T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA DOĞRUSAL OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN DİFERANSİYEL GEOMETRİK ANALİZİ

Zeynep ÇELİK GÜNGÖR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2026
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Zeynep ÇELİK GÜNGÖR tarafından hazırlanan "Lorentz Uzayında Doğrusal Olmayan Schrödinger Denkleminin Diferansiyel Geometrik Analizi" adlı tez çalışması 06/02/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

Danışman
Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

Üye
Prof. Dr. Nesip AKTAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…/20.. gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Havvanur UÇBEYİAY
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Zeynep ÇELİK GÜNGÖR

Tarih: 06.02.2026

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LORENTZ UZAYINDA DOĞRUSAL OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN DİFERANSİYEL GEOMETRİK ANALİZİ

Zeynep ÇELİK GÜNGÖR

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2026, 57 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Melek ERDOĞDU
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

Bu tez çalışmasında, Lorentz uzayında doğrusal olmayan Schrödinger (Nonlinear Schrödinger – NLS) denklemi diferansiyel geometrik yöntemler kullanılarak incelenmiştir. NLS denklemi, kuantum mekaniği, doğrusal olmayan optik ve dalga teorisi gibi birçok alanda önemli bir yere sahip olup, özellikle soliton çözümleriyle dikkat çekmektedir. Çalışmada öncelikle diferansiyel geometriye ait temel kavramlar sunulmuş, ardından doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin matematiksel yapısı ele alınmıştır. Denklemin çözümleri ile eğriler ve yüzeylerin geometrik özellikleri arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur. Özellikle Lorentz (Minkowski) uzayının metrik yapısının, NLS denkleminin geometrik yorumu üzerindeki etkileri analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, Lorentz uzayında doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin Öklid uzayına kıyasla farklı ve daha zengin geometrik özellikler sergilediğini göstermektedir. Bu çalışma, diferansiyel geometri ile NLS denklemi arasındaki ilişkiye katkı sağlamayı amaçlamaktadır. Tez, altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı kapsamında giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ile alakalı mevcut literatür araştırması yapılmıştır. Üçüncü bölümde Öklid ve Lorentz uzaylarındaki bazı temel bilgilere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde Öklid uzayında NLS yüzeyi diferansiyel geometrik olarak incelenmiştir. Beşinci bölümde ise Lorentz uzayında NLS yüzeyi diferansiyel geometrik olarak incelenmiştir. Son olarak altıncı bölümde ise çalışmaya ilişkin sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Olmayan Schrödinger (NLS) Denklemi, Darboux Çatısı, Darboux Eğrilikleri, Geodezik Eğri, Lorentz Uzay, NLS Yüzeyi, Soliton Yüzeyi.

ABSTRACT

MS THESIS

DIFFERENTIAL GEOMETRIC ANALYSIS OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION IN LORENTZIAN SPACE

Zeynep ÇELİK GÜNGÖR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2026, 57 Pages

Jury
Prof. Dr. Melek ERDOĞDU
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Assoc. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

In this thesis, the nonlinear Schrödinger (NLS) equation in Lorentzian space is investigated using differential geometric methods. The NLS equation plays an important role in many fields such as quantum mechanics, nonlinear optics, and wave theory, and it is particularly notable for its soliton solutions. First, the fundamental concepts of differential geometry are presented, and then the mathematical structure of the nonlinear Schrödinger equation is examined. The relationships between the solutions of the equation and the geometric properties of curves and surfaces are established. In particular, the effects of the metric structure of Lorentz (Minkowski) space on the geometric interpretation of the NLS equation are analyzed. The results show that the nonlinear Schrödinger equation in Lorentzian space exhibits different and richer geometric properties compared to those in Euclidean space. This study aims to contribute to the understanding of the relationship between differential geometry and the NLS equation. The thesis consists of six chapters. In the first chapter, the introduction is presented in line with the aim of the study. The second chapter provides a review of the existing literature related to the nonlinear Schrödinger equation. In the third chapter, some fundamental concepts of Euclidean and Lorentzian spaces are introduced. In the fourth chapter, the NLS surface in Euclidean space is examined from a differential geometric perspective. In the fifth chapter, the NLS surface in Lorentzian space is analyzed using differential geometric methods. Finally, the sixth chapter presents the conclusions and suggestions of the study.

Keywords: Darboux Curves, Darboux Frame, Geodesic Curve, Lorentz Space, NLS Surface, Nonlinear Schrödinger (NLS) Equation, Soliton Surface.

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, desteğini esirgemeyen, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Melek ERDOĞDU'ya en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Ayrıca bu süreçte desteğini her zaman hissettiren aileme ve sabırla yanımda olan değerli eşime gönülden teşekkür ederim.

Zeynep ÇELİK GÜNGÖR
KONYA-2026

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **viii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL BİLGİLER **9**

3.1. Öklid Uzayında Temel Bilgiler 9
3.2. Lorentz Uzayında Temel Bilgiler 13

4. ÖKLİD UZAYINDA NLS YÜZEYİ **19**

5. LORENTZ UZAYINDA NLS YÜZEYİ **29**

5.1. Spacelike NLS Yüzeyi 29
5.2. Timelike NLS Yüzeyi 42

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **53**

6.1 Sonuçlar 53
6.2 Öneriler 54

KAYNAKLAR **55**

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Genelleştirilmiş NLS denklemi için dalga çözümünün grafiği.....6
Şekil 3.1. $\mathbb{R}^{n}$ de Eğri.....10
Şekil 3.2. Bir eğrinin Frenet çatısı.....11
Şekil 4.1. NLS yüzeyinin ve geodezik eğrisinin grafiği 27
Şekil 4.2. NLS yüzeyindeki geodeziklerin grafiği.....28

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

SİMGELER

$\boldsymbol{\tau}$	Burulma Fonksiyonu
$\boldsymbol{\kappa}$	Eğrilik Fonksiyonu
$\boldsymbol{s}$	Yay Uzunluğu Parametresi
$\boldsymbol{t}$	Zaman
$\boldsymbol{k_n}$	Normal Eğrilik
$\boldsymbol{k_g}$	Geodezik Eğrilik
$\boldsymbol{\tau_g}$	Geodezik Burulma
$\boldsymbol{\alpha}$	Alfa Fonksiyonu
$\boldsymbol{\lambda}$	Lamda Fonksiyonu
$\boldsymbol{\gamma}$	Gama Fonksiyonu
$\boldsymbol{\beta}$	Beta Fonksiyonu
$\boldsymbol{\alpha_s}$	Alfa Fonksiyonunun s ye Göre Türevi
$\boldsymbol{\lambda_s}$	Lamda Fonksiyonunun s ye Göre Türevi
$\boldsymbol{\gamma_s}$	Gama Fonksiyonunun s ye Göre Türevi
$\mathbb{E}_1^3$	3 Boyutlu Lorentz Uzay
$\mathbb{R}$	Gerçel (Reel) Sayılar
$\mathbb{R}^n$	Öklid Uzay
$\langle , \rangle$	Öklid İç Çarpım
$\langle , \rangle_L$	Lorentz İç Çarpım
$\times$	Vektörel Çarpım
$\times_L$	Lorentz Vektörel Çarpım
$\perp$	Diklik
$\Rightarrow$	İse

KISALTMALAR

NLPDE	Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler
NLS	Doğrusal Olmayan Schrödinger

1. GİRİŞ

Araştırmanın amacı

Bu tez çalışmasının temel amacı, Lorentz uzayında tanımlanan doğrusal olmayan Schrödinger (Nonlinear Schrödinger – NLS) denklemini diferansiyel geometrik yöntemler kullanarak ayrıntılı bir biçimde incelemek ve denklemin geometrik yapısını ortaya koymaktır. Bu doğrultuda, NLS denkleminin Lorentz geometrisi altında sahip olduğu çözüm özellikleri, geometrik değişmezleri ve ilgili diferansiyel geometrik yapılarla olan ilişkileri sistematik bir biçimde ele alınmaktadır.

Tez kapsamında öncelikle, çalışmanın temelini oluşturan eğri ve yüzey teorisine ilişkin kavramlar ayrıntılı biçimde sunulmakta; parametrizasyon, regülerlik, eğrilik ve geometrik çatı kavramları ele alınmaktadır. Ardından, NLS denkleminin matematiksel formu verilerek, denklemin diferansiyel geometrik açıdan nasıl yorumlanabileceği ortaya konulmaktadır. Bu aşamada, denklemin çözümleri ile eğrilerin ve yüzeylerin geometrik hareketleri arasındaki bağlantılar ayrıntılı olarak incelenmektedir.

Tezin bir diğer amacı, NLS denklemini yalnızca klasik analiz yöntemleriyle değil, geometrik bir bakış açısıyla ele alarak, denklemin fiziksel anlamını derinleştirmektir. Özellikle Lorentz uzayında timelike ve spacelike geometrik yapıların denklemin çözüm davranışları üzerindeki etkileri araştırılmaktadır. Bu sayede, denklemin fiziksel modellerle olan ilişkisi daha açık bir şekilde ortaya konulmaktadır.

Son olarak, bu çalışma ile elde edilen sonuçların; doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, diferansiyel geometri ve matematiksel fizik alanlarında ileride yapılacak çalışmalara temel oluşturması amaçlanmaktadır. Böylece tez, hem teorik açıdan literatüre katkı sunmayı hem de geometrik yöntemlerin doğrusal olmayan Schrödinger denklemi üzerindeki etkinliğini göstermeyi hedeflemektedir.

Araştırmanın önemi

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler, doğada gözlemlenen pek çok fiziksel, biyolojik ve mühendislik temelli olgunun modellenmesinde temel bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bağlamda doğrusal olmayan Schrödinger denklemi, hem matematiksel yapısı hem de çok geniş bir uygulama alanına sahip olması nedeniyle modern matematiksel fizik literatürünün en önemli denklemlerinden biri olarak kabul edilmektedir.

NLS denklemi, kuantum mekaniğinde ortaya çıkan Schrödinger denkleminin doğrusal olmayan etkileri dikkate alınarak genelleştirilmiş bir formudur. Denklemin en dikkat çekici özelliklerinden biri, soliton çözümleri adı verilen özel çözümlere sahip olmasıdır. Bu çözümler, pek çok fiziksel sistemde doğrudan gözlemlenebilen yapılarla ilişkilendirilmektedir. Bu nedenle NLS denklemi, yalnızca teorik bir matematiksel model olmanın ötesinde, fiziksel gerçekliği güçlü biçimde temsil eden bir denklem olarak öne çıkmaktadır.

Matematiksel açıdan bakıldığında, NLS denklemi uzun yıllar boyunca ağırlıklı olarak Öklid uzayında ele alınmış ve bu çerçevede çok sayıda analitik, sayısal ve geometrik sonuç elde edilmiştir. Ancak son yıllarda, denklemin Lorentz (Minkowski) uzayı gibi yarı-Riemann geometrilerde incelenmesi giderek daha fazla ilgi görmektedir. Lorentz uzayı, zaman ve uzay bileşenlerinin farklı metrik özelliklere sahip olması nedeniyle, klasik Öklid geometrisinden köklü biçimde ayrılmakta ve bu durum, bu uzaylarda tanımlanan diferansiyel denklemlerin çözüm yapıları üzerinde belirleyici bir etki oluşturmaktadır.

Diferansiyel geometri, doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerinin yapısal özelliklerini anlamada son derece güçlü bir çerçeve sunmaktadır. Özellikle eğrilerin ve yüzeylerin geometrik hareketleri ile integrallenebilir doğrusal olmayan denklemler arasındaki ilişkiler, Hasimoto dönüşümü ve soliton yüzeyleri kavramları aracılığıyla literatürde derinlemesine incelenmiştir. Bu yaklaşım, NLS denkleminin yalnızca analitik çözümlerini değil, aynı zamanda denklemin altında yatan geometrik ve fiziksel yapıları da ortaya koymaktadır. Lorentz uzayında gerçekleştirilen diferansiyel geometrik analizler ise, bu klasik sonuçların genelleştirilmesine olanak tanıyarak, denklemin fiziksel bağlamdaki davranışlarına ışık tutmaktadır.

Bu çerçevede, NLS denkleminin Lorentz uzayında diferansiyel geometrik yöntemlerle incelenmesi, hem teorik matematik hem de matematiksel fizik açısından önemli ve güncel bir araştırma alanı oluşturmaktadır. Bu tür çalışmalar, doğrusal olmayan sistemlerin geometrik yapısının daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamakta ve ileride yapılacak disiplinler arası araştırmalar için sağlam bir temel oluşturmaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Fiziksel sistemlerde doğrusal olmayan etkilerin zamanla önem kazanması, Schrödinger denkleminin doğrusal olmayan biçimlerinin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu bağlamda ortaya çıkan doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi temel denklemlerden biri hâline gelmiştir.

NLS denklemi, özellikle doğrusal olmayan farklı bilimsel disiplinlerde geniş bir uygulama alanına sahiptir. Pek çok fiziksel sürecin NLS denklemi ile modellenebilmesi nedeniyle NLS denkleminin analitik ve sayısal çözümleri uzun yıllardır araştırmacıların ilgi odağında yer almaktadır.

Matematiksel açıdan bakıldığında, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin (NLPDE) tam çözümlerinin elde edilmesi genellikle oldukça zordur. Bu zorluk, özellikle değişken katsayılı ve yüksek mertebeden doğrusal olmayan Schrödinger denklemlerinde daha belirgin hâle gelmektedir. Literatürde, NLS denkleminin analitik çözümlerini elde etmek amacıyla bazı yöntemler ve çeşitli hesaplama teknikleri geliştirilmiştir. Bunun yanı sıra, denklemin uzun zamanlı davranışlarının daha güvenilir biçimde incelenmesi hedeflenmiştir.

Son yıllarda, NLS denkleminin geometrik yapısına yönelik çalışmalar da önemli bir ivme kazanmıştır. Özellikle Hasimoto'nun girdap çizgilerinin binormal hareketi ile NLS denklemi arasındaki ilişkiyi ortaya koyan öncü çalışması, doğrusal olmayan denklemler ile diferansiyel geometri arasındaki bağlantıların keşfedilmesine zemin hazırlamıştır. Bu yaklaşım sayesinde, NLS denklemi eğrilerin ve yüzeylerin geometrik hareketleri aracılığıyla yorumlanmış; soliton çözümleri geometrik nesnelerle ilişkilendirilmiştir.

Bu geometrik bakış açısı, ilerleyen yıllarda birçok araştırmacı tarafından geliştirilmiş ve soliton yüzeyleri, Hasimoto yüzeyleri ve integrallenebilir sistemler kuramı çerçevesinde ele alınmıştır. Eğrilerin eğrilik ve burulma fonksiyonları ile NLS denklemi arasındaki ilişkiler, diferansiyel geometrik yöntemlerin doğrusal olmayan denklemlerin yapısal özelliklerini anlamada güçlü olduğunu göstermiştir. Bu çalışmaların büyük bir kısmı Öklidyen uzaylarda gerçekleştirilmiş olmakla birlikte, elde edilen sonuçlar geometrik yöntemlerin genellenebilirliğini ortaya koymuştur.

Öte yandan, modern fizik ve matematikte NLS denkleminin Lorentz (Minkowski) uzayı gibi yarı-Riemann geometrilerde incelenmesine yönelik çalışmalar artış göstermiştir. Lorentz uzayında eğrilerin ve yüzeylerin sahip olduğu timelike, spacelike

ve lightlike karakterler, NLS denkleminin çözüm yapıları üzerinde belirleyici bir rol oynamaktadır. Bu bağlamda yapılan çalışmalar, denklemin geometrik ve fiziksel yorumlarının Öklid uzayındaki karşılıklarından önemli ölçüde farklılaştığını ortaya koymuştur.

Literatürde ayrıca, Schrödinger tipi denklemlerin Öklid ve Lorentz uzaylarında tanımlanan soliton yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri gibi geometrik özellikleri incelenmiştir. Bu çalışmalar, NLS denkleminin yalnızca analitik çözümlerinin değil, aynı zamanda geometrik değişmezlerinin de araştırılmasının önemini vurgulamaktadır.

Bu tez çalışması, literatürde yer alan söz konusu araştırmalardan hareketle, NLS denklemini Lorentz uzayında diferansiyel geometrik yöntemlerle ele almayı amaçlamaktadır. Böylece mevcut çalışmaların bir adım ötesine geçilerek, NLS denkleminin geometrik yapısı daha kapsamlı bir çerçevede incelenmekte ve literatüre özgün bir katkı sunulması hedeflenmektedir. Bu bağlamda literatürdeki bazı çalışmalara dair detaylara bu bölümde yer verilmiştir.

İlk kez Avusturyalı fizikçi Erwin Schrödinger tarafından geliştirilen ve literatürde kendi adıyla anılan Schrödinger denklemi bir dalga fonksiyonu olup; uzay ve zamana bağlı yazılan bu fonksiyon, kuantum sistemi hakkında çözümlemeler yapabilmeye, sonuçlar üretmemize ve enerjinin korunumu ile hesaplamalar yapmaya olanak tanır (Gümüş, Yılmaz, 2019).

Schrödinger denklemi, Schrödinger dalga denklemi olarak da bilinir. Söz konusu denklem, kuantum mekaniğinde temel bir kısmi diferansiyel denklemdir. Schrödinger denklemi, sadece doğrusal sistemlerle sınırlı kalmayıp belirli fiziksel sistemlerdeki doğrusal olmayan dalga davranışlarını da tanımlamaktadır (Tian ve Meng, 2024). Bu doğrusal olmayan dinamiklerin incelenmesinde ise NLS denklemi öne çıkmaktadır.

