen hemen Kaehler yapıdadırlar. Böylece Önerme 2.3.8. den dolayı ispat tamamlanır.

Uyarı 2.3.2. Yukarıda verilen sonuçlar Pastore ve Dileo tarafından 2007 de $\alpha = 1$ durumu için elde edilmiştir.

Tanım 2.3.5. (M, g) bir Riemann manifoldu ve R bu manifoldda ait Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$$

eşitliği I.Bianchi özdeşliği olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.3.6. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise M ye Einstein manifoldu adı verilir.

M^{2n+1} hemen hemen α -kosimplektik manifold olmak üzere, M^{2n+1} üzerindeki (1,1)-tipindeki $h = \frac{1}{2}E_\xi\phi$ ve $l = R(\cdot, \xi)\xi$ simetrik tensör alanları aşağıdaki koşulları sağlar:

$$h\xi = 0, \quad l\xi = 0, \quad tr(h) = 0, \quad tr(h\phi) = 0, \quad h\phi + \phi h = 0 \quad (2.26)$$

Ayrıca (Dileo ve Pastore 2009) çalışmasından aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X - \phi h X \quad (\Rightarrow \nabla_\xi \xi = 0) \quad (2.27)$$

$$\phi l \phi - l = 2[h^2 - \alpha^2 \phi^2] \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \alpha^2[\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha[\eta(X)\phi h Y - \eta(Y)\phi h X] \\ &\quad + (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \end{aligned} \quad (2.29)$$

(1,1)-tipindeki $h' = h \circ \phi$ simetrik tensör alanı ϕ ile ters değişmelidir ve $h'\xi = 0$ dir ayrıca;

$$h = 0 \Leftrightarrow h' = 0, \quad h'^2 = (k + \alpha^2)\phi^2 \Leftrightarrow h^2 = (k + \alpha^2)\phi^2 \quad (2.30)$$

3. (k, μ) '-NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde; ξ 'yi ihtiva eden (k, μ) '-nulluk dağılımı ile bir hemen hemen α -kosimplektik manifold ele alınmıştır. $X \in D$; h' için λ özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun. (2.30)' dan açıktır ki; $\lambda^2 = -(k + \alpha^2)$ bir sabittir. Böylece; $k \leq -\alpha^2$ ve $\lambda = \pm\sqrt{-k - \alpha^2}$ dir. h' nün sırasıyla sıfırdan farklı λ ve $-\lambda$ özdeğerlerine karşılık gelen özuzayları $[\lambda]'$ ve $[-\lambda]'$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun öyle ki ξ ; (k, μ) '-nulluk dağılımına ait ve $h' \neq 0$ dır. O halde 0 gibi basit bir özdeğer ile $k \leq -\alpha^2$, $\mu = -2\alpha$, $Spec(h') = \{0, \lambda, -\lambda\}$ ve $\lambda = \sqrt{-k - \alpha^2}$ dir. $[\xi] \oplus [\lambda]'$ ve

$[\xi] \oplus [-\lambda]'$ dağılımları; total geodezik yaprakları ile ve $[\lambda]'$ ve $[-\lambda]'$ dağılımları total umbilik yaprakları ile integrallenebilir.

Ayrıca kesit eğriliği aşağıdaki gibi verilir:

- (a) $K(X, \xi) = k - 2\alpha\lambda$ eğer $X \in [\lambda]'$ ise ve
 $K(X, \xi) = k + 2\alpha\lambda$ eğer $X \in [-\lambda]'$ ise
- (b) $K(X, Y) = k - 2\alpha\lambda$ eğer $X, Y \in [\lambda]'$ ise
 $K(X, Y) = k + 2\alpha\lambda$ eğer $X, Y \in [-\lambda]'$ ise ve
 $K(X, Y) = -(k + 2\alpha)$ eğer $X \in [\lambda]'$ ve $Y \in [-\lambda]'$ ise
- (c) M^{2n+1} sabit negatif $r = 2n(k - 2\alpha^2n)$ skaler eğriliğine sahiptir.

İspat. (Dileo ve Pastore 2009) çalışmasında Özellik 4.3 ispatı tekrar edilerek $k \leq -\alpha^2$ ve $\mu = -2\alpha$ olduğu görülebilir. (a) $(\kappa, -2\alpha)$ '-nulluk koşulundan hareketle doğrulanır. Gerçekten herhangi $X \in [\lambda]'$ için $R(X, \xi)\xi = (k - 2\alpha\lambda)X$ dir ve X ile skaler çarpımından $K(X, \xi) = k - 2\alpha\lambda$ elde edilir. Şimdi herhangi $X, Y \in [\lambda]'$ için (Dileo ve Pastore 2009) çalışmasında Özellik 4.2'den;

$$R(X, Y)Y = (k - 2\alpha\lambda)(\|Y\|^2X - g(X, Y)Y)$$

dir ve X ile skaler çarpımından $K(X, Y) = k - 2\alpha\lambda$ elde edilir. **(b)**'deki diğer durumlar da benzer şekilde elde edilir.

Sonuç olarak $\{\xi, e_i, \phi e_i\}$ lokal ortonormal baz, $e_i \in [\lambda]'$ olmak üzere **(a)** ve **(b)** durumlarından $Ric(e_i, e_i) = -2n(\alpha + \lambda)$, $Ric(\xi, \xi) = n(k - 2\alpha\lambda)$
 $Ric(\phi e_i, \phi e_i) = -2n(\alpha - \lambda)$ ve $r = 2n(k - 2\alpha^2 n)$ elde edilir.

Önerme 3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold, $h' \neq 0$ ve $(k, -2\alpha)'$ -nulluk dağılımı ξ yi içersin. $X, Y \in M^{2n+1}$ olmak üzere;

$$(\nabla_X h')Y = -g(\alpha h'X + h'^2 X, Y)\xi - \eta(Y)(\alpha h'X + h'^2 X)$$

dir.