Fiziğin birçok dalında kullanılan NLS denklemi, zayıf doğrusal olmayan ortamlarda dalgaların davranışını belirleyen çok yönlü bir denklemdir. Matematiksel açıdan bakıldığında, bu denklem 1970'lerden beri Öklidyen uzayda incelenmiştir. NLS tipi fiziksel modeller, günümüzde çeşitli doğrusal olmayan fiziksel olayların açıklanmasında temel bir araç olarak kullanılmaktadır (Liu ve Kengne, 2019).

Ayrıca, Schrödinger denklemi hakkında diferansiyel geometri olarak inceleyen bazı çalışmalar vardır. Bu bağlamda, Öklid ve Lorentz uzaylarındaki denklemlerin soliton yüzeyleri ile hiper yüzeyleri; Gauss eğriliği, ortalama eğrilik ve diğer geometrik özellikleri de detaylıca incelenmiştir (Tian ve Meng, 2024).

Kuramsal fizikte ve matematikte, NLS denklemi olarak bilinen denklem aslında kuantum mekaniğinden çok iyi bilinen Schrödinger denkleminin en az iki boyutta lineer olmayan bir uyarlaması olarak karşımıza çıkmaktadır (İmanlı, 2006). Bundan dolayı NLS denklemi, kuantum mekaniğinde parçacıkların herhangi bir andaki konumlarını ve serbest enerji seviyelerini bulmak için, fizik ve kimya alanlarında ise çeşitli süreçleri modellemek amacıyla kullanılır (Şaylan, 2022).

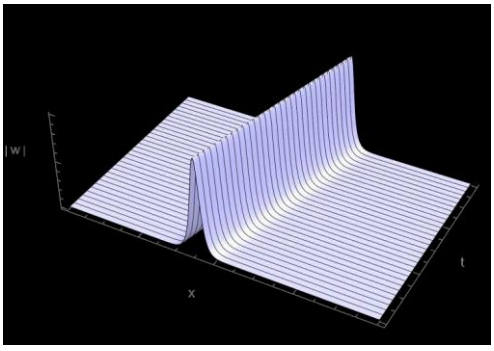
Kuantum mekaniği, doğrusal olmayan optik ve biyoloji gibi birçok alanda, değişken katsayılı NLS denklemi kullanılarak tanımlanabilen modeller ortaya çıkmıştır. Nitekim her mikroskobik sistemin, mikroskobik parçacıkların hareketini tanımlamak için kullanılan bir Schrödinger denklemi vardır. Son yıllarda, bu denklemlerden elde edilen soliton çözümleri birçok konu için daha fazla bilimsel açıklama sağlamaktadır. Bu nedenle, değişken katsayılı NLS denklemi, doğrusal olmayan optik ve kuantum mekaniği gibi disiplinlerde yaygın olarak kullanılır. Değişken katsayılı NLS denkleminin incelenmesi çok ilgi görmüştür ve bu denklemlerin nasıl çözüleceği, taşıdığı önemli değer nedeniyle bilim insanları için bir araştırma odağı haline gelmiştir (Wang vd., 2024).

Çoğu NLPDE için, bu denklemlerin tam çözümüne ulaşmak oldukça güçtür. Özellikle kısmi diferansiyel denklemlerde değişken katsayıların varlığı, denklemin doğrusal olmayan yapısını daha da artırır ve çözümün elde edilmesini giderek daha zor hale getirir. Dahası, insanlar gerçek dünya problemlerini daha doğru bir şekilde tanımlamak için değişken katsayılı kesirli mertebeden Schrödinger denklemi tanıtılmıştır (Wang vd., 2024).

Yapıyı koruyan algoritmalar, klasik diferansiyel denklemlerin sayısal analizinde önemli bir başarı sergileyerek yerel olmayan diferansiyel denklemler için benzer yaklaşımların geliştirilmesine öncülük etmiştir. Bu doğrultuda birçok araştırmacı, özellikle uzun dönemli benzetimlerde, yerel olmayan NLS denklemlerinin enerji korunumunu sağlayan sayısal yöntemlerin tasarlanmasına odaklanmıştır (Zhang vd., 2024).

Birçok matematikçi, farklı uzaylardaki bir eğrinin geometrik hareketleri ile integrallenebilir doğrusal olmayan denklemler (doğrusal olmayan soliton denklemleri) arasındaki bağlantıları incelemekle ilgilenmektedir. Özellikle NLS denklemi ile sıkıştırılamaz bir akışkandaki ince bir girdap çizgisinin hareketi arasındaki bağlantıdır. Soliton teorisinde, integrallenebilir doğrusal olmayan denklemler, özellikle adını Japon fizikçi Hidenori Hasimoto'ya borçlu olan Hasimoto yüzeyi olmak üzere yüzeylerin inşasında önemli bir role sahiptir (Hamouda vd., 2022).

Gerçek dünyadaki sistemlerin çoğu doğrusal değildir ve zamanla dinamik olarak değişim gösterir. Zaman değiştiğinde bu sistemleri matematiksel olarak ifade etme zorluğuyla karşı karşıya kalınır ve bu genellikle NLPDE kullanarak yapılır. Akışkan dinamiği, dalga yayılımı ve doğrusal olmayan optik gibi çok çeşitli fenomenleri simüle etmek için kullanılabildiklerinden, bu denklemler birçok araştırma ve mühendislik dalında temeldir. Bilim insanlarının bu karmaşık doğrusal olmayan modelleri anlama ve başarıyla çözme konusundaki ilgisi son yıllarda artmıştır. Bu artan ilgi, dinamik sistemlerle ilgili sorunları ve bunların farklı bilimsel alanları nasıl etkilediğini çözme ihtiyacından kaynaklanmaktadır. NLPDE, karmaşık sistemleri geliştirmek ve yönetmek için çok önemli olan bir sistemdeki doğrusal olmayan etkileşimleri yakaladıkları için doğrusal modellerden daha doğru tahminler üretir (Alkahtani, 2024). Bu bağlamda özellikle NLS denklemi, doğrusal olmayan optik denklem tanımlamak için kullanılır. Ek olarak, genellikle dalgalanan maddeleri veya dalgalanan fenomenleri tanımlamak için bir araç olarak kullanılır. Bir doğrusal olmayan karmaşık model olarak NLS denklemi, dalga teorisi alanında kullanılmıştır. Öyle ki; NLS denklemi kullanılarak elde edilen bir matematiksel model, manyeto-optik dalga kılavuzlarında ışık dalgalarının yayılma davranışını çok iyi açıklar (Li, 2024).



Şekil 2.1. Genelleştirilmiş NLS denklemi için dalga çözümünün grafiği (Panmei ve Thoudam, 2024)

Bir girdap çizgisinin hareketini incelemek matematiksel fizik ve diferansiyel geometrinin önemli problemlerinden biridir. Hasimoto'nun 1972 yılındaki çalışması, bu son derece önemli problemin çözümünde yol gösterici öncü çalışmalardan biridir. Bu çalışma sıkıştırılamaz bir akışkan içinde gerilmeden hareket eden ince izole bir girdap çizgisini ele alır. Girdap çizgisinin konum vektörü $r = r(s,t)$ ile gösterilirse

$$r_t = r_s \times r_{ss}$$

denklemi sağlanır (Hasimoto, 1972). Bu denkleme, duman halkası veya girdap çizgisi (vortex filament) denklemi de denir. Herhangi bir form değişikliği içermeyen bu girdap hareketlerinin, NLS denkleminin hareket eden dalga çözümlerine karşılık gelir (Rogers ve Schief, 2002).

Bu türden soliton yüzeyleri NLS denklemleriyle ilişkilendirildiğinden NLS yüzeyleri veya Hasimoto yüzeyleri olarak adlandırılır. Hasimoto; uzay eğrisinin eğriliği κ, burulması τ olmak üzere kompleks fonksiyonunu

$$q = \kappa e^{i\int \tau ds}$$

olarak ifade etmiştir. Eğri, girdap çizgi denklemini sağlarsa

$$iq_t + q_{ss} + vq|q|^2 = 0$$

kübik NLS denkleminin sonucunu verdiğini elde etmiştir (Hasimoto, 1972).

Schief ve Rogers (1999) çalışmasında, sabit eğriliğe sahip eğrilerin binormal hareketinin Dym denklemlerinin integrallenebilir genelleştirilmelerine öncülük ettiği gösterilmiştir. Ayrıca sabit burulmaya sahip olan eğrilerin binormal hareketinin, klasik Sinüs-Gordan denklemlerinin integrallenebilir genelleştirmelerine öncülük ettiği de gösterilmiştir. Genelleştirilmiş Dym denklemlerinin çözümü olan soliton yüzeyleriyle ilişkili çift (dual) soliton yüzeyinin varlığı için aralarındaki değişmez ilişkiler kullanılır.

Bu türden diferansiyel denklemlerle ilişkilendirilmiş soliton yüzeylerin diferansiyel geometrisini inceleyen literatürde pek çok çalışma vardır. Rogers ve Schief (1998) çalışmasında, NLS denkleminin içsel geometrik değişmezleri ve buna bağlı olarak daha önce yapılan kinematik analizleri sunulmuştur. Ayrıca NLS denklemiyle ilişkilendirilmiş soliton yüzeylerin diferansiyel geometrik özellikleri elde edilmiştir. Hasimoto'nun elde ettiği sonuçlar ile aradaki bağlantı ortaya konulmuştur.

Ortaya çıkan problemler, Öklid dışı geometriler için çalışmalar yapılması gerektiğini ortaya koymuştur. NLS denkleminin timelike eğriler için bir türü ve doğrusal olmayan ısı sistemleri; 3 boyutlu Minkowski uzayında normal kongrüansların genel içsel geometrik değişmezleri ile incelenmiştir (Gürbüz, 2010).

Buna ek olarak Gürbüz (2010) çalışmasında, NLS denkleminin bir türüne karşılık gelen timelike yüzeylerin hareketi timelike geodezik koordinat sistemleri ile çalışılmıştır.

Erdoğdu ve Özdemir (2014), Minkowski 3 uzayındaki Hasimoto yüzeylerini araştırmış ve bu yüzeylerin geometrik özelliklerini elde etmiştir. Kelleci vd. (2019), Hasimoto yüzeyinin eğriliklerini Bishop çatısına göre incelemiş ve bu yüzeylerin parametre eğrilerinin bazı karakterizasyonlarını vermiştir.

Lorentz uzayında yüzey geometrisi üzerine yapılan çalışmalarda, Hasimoto yüzeylerinin evrimi önemli bir yer tutmaktadır. Abdel-Aziz vd. (2024) çalışmasında, 3 boyutlu Lorentz uzayında timelike Hasimoto yüzeyinin temel form katsayılarından yola çıkarak değişim denklemleri incelemiştir. q-eğriyi (q-curve) kullanarak; eğrinin yarı-teğet, yarı-normal ve yarı-binormal vektörlerine atfedilen üç tip Hasimoto yüzeyi sunulmuştur.

Yoon vd. (2022) çalışmasında, 3 boyutlu Lorentz uzayındaki bir spacelike eğrinin eğrilik ve burulma değerlerinin zaman değişim denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca, bir spacelike eğrinin timelike normal vektörü ve spacelike binormal vektörü tarafından üretilen bir timelike regle yüzeyin özellikleri verilmiştir.

Çimdiker Aslan (2025) çalışmasında, 3-boyutlu Minkowski uzayı içindeki bir lightlike (null) NLS yüzeyi üzerinde yer alan spacelike eğrileri incelemektedir. Söz konusu eğrilerin zamansal değişimi, *T*-yönü boyunca tanımlanan birinci ve ikinci tip genelleştirilmiş Darboux çatıları vasıtasıyla türetilmiştir. Belirlenen bu teorik çerçeve dahilinde; açısal momentum ve girdap filamenti (vortex filament) denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca, yüzeyin ortalama ve Gauss eğriliklerinin belirlenmesi için, yüzeye ait birinci ve ikinci temel form bileşenleri hesaplanmıştır.

3. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan temel kavram ve tanımlar sistematik bir biçimde sunulmaktadır. Özellikle diferansiyel geometri çerçevesinde ele alınan eğriler ve yüzeyler ile bunların geometrik özellikleri ayrıntılı olarak ele alınarak, doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin geometrik analizine altyapı oluşturulması amaçlanmaktadır. Bu kapsamda, öncelikle Öklid uzayında eğri ve yüzey kavramlarına ilişkin temel tanımlar verilmekte; parametrizasyon, regülerlik ve geometrik büyüklükler gibi kavramlar açıklanmaktadır. Daha sonra Lorentz uzayında da eğri ve yüzey kavramlarına ilişkin kavramlara yer verilecektir.

Diferansiyel geometrinin temel kavramları olan eğriler ve yüzeyler, uzayın yerel ve küresel yapısının anlaşılmasında merkezi bir role sahiptir. Eğriler aracılığıyla bir geometrik yapının doğrultu, eğrilik ve yönelimi incelenirken; yüzeyler yardımıyla daha karmaşık geometrik ve fiziksel yapılar modellenebilmektedir. Bu nedenle, eğrilerin ve yüzeylerin matematiksel tanımı, diferansiyellenebilirlik koşulları ve geometrik invariyantları, hem teorik hem de uygulamalı çalışmalar açısından büyük önem taşımaktadır.

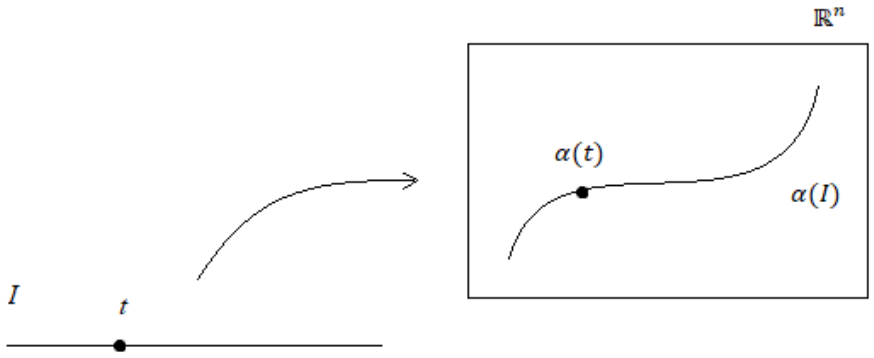
Bu bölümde sunulan temel bilgiler, özellikle NLS denklemi ile diferansiyel geometrik yapılar arasındaki ilişkinin anlaşılabilmesi için gereklidir. Nitekim NLS denklemi, uygun geometrik çerçeve altında ele alındığında, eğrilerin ve yüzeylerin belirli geometrik hareketleriyle ilişkilendirilebilmekte ve bu sayede denklemin çözümleri geometrik bir bakış açısıyla yorumlanabilmektedir. Bu yaklaşım, hem denklemin yapısal özelliklerini ortaya koymakta hem de fiziksel anlamının daha derinlemesine anlaşılmasına katkı sağlamaktadır.

Bu bağlamda, üçüncü bölümde yer alan tanım ve kavramlar yalnızca bir ön bilgi niteliği taşımamakta; aynı zamanda tez boyunca kullanılacak olan matematiksel dilin ve geometrik bakış açısının temelini oluşturmaktadır. Böylece ilerleyen bölümlerde Lorentz uzayında doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin diferansiyel geometrik analizi yapılırken, burada verilen kavramlara sıkça başvurulacaktır.

3.1. Öklid Uzayında Temel Bilgiler

Tanım 3.1. *I,* $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ biçimindeki düzgün bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayının içerisinde bir eğri adı verilir. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi

verildiğinde her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir (Sabuncuoğlu, 2016).



Şekil 3.1. $\mathbb{R}^n$ de Eğri (Sabuncuoğlu, 2016)

Tanım 3.2. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ olmak üzere α eğrisinin her noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall\, s \in I$ ise M ye birim hızlı eğri denir ve bu durumda $s \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir (Yüce, 2017).

Tanım 3.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ eşitliğindeki $\vec{T}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir. $\vec{T}$ ise I aralığının her bir s noktasına, $\alpha(s)$ noktasındaki $\vec{T}(s)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyon olup α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, α eğrisinin birim teğet vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2016).

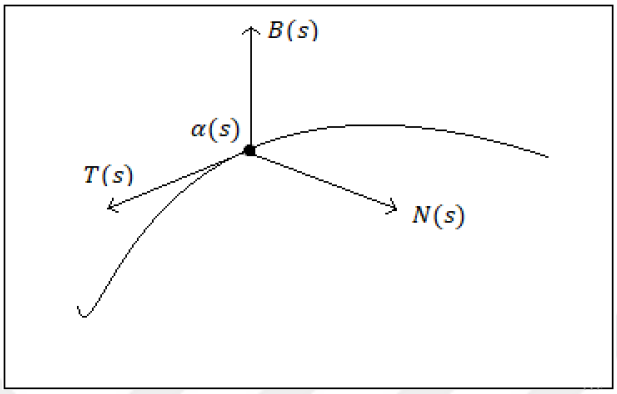
Tanım 3.4. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\|\vec{T}'(s)\|}$ biçiminde tanımlı $\vec{N}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normali denir. N vektör alanına, α eğrisinin asli normal vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 3.5. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $\vec{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormali denir. $\vec{B}$ vektör alanına, α eğrisinin binormal vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 3.6. $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$, $\vec{B}(s)$ vektörlerine, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir (Sabuncuoğlu, 2016).



Şekil 3.2. Bir eğrinin Frenet çatısı (Sabuncuoğlu, 2016)

Tanım 3.7. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \to \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \left\|\vec{T}'(s)\right\|$$

fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 3.8. Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ olmak üzere

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2016).