İspat. (Dileo ve Pastore 2009) çalışmasında Özellik 4.1'den hareketle ilk olarak

$$\begin{aligned} (\nabla_X h')Y &= -\lambda(\alpha + \lambda)g(X, Y)\xi & \forall X, Y \in [\lambda]' \text{ için} \\ (\nabla_X h')Y &= \lambda(\alpha - \lambda)g(X, Y)\xi & \forall X, Y \in [-\lambda]' \text{ için} \\ (\nabla_X h')Y &= (\nabla_Y h')X = 0 & \forall X \in [\lambda]' \ Y \in [-\lambda]' \text{ için} \end{aligned}$$

ifadeleri ispatlanmalıdır. Bunun için $e_i \in [\lambda]'$ olmak üzere $\{\xi, e_i, \phi e_i\}$ lokal ortonormal bazı alınır (Dileo ve Pastore 2009) çalışmasında Önerme 4.1'den hareketle herhangi $X, Y \in [\lambda]'$ için;

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i g(\nabla_X Y, e_i)e_i + g(\nabla_X Y, \xi)\xi \\ &= \sum_i g(\nabla_X Y, e_i)e_i - (\alpha + \lambda)g(X, Y)\xi \end{aligned}$$

olur. Böylece;

$$(\nabla_X h')Y = \lambda(\nabla_X Y - \sum_i g(\nabla_X Y, e_i)e_i) = -\lambda(\alpha + \lambda)g(X, Y)\xi$$

elde edilir. İkinci ifade de benzer şekilde elde edilir. Üçüncü ifade için $X \in [\lambda]'$, $Y \in [-\lambda]'$ olmak üzere; $g(\nabla_X Y, \xi) = -(\alpha + \lambda)g(X, Y) = 0$ ve $Z \in [\lambda]'$ için;

$g(\nabla_X Y, Z) = -g(\nabla_X Z, Y) = 0$ olur. Böylece $\nabla_X Y \in [-\lambda]'$ için $(\nabla_X h')Y = 0$ sağlanır. Buradan $(\nabla_X h')(Y) - (\nabla_Y h')(X) = 0$ ifadesinden $(\nabla_Y h')X = 0$ elde edilir.

Önerme 3.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun öyle ki $h' \neq 0$ ve $(k, -2\alpha)'$ -nulluk dağılımı ξ yi içersin. $X, Y, Z \in D$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} R(X, Y)\phi Z - \phi R(X, Y)Z &= g(\alpha\phi Y + \phi h'Y, Z)(\alpha X + h'X) \\ &\quad - g(\alpha\phi X + \phi h'X, Z)(\alpha Y + h'Y) \\ &\quad - g(\alpha X + h'X, Z)(\alpha\phi Y + \phi h'Y) \\ &\quad + g(\alpha Y + h'Y, Z)(\alpha\phi X + \phi h'X) \end{aligned}$$

dir.

İspat. Riemann eğrilik tensörünün yardımı ve Önerme 3.1 yardımıyla doğrudan hesaplamalar ile sonuç elde edilir.

Önerme 3.4. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun öyle ki $h' \neq 0$ ve $(k, -2\alpha)'$ -nulluk dağılımı ξ yi içersin. $X, Y, Z \in D$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} R_{XY}h'Z - h'R_{XY}Z \\ = (k + 2\alpha^2)(g(Y, Z)h'X - g(X, Z)h'Y + g(h'X, Z)Y - g(h'Y, Z)X) \end{aligned}$$

dir.

İspat: Önerme 3.2 ve (Dileo ve Pastore 2009) çalışmasında Önerme 4.2 ifadesinin ispatından hareketle açıktır.

Önerme 3.5. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun öyle ki $(k, -2\alpha)'$ -nulluk dağılımı ξ yi içerir ve $h' \neq 0$ dır. Ayrıca; herhangi $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda \in [\lambda]'$ ve $X_{-\lambda}, Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda} \in [-\lambda]'$ için; Riemann eğrilik tensörü aşağıdakileri sağlar:

$$\begin{aligned}
R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} &= 0 \\
R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= 0 \\
R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= (k + 2\alpha)g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_{-\lambda} \\
R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda &= -(k + 2\alpha^2)g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X \\
R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda &= (k - 2\alpha\lambda)[g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda] \\
R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= (k + 2\alpha\lambda)[g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}]
\end{aligned}$$

İspat. Herhangi $X \in [\lambda]'$ ve $Y, Z \in [-\lambda]'$ için; (Dileo ve Pastore 2009) çalışmasında Önerme 4.2'den

$$-\lambda R(X, Y)Z - h'R(X, Y)Z = 2\lambda(k + 2\alpha^2)[g(Y, Z)X + g(X, Z)Y]$$

ifadesi $W \in [\lambda]'$ ile skaler çarpılırsa;

$$g(R(X, Y)Z, W) = -(k + 2\alpha^2)g(Y, Z)g(X, W)$$

elde edilir. Ayrıca (Dileo ve Pastore 2009) çalışmasında Önerme 4.2'den $X, Y, Z \in [\lambda]'$ için $R(X, Y)Z \in [\lambda]'$ ve $X, Y, Z \in [-\lambda]'$ için; $R(X, Y)Z \in [-\lambda]'$ sağlanır. Şimdi $R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda}$ yı hesaplamak için $e_i \in [\lambda]'$ olmak üzere $\{\xi, e_i, \phi e_i\}$ lokal ortonormal bir baz olsun. $(k, -2\alpha)'$ -nulluk koşulu ile $g(R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda}, \xi) = -g(R(X_\lambda, Y_\lambda)\xi, Z_{-\lambda}) = 0$ sağlanır ve $R(X_\lambda, Y_\lambda)e_i \in [\lambda]'$; $g(R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda}, e_i) = 0$ olmasını gerektirir. I. Bianchi özdeşliği kullanarak;

$$\begin{aligned}
g(R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda}, \phi e_i) &= g(R(Y_\lambda, Z_{-\lambda})\phi e_i, X_\lambda) - g(R(X_\lambda, Z_{-\lambda})\phi e_i, Y_\lambda) \\
&= -(k + 2\alpha^2)[g(Z_{-\lambda}, \phi e_i)g(Y_\lambda, X_\lambda) - g(Z_{-\lambda}, \phi e_i)g(X_\lambda, Y_\lambda)] = 0
\end{aligned}$$