Teorem 3.1. Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ ise

$$\vec{T}' = \kappa\vec{N}$$
$$\vec{N}' = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}$$
$$\vec{B}' = -\tau\vec{N}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2016).

Teorem 3.2. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olsun. $\|\alpha'\| = v$ olmak üzere

$$\vec{T}' = v\kappa\vec{N}$$
$$\vec{N}' = v\left(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}\right)$$
$$\vec{B}' = -v\tau\vec{N}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2016).

Teorem 3.3. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması κ ve τ olmak üzere

$$\vec{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$
$$\vec{B} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \quad \text{ve} \quad \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$
$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} \qquad \tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 3.9. M, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir açık alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için, $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subset M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ regüler lokal yüzeyi bulunabilirse, M kümesine regüler yüzey denir (Özdemir, 2020).

Teorem 3.4. $\vec{Z}$ vektör alanı M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı olsun. Her $\vec{v}_p \in T_p(M)$ için $D_{\vec{v}_p}\vec{Z} \in T_p(M)$ dir (Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 3.10. $\vec{Z}$ vektör alanı M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı ve $\vec{v}_p \in T_p(M)$ olmak üzere M nin her bir p noktasında,

$$S_p(\vec{v}_p) = -D_{\vec{v}_p}\vec{Z}$$

eşitliğiyle tanımlı $S_p: T_p(M) \to T_p(M)$ fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir (Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 3.11. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M regüler yüzeyi verilsin. M nin her bir p noktasına

$$I_p: T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$$
$$I_p(\vec{v}_p, \vec{w}_p) = \langle \vec{v}_p, \vec{w}_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren I_p fonksiyonuna, M yüzeyi üstünde birinci temel form denir. M nin her bir p noktasına

$$II_p: T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$$

$$II_p(\vec{v}_p, \vec{w}_p) = \langle S(\vec{v}_p), \vec{w}_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren II_p fonksiyonuna, M yüzeyi üstünde ikinci temel form denir (Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 3.12. M, $\mathbb{R}^3$ de yönlendirilmiş regüler bir yüzey, $\vec{Z}$ vektör alanı M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı ve $\alpha: I \to M$ bir eğri olsun. $\vec{T}$ birim teğet vektör alanı olmak üzere $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ vektör alanlarının üçlüsüne M ye göre α nın Darboux çatı alanı denir. Burada

$$\vec{g} = \vec{n} \times \vec{T}$$

eşitliği ile tanımlı vektör alanıdır (Yüce, 2017).

Teorem 3.5. $\alpha: I \to M$ birim hızlı regüler eğri ve $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ ise M ye göre α eğrisinin Darboux çatı alanı olsun. O halde

$$\vec{T}' = k_n \vec{n} + k_g \vec{g}$$
$$\vec{g}' = -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{n}$$
$$\vec{n}' = -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{g}$$

dir. Burada $k_n, k_g \; ve \; \tau_g$ sırasıyla normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulmadır (Yüce, 2017).

3.2. Lorentz Uzayında Temel Bilgiler

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

ile tanımlanan çarpıma Lorentz çarpımı denir. Lorentz çarpım ile donatılmış uzaya Lorentz adı verilir ve $\mathbb{E}_1^3$ ile temsil edilir. Her $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{E}_1^3$ için aşağıdaki gibi sınıflandırma yapılır:

i) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L > 0$ veya $(\vec{u} = 0)$ ise $\vec{u}$ vektörüne spacelike vektör

ii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L < 0$ ise $\vec{u}$ vektörüne timelike vektör

iii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L = 0$ ise $\vec{u}$ vektörüne lightlike (null) vektör

olarak adlandırılır. Her $\vec{u} \in \mathbb{E}_1^3$ vektörünün normu $\|\vec{u}\| = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L|}$ şeklinde tanımlanır. Her $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}_1^3$ vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı

$$\vec{u} \times_L \vec{v} = det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Walrave, 1995).

Tanım 3.13. $\alpha: I \to \mathbb{E}_1^3$, $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ timelike vektör ise α eğrisine timelike eğri adı verilir. $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1$ ise α eğrisi birim hızlı timelike eğri olarak adlandırılır. (Walrave, 1995).

Tanım 3.14. $\alpha: I \to \mathbb{E}_1^3$, $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ spacelike bir vektör ise α eğrisine spacelike eğri adı verilir. $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$ ise α eğrisi birim hızlı spacelike eğri olarak adlandırılır. (Walrave, 1995).

$\alpha: I \to \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı timelike eğri olmak üzere, $T(s) = \alpha'(s)$ timelike vektör olup, eğrinin birim teğet vektörüdür. Yani $\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle_L = -1$ olur. Bu eşitlikten $\langle \vec{T}'(s), \vec{T}(s) \rangle_L = 0$ elde edilir. O halde $\overrightarrow{T'}(s) \perp \vec{T}(s)$'dir. Sonuç olarak $\vec{T}'(s) = \alpha''(s)$ spacelike vektör olmalıdır.

$$\vec{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\sqrt{|\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L|}} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

vektörü α eğrisinin asli normal vektörüdür. α eğrisinin binormal vektörü ise

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times_L \vec{N}(s)$$

şeklindedir. α eğrisinin eğriliği

$$\kappa(s) = \left\| \overrightarrow{T'}(s) \right\| = \sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\vec{N}(s) = \frac{\overrightarrow{T'}(s)}{\kappa(s)} \Rightarrow \overrightarrow{T'}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$$

ifadesinden $\kappa(s) = \langle \overrightarrow{T'}(s), \vec{N}(s) \rangle_L$ eşitliği sağlanır. α eğrisinin burulma fonksiyonu ise $\tau(s) = \langle \overrightarrow{N'}(s), \vec{B}(s) \rangle_L$ ile tanımlanır (Walrave, 1995).

Teorem 3.6. Birim hızlı timelike $\alpha: I \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{bmatrix}$$

dir (Walrave, 1995).

$\alpha: I \to \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı spacelike eğri olmak üzere, $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ spacelike vektör olup eğrinin birim teğet vektörüdür. $\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle_L = 1$ olduğundan $\langle \vec{T}'(s), \vec{T}(s) \rangle_L = 0$ olur. $\vec{T}'(s) \perp \vec{T}(s)$ elde edilir. $\vec{T}(s)$ spacelike olduğundan $\vec{T}'(s)$ spacelike ya da timelike olabilir.

1.Durum: $\vec{T}'(s) = \alpha''(s)$ spacelike ise; bu durumda

$$\kappa(s) = \left\| \vec{T}'(s) \right\| = \sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L}$$

olarak tanımlanır.

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

eğrinin asli normali olup

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times_L \vec{N}(s)$$

ise eğrinin binormal vektörüdür. Burulma fonksiyonu $\tau(s) = -\langle \vec{N}'(s), \vec{B}(s) \rangle_L$ olarak tanımlanır. Frenet formülleri ise;

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur (Walrave, 1995).

2.Durum: $\vec{T}'(s) = \alpha''(s)$ timelike ise; bu durumda

$$\kappa(s) = \sqrt{-\langle \vec{T}'(s), \vec{T}'(s) \rangle_L} = \sqrt{-\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L}$$

olmak üzere normal vektörü

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

şeklindedir. Binormal vektörü ise

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times_L \vec{N}(s)$$

spacelike bir vektördür. Burulma $\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L$ olarak tanımlanır ve

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Walrave, 1995).

Tanım 3.15. M; 3 boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey olsun. Her $p \in M$ ve her $\vec{\omega}_p \in T_pM$, $\vec{v}_p \in T_pM$ için

$$\langle \vec{v}_p, \vec{\omega}_p \rangle_L = 0 \Rightarrow \vec{v}_p = 0$$

önermesi sağlanıyorsa M ye bir nondejenere yüzey denir (Turgut, 1995).

Teorem 3.7. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında tanımlı M yüzeyinin bir parametrizasyonu $\varphi: U \to M$ olsun. Birinci temel form katsayıları:

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_L, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_L, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_L$$

İkinci temel form katsayıları:

$$e = \langle \varphi_{uu}, \vec{Z} \rangle_L, f = \langle \varphi_{uv}, \vec{Z} \rangle_L, g = \langle \varphi_{vv}, \vec{Z} \rangle_L$$

olmak üzere, yüzeyin her noktasında tanımlı olan Gauss eğriliği:

$$K = \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

şeklinde verilir. Yüzeyin ortalama eğriliği:

$$H = \varepsilon \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$

şeklinde ifade edilir. Eğrilik ifadelerinin işaretleri yüzeyin spacelike ya da timelike olmasına yani $\varepsilon = \langle \vec{Z}, \vec{Z} \rangle_L$ değerine göre değişir (Lopez, 2014).

Teorem 3.8. M yüzeyi üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

dir. M yüzeyi üzerindeki metriğin nondejenere olması için gerek ve yeter şart

$$det\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır (Turgut, 1995).

Tanım 3.16. Minkowski $\mathbb{E}_1^3$ uzayındaki bir yüzey; yüzey üzerindeki normal vektör alanı sırasıyla timelike, spacelike veya lightlike (null) ise spacelike, timelike veya lightlike (null) yüzey olarak adlandırılır. Minkowski 3-uzayındaki bir spacelike veya timelike yüzeye aynı zamanda dejenere olmayan (nondejenere) yüzey denir (Öztürk ve Mahmood, 2024).

Tanım 3.17. M; 3 boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M ye bir spacelike yüzey denir (Turgut, 1995).

Teorem 3.9. 3 boyutlu Lorentz uzayında (U, φ) parametrizasyonu ile verilen bir

$$\varphi: U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}_1^3$$
$$(u, v) \to \varphi(u, v) = \big(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)\big)$$

yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul, yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı olmasıdır (Turgut, 1995).

Tanım 3.18. M; 3 boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M ye bir timelike yüzey denir (Turgut, 1995).

Tanım 3.19. M, üç boyutlu Lorentz uzayı içinde yönlendirilmiş bir yüzey ve $\alpha(s)$ eğrisi tamamen M üzerinde olan null olmayan bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisi aynı zamanda bir uzay eğrisi olduğundan, eğri boyunca hareket eden bir $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Frenet çatısı mevcuttur. $\alpha(s)$ eğrisi M yüzeyi üzerinde olduğu için eğrinin Darboux çatısı olarak adlandırılan ve $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ ile gösterilen bir çatısı daha vardır. Bu çatıda $\vec{T}$ eğrinin birim teğeti, $\vec{n}$ yüzeyin birim normali ve $\vec{g}$ ise $\vec{g} = \vec{T} \times_L \vec{n}$ ile verilen birim binormal vektördür (Şentürk ve Yüce, 2020).

Teorem 3.10. M üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi bir spacelike veya bir timelike eğri olabilir. Böylece, $\alpha(s)$ in Darboux çatısının türev formülleri aşağıdaki şekilde olur. Burada k_g, k_n ve τ_g sırasıyla geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulmadır.

1.Durum: Eğer Myüzeyi bir timelike yüzey ise o zaman M üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi bir spacelike veya bir timelike eğri olabilir. Böylece $\alpha(s)$ nin Darboux çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix}\vec{T}'(s)\\ \vec{g}'(s)\\ \vec{n}'(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k_g & -\varepsilon k_n\\ k_g & 0 & \varepsilon\tau_g\\ k_n & \tau_g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{T}(s)\\ \vec{g}(s)\\ \vec{n}(s)\end{bmatrix}$$

$$\langle\vec{T},\vec{T}\rangle_L=\varepsilon=\pm 1,\langle\vec{g},\vec{g}\rangle_L=-\varepsilon,\langle\vec{n},\vec{n}\rangle_L=1$$

olarak verilmiştir.

2.Durum: Eğer M yüzeyi bir spacelike yüzey ise o zaman M üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi bir spacelike eğridir. Böylece $\alpha(s)$ nin Darboux çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix}\vec{T}'(s)\\ \vec{g}'(s)\\ \vec{n}'(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k_g & k_n\\ -k_g & 0 & \tau_g\\ k_n & \tau_g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{T}(s)\\ \vec{g}(s)\\ \vec{n}(s)\end{bmatrix}$$

$$\langle\vec{T},\vec{T}\rangle_L=1,\langle\vec{g},\vec{g}\rangle_L=1,\langle\vec{n},\vec{n}\rangle_L=-1$$

şeklindedir (Şentürk ve Yüce, 2020).

4. ÖKLİD UZAYINDA NLS YÜZEYİ

Bu bölümde, önceki bölümlerde verilen temel diferansiyel geometrik kavramlar ve tanımlar ışığında, tez çalışmasının ana konusu olan doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi ele alınmaktadır. Özellikle denklemin geometrik yapısı incelenerek, diferansiyel geometri ile doğrusal olmayan denklemler arasındaki ilişki ayrıntılı biçimde ortaya konulmaktadır. Bu bağlamda, NLS denklemi yalnızca analitik bir diferansiyel denklem olarak değil, aynı zamanda geometrik nesnelerin hareketini tanımlayan bir yapı olarak değerlendirilmektedir.

Bu bölüm kapsamında, doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin matematiksel formu verilmekte; denklemin çözüm yapıları, simetri özellikleri ve geometrik karşılıkları üzerinde durulmaktadır. Eğriler ve yüzeyler aracılığıyla elde edilen geometrik yorumlar sayesinde, denklemin içerdiği fiziksel ve matematiksel anlamın daha derinlemesine anlaşılması hedeflenmektedir. Bu yaklaşım, NLS denkleminin diferansiyel geometrik yöntemlerle analiz edilmesinin sağladığı avantajları açıkça ortaya koymaktadır.

Ayrıca bu bölümde, NLS denklemi ile soliton çözümleri ve geometrik akışlar arasındaki bağlantılar ele alınarak, denklemin integrallenebilir sistemler kuramı içindeki yeri vurgulanmaktadır. Böylece, denklemin hem teorik matematik hem de matematiksel fizik açısından taşıdığı önem açıklanmakta; sonraki bölümde yapılacak olan Lorentz uzayına yönelik incelemeler için gerekli kavramsal çerçeve oluşturulmaktadır.

Sonuç olarak bu bölüm, tez çalışmasının temel analiz bölümünü oluşturmakta olup, doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin diferansiyel geometrik açıdan ele alınmasına yönelik ana yaklaşımı ortaya koymaktadır.

Tanım 4.1. $r = r(s,t)$ parametrizasyonu ile verilmiş ve

$$r_t = r_s \times r_{ss}$$

eşitliğini sağlayan yüzeylere doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) yüzeyleri adı verilir (Erdoğdu ve Yavuz, 2021).

Teorem 4.1. $r = r(s,t)$ bir NLS yüzeyi olsun. Öyle ki her t için $r = r(s,t)$ birim hızlı eğridir. Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{n} \\ \vec{g} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \lambda \\ -\alpha & 0 & -\gamma \\ -\lambda & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{n} \\ \vec{g} \end{bmatrix}.$$

Burada $\{\vec{T}, \vec{n}, \vec{g}\}$ Darboux çatısı ve α, λ, γ düzgün fonksiyonları aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir:

$$\alpha = k_{g_s} - k_n \tau_g$$

$$\lambda = -k_{n_s} - k_g \tau_g$$

$$\gamma = \frac{1}{k_g^2 + k_n^2}\left[\left(k_g k_{g_s} + k_n k_{n_s}\right)_s - \left(k_{n_s} + k_g \tau_g\right)^2 - \left(k_{g_s} + k_n \tau_g\right)^2 + k_{g_t} k_n - k_{n_t} k_g\right]$$

(Erdoğdu ve Yavuz, 2021).

İspat. Düzgün α, λ, γ fonksiyonları k_g, k_n, τ_g fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilmelidir. Burada her t için $r = r(s,t)$ duman halka denkleminin bir çözümü olacaktır. Uyum koşullarını kullanarak $\vec{T}_{ts} = \vec{T}_{st}$ olup

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}\right) \tag{4.1}$$

eşitliğinden aşağıdakiler bulunur. (4.1) eşitliğinin sol tarafından;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(k_n \vec{n} + k_g \vec{g}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} k_n \vec{n} + k_n \frac{\partial}{\partial t}\vec{n} + \frac{\partial}{\partial t} k_g \vec{g} + k_g \frac{\partial}{\partial t}\vec{g} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} k_n \vec{n} + k_n\left(-\alpha \vec{T} - \gamma \vec{g}\right) + \frac{\partial}{\partial t} k_g \vec{g} + k_g\left(-\lambda \vec{T} + \gamma \vec{n}\right) \\
&= \left(-k_n \alpha - k_g \lambda\right)\vec{T} + \left(\frac{\partial}{\partial t} k_n + k_g \gamma\right)\vec{n} + \left(-k_n \gamma + \frac{\partial}{\partial t} k_g\right)\vec{g}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.1) eşitliğinin sağ tarafından;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\alpha \vec{n} + \lambda \vec{g}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \alpha \vec{n} + \alpha \frac{\partial}{\partial s}\vec{n} + \frac{\partial}{\partial s} \lambda \vec{g} + \lambda \frac{\partial}{\partial s}\vec{g} \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \alpha \vec{n} + \alpha\left(-k_n \vec{T} - \tau_g \vec{g}\right) + \frac{\partial}{\partial s} \lambda \vec{g} + \lambda\left(-k_g \vec{T} + \tau_g \vec{n}\right) \\
&= \left(-\alpha k_n - \lambda k_g\right)\vec{T} + \left(\frac{\partial}{\partial s} \alpha + \lambda \tau_g\right)\vec{n} + \left(-\alpha \tau_g + \frac{\partial}{\partial s} \lambda\right)\vec{g}
\end{aligned}$$

olur. Katsayılar eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial t} k_n + k_g \gamma = \frac{\partial}{\partial s} \alpha + \lambda \tau_g$$

$$-k_n\gamma + \frac{\partial}{\partial t}k_g = -\alpha\tau_g + \frac{\partial}{\partial s}\lambda$$

olur. Buradan da

$$\alpha_s = \frac{\partial}{\partial t}k_n + k_g\gamma - \lambda\tau_g$$

$$\lambda_s = -k_n\gamma + \frac{\partial}{\partial t}k_g + \alpha\tau_g$$

bulunur. Benzer şekilde $\vec{n}_{ts} = \vec{n}_{st}$ eşitliğinden faydalanarak

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}\right) \tag{4.2}$$

yazılır. (4.2) eşitliğinin sol tarafından;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_n\vec{T} - \tau_g\vec{g}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}k_n\vec{T} - k_n\frac{\partial}{\partial t}\vec{T} - \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\vec{g} - \tau_g\frac{\partial}{\partial t}\vec{g}\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}k_n\vec{T} - k_n(\alpha\vec{n} + \lambda\vec{g}) - \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\vec{g} - \tau_g\left(-\lambda\vec{T} + \gamma\vec{n}\right)\\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial t}k_n + \tau_g\lambda\right)\vec{T} + \left(-k_n\alpha - \tau_g\gamma\right)\vec{n} + \left(-k_n\lambda - \tau_g\right)\vec{g}\end{aligned}$$

olur. (4.2) eşitliğinin sağ tarafından;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\alpha\vec{T} - \gamma\vec{g}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial s}\alpha\vec{T} - \alpha\frac{\partial}{\partial s}\vec{T} - \frac{\partial}{\partial s}\gamma\vec{g} - \gamma\frac{\partial}{\partial s}\vec{g}\\ &= -\frac{\partial}{\partial s}\alpha\vec{T} - \alpha\left(k_n\vec{n} + k_g\vec{g}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\gamma\vec{g} - \gamma\left(-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right)\\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial s}\alpha + \gamma k_g\right)\vec{T} + \left(-\alpha k_n - \gamma\tau_g\right)\vec{n} + \left(-\alpha k_g - \frac{\partial}{\partial s}\gamma\right)\vec{g}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da katsayılar eşitlenirse

$$-\frac{\partial}{\partial t}k_n + \tau_g\lambda = -\frac{\partial}{\partial s}\alpha + \gamma k_g$$

$$-k_n\lambda - \frac{\partial}{\partial t}\tau_g = -\alpha k_g - \frac{\partial}{\partial s}\gamma$$

yazılır. Buradan ise

$$\alpha_s = \frac{\partial}{\partial t}k_n + \gamma k_g - \tau_g\lambda \tag{4.3}$$

$$\gamma_s = k_n\lambda - \alpha k_g + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g$$

olur. Yine benzer şekilde $\vec{g}_{ts} = \vec{g}_{st}$ eşitliğinden faydalanarak

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right) \tag{4.4}$$

yazılır. (4.4) eşitliğinin sol tarafından;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}k_g\vec{T} - k_g\frac{\partial}{\partial t}\vec{T} + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\vec{n} + \tau_g\frac{\partial}{\partial t}\vec{n}\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}k_g\vec{T} - k_g(\alpha\vec{n} + \lambda\vec{g}) + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\vec{n} + \tau_g\left(-\alpha\vec{T} - \gamma\vec{g}\right)\\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial t}k_g - \alpha\tau_g\right)\vec{T} + \left(-k_g\alpha + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\right)\vec{n} + \left(-k_g\lambda - \gamma\tau_g\right)\vec{g}\end{aligned}$$

olur ve (4.4) eşitliğinin sağ tarafından;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(-\lambda\vec{T} + \gamma\vec{n}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial s}\lambda\vec{T} - \lambda\frac{\partial}{\partial s}\vec{T} + \frac{\partial}{\partial s}\gamma\vec{n} + \gamma\frac{\partial}{\partial s}\vec{n}\\ &= -\frac{\partial}{\partial s}\lambda\vec{T} - \lambda\left(k_n\vec{n} + k_g\vec{g}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\gamma\vec{n} + \gamma\left(-k_n\vec{T} - \tau_g\vec{g}\right)\\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial s}\lambda - k_n\gamma\right)\vec{T} + \left(-k_n\lambda + \frac{\partial}{\partial s}\gamma\right)\vec{n} + \left(-k_g\lambda - \tau_g\gamma\right)\vec{g}\end{aligned}$$

bulunur. Katsayıların eşitliğini kullanırsak

$$-\frac{\partial}{\partial t}k_g - \alpha\tau_g = -\frac{\partial}{\partial s}\lambda - k_n\gamma$$

$$-k_g\alpha + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g = -k_n\lambda + \frac{\partial}{\partial s}\gamma$$

olur. O halde

$$\lambda_s = \frac{\partial}{\partial t}k_g - k_n\gamma + \alpha\tau_g \tag{4.5}$$

$$\gamma_s = k_n\lambda - k_g\alpha + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g$$

elde edilir. Son olarak $r_{st} = r_{st}$ eşitliğinden;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) = \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\vec{n} + \lambda\vec{g}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}(r_s \times r_{ss})$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(-k_n\vec{g} + k_g\vec{n}\right)$$

$$= -\frac{\partial k_n}{\partial s}\vec{g} - \frac{\partial \vec{g}}{\partial s}k_n + \frac{\partial k_g}{\partial s}\vec{n} + \frac{\partial \vec{n}}{\partial s}k_g$$

$$= \left(k_g k_n - k_g k_n\right)\vec{T} + \left(-\tau_g k_n + \frac{\partial k_g}{\partial s}\right)\vec{n} + \left(-\frac{\partial k_n}{\partial s} - \tau_g k_g\right)\vec{g}$$

olur. Sonuçta

$$\alpha = -\tau_g k_n + \frac{\partial k_g}{\partial s}$$

$$\lambda = -\frac{\partial k_n}{\partial s} - \tau_g k_g$$

bulunur. (4.3) ve (4.5) eşitliklerini kullanır, (4.3) eşitliğini k_g ve (4.5) eşitliğini $-k_n$ ile çarpıp taraf tarafa toplanırsa

$$k_g\alpha_s - k_n\lambda_s = k_g k_{n_t} + \gamma k_g^2 - \lambda\tau_g k_g - k_{g_t}k_n + \gamma k_n^2 - \alpha\tau_g$$

olur. Buradan da

$$\left(k_g^2 + k_n^2\right)\gamma = k_g\alpha_s - k_n\lambda_s + \lambda\tau_g k_g + \alpha\tau_g k_n + k_{g_t}k_n - k_g k_{n_t}$$

$$= k_g\alpha_s - k_n\lambda_s + \left(-k_{n_s} - k_g\tau_g\right)\tau_g k_g + \left(k_{g_s} - k_n\tau_g\right)\tau_g k_n$$

$$+k_{g_t}k_n - k_g k_{n_t}$$

$$= k_g\left(\left(k_{g_s}\right)_s - k_{n_s}\tau_g - k_n\tau_{g_s}\right) - k_n\left(\left(-k_{n_s}\right)_s - \tau_{g_s}k_g - \tau_g k_{g_s}\right)$$

$$-k_{n_s}\tau_g k_g - k_g^2\tau_g^2 + k_{g_s}\tau_g k_n - k_n^2\tau_g^2 + k_{g_t}k_n - k_g k_{n_t}$$

$$= k_g k_{g_{ss}} + k_n k_{n_{ss}} - \left(k_g^2 t_r^2 + 2k_g k_{n_s}\tau_g - \left(k_{n_s}\right)^2 + \left(k_{n_s}\right)^2\right)$$

$$-\left(k_n^2\tau_g^2 - 2k_{g_s}\tau_g k_n + \left(k_{g_s}\right)^2 - \left(k_{g_s}\right)^2\right) + k_{g_t}k_n - k_g k_{n_t}$$

$$= k_g k_{g_{ss}} + \left(k_{g_s}\right)^2 + k_n k_{n_{ss}} + \left(k_{n_s}\right)^2$$

$$-\left(k_{n_s} + k_g\tau_g\right)^2 - \left(-k_{g_s} + k_n\tau_g\right)^2 + k_{g_t}k_n - k_g k_{n_t}$$

$$= \left(k_g k_{g_s} + k_n k_{n_s}\right)_s - \left(k_{n_s} + k_g\tau_g\right)^2 - \left(k_{g_s} - k_n\tau_g\right)^2$$

$$+k_{g_t}k_n - k_g k_{n_t}$$

olup, γ fonksiyonu

$$\gamma = \frac{1}{k_g^2 + k_n^2}\left[\left(k_g k_{g_s} + k_n k_{n_s}\right)_s - \left(k_{n_s} + k_g \tau_g\right)^2 - \left(k_{g_s} + k_n \tau_g\right)^2 + k_{g_t} k_n - k_{n_t} k_g\right]$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2. $r = r(s,t)$ bir NLS yüzeyi olsun. Öyle ki her t için $r = r(s,t)$ birim hızlı eğridir. O zaman $r = r(s,t)$ yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir:

$$K = \frac{1}{k_g^2 + k_n^2}\left(-\left(k_g^2 + k_n^2\right)\gamma + k_{g_t} k_n - k_{n_t} k_g - \frac{\left(\alpha k_n + \lambda k_g\right)^2}{k_g^2 + k_n^2}\right)$$

$$H = \frac{1}{2\left(k_g^2 + k_n^2\right)\sqrt{k_g^2 + k_n^2}}\left(\left(k_g^2 + k_n^2\right)\gamma - k_{g_t} k_n + k_{n_t} k_g - \left(k_g^2 + k_n^2\right)^2\right).$$

Burada k_g geodezik eğrilik, k_n normal eğrilik ve t_r geodezik burulmadır (Erdoğdu ve Yavuz, 2021).

İspat. $r = r(s,t)$ yüzeyinin birinci temel form katsayıları;

$$E = \langle \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1,$$

$$F = \langle \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial t} \rangle = \langle \vec{T}, k_g \vec{n} - k_n \vec{g} \rangle = \langle \vec{T}, k_g \vec{n} \rangle - \langle \vec{T}, k_n \vec{g} \rangle = 0$$

ve

$$G = \langle \frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial t} \rangle = \langle k_g \vec{n} - k_n \vec{g}, k_g \vec{n} - k_n \vec{g} \rangle = k_g^2 + k_n^2$$

olur. Buradan da

$$EG - F^2 = \left(k_g^2 + k_n^2\right) - 0 = k_g^2 + k_n^2$$

bulunur. NLS yüzeyinin normal vektör alanını bulmak gerekir. O halde

$$\vec{r}_s \times \vec{r}_t = \begin{vmatrix} \vec{T} & \vec{g} & \vec{n} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_n & k_g \end{vmatrix} = -k_n \vec{n} - k_g \vec{g}$$

ve

$$\| \vec{r}_s \times \vec{r}_t \| = \sqrt{\langle -k_n \vec{n} - k_g \vec{g}, -k_n \vec{n} - k_g \vec{g} \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle -k_n\vec{n}, -k_n\vec{n}\rangle + \langle -k_n\vec{n}, -k_g\vec{g}\rangle + \langle -k_g\vec{g}, -k_n\vec{n}\rangle + \langle -k_g\vec{g}, -k_g\vec{g}\rangle}$$

$$= \sqrt{k_n^2\langle \vec{n}, \vec{n}\rangle + k_n k_g\langle \vec{n}, \vec{g}\rangle + k_g k_n\langle \vec{g}, \vec{n}\rangle + k_g^2\langle \vec{g}, \vec{g}\rangle}$$

$$= \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$$

olarak bulunur. Buradan da NLS yüzeyinin normal vektör alanı

$$\vec{Z} = \frac{\vec{r}_s \times \vec{r}_t}{\| \vec{r}_s \times \vec{r}_t \|} = \frac{\vec{T} \times (k_g\vec{n} - k_n\vec{g})}{\vec{T} \times (k_g\vec{n} - k_n\vec{g})} = \frac{-k_n\vec{n} - k_g\vec{g}}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}$$

şeklinde bulunur. İkinci temel formun katsayıları da;

$$e = \langle r_{ss}, \vec{Z}\rangle = \langle \vec{T}_s, \vec{Z}\rangle$$

$$= \langle k_n\vec{n} + k_g\vec{g}, \frac{-k_n\vec{n} - k_g\vec{g}}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}\rangle$$

$$= \langle k_n\vec{n}, \frac{-k_n\vec{n} - k_g\vec{g}}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}\rangle + \langle k_g\vec{g}, \frac{-k_n\vec{n} - k_g\vec{g}}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}\rangle$$

$$= \frac{-k_n^2 - k_g^2}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}},$$

$$f = \langle r_{st}, \vec{Z}\rangle = \langle \vec{T}_t, \vec{Z}\rangle$$

$$= \langle \alpha\vec{n} + \lambda\vec{g}, \frac{-k_n\vec{n} - k_g\vec{g}}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}\rangle$$

$$= \frac{-\alpha k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} - \frac{\lambda k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}$$

$$= \frac{-(k_{g_s} - k_n\tau_g)k_n - (-k_{n_s} - k_g\tau_g)k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}$$

$$= \frac{\tau_g(k_n^2 + k_g^2) - k_{g_s}k_n + k_{n_s}k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}$$

ve

$$g = \langle r_{tt}, \vec{Z}\rangle = \langle \left(k_g\vec{n} - k_n\vec{g}\right)_t, \vec{Z}\rangle$$

$$= \langle k_{g_t}\vec{n} + k_g\overrightarrow{n_t} - k_{n_t}\vec{g} - k_n\overrightarrow{g_t}, \vec{Z}\rangle$$

$$= \langle k_{g_t}\vec{n} + k_g\left(-\alpha\vec{T} - \gamma\vec{g}\right) - k_{n_t}\vec{g} - k_n\left(-\lambda\vec{T} + \gamma\vec{n}\right), \vec{Z}\rangle$$

$$= \langle k_{g_t}\vec{n} - k_g\alpha\vec{T} - k_g\gamma\vec{g} - k_{n_t}\vec{g} + k_n\lambda\vec{T} - k_n\gamma\vec{n}, \frac{-k_n\vec{n}-k_g\vec{g}}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}\rangle$$

$$= \frac{\gamma\left(k_n^2+k_g^2\right)+k_{n_t}k_g-k_{g_t}k_n}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}$$

$$= \frac{\frac{\left(k_n^2+k_g^2\right)}{k_n^2+k_g^2}\left[\left(k_gk_{g_s}+k_nk_{n_s}\right)_s-\left(k_{n_s}+k_g\tau_g\right)^2-\left(k_{g_s}+k_n\tau_g\right)^2+k_{g_t}k_n-k_{n_t}k_g\right]+k_{n_t}k_g-k_{g_t}k_n}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}\left(\left(k_gk_{g_s}+k_nk_{n_s}\right)_s-\left(k_{n_s}+k_g\tau_g\right)^2-\left(k_{g_s}+k_n\tau_g\right)^2\right)$$

olarak bulunur. Böylece, $r = r(s,t)$ yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$= \frac{\frac{-\left(k_n^2+k_g^2\right)}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}\cdot\frac{\left(\left(k_gk_{g_s}+k_nk_{n_s}\right)_s-\left(k_{n_s}+k_g\tau_g\right)^2-\left(k_{g_s}+k_n\tau_g\right)^2\right)}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}-\left(\frac{\tau_g\left(k_n^2+k_g^2\right)-k_{g_s}k_n+k_{n_s}k_g}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}\right)^2}{k_n^2+k_g^2}$$

$$= \frac{1}{k_n^2+k_g^2}\left[-\left(k_n^2+k_g^2\right)\gamma+k_{g_t}k_n-k_{n_t}k_g-\frac{\left(\tau_gk_n^2+\tau_gk_g^2-k_{g_s}k_n+k_{n_s}k_g\right)^2}{k_n^2+k_g^2}\right]$$

$$= \frac{1}{k_n^2+k_g^2}\left[-\left(k_n^2+k_g^2\right)\gamma+k_{g_t}k_n-k_{n_t}k_g-\frac{\left(\alpha k_n+\lambda k_g\right)^2}{k_n^2+k_g^2}\right]$$

ve

$$H = \frac{Eg+Ge-2Ff}{2(EG-F^2)}$$

$$= \frac{\frac{\left(\left(k_gk_{g_s}+k_nk_{n_s}\right)_s-\left(k_{n_s}+k_g\tau_g\right)^2-\left(k_{g_s}+k_n\tau_g\right)^2\right)}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}+\left(k_n^2+k_g^2\right)\frac{-\left(k_n^2+k_g^2\right)}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}}{2\left(k_n^2+k_g^2\right)}$$

$$= \frac{\left(\left(k_gk_{g_s}+k_nk_{n_s}\right)_s-\left(k_{n_s}+k_g\tau_g\right)^2-\left(k_{g_s}+k_n\tau_g\right)^2\right)-\left(k_n^2+k_g^2\right)^2+k_{g_t}k_n-k_{n_t}k_g-\left(k_{g_t}k_n-k_{n_t}k_g\right)}{2\left(k_n^2+k_g^2\right)\sqrt{k_n^2+k_g^2}}$$

$$= \frac{1}{2\left(k_g^2+k_n^2\right)\sqrt{k_g^2+k_n^2}}\left(\left(k_g^2+k_n^2\right)\gamma-k_{g_t}k_n+k_{n_t}k_g-\left(k_g^2+k_n^2\right)^2\right)$$

olur.

Örnek 4.1. Aşağıdaki parametrelendirmeye sahip NLS yüzeyi

$$r(s,t)=\left(s-\frac{2}{3}tanh(3s),-\frac{2}{3}sech(3s)cos(9t),-\frac{2}{3}sech(3s)sin(9t)\right)$$

olarak verilsin.