bu yüzden $R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda} = 0$ dır. $R(X_{-\lambda}, Y_\lambda)Z_\lambda$, $R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda$, $R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_\lambda$ ve $R(X_\lambda, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda}$ benzer şekilde hesaplanır. (Dileo ve Pastore 2009) çalışmasında Önerme 4.3'ten $R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_{-\lambda}$ kullanılarak; $R(X_\lambda, Y_{-\lambda})\phi Z_{-\lambda} = (\alpha + \lambda)^2[g(\phi Y_\lambda, Z_{-\lambda})X_\lambda - g(\phi X_\lambda, Z_{-\lambda})Y_\lambda]$ elde edilir. $\phi Z_\lambda \in [-\lambda]'$ için bu formül yazılırken;

$$(\alpha + \lambda)^2 = -k + 2\alpha\lambda$$

olur ve

$$R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda = -R(X_\lambda, Y_\lambda)\phi(\phi Z_\lambda) = -(k - 2\alpha\lambda)[g(Y_\lambda, Z_\lambda)X_\lambda] - g(X_\lambda, Z_\lambda)Y_\lambda$$

elde edilir. $R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda}$ için sonuç aynı şekilde elde edilir.

Önerme 3.6. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ yapısı; ξ 'yi ihtiva eden (k, μ) '-nulluk dağılımı ile birlikte bir hemen hemen α –kosimplektik manifold olsun. $h' \neq 0$ iken M^{2n+1} in Q Ricci operatörü;

$$Q = -2\alpha^2nid + 2n(\kappa + \alpha^2)\eta \otimes \xi - 2\alpha nh' \quad (3.1)$$

ile tanımlıdır. Ayrıca M^{2n+1} in skaler eğriliği; $2n(k - 2\alpha^2n)$ 'dir.

İspat. Önerme 3.5 ve (Pastore ve Saltonalli 2011) çalışmasında bulunan Teorem 5.1 den ispat açıktır.

$k, \mu \in \mathbb{R}$ iken (1.3)'den;

$$R(X, Y)\xi = k[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \mu[\eta(Y)h'X - \eta(X)h'Y] \quad (3.2)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.2)'den;

$$R(\xi, X)Y = k[g(X, Y)\xi - \eta(Y)X] + \mu[g(h'X, Y)\xi - \eta(Y)h'X] \quad (3.3)$$

$$S(X, \xi) = 2nk\eta(X) \quad (3.4)$$

elde edilir. X, Y, Z herhangi vektör alanları olmak üzere, S ; $(0,2)$ -tipinde Ricci tensörü ve Q ; $S(X, Y) = g(QX, Y)$ ile tanımlanan Ricci operatörü iken; $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold üzerindeki C Weyl konformal eğrilik tensörü;

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n-1} \{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY\} \\ + \frac{r}{2n(2n-1)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır. (3.1)-(3.4) sonuçlarından hareketle;

$$C(\xi, Y)Z = \left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right) \{g(h'Y, Z)\xi - \eta(Z)h'Y\} \quad (3.6)$$

$$C(X, Y)\xi = \left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right) \{\eta(Y)h'X - \eta(X)h'Y\} \quad (3.7)$$

elde edilir.

Teorem 3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ $n > 1$ yapısı ξ 'yi ihtiva eden (k, μ) '-nulluk dağılımı ile bir hemen hemen α -kosimplektik manifold ve $h' \neq 0$ olsun. M^{2n+1} manifoldu Weyl yarı simetrik ise ; n -boyutlu düz bir manifold ve sabit kesit eğriliği $-4\alpha^2$ olan $n + 1$ -boyutlu bir manifoldun Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir.

İspat. Manifoldun konformal olarak yarı simetrik olduğu düşünülürse; $R.C = 0$ dır. Böylece her X, Y, U, V, W vektör alanları için $(R(X, Y).C)(U, V)W = 0$ olması aşağıdaki ifadeyi sağlar:

$$R(X, Y)C(U, V)W - C(R(X, Y)U, V)W \\ - C(U, R(X, Y)V)W - C(U, V)R(X, Y)W = 0 \quad (3.8)$$

(3.8) ifadesinde; $X = U = \xi$ alınırsa;

$$R(\xi, Y)C(\xi, V)W - C(R(\xi, Y)\xi, V)W \\ - C(\xi, R(\xi, Y)V)W - C(\xi, V)R(\xi, Y)W = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için (3.3) ve (3.5) kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
R(\xi, Y)C(\xi, V)W &= k. [g(Y, C(\xi, V)W)\xi - \eta(C(\xi, V)W)Y] + \mu[g(h'Y, C(\xi, V)W)\xi \\
&\quad - \eta(C(\xi, V)W)h'Y] \\
&= k\left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right)\{g(h'V, W)\eta(Y)\xi - g(h'V, W)Y - \eta(W)g(Y, h'V)\xi\} \\
&\quad - \mu\left(\mu + \frac{2n}{2n-1}\right)\{g(h'Y, h'V)\eta(W)\xi + g(h'V, W)h'Y\} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde; M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için (3.3) ve (3.5) dan;

$$\begin{aligned}
C(R(\xi, Y)\xi, V)W &= k\eta(Y)C(\xi, V)W - kC(Y, V)W - \mu C(h'Y, V)W \\
&= k\left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right)\{g(h'V, W)\eta(Y)\xi - \eta(W)\eta(Y)h'V\} \\
&\quad - kC(Y, V) - \mu C(h'Y, V)W \quad (3.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için (3.3) ve (3.5) yardımıyla;

$$\begin{aligned}
C(\xi, R(\xi, Y)V)W &= kg(Y, V)C(\xi, \xi)W - k\eta(V)C(\xi, Y)W + \mu g(h'Y, V)C(\xi, \xi)W \\
&\quad - \mu\eta(V)C(\xi, h'Y)W \\
&= -k\left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right)\{g(h'Y, W)\eta(V)\xi - \eta(W)\eta(V)h'Y\} \\
&\quad + \mu(k+1)\left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right)\{g(Y, W)\eta(V)\xi - \eta(W)\eta(V)Y\} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar (3.3), (3.5) ve (3.6)'yi kullanarak M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için;