Her $t\in\mathbb{R}$ için $r=r(s,t)$ eğrilerinin Darboux çatısı

$$T(s,t)=\left(2tanh^2(3s)-1,2sech(3s)tanh(3s)cos(9t),2sech(3s)tanh(3s)sin(9t)\right)$$

$$n(s,t)=\left(-2tanh(3s)sech(3s),\left(tanh^2(3s)-sech^2(3s)\right)cos(9t),tanh^2(3s)-sech^2(3s)\right)$$

$$g(s,t)=\left(0,sin(9t),-cos(9t)\right)$$

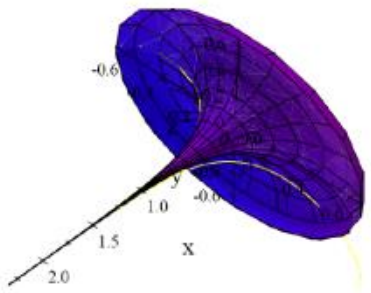
şeklinde bulunur. Daha sonra Darboux eğriliklerini aşağıdaki gibi elde edilir:

$$k_n(s,t)=-6sech(3s),$$
$$k_g(s,t)=0,$$
$$\tau_g(s,t)=0.$$

Ayrıca NLS yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K(s,t)=-9\left(tanh^2(3s)-sech^2(3s)\right),$$
$$H(s,t)=-\frac{9}{2}sech(3s)+\frac{3}{4sech(3s)}$$

olarak bulunur. Aşağıdaki şekil NLS yüzeyini ve onun geodezik yüzeyindeki bazı s-parametre eğrilerini (sarı renkle) göstermektedir (Erdoğdu ve Yavuz, 2021).



Şekil 4.1. NLS yüzeyinin ve geodezik eğrisinin grafiği (Erdoğdu ve Yavuz, 2021)

Örnek 4.2. $r(s,t)=(cos(s),sin(s),t)$ parametrelendirilmesi ile verilen bir NLS yüzeyinin her t için $r=r(s,t)$ eğrilerinin Darboux çatısı

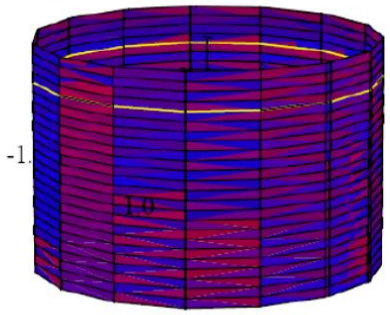
$$\vec{T}(s)=(-sin(s),cos(s),0)$$
$$\vec{n}(s)=(cos(s),sin(s),0)$$
$$\vec{g}(s)=(0,0,1)$$

olarak elde edilir. Geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması

$$k_n = -1$$

$$k_g = \tau_g = 0$$

şeklinde bulunur. Aşağıdaki şekil NLS yüzeyini ve yüzeydeki s-parametre eğrisinin bir kısmını (sarı renkle) geodezik olarak göstermektedir (Erdoğdu ve Yavuz, 2021).



Şekil 4.2. NLS yüzeyindeki geodeziklerin grafiği (Erdoğdu ve Yavuz, 2021)

5. LORENTZ UZAYINDA NLS YÜZEYİ

Bu bölümde, doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi Lorentz uzayı çerçevesinde ele alınarak diferansiyel geometrik açıdan ayrıntılı bir şekilde incelenmektedir. Önceki bölümlerde Öklid uzayında verilen temel kavramlar ve yapılan geometrik analizler, bu bölümde Lorentz geometrisinin kendine özgü yapısı dikkate alınarak genelleştirilmektedir. Böylece timelike ve spacelike geometrik yapıların NLS denklemi üzerindeki etkileri ortaya konulmaktadır.

Lorentz uzayında metrik yapısı nedeniyle, eğriler ve yüzeyler Öklid uzayından farklı geometrik özellikler sergilemektedir. Bu farklılıklar, doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin çözüm davranışlarında ve geometrik yorumlarında belirleyici olmaktadır. Bu bölümde, NLS denkleminin Lorentz uzayındaki formu verilmekte; denklemin çözümleri, ilgili geometrik değişmezler ve diferansiyel geometrik yapılarla olan ilişkisi ayrıntılı olarak ele alınmaktadır.

Ayrıca, Lorentz uzayında tanımlanan eğrilerin ve yüzeylerin geometrik hareketleri ile NLS denklemi arasındaki bağlantılar incelenerek, soliton çözümlerinin geometrik karşılıkları değerlendirilmektedir. Bu yaklaşım, doğrusal olmayan denklemlerin yalnızca analitik değil, aynı zamanda geometrik bir bakış açısıyla da anlaşılabileceğini göstermektedir. Özellikle Lorentz uzayında elde edilen sonuçlar, matematiksel fizik açısından önemli çıkarımlar sunmaktadır.

Sonuç olarak bu bölüm, NLS denkleminin Lorentz uzayında diferansiyel geometrik analizini gerçekleştirerek, tezin temel katkılarından birini oluşturmaktadır. Elde edilen bulgular hem teorik diferansiyel geometri hem de fiziksel uygulamalar açısından anlamlı sonuçlar ortaya koymaktadır.

5.1. Spacelike NLS Yüzeyi

Bu bölümde spacelike NLS yüzeyleri üzerinde tanımlanan eğrilerin geometrik yapısı ele alınacaktır. Lorentz uzayında bir spacelike yüzey üzerinde yer alan bir spacelike eğrinin geometrik karakteri, Frenet çatısında hangi vektörün timelike olduğuna bağlı olarak değişmektedir. Spacelike yüzey üzerindeki eğriler bu bakımdan iki farklı alt durumda incelenmektedir.

Birinci alt durumda, eğrinin normal vektörünün timelike olduğu spacelike eğriler söz konusudur. İkinci alt durumda ise eğrinin binormal vektörünün timelike olduğu spacelike eğriler ele alınmaktadır. Dolayısıyla, spacelike NLS yüzeyleri üzerindeki eğrilerin incelenmesi, eğrinin Lorentz karakterine göre kaçınılmaz olarak iki alt başlık altında yapılmaktadır. Tezin bu bölümünde, söz konusu iki durum ayrı ayrı ele alınarak, her birinin NLS yüzeyleri üzerindeki geometrik ve analitik etkileri ayrıntılı biçimde ortaya konulacaktır.

1. Durum: NLS yüzeyinin s- parametre eğrisi timelike normale sahip olan spacelike eğri olsun. Yani eğrinin Frenet $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ çatısının karakteri $(+,-,+)$ şeklindedir. Bu durumda NLS yüzeyi spacelike yüzey olup, yüzey üzerindeki Darboux $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ çatısının karakteri $(+,+,-)$ olarak ifade edilir. Yay uzunluğu parametresine göre türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (Şentürk ve Yüce, 2020)

Teorem 5.1. $r = r(s,t)$ spacelike NLS yüzeyi olmak üzere her t_0 için $\beta(s) = r(s,t_0)$ eğrisi timelike normale sahip olan birim hızlı spacelike eğri olsun. β eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ için aşağıdakiler sağlanır.

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \lambda \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \lambda & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

Burada α, λ, γ düzgün fonksiyonları aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir:

$$\alpha = -k_g\tau_g - k_{n_s}$$

$$\lambda = -k_{g_s} - k_n\tau_g$$

$$\gamma = \frac{1}{(k_g^2+k_n^2)}\left[-\left(k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}}\right) - 2\left(k_g k_n \tau_g\right)_s - \tau_g^2\left(k_g^2 + k_n^2\right) - \left(k_n k_g\right)_t\right].$$

İspat. Düzgün $\alpha,\ \lambda,\ \gamma$ fonksiyonları k_g, k_n, τ_g fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilmelidir. Burada her t için $r = r(s,t)$ duman halka denkleminin bir çözümü olacaktır. Uyum koşullarını kullanarak $\vec{T}_{ts} = \vec{T}_{st}$ olup

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}\right) \tag{5.1}$$

eşitliğinden aşağıdakiler bulunur. (5.1) eşitliğinin sol tarafından;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(k_g\vec{g} + k_n\vec{n}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}k_g\vec{g} + k_g\frac{\partial}{\partial t}\vec{g} + \frac{\partial}{\partial t}k_n\vec{n} + k_n\frac{\partial}{\partial t}\vec{n}\\ &= \left(-k_g\alpha + k_n\lambda\right)\vec{T} + \left(\frac{\partial}{\partial t}k_g + k_n\gamma\right)\vec{g} + \left(k_g\gamma + \frac{\partial}{\partial t}k_n\right)\vec{n}\end{aligned}$$

bulunur. (5.1) eşitliğinin sağ tarafından;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}(\alpha\vec{g} + \lambda\vec{n})\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\alpha\vec{g} + \alpha\frac{\partial}{\partial s}\vec{g} + \frac{\partial}{\partial s}\lambda\vec{n} + \lambda\frac{\partial}{\partial s}\vec{n}\\ &= \left(-\alpha k_g + \lambda k_n\right)\vec{T} + \left(\frac{\partial}{\partial s}\alpha + \lambda\tau_g\right)\vec{g} + \left(\alpha\tau_g + \frac{\partial}{\partial s}\lambda\right)\vec{n}\end{aligned}$$

olur. Katsayıların eşitliğinden de;

$$\frac{\partial}{\partial t}k_g + k_n\gamma = \frac{\partial}{\partial s}\alpha + \lambda\tau_g$$

$$k_g\gamma + \frac{\partial}{\partial t}k_n = \alpha\tau_g + \frac{\partial}{\partial s}\lambda$$

yazılır ve buradan da

$$\alpha_s = k_{g_t} + k_n\gamma - \lambda\tau_g$$

$$\lambda_s = k_g\gamma + k_{n_t} - \alpha\tau_g$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\vec{g}_{ts} = \vec{g}_{st}$ eşitliğinden faydalanarak

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right) \tag{5.2}$$

yazılır. (5.2) eşitliğinin sol tarafından;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}k_g\vec{T} - k_g\frac{\partial}{\partial t}\vec{T} + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\vec{n} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{n}\tau_g$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial t}k_g + \tau_g\lambda\right)\vec{T} + \left(-k_g\alpha + \tau_g\gamma\right)\vec{g} + \left(-k_g\lambda + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\right)\vec{n}$$

olur. Ayrıca (5.2) eşitliğinin sağ tarafından da;

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(-\alpha\vec{T} + \gamma\vec{n}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s}\alpha\vec{T} - \frac{\partial}{\partial s}\vec{T}\alpha + \frac{\partial}{\partial s}\gamma\vec{n} + \frac{\partial}{\partial s}\vec{n}\gamma$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial s}\alpha + \gamma k_n\right)\vec{T} + \left(-\alpha k_g + \gamma\tau_g\right)\vec{g} + \left(-\alpha k_n + \frac{\partial}{\partial s}\gamma\right)\vec{n}$$

bulunur. Katsayıların eşitliğini kullanırsak

$$-\frac{\partial}{\partial t}k_g + \tau_g\lambda = -\frac{\partial}{\partial s}\alpha + k_n\gamma$$

$$-k_g\lambda + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g = -\alpha k_n + \frac{\partial}{\partial s}\gamma$$

olur. Buradan da

$$\alpha_s = k_{g_t} + k_n\gamma - \tau_g\lambda \tag{5.3}$$

$$\gamma_s = \tau_{g_t} + \alpha k_n - k_g\lambda$$

elde edilir. Yine benzer şekilde $\vec{n}_{ts} = \vec{n}_{st}$ eşitliği yardımıyla

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}\right) \tag{5.4}$$

yazılır. (5.4) eşitliğinin sol tarafından;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(k_n\vec{T} + \tau_g\vec{g}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}k_n\vec{T} + k_n\frac{\partial}{\partial t}\vec{T} + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\vec{g} + \tau_g\frac{\partial}{\partial t}\vec{g}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}k_n - \tau_g\alpha\right)\vec{T} + \left(k_n\alpha + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\right)\vec{g} + \left(k_n\lambda + \tau_g\gamma\right)\vec{n}$$

olur. Öte yandan (5.4) eşitliğinin sağ tarafından;

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda\vec{T} + \gamma\vec{g}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\lambda\vec{T} + \lambda\frac{\partial}{\partial s}\vec{T} + \frac{\partial}{\partial s}\gamma\vec{g} + \gamma\frac{\partial}{\partial s}\vec{g}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial s}\lambda - \gamma k_g\right)\vec{T} + \left(\lambda k_g + \frac{\partial}{\partial s}\gamma\right)\vec{g} + \left(\lambda k_n + \gamma\tau_g\right)\vec{n}$$

bulunur. Buradan da katsayılar eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial t}k_n - \tau_g\alpha = \frac{\partial}{\partial s}\lambda - \gamma k_g$$

$$k_n\alpha + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g = \lambda k_g + \frac{\partial}{\partial s}\gamma$$

olur ve dolayısıyla

$$\lambda_s = k_{n_t} - \tau_g\alpha + \gamma k_g \tag{5.5}$$
$$\gamma_s = k_n\alpha + \tau_{g_t} - \lambda k_g$$

elde edilir. Son olarak $r_{st} = r_{st}$ eşitliğinden;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) = \frac{\partial\vec{T}}{\partial t} = \alpha\vec{g} + \lambda\vec{n}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(r_s \times_L r_{ss}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(-k_g\vec{n} - k_n\vec{g}\right)$$
$$= -\frac{\partial k_g}{\partial s}\vec{n} - \frac{\partial\vec{n}}{\partial s}k_g - \frac{\partial k_n}{\partial s}\vec{g} - \frac{\partial\vec{g}}{\partial s}k_n$$
$$= \left(-k_g\tau_g - \frac{\partial k_n}{\partial s}\right)\vec{g} + \left(-\frac{\partial k_g}{\partial s} - k_n\tau_g\right)\vec{n}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak α ve λ fonksiyonları sırasıyla

$$\alpha = -k_g\tau_g - k_{n_s}$$

$$\lambda = -k_{g_s} - k_n\tau_g$$

olarak bulunur. Bu durumda (5.3) ve (5.5) eşitliklerini kullanır, (5.3) eşitliğini k_n ve (5.5) eşitliğini k_g ile çarpıp

$$\alpha_s k_n = k_{g_t}k_n + k_n k_n\gamma - \tau_g k_n\lambda$$
$$\lambda_s k_g = k_{n_t}k_g - \tau_g k_g\alpha + \gamma k_g k_g$$

bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\left(k_g^2 + k_n^2\right)\gamma = \alpha_s k_n + \lambda_s k_g - k_{g_t}k_n - k_{n_t}k_g + \tau_g k_n\lambda + \tau_g k_g\alpha$$

$$(k_g^2+k_n^2)\gamma = k_n\left(-(k_{n_s})_s - k_{g_s}\tau_g - k_g\tau_{g_s}\right) + k_g\left(-\left(k_{g_s}\right)_s - k_{n_s}\tau_g - k_n\tau_{g_s}\right)$$
$$+\tau_g k_n\left(-k_{g_s} - k_n\tau_g\right) + \tau_g k_g\left(-k_g\tau_g - k_{n_s}\right) - k_{g_t}k_n - k_{n_t}k_g$$
$$= -k_n k_{n_{ss}} - k_g k_{g_{ss}} - 2\left(k_g k_n\tau_g\right)_s - \tau_g^2\left(k_g^2+k_n^2\right) - \left(k_n k_g\right)_t$$

olup γ fonksiyonu

$$\gamma = \frac{1}{\left(k_g^2+k_n^2\right)}\left[-\left(k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}}\right) - 2\left(k_g k_n\tau_g\right)_s - \tau_g^2\left(k_g^2+k_n^2\right) - \left(k_n k_g\right)_t\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 5.2. $r = r(s,t)$ spacelike NLS yüzeyi olmak üzere her t_0 için $\beta(s) = r(s,t_0)$ eğrisi timelike normale sahip olan birim hızlı spacelike eğri olsun. NLS yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla

$$K = -\frac{\left(k_g k_{g_{ss}} - k_n k_{n_{ss}}\right)\left(k_g^2-k_n^2\right) - \left(k_n k_{g_s} - k_g k_{n_s}\right)^2}{\left(k_g^2-k_n^2\right)^2}$$

ve

$$H = -\frac{k_g k_{g_{ss}} - k_n k_{n_{ss}} - 2\tau_g\left(k_n k_{g_s} - k_g k_{n_s}\right) + \left(\tau_g{}^2 + k_g^2 - k_n^2\right)\left(k_g^2-k_n^2\right)}{2\left(k_g^2-k_n^2\right)^{3/2}}$$

olarak ifade edilir. Burada k_g, k_n ve τ_g sırasıyla β eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır.