$$\begin{aligned}
C(\xi, V)R(\xi, Y)W &= kg(Y, W)C(\xi, V)\xi - k\eta(W)C(\xi, V)Y + \mu g(h'Y, W)C(\xi, V)\xi \\
&\quad - \mu\eta(W)C(\xi, V)h'Y \\
&= -\left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right)\{kg(Y, W)h'V + \mu g(h'Y, W)h'V \\
&\quad + \mu g(h'V, h'Y)\eta(W)\xi\} - k\left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right)\{g(h'V, Y)\eta(W)\xi - \eta(Y)\eta(W)h'V\} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için; (3.10)-(3.13) ifadeleri (3.9) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$kC(Y, V)W + C(h'Y, V)W + \left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right) \{-kg(h'V, W)Y - \mu g(h'V, W)h'Y + kg(h'Y, W)\eta(V)\xi - k\eta(V)\eta(W)h'Y - \mu(k+1)g(Y, W)\eta(V)\xi + \mu(k+1)\eta(V)\eta(W)Y + kg(Y, W)g(Y, W)h'V + \mu g(h'Y, W)h'V\} = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için; (2.30) eşitliğindeki $h'^2 = (k+1)\phi^2$ ifadesi kullanılırsa ve (3.14) ifadesinde $Y = h'Y$ alınır;

$$kC(h'Y, V)W - \mu(k+1)C(Y, V)W + \left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right) - kg(h'V, W)h'Y + \mu(k+1)g(h'V, W)Y - k(k+1)g(Y, W)\eta(V)\xi + k(k+1)\eta(V)\eta(W)Y - \mu(k+1)g(h'Y, W)\eta(V)\xi + \mu(k+1)\eta(V)\eta(W)h'Y + kg(h'Y, W)h'V - \mu(k+1)g(Y, W)h'V = 0 \quad (3.15)$$

elde edilir. M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için; (3.14) ifadesinin k katından (3.15) ifadesinin μ katı çıkartılırsa;

$$[k^2 + 4\alpha^2(k+1)]C(Y, V)W + [k^2 + 4\alpha^2(k+1)] \left(-2\alpha + \frac{2\alpha n}{2n-1}\right) \{g(h'Y, W)\eta(V)\xi - \eta(V)\eta(W)h'Y - g(h'V, W)Y + g(Y, W)h'V\} = 0 \quad (3.16)$$

ispatlanmıştır. $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımı ξ yi içeriyorsa; $\mu = -2\alpha$ olduğu elde edilir. Bu sonucu kullanarak M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için $Y, V, W \in [-\lambda]'$ olmak üzere;

$$C(Y, V)W = \frac{2nk - 2\alpha\lambda + 2\alpha^2n}{2n-1} \{g(V, W)Y - g(Y, W)V\} = 0 \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.16) yardımıyla ve $Y, V, W \in [-\lambda]'$ olmak üzere (3.15) ifadesinden;

$$(k^2 + 4\alpha^2(k+1))(k + \alpha^2 - \alpha\lambda)\{g(V, W)Y - g(Y, W)V\} = 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. $\lambda = \pm\sqrt{-k - \alpha^2}$ gerçeğini kullanarak (3.18) den;

$$(-\lambda)(\lambda + \alpha)((-\lambda^2 + \alpha^2)^2 - (4\alpha^2 - 4\alpha^4)) = 0 \quad (3.19)$$

sağlanır. Buradan $\lambda = 0$ veya $\lambda = -\alpha$ dir. $h' \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$ dir. Dolayısıyla $\lambda = -\alpha$ dir ve $k = -2\alpha^2$ dir. Öyleyse herhangi $X_\lambda Y_\lambda Z_\lambda \in [\lambda]'$ ve $X_{-\lambda} Y_{-\lambda} Z_{-\lambda} \in [-\lambda]'$ için Önerme 3.5' den;

$$\begin{aligned} R(X_\lambda, Y_\lambda)Z_\lambda &= 0, \\ R(X_{-\lambda}, Y_{-\lambda})Z_{-\lambda} &= -4\alpha^2 [g(Y_{-\lambda}, Z_{-\lambda})X_{-\lambda} - g(X_{-\lambda}, Z_{-\lambda})Y_{-\lambda}] \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\mu = -2\alpha$ olduğu dikkate alınarak Lemma 3.1'den hareketle herhangi $X \in [-\lambda]'$ için; $K(X, \xi) = -4\alpha^2$ ve herhangi $X \in [\lambda]'$ için; $K(X, \xi) = 0$ dir. Yine Lemma 3.1'den; herhangi $X, Y \in [\lambda]'$ için; $K(X, Y) = 0$, herhangi $X, Y \in [-\lambda]'$ için; $K(X, Y) = -4\alpha^2$ ve herhangi $X \in [\lambda]'$, $Y \in [-\lambda]'$ için; $K(X, Y) = 0$ olduğu görülür. (Dileo ve Pastore 2009) da gösterildiği gibi M^{2n+1} manifolduna gömülmüş $[-\lambda]'$ dağılımının yaprakları için H ; eğrilik vektör alanı olmak üzere; $H = -(\alpha + \lambda)\xi$ iken; $[\xi] \oplus [\lambda]'$ dağılımı total geodezik yaprakları ve $[-\lambda]'$ dağılımı total umbilik yaprakları ile integrallenebilir. Burada $\lambda = -\alpha$ iken; M^{2n+1} manifolduna gömülmüş ortogonal $[\xi] \oplus [\lambda]'$ ve $[-\lambda]'$ dağılımlarının her ikisinde total geodezik yaprakları ile integrallenebilir. Böylece M^{2n+1} manifoldunun $H^{n+1}(-4\alpha^2) \times \mathbb{R}^n$ ifadesine lokal olarak izometrik olduğu söylenebilir. Bununla ana teoremin ispatı tamamlanır.

Konformal simetrik manifold ($\nabla C = 0$) iken; $R \cdot C = 0$ sağlanır. Bu nedenle Teorem 3.1'den hareketle aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1. : $h' \neq 0$ ve ξ 'yi içeren $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına sahip konformal simetrik M^{2n+1} ($n > 1$) hemen hemen α -kosimplektik manifoldu; n -boyutlu düz bir manifold ile sabit kesit eğriliği $-4\alpha^2$ olan $(n + 1)$ -boyutlu manifoldun Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir.

$R \cdot R = 0$ iken; $R \cdot C = 0$ sağlanır bununla aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.2. $h' \neq 0$ ve ξ yi içeren $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımı ile birlikte bir yarı simetrik M^{2n+1} ($n > 1$) hemen hemen α -kosimplektik manifoldu; n -boyutlu düz bir manifold ile sabit kesit eğriliği $-4\alpha^2$ olan $(n + 1)$ -boyutlu manifoldun Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir.

Teorem 3.2. $h' \neq 0$ ve ξ yi içeren $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımı ile birlikte bir $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ $n > 1$ hemen hemen α -kosimplektik manifoldu $C \cdot S = 0$ eğrilik koşulunu sağlar ancak ve ancak manifold bir Einstein manifoldudur.

İspat. $h' \neq 0$ ve ξ yi içeren $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına sahip bir hemen hemen α -kosimplektik manifoldun $C \cdot S = 0$ eğrilik koşulunu sağladığı düşünülür. Böylece; M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y, U, V için;

$$S(C(X, Y)U, V) + S(U, C(X, Y)V) = 0 \quad (3.20)$$

ifadesini sağlayan bütün X, Y, U, V vektör alanları için; $(C(X, Y) \cdot S)(U, V) = 0$ 'dır.

(3.20) ifadesinde $X = U = \xi$ olarak alınır ise;

$$S(C(\xi, Y)\xi, V) + S(\xi, C(\xi, Y)V) = 0 \quad (3.21)$$

elde edilir.

M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V vektör alanları için; (3.6) ve (3.4) ifadelerini kullanarak (3.21)'den;

$$\left(\mu + \frac{2\alpha n}{2n+1}\right) \{S(h'Y, V) - 2nkg(h'Y, V)\} = 0 \quad (3.22)$$

elde edilir. $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımı ξ yi içerdiğinden; $\mu = -2\alpha$ dir.

Böylece Y, V ; M^{2n+1} üzerindeki herhangi vektör alanları olmak üzere $2n + 1 \geq 5$ için;

$$S(h'Y, V) = 2nkg(h'Y, V) \quad (3.23)$$

olur.

M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V vektör alanları için; (3.22)'de $h'Y$ yerine Y yazılırsa ve (2.30) ifadesini kullanılırsa;

$$(k + \alpha^2)\{S(Y, V) - 2nkg(Y, V)\} = 0 \quad (3.24)$$

elde edilir.

$k + \alpha^2 = 0$ iken; $k = -\alpha^2$ olduğu düşünülür. ξ yi içeren $(k, \mu)'$ -nulluk dağılımına sahip bir hemen hemen α -kosimplektik manifoldta; $k = -\alpha^2$ ise; $h' = 0$ 'dır ve M^{2n+1} manifoldu; bir açık aralık ve bir hemen hemen Kähler manifoldun lokal olarak çarpımıdır. O halde; $k + \alpha^2 = 0$ olması $h' \neq 0$ olması hipoteziyle çelişir. Bu nedenle; M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V vektör alanları için; $S(V, Y) = 2nkg(V, Y)$ dir. Böylelikle manifold bir Einstein manifoldudur.

Tersine; manifold bu düşünce altında bir Einstein manifoldu ise; (3.19)'dan $C \cdot S = 0$ aynı şekilde geçerlidir.

Böylelikle ispat tamamlanır.

4. (k, μ) -NULLUK DAĞILIMINA SAHİP HEMEN HEMEN α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde; sırasıyla C ve R ; konformal eğrilik tensörü ve Riemann eğrilik tensörü iken; ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımına sahip bir hemen hemen α -kosimplektik manifold üzerindeki $C = 0$ ve $R.C = 0$ eğrilik özellikleri ele alınmıştır. $k, \mu \in \mathbb{R}$ iken (1.2)'den;

$$R(X, Y)\xi = k[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \mu[\eta(Y)hX - \eta(X)hY] \quad (4.1)$$

ifadesi mevcuttur.

Şimdi aşağıdaki ifade verilebilir:

Teorem 4.1: M^{2n+1} ; $2n + 1$ -boyutlu ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımına sahip bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O halde; $k \leq -\alpha^2$, $h = 0$ dır ve M^{2n+1} manifoldu; bir hemen hemen Kaehler manifold ile bir açık aralığın lokal olarak çarpımıdır.

İspat. X ; ξ ye dik olan bir birim vektör olsun. ($\|X\| = 1, g(X, \xi) = 0, X \perp \xi$). (4.1) ifadesi yardımıyla $R(X, \xi)\xi = kX + \mu hX$ olur ve (2.30) ifadesinden $h^2X = -(k + \alpha^2)X$ eşitliği sağlanır. X ; h ın birim özvektörü ve λ özdeğer olmak üzere;

$$\lambda^2 X = -(k + \alpha^2)X$$

tır ve böylece $-(k + \alpha^2) = \lambda^2 \geq 0$ olur.

Buradan $k \leq -\alpha^2$ ve $Spech(h) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ dır. (2.29) da $R(X, \xi)\xi$ ifadesi yerine yazılırsa;

$$kX + \mu hX = -\alpha^2 X + 2\alpha\lambda\phi X - \lambda^2 X + \nabla_\xi \phi hX - \phi h \nabla_\xi X$$

elde edilir. Bu ifade ϕX ile skaler çarpılırsa; $\alpha \cdot \lambda = 0$ bulunur. Bu durumda;

- i) $\alpha = 0, \lambda \neq 0$ ise; manifold hemen hemen kosimplektiktir,
ii) $\alpha \neq 0, \lambda = 0$ ise; $K(X, \xi) = -\alpha^2$ dir.