İspat. $r = r(s,t)$ yüzeyinin birinci temel form katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur;

$$E = \langle\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s}\rangle_L = \langle\vec{T},\vec{T}\rangle_L = 1,$$

$$F = \langle\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial t}\rangle_L = \langle\vec{T}, -k_g\vec{n} - k_n\vec{g}\rangle_L = \langle\vec{T}, -k_g\vec{n}\rangle_L + \langle\vec{T}, -k_n\vec{g}\rangle_L = 0$$

ve

$$G = \langle\frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial t}\rangle_L = \langle -k_g\vec{n} - k_n\vec{g}, -k_g\vec{n} - k_n\vec{g}\rangle_L = k_n^2 - k_g^2$$

olarak ifade edilir. Buradan da

$$EG - F^2 = k_n^2 - k_g^2$$

bulunur. NLS yüzeyinin normal vektör alanını bulmak gerekir. O halde

$$\vec{r}_s \times_L \vec{r}_t = \begin{vmatrix} \vec{T} & \vec{g} & -\vec{n} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_n & -k_g \end{vmatrix} = k_n\vec{n} + k_g\vec{g}$$

ve

$$\| \vec{r}_s \times_L \vec{r}_t\| = \sqrt{\langle k_n\vec{n} + k_g\vec{g}, k_n\vec{n} + k_g\vec{g}\rangle_L}$$

$$= \sqrt{\langle k_n\vec{n}, k_n\vec{n}\rangle_L + \langle k_n\vec{n}, k_g\vec{g}\rangle_L + \langle k_g\vec{g}, k_n\vec{n}\rangle_L + \langle k_g\vec{g}, k_g\vec{g}\rangle_L}$$

$$= \sqrt{k_g^2 - k_n^2}$$

olduğundan buradan da NLS yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\vec{Z} = \frac{\vec{r}_s \times_L \vec{r}_t}{\|\vec{r}_s \times_L \vec{r}_t\|} = \frac{\vec{T} \times_L (-k_g\vec{n} - k_n\vec{g})}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}} = \frac{k_n\vec{n} + k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}}$$

şeklinde bulunur. İkinci temel formun katsayıları da

$$e = \langle r_{ss}, \vec{Z}\rangle_L = \langle \vec{T}_s, \vec{Z}\rangle_L$$

$$= \langle k_g\vec{g} + k_n\vec{n}, \frac{k_n\vec{n} + k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \frac{k_g^2 - k_n^2}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}}$$

$$= \sqrt{k_g^2 - k_n^2},$$

$$f = \langle r_{st}, \vec{Z}\rangle_L = \langle \vec{T}_t, \vec{Z}\rangle_L$$

$$= \langle \alpha\vec{g} + \lambda\vec{n}, \frac{k_n\vec{n} + k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \frac{(-k_{n_s} - k_g\tau_g)k_g - (-k_{g_s} - k_n\tau_g)k_n}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}}$$

$$= \frac{k_{g_s}k_n - k_{n_s}k_g - \tau_g(k_g^2 - k_n^2)}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}}$$

ve

$$g = \langle r_{tt}, \vec{Z}\rangle_L = \langle \left(-k_g\vec{n} - k_n\vec{g}\right)_t, \vec{Z}\rangle_L$$

$$= \langle -k_{g_t}\vec{n} - k_g\overrightarrow{n_t} - k_{n_t}\vec{g} - k_n\overrightarrow{g_t}, \frac{k_n\vec{n}+k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \langle -k_{g_t}\vec{n} - k_g(\lambda\vec{T}+\gamma\vec{g}) - k_{n_t}\vec{g} - k_n(-\alpha\vec{T}+\gamma\vec{n}), \frac{k_n\vec{n}+k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \langle -k_{g_t}\vec{n}, \frac{k_n\vec{n}+k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L + \langle -k_g\lambda\vec{T}, \frac{k_n\vec{n}+k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L + \langle -k_g\gamma\vec{g}, \frac{k_n\vec{n}+k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L$$

$$+ \langle -k_{n_t}\vec{g}, \frac{k_n\vec{n}+k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L + \langle k_n\alpha\vec{T}, \frac{k_n\vec{n}+k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L + \langle -k_n\gamma\vec{n}, \frac{k_n\vec{n}+k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \frac{k_{g_t}k_n-\gamma k_g^2-k_{n_t}k_g+\gamma k_n^2}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}$$

$$= \frac{-\gamma(k_g^2-k_n^2)-k_{n_t}k_g+k_{g_t}k_n}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}$$

olarak elde edilir. Böylece, $r = r(s,t)$ yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla

$$K = -\frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$= -\frac{-\gamma(k_g^2-k_n^2)-k_{n_t}k_g+k_{g_t}k_n-\left(\frac{k_{g_s}k_n-k_{n_s}k_g-\tau_g(k_g^2-k_n^2)}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\right)^2}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}$$

$$= -\frac{\left(k_gk_{g_{ss}}-k_nk_{n_{ss}}\right)(k_g^2-k_n^2)-(k_nk_{g_s}-k_gk_{n_s})^2}{(k_g^2-k_n^2)^2}$$

ve

$$H = -\frac{Eg+Ge-2Ff}{2(EG-F^2)}$$

$$= -\frac{\frac{-\gamma(k_g^2-k_n^2)-k_{n_t}k_g+k_{g_t}k_n}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}+(k_g^2-k_n^2)\sqrt{k_g^2-k_n^2}}{2(k_g^2-k_n^2)}$$

$$= -\frac{k_gk_{g_{ss}}-k_nk_{n_{ss}}-2\tau_g\left(k_nk_{g_s}-k_gk_{n_s}\right)+(\tau_g{}^2+k_g^2-k_n^2)(k_g^2-k_n^2)}{2(k_g^2-k_n^2)^{3/2}}$$

olarak bulunur.

2. Durum: NLS yüzeyinin s- parametre eğrisi timelike binormale sahip olan spacelike eğri olsun. Yani eğrinin Frenet $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ çatısının karakteri $(+,+,-)$ şeklindedir. Bu durumda NLS yüzeyi spacelike yüzey olup, yüzey üzerindeki Darboux $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ çatısının karakteri $(+,+,-)$ olarak ifade edilir. Yay uzunluğu parametresine göre türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix}\vec{T}\\ \vec{g}\\ \vec{n}\end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix}0 & -k_n & -k_g\\ k_n & 0 & \tau_g\\ -k_g & \tau_g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{T}\\ \vec{g}\\ \vec{n}\end{bmatrix}$$

şeklindedir (Şentürk ve Yüce, 2020).

Teorem 5.3. $r = r(s,t)$ spacelike NLS yüzeyi olmak üzere her t_0 için $\beta(s) = r(s,t_0)$ eğrisi timelike binormale sahip olan birim hızlı spacelike eğri olsun. β eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T},\vec{g},\vec{n}\}$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{bmatrix}\vec{T}\\ \vec{g}\\ \vec{n}\end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix}0 & \alpha & \lambda\\ -\alpha & 0 & \gamma\\ \lambda & \gamma & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{T}\\ \vec{g}\\ \vec{n}\end{bmatrix}.$$

Burada α, λ, γ düzgün fonksiyonları aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir:

$$\alpha = k_n\tau_g + k_{g_s},$$

$$\lambda = k_{n_s} + k_g\tau_g,$$

$$\gamma = \frac{1}{\left(k_g^2 + k_n^2\right)}\left[-\left(k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}}\right) - 2\left(k_g k_n \tau_g\right)_s - \tau_g^2\left(k_g^2 + k_n^2\right) - \left(k_n k_g\right)_t\right].$$

İspat. Düzgün α, λ, γ fonksiyonları k_g, k_n, τ_g fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilmelidir. Burada her t için $r = r(s,t)$ duman halka denkleminin bir çözümü olacaktır. Uyum koşullarını kullanarak $\vec{T}_{ts} = \vec{T}_{st}$ olup;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}\right) \tag{5.6}$$

olarak yazılır. (5.6) eşitliğinin sol tarafından;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_n\vec{g} - k_g\vec{n}\right)$$

$$= \left(-k_g\lambda + k_n\alpha\right)\vec{T} + \left(-\frac{\partial}{\partial t}k_n - k_g\gamma\right)\vec{g} + \left(-k_n\gamma - \frac{\partial}{\partial t}k_g\right)\vec{n}$$

bulunur. (5.6) eşitliğinin sağ tarafından da;

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\alpha\vec{g} + \lambda\vec{n}\right)$$

$$= \left(\alpha k_n - \lambda k_g\right)\vec{T} + \left(\frac{\partial}{\partial s}\alpha + \lambda\tau_g\right)\vec{g} + \left(\alpha\tau_g + \frac{\partial}{\partial s}\lambda\right)\vec{n}$$

olur. Katsayıların eşitliğinden;

$$-\frac{\partial}{\partial t}k_n - k_g\gamma = \frac{\partial}{\partial s}\alpha + \lambda\tau_g$$

$$-k_n\gamma - \frac{\partial}{\partial t}k_g = \alpha\tau_g + \frac{\partial}{\partial s}\lambda$$

olmak üzere, buradan

$$\alpha_s = -k_{n_t} - k_g\gamma - \lambda\tau_g \tag{5.7}$$

$$\lambda_s = -k_n\gamma - k_{g_t} - \alpha\tau_g \tag{5.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\vec{g}_{ts} = \vec{g}_{st}$ eşitliğinden faydalanarak

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right) \tag{5.9}$$

yazılır. Yukarıdaki (5.9) eşitliğinin sol tarafından;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(k_n\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}k_n + \tau_g\lambda\right)\vec{T} + \left(k_n\alpha + \tau_g\gamma\right)\vec{g} + \left(k_n\lambda + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\right)\vec{n}$$

olduğu görülür. Ayrıca (5.9) eşitliğinin sağ tarafından;

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(-\alpha\vec{T} + \gamma\vec{n}\right)$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial s}\alpha - \gamma k_g\right)\vec{T} + \left(k_n\alpha + \tau_g\gamma\right)\vec{g} + \left(\alpha k_g - \frac{\partial}{\partial s}\gamma\right)\vec{n}$$

olarak bulunur. Katsayıların eşitliğini kullanırsak

$$k_n\lambda + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g = \alpha k_g - \frac{\partial}{\partial s}\gamma$$

elde edilir. O halde

$$\gamma_s = -\tau_{g_t} + \alpha k_g - k_n\lambda$$

yazılır. Yine benzer şekilde $\vec{n}_{ts} = \vec{n}_{st}$ eşitliğinden faydalanarak aynı eşitlikler elde edilir. Son olarak $r_{st} = r_{st}$eşitliğinden;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \alpha\vec{g} + \lambda\vec{n}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}(r_s \times_L r_{ss}) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\left(k_g\vec{g} + k_n\vec{n}\right) \\ &= \left(k_n\tau_g + \frac{\partial k_g}{\partial s}\right)\vec{g} + \left(\frac{\partial k_n}{\partial s} + k_g\tau_g\right)\vec{n}\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak α ve λ fonksiyonları sırasıyla

$$\alpha = k_n\tau_g + k_{g_s}$$

$$\lambda = k_{n_s} + k_g\tau_g$$

biçiminde elde edilir. Buradan da (5.7) ve (5.8) eşitlikleri kullanılırsa

$$-\alpha_s k_g = k_{n_t}k_g + k_g^2\gamma + \tau_g k_g\lambda$$
$$-\lambda_s k_n = k_{g_t}k_n + \tau_g k_n\alpha + \gamma k_n^2$$

denklemlerine ulaşılır. Bu iki ifadenin taraf tarafa toplanmasıyla

$$\left(k_g^2 + k_n^2\right)\gamma = -\alpha_s k_g - \lambda_s k_n - \left(k_n k_g\right)_t - \tau_g(k_g\lambda + k_n\alpha)$$
$$\left(k_g^2 + k_n^2\right)\gamma = -k_n k_{n_{ss}} - k_g k_{g_{ss}} - 2\left(k_g k_n\tau_g\right)_s - \tau_g^2\left(k_g^2 + k_n^2\right) - \left(k_n k_g\right)_t$$

elde edilip γ fonksiyonu

$$\gamma = \frac{1}{\left(k_g^2 + k_n^2\right)}\left[-\left(k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}}\right) - 2\left(k_g k_n\tau_g\right)_s - \tau_g^2\left(k_g^2 + k_n^2\right) - \left(k_n k_g\right)_t\right]$$

formunda ifade edilebilir.

Teorem 5.4. $r = r(s,t)$ spacelike NLS yüzeyi olmak üzere her t_0 için $\beta(s) = r(s,t_0)$ eğrisi timelike binormale sahip olan birim hızlı spacelike eğri olsun. NLS yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla

$$K = -\frac{\left(k_g k_{g_{ss}} - k_n k_{n_{ss}}\right)\left(k_g^2 - k_n^2\right) - \left(k_n k_{g_s} - k_g k_{n_s}\right)^2}{\left(k_g^2 - k_n^2\right)^2}$$

ve

$$H = -\frac{-k_g k_{g_{ss}} + k_n k_{n_{ss}} - 2k_g \tau_g k_{n_s} + 2k_n \tau_g k_{g_s} + (k_g^2 - k_n^2)(\tau_g{}^2 - k_g^2 + k_n^2)}{2(k_g^2 - k_n^2)^{3/2}}$$

olarak ifade edilir. Burada k_g, k_n ve τ_g sırasıyla β eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır.

İspat. $r = r(s,t)$ yüzeyinin birinci temel form katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur;

$$E = \langle \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s} \rangle_L = \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle_L = 1,$$

$$F = \langle \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial t} \rangle_L = \langle \vec{T}, k_n \vec{n} + k_g \vec{g} \rangle_L = 0$$

ve

$$G = \langle \frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial t} \rangle_L = \langle k_n \vec{n} + k_g \vec{g}, k_n \vec{n} + k_g \vec{g} \rangle_L = k_g^2 - k_n^2$$

bulunur.

$$EG - F^2 = k_g^2 - k_n^2$$

elde edilir. NLS yüzeyinin normal vektör alanını bulmak gerekir. O halde

$$\vec{r}_s \times_L \vec{r}_t = \begin{vmatrix} \vec{T} & \vec{g} & -\vec{n} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_g & k_n \end{vmatrix} = -k_n \vec{g} - k_g \vec{n}$$

ve

$$\| \vec{r}_s \times_L \vec{r}_t \| = \sqrt{\left| \langle -k_n \vec{g} - k_g \vec{n}, -k_n \vec{g} - k_g \vec{n} \rangle_L \right|}$$

$$= \sqrt{k_g^2 - k_n^2}$$

olarak yazılır ve buradan da NLS yüzeyinin normal vektör alanı

$$\vec{Z} = \frac{-k_n \vec{g} - k_g \vec{n}}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}}$$

şeklinde bulunur. İkinci temel formun katsayıları da

$$e = \langle r_{ss}, \vec{Z} \rangle_L = \langle \vec{T}_s, \vec{Z} \rangle_L$$

$$= \langle -k_n \vec{g} - k_g \vec{n}, \frac{-k_n \vec{g} - k_g \vec{n}}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}} \rangle_L$$

$$= \frac{-(k_g^2-k_n^2)}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}$$

$$= -\sqrt{k_g^2-k_n^2},$$

$$f = \langle r_{st}, \vec{Z}\rangle_L = \langle \vec{T}_t, \vec{Z}\rangle_L$$

$$= \langle \alpha\vec{g} + \lambda\vec{n}, \frac{-k_n\vec{g}-k_g\vec{n}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \frac{-\alpha k_n - \lambda k_g}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}} = \frac{\tau_g(k_g^2-k_n^2)-k_n k_{g_s}+k_g k_{n_s}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}$$

ve

$$g = \langle r_{tt}, \vec{Z}\rangle_L = \langle \left(k_g\vec{g} + k_n\vec{n}\right)_t, \frac{-k_n\vec{g}-k_g\vec{n}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \langle k_{g_t}\vec{g} + k_g\left(-\alpha\vec{T} + \gamma\vec{n}\right) + k_{n_t}\vec{n} + k_n\left(\lambda\vec{T} + \gamma\vec{g}\right), \frac{k_n\vec{n}+k_g\vec{g}}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}\left(-k_{g_t}k_n + k_{n_t}k_g + \gamma\left(k_g^2-k_n^2\right)\right)$$

$$= \frac{-k_g k_{g_{ss}}+k_n k_{n_{ss}}-2k_g\tau_g k_{n_s}+2k_n\tau_g k_{g_s}+{\tau_g}^2\left(k_g^2-k_n^2\right)}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}}$$

olarak bulunur. Böylece, $r = r(s,t)$ yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla

$$K = -\frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$= -\left[k_g k_{g_{ss}} - k_n k_{n_{ss}} + 2k_g\tau_g k_{n_s} - 2k_n\tau_g k_{g_s} - {\tau_g}^2\left(k_g^2-k_n^2\right) - \frac{(\tau_g(k_g^2-k_n^2)-k_n k_{g_s}+k_g k_{n_s})^2}{k_g^2-k_n^2}\right]$$

$$= \frac{\left(k_g k_{g_{ss}}-k_n k_{n_{ss}}\right)(k_g^2-k_n^2)-2{\tau_g}^2(k_g^2-k_n^2)-(k_n k_{g_s}+k_g k_{n_s})^2}{\left(k_g^2-k_n^2\right)^{3/2}}$$

ve

$$H = -\frac{Eg+Ge-2Ff}{2(EG-F^2)}$$

$$= -\frac{\frac{-k_g k_{g_{ss}}+k_n k_{n_{ss}}-2k_g\tau_g k_{n_s}+2k_n\tau_g k_{g_s}+{\tau_g}^2\left(k_g^2-k_n^2\right)}{\sqrt{k_g^2-k_n^2}} - (k_g^2-k_n^2)\sqrt{k_g^2-k_n^2}}{2\left(k_g^2-k_n^2\right)}$$

$$= -\frac{-k_g k_{g_{ss}} + k_n k_{n_{ss}} - 2k_g \tau_g k_{n_s} + 2k_n \tau_g k_{g_s} + (k_g^2 - k_n^2)(\tau_g{}^2 - k_g^2 + k_n^2)}{2(k_g^2 - k_n^2)^{3/2}}$$

elde edilir.