M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y vektör alanları için Teorem 4.1 ve (4.1) ifadesinden aşağıdaki elde edilir:

$$R(X, Y)\xi = -\alpha^2[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \quad (4.2)$$

$$R(\xi, X)Y = -\alpha^2[g(X, Y)\xi - \eta(Y)X] \quad (4.3)$$

$$S(X, \xi) = -2n\alpha^2\eta(X) \quad (4.4)$$

bulunur. Ayrıca M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y vektör alanları için aşağıdaki elde edilir:

$$\eta(R(X, Y)Z) = -\alpha^2[g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)] \quad (4.5)$$

M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için M^{2n+1} manifoldunun konformal olarak düz olduğu düşünülürse;

$$C(X, Y)Z = 0 \quad (4.6)$$

olur. (3.5) ve (4.6) ifadelerinden;

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \frac{1}{2n-1}\{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY\} \\ &\quad - \frac{r}{2n(2n-1)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

(4.2), (4.4) ifadeleri kullanılırsa ve (4.7) ifadesinde $Z = \xi$ alınır;

$$\eta(Y)QX - \eta(X)QY = \left(\alpha^2 + \frac{r}{2n}\right)\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.4) kullanılırsa ve (4.8) de $Y = \xi$ alınır;

$$QX = \left(\alpha^2 + \frac{r}{2n}\right)X - \left(\alpha^2 + 2n\alpha^2 + \frac{r}{2n}\right)\eta(X)\xi \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.9) ifadesinin Y ile iç çarpımı alınırsa;

$$S(X, Y) = \left(\alpha^2 + \frac{r}{2n}\right)g(X, Y) - \left(\alpha^2 + 2n\alpha^2 + \frac{r}{2n}\right)\eta(X)\eta(Y) \quad (4.10.)$$

elde edilir.

Şimdi $C(X, Y)Z = 0$ hipotezi dikkate alınırsa ve konformal eğrilik tensörü ifadesindeki $S(X, Y)$ ve QX değerleri yerine koyulursa;

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \left(\frac{r+4n\alpha^2}{2n(2n-1)}\right)\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &\quad - \frac{1}{2n-1}\left(\alpha^2 + 2n\alpha^2 + \frac{r}{2n}\right) \\ &\quad \times \{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi \\ &\quad + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir.

ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımına sahip bir hemen hemen α -kosimplektik manifoldun kesit eğriliği Teorem 4.1. de $K(X, \xi) = -\alpha^2$ olarak ispatlanmıştır. Buradan; ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımı ile birlikte bir hemen hemen α -kosimplektik manifoldun skaler eğriliği; $r = -2n\alpha^2(2n + 1)$ olarak elde edilir.

Böylece (4.11) ifadesinden sabit eğriliği $-\alpha^2$ olan manifold;

$$R(X, Y)Z = -\alpha^2\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

ifadesini sağlar.

Diğer taraftan; eğer M^{2n+1} manifoldunun sabit eğriliği $-\alpha^2$ ise; manifoldun bu şartlar altında konformal düz olduğu kolayca görülebilir.

Böylece aşağıdaki ifade verilebilir:

Önerme 4.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$; ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımına sahip bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. Öyleyse, M^{2n+1} ; konformal düzdür ancak ve ancak manifoldun sabit eğriliği $-\alpha^2$ dir.

M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, Z vektör alanları için (4.3),(4.4) ve (3.5) ifadeleri kullanılırsa aşağıdaki ifade kolayca doğrulanabilir:

$$C(\xi, Y)Z = \left(\frac{r+2n\alpha^2}{2n(2n-1)}\right) \{g(Y, Z)\xi - \eta(Z)Y\} - \frac{1}{2n-1} \{S(Y, Z)\xi - \eta(Z)QY\} \quad (4.12)$$

Şimdi aşağıdaki ifade ispatlanacaktır:

Önerme 4.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$; ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımına sahip bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. O halde, M^{2n+1} ; Weyl yarı simetriktrik ancak ve ancak manifold konformal düzdür.

İspat. M^{2n+1} ; ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımı ile birlikte bir Weyl yarı simetrik hemen hemen α -kosimplektik manifold olsun. Böylece bütün X, Y, U, V, W vektör alanları için; $(R(X, Y) \cdot C)(U, V)W = 0$ dır.

$$\begin{aligned} R(X, Y)C(U, V)W - C(R(X, Y)U, V)W \\ - C(U, R(X, Y)V)W - C(U, V)R(X, Y)W = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

(4.13) ifadesinde $X = U = \xi$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned} R(\xi, Y)C(\xi, V)W - C(R(\xi, Y)\xi, V)W \\ - C(\xi, R(\xi, Y)V)W - C(\xi, V)R(\xi, Y)W = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir.

M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için (4.3) ve (4.12) ifadeleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} R(\xi, Y)C(\xi, V)W = \left(\frac{\alpha^2(r+2n\alpha^2)}{2n(2n-1)}\right) \{g(V, Y)\eta(W)\xi - g(V, W)\eta(Y)\xi + g(V, W)Y - \\ \eta(W)\eta(V)Y\} + \frac{\alpha^2}{2n-1} \{S(V, W)\eta(Y)\xi - S(V, Y)\eta(W)\xi - S(V, W)Y - \\ 2n\alpha^2\eta(W)\eta(V)Y\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir.