5.2. Timelike NLS Yüzeyi

Bu bölümde timelike NLS yüzeyleri üzerinde tanımlanan eğrilerin geometrik yapısı incelenecektir. Lorentz uzayında timelike bir yüzey üzerinde yer alan bir eğrinin karakteri, eğrinin teğet vektörünün karakterine bağlı olarak değişmektedir. Başka bir ifadeyle, timelike bir yüzey üzerinde tanımlanan eğri ya timelike ya da spacelike bir eğri olabilir. Bu durum, eğriye ait Darboux çatısının bileşenlerinin ve buna bağlı olarak türev formüllerinin yapısını doğrudan etkilemektedir.

Bu nedenle, timelike NLS yüzeyleri üstündeki eğrinin karakterine göre iki alt durumda ele alınacaktır. Birinci alt durumda, timelike NLS yüzeyi üzerinde yer alan timelike eğriler incelenecek; ikinci alt durumda ise timelike NLS yüzeyi üzerinde bulunan spacelike eğriler ele alınacaktır. İki ayrı alt başlık altında her bir durum için ilgili geometrik yapılar ayrıntılı olarak analiz edilecektir.

1. Durum. NLS yüzeyinin s- parametre eğrisi timelike eğri olsun. Yani eğrinin Frenet $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ çatısının karakteri $(-,+,+)$ şeklindedir. Bu durumda NLS yüzeyi timelike yüzey olup, yüzey üzerindeki Darboux $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ çatısının karakteri $(-,+,+)$ olarak ifade edilir ve Yay uzunluğu parametresine göre türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ k_g & 0 & -\tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Şentürk ve Yüce, 2020).

Teorem 5.5. $r = r(s,t)$ timelike NLS yüzeyi olmak üzere her t_0 için $\beta(s) = r(s,t_0)$ birim hızlı timelike eğri olsun. $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$; β eğrisinin Darboux çatısı olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \lambda \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \lambda & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}.$$

Burada α, λ, γ düzgün fonksiyonları aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir:

$$\alpha = k_g\tau_g - k_{n_s}$$

$$\lambda = k_n\tau_g + k_{g_s}$$

$$\gamma = \frac{1}{k_g^2+k_n^2}\left[k_nk_{n_{ss}} + k_gk_{g_{ss}} + 2\tau_g\left(k_gk_{n_s} - k_nk_{g_s}\right) - \tau_g^2\left(k_n^2 + k_g^2\right) + k_nk_{g_t} - k_gk_{n_t}\right].$$

İspat. Düzgün α, λ, γ fonksiyonları k_g, k_n, τ_g fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilmelidir. Burada her t için $r = r(s,t)$ duman halka denkleminin bir çözümü olacaktır. Uyum koşullarını kullanarak $\vec{T}_{ts} = \vec{T}_{st}$ olup

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{T}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}\right) \tag{5.10}$$

yazılır. (5.10) eşitliğinin sol tarafından;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{T}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(k_n\vec{n} + k_g\vec{g}\right)\\ &= \left(k_g\alpha + k_n\lambda\right)\vec{T} + \left(\frac{\partial}{\partial t}k_g - k_n\gamma\right)\vec{g} + \left(k_g\gamma + \frac{\partial}{\partial t}k_n\right)\vec{n}\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (5.10) eşitliğinin sağ tarafından da;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}(\alpha\vec{g} + \lambda\vec{n})\\ &= \left(\alpha k_g + \lambda k_n\right)\vec{T} + \left(\frac{\partial}{\partial s}\alpha + \lambda\tau_g\right)\vec{g} + \left(-\alpha\tau_g + \frac{\partial}{\partial s}\lambda\right)\vec{n}\end{aligned}$$

olur. Katsayıların eşitliğinden;

$$\frac{\partial}{\partial t}k_g - k_n\gamma = \frac{\partial}{\partial s}\alpha + \lambda\tau_g$$

$$k_g\gamma + \frac{\partial}{\partial t}k_n = -\alpha\tau_g + \frac{\partial}{\partial s}\lambda$$

şeklinde yazılır. Buradan da

$$\alpha_s = k_{g_t} - k_n\gamma - \lambda\tau_g \tag{5.11}$$

$$\lambda_s = k_{n_t} + k_g\gamma + \alpha\tau_g \tag{5.12}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\vec{g}_{ts} = \vec{g}_{st}$ eşitliğinden faydalanarak

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right) \tag{5.13}$$

yazılır. Buradan da (5.13) eşitliğinin sol tarafından;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(k_g \vec{T} - \tau_g \vec{n}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} k_g - \tau_g \lambda\right)\vec{T} + \left(k_g \alpha + \tau_g \gamma\right)\vec{g} + \left(-\frac{\partial}{\partial t}\tau_g + k_g \lambda\right)\vec{n}$$

olarak bulunur. Öte yandan (5.13) eşitliğinin sağından;

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\alpha \vec{T} + \gamma \vec{n}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial s}\alpha + \gamma k_n\right)\vec{T} + \left(\alpha k_g + \gamma \tau_g\right)\vec{g} + \left(\frac{\partial}{\partial s}\gamma + \alpha k_n\right)\vec{n}$$

şeklinde bulunur. Katsayıların eşitliğini kullanırsak

$$-\frac{\partial}{\partial t}\tau_g + k_g \lambda = \frac{\partial}{\partial s}\gamma + \alpha k_n$$

olur. Buradan da

$$\gamma_s = -\tau_{g_t} + k_g \lambda - \alpha$$

elde edilir. Yine benzer biçimde $\vec{n}_{ts} = \vec{n}_{st}$ eşitliğinden faydalanarak işlemler yapılırsa aynı eşitlikler elde edilir. Son olarak $r_{st} = r_{st}$ eşitliğinden;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \alpha \vec{g} + \lambda \vec{n}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(r_s \times_L r_{ss}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(-k_n \vec{g} + k_g \vec{n}\right)$$

$$= \left(k_g \tau_g - \frac{\partial k_n}{\partial s}\right)\vec{g} + \left(\frac{\partial k_g}{\partial s} + k_n \tau_g\right)\vec{n}$$

olur. Sonuçta α ve λ fonksiyonları sırasıyla

$$\alpha = k_g \tau_g - k_{n_s}$$

$$\lambda = k_n \tau_g + k_{g_s}$$

olarak bulunur. Buradan da (5.11) ve (5.12) denklemleri kullanılarak

$$-\alpha_s k_n = -k_n k_{g_t} + k_n^2\gamma + k_n\tau_g\lambda$$

$$\lambda_s k_g = k_g k_{n_t} + k_g^2\gamma + k_g\tau_g\alpha$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$-\alpha_s k_n+\lambda_s k_g = -k_n k_{g_t}+k_n\tau_g\lambda + k_g k_{n_t} + k_g\tau_g\alpha + \gamma(k_n^2 + k_g^2)$$

şeklinde yazılır ve

$$\gamma(k_g^2 + k_n^2) = -\alpha_s k_n+\lambda_s k_g + k_n k_{g_t} - k_g k_{n_t} - k_n\tau_g\lambda - k_g\tau_g\alpha$$

$$= k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\tau_g\left(k_g k_{n_s} - k_n k_{g_s}\right) - \tau_g^2(k_n^2 + k_g^2) + k_n k_{g_t} - k_g k_{n_t}$$

buradan da γ fonksiyonu

$$\gamma = \frac{1}{k_g^2 + k_n^2}\left[k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\tau_g\left(k_g k_{n_s} - k_n k_{g_s}\right) - \tau_g^2(k_n^2 + k_g^2) + k_n k_{g_t} - k_g k_{n_t}\right]$$

eşitliği ile bulunur.

Teorem 5.6. $r = r(s,t)$ timelike NLS yüzeyi olmak üzere her t_0 için $\beta(s) = r(s,t_0)$ eğrisi birim hızlı timelike eğri olsun. NLS yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla

$$K = \frac{(k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}})(k_n^2 + k_g^2) + \left(k_g k_{n_s} - k_n k_{g_s}\right)^2}{\left(k_n^2 + k_g^2\right)^2}$$

ve

$$H = \frac{k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\tau_g\left(k_g k_{n_s} - k_n k_{g_s}\right) + (-\tau_g^2 + k_n^2 + k_g^2)(k_n^2 + k_g^2)}{2\left(k_n^2 + k_g^2\right)^{3/2}}$$

şeklinde olup, k_g, k_n ve τ_g sırasıyla β eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır.

İspat. $r = r(s,t)$ yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$E = \langle\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s}\rangle_L = \langle\vec{T}, \vec{T}\rangle_L = -1,$$

$$F = \langle\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial t}\rangle_L = \langle\vec{T}, -k_n\vec{g} + k_g\vec{n}\rangle_L = 0$$

ve

$$G = \langle\frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial t}\rangle_L = \langle -k_n\vec{g} + k_g\vec{n}, -k_n\vec{g} + k_g\vec{n}\rangle_L = k_g^2 + k_n^2$$

olarak bulunur. Buradan da

$$EG - F^2 = k_g^2 + k_n^2$$

elde edilir. O halde

$$\vec{r}_s \times_L \vec{r}_t = \begin{vmatrix} -\vec{T} & \vec{g} & \vec{n} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_n & k_g \end{vmatrix} = -k_g\vec{g} - k_n\vec{n}$$

ve

$$\| \vec{r}_s \times_L \vec{r}_t\| = \sqrt{\left|\langle -k_g\vec{g} - k_n\vec{n}, -k_g\vec{g} - k_n\vec{n}\rangle_L\right|} = \sqrt{k_g^2 + k_n^2}$$

olarak bulunur. Buradan da NLS yüzeyinin normal vektör alanı

$$\vec{Z} = \frac{-k_g\vec{g} - k_n\vec{n}}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}}$$

şeklinde yazılır. İkinci temel formun katsayıları da aşağıdaki şekilde bulunur;

$$e = \langle r_{ss}, \vec{Z}\rangle_L = \langle k_n\vec{n} + k_g\vec{g}, \frac{-k_g\vec{g}-k_n\vec{n}}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}\rangle_L = \frac{-k_g^2-k_n^2}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}} = -\sqrt{k_g^2 + k_n^2},$$

$$f = \langle r_{st}, \vec{Z}\rangle_L = \langle \alpha\vec{g} + \lambda\vec{n}, \frac{-k_g\vec{g}-k_n\vec{n}}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}\rangle_L = \frac{-\alpha k_g - \lambda k_n}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}} = \frac{-\tau_g\left(k_g^2+k_n^2\right)+k_g k_{n_s}-k_n k_{g_s}}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}$$

ve

$$g = \langle r_{tt}, \vec{Z}\rangle_L = \langle \left(-k_n\vec{g} + k_g\vec{n}\right)_t, \frac{-k_g\vec{g}-k_n\vec{n}}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \langle \left(k_g\lambda - k_n\alpha\right)\vec{T} + \left(-k_{n_t} + \gamma k_g\right)\vec{g} + \left(k_{g_t} - k_n\gamma\right)\vec{n}, \frac{-k_g\vec{g}-k_n\vec{n}}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}\rangle_L$$

$$= \frac{\gamma\left(k_n^2+k_g^2\right)-k_{g_t}k_n+k_{n_t}k_g}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}$$

$$= \frac{k_n k_{n_{ss}}+k_g k_{g_{ss}}+2\tau_g\left(k_g k_{n_s}-k_n k_{g_s}\right)-\tau_g^2\left(k_n^2+k_g^2\right)+k_n k_{g_t}-k_g k_{n_t}-k_{g_t}k_n+k_{n_t}k_g}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}$$

$$= \frac{k_n k_{n_{ss}}+k_g k_{g_{ss}}+2\tau_g\left(k_g k_{n_s}-k_n k_{g_s}\right)-\tau_g^2\left(k_n^2+k_g^2\right)}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}$$

şeklinde bulunur. Böylece, $r = r(s,t)$ yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$= \frac{-\left(k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\tau_g\left(k_g k_{n_s} - k_n k_{g_s}\right) - \tau_g^2\left(k_n^2+k_g^2\right)\right) - \frac{\left(-\tau_g\left(k_g^2+k_n^2\right)+k_g k_{n_s}-k_n k_{g_s}\right)^2}{k_n^2+k_g^2}}{-(k_n^2+k_g^2)}$$

$$= \frac{(k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}})\left(k_n^2+k_g^2\right)+\left(k_g k_{n_s}-k_n k_{g_s}\right)^2}{\left(k_n^2+k_g^2\right)^2}$$

ve

$$H = \frac{Eg+Ge-2Ff}{2(EG-F^2)}$$

$$= \frac{\frac{-k_n k_{n_{ss}} - k_g k_{g_{ss}} - 2\tau_g\left(k_g k_{n_s} - k_n k_{g_s}\right) + \tau_g^2\left(k_n^2+k_g^2\right) - \left(k_n^2+k_g^2\right)^2}{\sqrt{k_n^2+k_g^2}}}{-2\left(k_n^2+k_g^2\right)}$$

$$= \frac{k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\tau_g\left(k_g k_{n_s} - k_n k_{g_s}\right) + \left(-\tau_g^2 + k_n^2 + k_g^2\right)\left(k_n^2+k_g^2\right)}{2\left(k_n^2+k_g^2\right)^{3/2}}$$

olarak elde edilir.

2. Durum. NLS yüzeyinin s- parametre eğrisi spacelike eğri olsun. Bu durum için iki alt durum vardır. Birincisi Frenet $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ çatısının karakteri $(+,-,+)$ olabilir veya ikinci olarak Frenet $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ çatısının karakteri $(+,+,-)$ olabilir. Her iki durum için de bu durumda NLS yüzeyi timelike yüzey olup, yüzey üzerindeki Darboux $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ çatısının karakteri $(+,-,+)$ olarak ifade edilir ve Yay uzunluğu parametresine göre türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Ünlütürk ve Yılmaz, 2018).

Teorem 5.7. $r = r(s,t)$ timelike NLS yüzeyi olmak üzere her t_0 için $\beta(s) = r(s,t_0)$ birim hızlı spacelike eğri olsun. β eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{g}, \vec{n}\}$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \lambda \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \lambda & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix}.$$

Burada α, λ, γ düzgün fonksiyonları aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir:

$$\alpha = k_{n_s} - k_g\tau_g$$

$$\lambda = k_{g_s} + k_n\tau_g$$

$$\gamma = \frac{1}{k_g^2 + k_n^2}\left[-k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\left(k_g k_n \tau_g\right)_s + \tau_g^2\left(k_n^2 - k_g^2\right) + k_n k_{g_t} - k_g k_{n_t}\right].$$

İspat. 2. Durum için söz konusu iki alt durumda Frenet elemanlarının karakterleri değişse de, yüzey geometrisini belirleyen Darboux çatısı karakteri $(+,-,+)$ ortak olduğundan; ispatın tek bir durum için yapılması genel çözümü temsil etmek adına yeterlidir. Düzgün α, λ, γ fonksiyonları k_g, k_n, τ_g fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilmelidir. Uyum koşullarını kullanarak $\vec{T}_{ts} = \vec{T}_{st}$ olup

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}\right) \tag{5.14}$$

yazılır. Buradan da (5.14) eşitliğinin solundan;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial s}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(k_g\vec{g} + k_n\vec{n}\right)\\ &= \left(-k_g\alpha + k_n\lambda\right)\vec{T} + \left(\frac{\partial}{\partial t}k_g - k_n\gamma\right)\vec{g} + \left(k_g\gamma + \frac{\partial}{\partial t}k_n\right)\vec{n}\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan (5.14) eşitliğinin sağ tarafından;

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\alpha\vec{g} + \lambda\vec{n}\right)\\ &= \left(-\alpha k_g + \lambda k_n\right)\vec{T} + \left(\frac{\partial}{\partial s}\alpha - \lambda\tau_g\right)\vec{g} + \left(\alpha\tau_g + \frac{\partial}{\partial s}\lambda\right)\vec{n}\end{aligned}$$

olur. Katsayıların eşitliğinden;

$$\frac{\partial}{\partial t}k_g - k_n\gamma = \frac{\partial}{\partial s}\alpha - \lambda\tau_g$$

$$k_g\gamma + \frac{\partial}{\partial t}k_n = \alpha\tau_g + \frac{\partial}{\partial s}\lambda$$

elde edilir. Buradan da

$$\alpha_s = k_{g_t} - k_n\gamma + \lambda\tau_g \tag{5.15}$$

$$\lambda_s = k_{n_t} + k_g\gamma - \alpha\tau_g \tag{5.16}$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde $\vec{g}_{ts} = \vec{g}_{st}$ eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right) \tag{5.17}$$

yazılır. (5.17) eşitliğinin sol tarafından;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{n}\right)$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial t}k_g + \tau_g\lambda\right)\vec{T} + \left(-k_g\alpha - \tau_g\gamma\right)\vec{g} + \left(-k_g\lambda + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g\right)\vec{n}$$

elde edilir. Diğer yandan (5.17) eşitliğinin sağ tarafından;

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(-\alpha\vec{T} + \gamma\vec{n}\right)$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial s}\alpha + \gamma k_n\right)\vec{T} + \left(-\alpha k_g - \gamma\tau_g\right)\vec{g} + \left(-\alpha k_n + \frac{\partial}{\partial s}\gamma\right)\vec{n}$$

bulunur. Katsayıların eşitliğini kullanırsak

$$-k_g\lambda + \frac{\partial}{\partial t}\tau_g = -\alpha k_n + \frac{\partial}{\partial s}\gamma$$

olur. Buradan da

$$\gamma_s = \tau_{g_t} - k_g\lambda + \alpha k_n$$

elde edilir. Benzer şekilde $\vec{n}_{ts} = \vec{n}_{st}$ eşitliğinden faydalanarak aynı eşitlikler elde edilir. Son olarak $r_{st} = r_{st}$ eşitliğinden;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \alpha\vec{g} + \lambda\vec{n}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(r_s \times_L r_{ss}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(k_n\vec{n} + k_g\vec{g}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial k_n}{\partial s} - k_g\tau_g\right)\vec{g} + \left(\frac{\partial k_g}{\partial s} + k_n\tau_g\right)\vec{n}$$

olur. Sonuçta α ve λ fonksiyonları sırasıyla

$$\alpha = k_{n_s} - k_g\tau_g$$

$$\lambda = k_{g_s} + k_n\tau_g$$

olarak bulunur. Bulunan (5.15) ve (5.16) eşitliklerinden

$$-\alpha_s k_n = -k_n k_{g_t} - k_n \tau_g \lambda + k_n^2 \gamma$$

$$\lambda_s k_g = k_g k_{n_t} - k_g \tau_g \alpha + k_g^2 \gamma$$

denklemleri yazılıp bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\gamma\left(k_g^2 + k_n^2\right) = -k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\left(k_g k_n \tau_g\right)_s + \tau_g^2\left(k_n^2 - k_g^2\right) + k_n k_{g_t} - k_g k_{n_t}$$

eşitliğinden γ fonksiyonu

$$\gamma = \frac{1}{k_g^2 + k_n^2}\left[-k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\left(k_g k_n \tau_g\right)_s + \tau_g^2\left(k_n^2 - k_g^2\right) + k_n k_{g_t} - k_g k_{n_t}\right]$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.8. $r = r(s,t)$ timelike NLS yüzeyi olmak üzere her t_0 için $\beta(s) = r(s,t_0)$ birim hızlı spacelike eğri olsun. NLS yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla

$$K = \frac{\left(k_g^2 - k_n^2\right)\left[2k_{g_t}k_n - 2k_{n_t}k_g - k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2k_g k_n \tau_{g_s}\right] + 4k_g k_n \tau_g\left(k_g k_{g_s} - k_n k_{n_s}\right) + \left(k_n k_{g_s} - k_g k_{n_s} + \tau_g\left(k_n^2 + k_g^2\right)\right)^2}{\left(k_g^2 - k_n^2\right)^2}$$

ve

$$H = \frac{2k_{g_t}k_n - 2k_{n_t}k_g - k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\left(k_g k_n \tau_g\right)_s + \left(\tau_g^2 - k_n^2 + k_g^2\right)\left(k_n^2 - k_g^2\right)}{-2\left(k_g^2 - k_n^2\right)^{3/2}}$$

olarak ifade edilir. Burada k_g, k_n ve τ_g sırasıyla β eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır.