Tekrar M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için tekrar (4.3) ve (4.12) ifadeleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} C(R(\xi, Y)\xi, V)W &= C(Y, V)W \\ &\quad - \left(\frac{\alpha^2(r+2\alpha^2n)}{2n(2n-1)} \right) \{g(V, W)\eta(Y)\xi - \eta(W)\eta(Y)V\} \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2n-1} \{S(V, W)\eta(Y)\xi - \eta(Y)\eta(W)QV\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. Benzer şekilde; M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için (4.3) ve (4.12)'den;

$$\begin{aligned} C(\xi, R(\xi, Y)V)W &= \left(\frac{\alpha^2(r+2n\alpha^2)}{2n(2n-1)} \right) \{g(Y, W)\eta(V)\xi - \eta(V)\eta(W)Y\} \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2n-1} \{S(Y, W)\eta(V)\xi - \eta(W)\eta(V)QY\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için (4.3) ve (4.12) yardımıyla;

$$\begin{aligned} C(\xi, V)R(\xi, Y)W &= \left(\frac{\alpha^2(r+2n\alpha^2)}{2n(2n-1)} \right) \\ &\quad \times \{g(Y, W)V - g(Y, W)\eta(V)\xi + g(Y, V)\eta(W)\xi - \eta(W)\eta(Y)V\} \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2n-1} \{2n\alpha^2 g(Y, W)\eta(V)\xi + g(Y, W)QV + S(V, Y)\eta(W)\xi - \\ &\quad \eta(W)\eta(Y)QV\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir.

Sonuç olarak; M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için (4.15), (4.16), (4.17) ve (4.18) ifadeleri (4.14) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\alpha^2(r+2n\alpha^2)}{2n(2n-1)} \right) \{g(V, W)Y - g(Y, W)V\} - C(Y, V)W \\ &+ \frac{\alpha^2}{2n-1} \{S(Y, W)\eta(V)\xi - \eta(W)\eta(V)QY + 2n\alpha^2 g(Y, W)\eta(V)\xi + g(Y, W)QV - \\ &S(V, W)Y - 2n\alpha^2 \eta(V)\eta(W)Y\} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir.

(3.5) ifadesi (4.19) ifadesinde kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
R(Y, V)W &= \frac{r(\alpha^2 - 1) + 2n\alpha^4}{2n(2n - 1)} \{g(V, W)Y - g(Y, W)V\} \\
&+ \frac{\alpha^2 - 1}{2n - 1} \{g(Y, W)QV - S(V, W)\} \\
&+ \frac{1}{2n - 1} \{g(V, W)QY - S(Y, W)V\} \\
&+ \frac{\alpha^2}{2n - 1} \{S(Y, W)\eta(V)\xi - \eta(W)\eta(V)QY \\
&+ 2n\alpha^2 g(Y, W)\eta(V)\xi - 2n\alpha^2 \eta(W)\eta(V)Y\}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

bulunur.

M^{2n+1} üzerindeki herhangi V, W vektör alanları için; (4.20) ifadesinde Y yerine e_i yazarak toplam alınır;

$$S(V, W) = \left(\alpha^2 + \frac{r}{2n}\right) g(V, W) - \left(\alpha^2 + 2n\alpha^2 + \frac{r}{2n}\right) \eta(V)\eta(W) \tag{4.21}$$

elde edilir.

(4.19) ifadesinin Z ile iç çarpımı alınır;

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha^2(r+2\alpha^2n)}{2n(2n-1)}\right) \{g(V, W)g(Y, Z) - g(Y, W)g(V, Z)\} - g(C(Y, V)W, Z) + \\
&\frac{\alpha^2}{2n-1} \{S(Y, W)\eta(V)\eta(Z) - \eta(W)\eta(V)S(Y, Z) + 2n\alpha^2 g(Y, W)\eta(V)\eta(Z) + \\
&g(Y, W)S(V, Z)S(V, W)g(Y, Z) - 2n\alpha^2 \eta(V)\eta(W)g(Y, Z)\} = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

bulunur.

(4.22)'de $S(V, W)$ 'nin değeri yerine yazılırsa;

$$g(C(Y, V)W, Z) = 0 \tag{4.23}$$

kolayca elde edilir.

Bu ise, M^{2n+1} üzerindeki herhangi Y, V, W vektör alanları için; $C(Y, V)W = 0$ olması demektir. Böylece manifold konformal düzdür.

Diğer taraftan, manifold konformal düz ise; o zaman manifold açıkça Weyl yarı simetriktir. Bu da özelliğin ispatını tamamlar.

Önerme (4.1) ve (4.2) den aşağıdaki ifadeler elde edilir:

Teorem 4.2. ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımı ile bir M^{2n+1} ($n > 1$) α -kosimplektik manifoldu Weyl yarı simetriktir ancak ve ancak manifoldun sabit eğriliği $-\alpha^2$ dir.

Konformal simetrik manifold ($\nabla C = 0$) iken; $R \cdot C = 0$ sağlanır, bu nedenle Teorem 4.2'den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1. ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımı ile bir M^{2n+1} ($n > 1$) α -kosimplektik manifoldu, konformal simetriktir ancak ve ancak manifoldun sabit eğriliği $-\alpha^2$ dir.

$R \cdot R = 0$ iken; $R \cdot C = 0$ sağlanır, buradan da aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2. ξ yi içeren (k, μ) -nulluk dağılımına sahip bir M^{2n+1} ($n > 1$) α -kosimplektik manifoldu; yarı simetriktir ancak ve ancak manifoldun sabit eğriliği $-\alpha^2$ dir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde hemen hemen Weyl yarisimetrik α -kosimplektik manifoldlar tanıtılmış ve bu manifoldların sahip olduğu $(k, \mu)'$ -nulluk dağlımı ve (k, μ) -nulluk dağlımları ile ilgili çeşitli özellikler elde edilmiştir.