İspat. $r = r(s,t)$ yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$E = \langle \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s} \rangle_L = \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle_L = 1,$$

$$F = \langle \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial t} \rangle_L = \langle \vec{T}, k_n \vec{g} + k_g \vec{n} \rangle_L = 0$$

ve

$$G = \langle \frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial t} \rangle_L = \langle k_n \vec{g} + k_g \vec{n}, k_n \vec{g} + k_g \vec{n} \rangle_L = k_g^2 - k_n^2$$

olarak bulunur. Buradan

$$EG - F^2 = k_g^2 - k_n^2$$

elde edilir. O halde

$$\vec{r}_s \times_L \vec{r}_t = \begin{vmatrix} \vec{T} & -\vec{g} & \vec{n} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_n & k_g \end{vmatrix} = k_g\vec{g} + k_n\vec{n}$$

ve

$$\| \vec{r}_s \times_L \vec{r}_t\| = \sqrt{\left|\langle k_g\vec{g} + k_n\vec{n}, k_g\vec{g} + k_n\vec{n}\rangle_L\right|} = \sqrt{\left|k_n^2 - k_g^2\right|} = \sqrt{k_n^2 - k_g^2}$$

olarak bulunur. Buradan da

$$\vec{Z} = \frac{k_g\vec{g} + k_n\vec{n}}{\sqrt{k_n^2 - k_g^2}}$$

şeklinde bulunur. İkinci temel formun katsayıları da aşağıdaki şekilde bulunur;

$$e = \langle r_{ss}, \vec{Z}\rangle_L = \langle k_g\vec{g} + k_n\vec{n}, \frac{k_g\vec{g}+k_n\vec{n}}{\sqrt{k_n^2-k_g^2}}\rangle_L = \sqrt{k_n^2 - k_g^2},$$

$$f = \langle r_{st}, \vec{Z}\rangle_L = \langle \alpha\vec{g} + \lambda\vec{n}, \frac{k_g\vec{g}+k_n\vec{n}}{\sqrt{k_n^2-k_g^2}}\rangle_L = \frac{k_n k_{g_s} - k_g k_{n_s} + \tau_g\left(k_n^2+k_g^2\right)}{\sqrt{k_n^2-k_g^2}}$$

ve

$$g = \langle r_{tt}, \vec{Z}\rangle_L = \langle \left(k_n\vec{g} + k_g\vec{n}\right)_t, \frac{k_g\vec{g}+k_n\vec{n}}{\sqrt{k_n^2-k_g^2}}\rangle_L$$

$$= \frac{k_{g_t}k_n - k_{n_t}k_g + \gamma\left(k_n^2+k_g^2\right)}{\sqrt{k_n^2-k_g^2}}$$

$$= \frac{2k_{g_t}k_n - 2k_{n_t}k_g - k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\left(k_g k_n \tau_g\right)_s + \tau_g^2\left(k_n^2-k_g^2\right)}{\sqrt{k_n^2-k_g^2}}$$

şeklinde bulunur. Böylece, $r = r(s,t)$ yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sırasıyla

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$= \frac{2k_{g_t}k_n - 2k_{n_t}k_g - k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\left(k_g k_n \tau_g\right)_s + \tau_g^2\left(k_n^2-k_g^2\right) - \frac{\left(k_n k_{g_s} - k_g k_{n_s} + \tau_g\left(k_n^2+k_g^2\right)\right)^2}{k_n^2-k_g^2}}{k_g^2-k_n^2}$$

$$= \frac{\left(k_g^2-k_n^2\right)\left[2k_{g_t}k_n - 2k_{n_t}k_g - k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2\left(k_g k_n \tau_g\right)_s + \tau_g^2\left(k_n^2-k_g^2\right)\right] + \left(k_n k_{g_s} - k_g k_{n_s} + \tau_g\left(k_n^2+k_g^2\right)\right)^2}{\left(k_g^2-k_n^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(k_g^2-k_n^2\right)\left[2k_{g_t}k_n - 2k_{n_t}k_g - k_n k_{n_{ss}} + k_g k_{g_{ss}} + 2k_g k_n \tau_{g_s}\right] + 4k_g k_n \tau_g\left(k_g k_{g_s} - k_n k_{n_s}\right) + \left(k_n k_{g_s} - k_g k_{n_s} + \tau_g\left(k_n^2+k_g^2\right)\right)^2}{\left(k_g^2-k_n^2\right)^2}$$

ve

$$H = \frac{Eg+Ge-2Ff}{2(EG-F^2)}$$

$$= \frac{\frac{2k_{g_t}k_n-2k_{n_t}k_g-k_nk_{n_{ss}}+k_gk_{g_{ss}}+2(k_gk_n\tau_g)_s+\tau_g^2\left(k_n^2-k_g^2\right)}{\sqrt{k_n^2-k_g^2}}+\left(k_g^2-k_n^2\right)\sqrt{k_n^2-k_g^2}-0}{2\left(k_g^2-k_n^2\right)}$$

$$= \frac{2k_{g_t}k_n-2k_{n_t}k_g-k_nk_{n_{ss}}+k_gk_{g_{ss}}+2\left(k_gk_n\tau_g\right)_s+\tau_g^2\left(k_n^2-k_g^2\right)-\left(k_n^2-k_g^2\right)^2}{-2\left(k_g^2-k_n^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{2k_{g_t}k_n-2k_{n_t}k_g-k_nk_{n_{ss}}+k_gk_{g_{ss}}+2\left(k_gk_n\tau_g\right)_s+\left(\tau_g^2-k_n^2+k_g^2\right)\left(k_n^2-k_g^2\right)}{-2\left(k_g^2-k_n^2\right)^{3/2}}$$

şeklindedir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, Lorentz uzayında doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi, diferansiyel geometrik yöntemler kullanılarak kapsamlı bir biçimde incelenmiştir. Çalışmanın temel amacı doğrultusunda, doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin geometrik yapısı ortaya konulmuş; denklemin çözümleri ile eğriler ve yüzeylerin geometrik özellikleri arasındaki ilişkiler detaylı olarak analiz edilmiştir. Bu yaklaşım sayesinde, NLS denklemi yalnızca analitik bir diferansiyel denklem olarak değil, aynı zamanda geometrik bir yapı olarak ele alınmıştır.

Tez kapsamında öncelikle, diferansiyel geometriye ait temel kavramlar sistematik bir biçimde sunulmuş ve bu kavramların doğrusal olmayan Schrödinger denklemiyle olan ilişkisi açıklanmıştır. Özellikle eğrilerin parametrizasyonu, geometrik çatıları ve diferansiyel geometrik değişmezleri üzerinde durularak, ilerleyen bölümlerde gerçekleştirilen analizler için sağlam bir kuramsal altyapı oluşturulmuştur. Bu altyapı, NLS denkleminin geometrik yorumunun daha net ve tutarlı bir biçimde yapılmasına olanak sağlamıştır.

Çalışmanın ana kısmında, doğrusal olmayan Schrödinger denklemi Lorentz uzayı çerçevesinde ele alınmış ve Lorentz geometrisinin kendine özgü metrik yapısının denklemin çözüm davranışları üzerindeki etkileri incelenmiştir. Timelike ve spacelike geometrik yapıların, NLS denklemi ile ilişkili eğriler ve yüzeyler üzerindeki yansımaları ortaya konulmuştur. Elde edilen bulgular, Lorentz uzayında NLS denkleminin Öklid uzayına kıyasla farklı ve daha zengin geometrik özellikler sergilediğini göstermektedir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar, doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ile diferansiyel geometri arasındaki güçlü etkileşimi bir kez daha ortaya koymuştur. Özellikle soliton çözümlerinin geometrik karşılıklarının Lorentz uzayında incelenmesi, integrallenebilir sistemler kuramı açısından önemli çıkarımlar sunmaktadır. Böylece çalışma, doğrusal olmayan diferansiyel denklemler ile geometrik yöntemlerin birlikte kullanılmasının hem matematiksel hem de fiziksel problemlerin daha derinlemesine anlaşılmasına katkı sağladığını göstermektedir.

6.2 Öneriler

Bu tez çalışması kapsamında elde edilen sonuçlar doğrultusunda, ileride yapılabilecek çalışmalar için aşağıdaki öneriler sunulabilir:

1. Bu çalışmada ele alınan doğrusal olmayan Schrödinger denklemi, farklı türde değişken katsayılı veya yüksek mertebeden NLS denklemlerine genellenerek Lorentz uzayında incelenebilir. Bu tür genellemeler, daha karmaşık fiziksel modellerin geometrik açıdan analiz edilmesine olanak sağlayacaktır.

2. Lorentz uzayında elde edilen geometrik sonuçların, fiziksel modellerle (özellikle relativistik kuantum sistemleri ve optik uygulamalar) ilişkilendirilmesi, bu denklemlerin fiziksel anlamının daha da derinleştirilmesini sağlayabilir.

3. Soliton yüzeylerinin geometrik özellikleri, daha yüksek boyutlu Lorentz uzaylarında veya farklı metrik yapılarına sahip yarı-Riemann uzaylarda incelenerek, geometrik yöntemlerin genellenebilirliği araştırılabilir.

Sonuç olarak, bu tez çalışması doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin Lorentz uzayında diferansiyel geometrik açıdan incelenmesine yönelik önemli bir adım olup, ileride yapılacak teorik ve uygulamalı çalışmalar için güçlü bir temel oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

Abdel-Aziz, H. S., Serry, H. M., El-Adawy, F. M., ve Khalifa Saad, M. (2024). Geometry and evolution of Hasimoto surface in Minkowski 3-space. *PLoS ONE*, *19*(1). https://doi.org/10.1371/journal.pone.0294310

Alkahtani, B. S. T. (2024). Propagation of wave insights to the chiral Schrödinger equation along with bifurcation analysis and diverse optical soliton solutions. *Scientific Reports*, *14*, 22650. https://doi.org/10.1038/s41598-024-72132-5

Çimdiker Aslan, M. (2025). Spacelike curves on lightlike NLS surfaces using generalized Darboux triads. *Journal of New Theory*, *53*, 1-13. https://doi.org/10.53570/jnt.1745842

Erdoğdu, M., ve Özdemir, M. (2014). Geometry of Hasimoto surfaces in Minkowski 3-space. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, *17*, 169-181. https://doi.org/10.1007/s11040-014-9148-3

Erdoğdu, M., ve Yavuz, A. (2021). Differential geometric aspects of Nonlinear Schrödinger Equation. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, *70*(1), 510-521. https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.724634

Gümüş, H., ve Yılmaz, H. (2019). Nonlineer schrödinger denkleminin tam çözümleri. *Türkiye Teknoloji ve Uygulamalı Bilimler Dergisi*, *2*(1), 11-19.

Gürbüz, N. (2010). Intrinstic geometry of NLS equation and heat system in 3-dimensional minkowski space, *Adv. Stud. Theor. Physics*, *4* (11), 557-564.

Hasimoto, H. (1972). A soliton on a vortex filament. *Journal of Fluid Mechanics*, *51*(3), 477-485. https://doi.org/10.1017/S0022112072002307

Hamouda, E., Moaaz, O., Cesarano, C., Askar, S., ve Elsharkawy, A. (2022). Geometry of solutions of the quasi-vortex filament equation in Euclidean 3-space E3. *Mathematics*, *10*(6), 891. https://doi.org/10.3390/math10060891

İmanlı, M. I. (2006). *Homojen uzaylarda lineer olmayan Schrödinger denklemleri* [Yüksek Lisans Tezi]. Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kelleci, A., Bektaş, M., ve Ergüt, M. (2019). The Hasimoto surface according to bishop frame. *Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, *9*(1), 13-22.

Li, C., (2024). Precise solution and chaos analysis of a higher-order nonlinear Schrödinger equation in the critical point of surface gravity wave mechanics. *Pramana – J. Phys*, *98*, 167. https://doi.org/10.1007/s12043-024-02853-9

Liu, W. M., ve Kengne, E. (2019). *Schrödinger equations in nonlinear systems*. Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-6581-2

Lopez, R. (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electronic Journal of Geometry*, *7*(1), 44-107.

Özdemir, M. (2020). *Diferansiyel geometri*. Altın Nokta Yayınevi.

Öztürk, U., ve Mahmood, G. A. M. (2024). Darboux associate curves of spacelike curves in $\mathbb{E}_1^3$. *Journal of Science and Arts*, *24*(1), 173-184.

Panmei, M., ve Thoudam, R. (2024). A local differential quadrature method for the generalized nonlinear Schrödinger (GNLS) equation. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, *14*(4), 394-403. http://doi.org/10.11121/ijocta.1546

Rogers, C., ve Schief, W. K. (2002). Bäcklund and Darboux transformations: Geometry of modern applications in soliton theory. *Cambridge University Press*, https://doi.org/10. 1017/CBO9780511606359

Rogers, C., ve Schief, W. K. (1998). Intrinsic geometry of the NLS equation and its auto-Bäcklund transformation. *Studies in Applied Mathematics*, *101*, 267-287. https://doi.org/10.1111/1467-9590.00093

Sabuncuoğlu, A. (2016). *Diferensiyel geometri*. Nobel Akademik Yayıncılık.

Schief, W. K., ve Rogers, C. (1999). Binormal motion of curves of constant curvature and torsion. Generation of soliton surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *455*, 3163-3188.

Şaylan, P. (2022). *Lineer olmayan ikili Schrödinger ve lineer olmayan güçlü ikili Schrödinger denklemlerinin yapı koruyan sayısal yöntemlerle çözümü* [Yüksek Lisans Tezi]. İstanbul Kültür Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü.

Şentürk, G. Y., ve Yüce, S. (2020). On ruled non-degenerate surfaces with Darboux frame in Minkowski 3-space. *TWMS J. App. and Eng. Mathematics*, *10*(2), 499-511.

Tian, G., ve Meng, X. (2024). Exact solutions to fractional Schrödinger–Hirota equation using auxiliary equation method. *Axioms*, *13*(10), 663. https://doi.org/10.3390/axioms13100663

Turgut, A. (1995). *3 boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler* [Doktora Tezi]. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Ünlütürk, Y., ve Yılmaz, S. (2018). New characterizations of spacelike curves on timelike surfaces through the link of specific frames. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, *8*(1.1), 330-340.

Walrave, J. (1995). *Curves and surfaces in Minkowski spaces* [Doktora Tezi]. K. U. Leuven Faculteit Der Wetenschappen.

Wang, H., Chen, H., ve Li, T. (2024). Numerical simulation for the wave of the variable coefficient nonlinear Schrödinger equation based on the lattice boltzmann method. *Mathematics*, *12*(23), 3807. https://doi.org/10.3390/math12233807

Yoon, D. W., Küçükarslan Yüzbası, Z., ve Cavlak Aslan, E. (2022). Evolution of space-like curves and special time-like ruled surfaces in the Minkowski space. *Indian J Phys*, *96*(4), 995–999. https://doi.org/10.1007/s12648-021-02021-4

Yüce, S. (2017). *Öklid uzayında diferansiyel geometri*. Pegem Akademi.

Zhang, Y., Li, B., ve Fei, M. (2024). Linearly implicit conservative schemes for the nonlocal Schrödinger equation. *Mathematics*, *12*(21), 3339. https://doi.org/10.3390/math12213339