KAYNAKLAR

- Blair, D.E., 1970, Geometry of manifolds with structural group $U(n) \times O(s)$, *J. Diff. Geom.*, 4, 155-167.
- Blair, D. E., 1976, Contact manifolds in Riemannian geometry in: *Lecture Notes on Mathematics*. vol. 509, Springer, Berlin.
- Blair, D. E., 2002, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, *Progr. Math.*, 203, Birkhäuser Boston.
- Blair, D. E., Koufogiorgos, T. and Papantoniou, B. J., 1995, Contact metric manifolds satisfying a nullity condition, *Israel. J. Math.* 91(1-3), 189-214.
- Boeckx, E., 2000, A full classification of contact metric (k, μ) -spaces, *Illinois J. Math.*, 44(1), 212-219.
- Boeckx, E., Cho, J. T., 2006, Locally symmetric contact metric manifolds, *Monatsh. Math.*, 148(4), 269-281.
- Chen, B. Y., 1973, Geometry of submanifolds, New York, Marcel Dekker.
- Chinea, D., Gonzalez, C., 1990, A classification of almost contact metric manifolds, *Annali di Matematica pura ed applicata*, 156(4), 15-36.
- Dacko, P., Olszak, Z., 1998, On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, Vol. 56,1, 89-103.
- De, U. C., Mandal, K., 2016, On a type of almost Kenmotsu manifolds with nullity distributions, *Arab. J. Math. Sci.*
- Dileo, G., Pastore, A. M., 2007, Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 14 ,343-354.
- Dileo, G., Pastore, A. M., 2009, Almost Kenmotsu manifolds and nullity distribution, *J. Geom.* 93, 46-61.
- Dileo, G., Pastore, A. M., 2009, Almost Kenmotsu manifolds with a condition of η -parallelism, *Differential Geom. Appl.* 27, 671-679.
- Falcitelli, M., Pastore, M., 2007, Almost Kenmotsu f-manifolds, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, No. 1,12, 32-43.
- Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., 2004, Riemann Geometry, 3rd ed., XVI, 322, p., *Springer Universitext*, ISBN: 9783540204930.
- Ghosh, A., Koufogiorgos, T. and Sharma, R., 2001, Conformally flat contact metric manifolds, *J. Geom.*, 70, 66-76.

- Ghosh, A., Sharma, R., 1999, On contact strongly pseudo-convex integrable CR manifolds, *J. Geom.* 66, 116-122.
- Goldberg, S. I., Yano, K., 1969, Integrability of almost cosymplectic structure, *Pacific J. Math.*, 31, 373-382.
- Gray, A., 1966 Spaces of constancy of curvature operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 , 897-902.
- Janssens, D., Vanhecke, L., 1981, Almost contact Structures and curvature tensors, *Kodai Math J.*, 4, 1-27.
- Jun, J. B., De, U. C. and Pathak, G., 2005, On Kenmotsu manifolds, *J. Korean Math. Soc.* 42 , 435-445.
- Kenmotsu, K., 1972, A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.* (2) 24, 93-103.
- Kim, T. W., Pak, H. K., 2005, Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures, *Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug.*, 21(4), 841-846.
- Küpeli Erken, İ., 2010, Paradeğme manifoldlar, Yüksek Lisans Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa.
- Okumura, M., 1962, Some remarks on spaces with a certain contact structure, *Tohoku Math. J.* (2) 14, 135-145.
- Olszak, Z., 1981, On almost cosymplectic manifolds, *Kodai Math*, 4(2), 239-250.
- Olszak, Z., 1987, Almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves, *Tensor N.S.*, 46, 117-124.
- Olszak, Z., 1989, Locally conformal almost cosymplectic manifolds, *Coll. Math.*, 57 , 73-87.
- O'Neill, B., 1983, *Semi Riemannian Geometry*, A. Press, London.
- Ozturk, H., Aktan, N. and Murathan, C., Almost α -cosymplectic (k, μ, ν) -Spaces, *Mathematics Subject Classification*, 53D10, 53C25, 53C35.
- Ozturk, H., Aktan, N. and Murathan, C., 2000, Conformally flat almost α -cosymplectic manifolds with Kaehlerian integral submanifolds, *Mathematics Subject Classification*. 53D10, 53C15, 53C25, 53C35.
- Ozturk, H., 2009, Hemen hemen α -kosimplektik (k, μ, ν) -uzayları, Doktora Tezi, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Afyon.
- Pastore, A. M., Saltarelli, V., 2011, Generalized nullity distributions on almost Kenmotsu manifolds, *InternationaI Electronic Journal of Geometry* 4(2), 168-183.

- Sharpe, R. W., 1997, Differential Geometry, *Graduate Texts in Math.* Springer.
- Spivak, M., 1965, Calculus on manifolds, *Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc.*, ISBN: 0805902193.
- Szabó, Z. I., 1982, Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y).R = 0$, the local version, *J. Differential Geom.* 17, 531-582.
- Tanno, S., 1978, Some differential equations on Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* 30, 509-531.
- Vaisman, I., 1980, Conformal changes of almost contact metric manifolds, *Lecture Notes in Math.*, Berlin-Heidelberg-New York, 792 , 435-443.
- Wang, Y., Liu, X., 2014, Second order paralel tensors on almost Kenmotsu manifolds satisfying the nullity distributions, *Filomat* 28, 839-847.
- Wang, Y., Liu, X., 2014, Riemannian semisymmetric almost Kenmotsu manifolds and nullity distributions, *Ann. Polon. Math.* 112 ,37-46.
- Wang, Y., Liu, X., 2015, On ϕ -recurrent almost Kenmotsu manifolds, *Kuwait J. Sci.* 42, 65-77.
- Wang, Y., Liu, X., 2015, On a type of almost Kenmotsu manifolds with harmonic curvature tensors, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 22,15-24.
- Yano, K., Kon, M., 1984, Structures on Manifolds, *Series in Pure Mathematics, 3.* World Scientific Publishing Corp., Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Nurgül ARI
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : SAMSUN/1988
Telefon : 05072245087
Faks :
e-mail : nrg15542@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Y.D.A. Bafra Lisesi, Samsun	2006
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi, Konya	2013
Yüksek Lisans	: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya	
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
-----	-------	--------

YAYINLAR

Arı, N., Aktan, N., On a type of almost alpha-cosymplectic manifolds with (k, μ) '-nullity distributions, 1st *International Conference on Mathematical and Related Sciences-ICMRS 2018*, Antalya-Turkey.

Arı, N., Aktan, N., On a new class of almost alpha-cosymplectic manifolds, 1st *International Conference on Mathematical and Related Sciences-ICMRS 2018*, Antalya-Turkey.

