T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LIPSCHITZ OPERATÖR SINIFLARI VE ÖZELLİKLERİ

Ramazan İNAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2023
KONYA

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI LIPSCHITZ OPERATÖR SINIFLARI VE ÖZELLİKLERİ

Ramazan İNAL

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN ÇOPUR

2023, 62 Sayfa

Jüri
Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN ÇOPUR
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU
Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN

Bu tez çalışmasında, zayıf p −kompakt ve şartsız p −kompakt küme kavramlarıyla ilişkili Lipschitz operatörlerin sınıfları üzerinde çalışılmıştır. Tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konu ile ilgili kaynak araştırması, tezin amacı ve yöntemi verilmiştir. İkinci bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan ve tezin temelini oluşturan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, kompakt ve p −kompakt kümelerle ilişkili Lipschitz operatörlerin sınıfları ve bu sınıflar üzerine literatürde mevcut olan bazı sonuçlar verilmiştir. Aynı zamanda, sınırlı lineer operatörler ve Lipschitz operatörler için majorizasyon kavramlarına ve bu kavramlar üzerine literatürde mevcut olan sonuçlara değinilmiştir. Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilen sonuçlar, zayıf p −kompakt ve şartsız p −kompakt kümeler için ele alınarak bazı sonuçlar elde edilmiş, bu sonuçlar majorizasyon kavramları ile ilişkilendirilmiştir. Beşinci bölümde bu çalışmadan elde edilen sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lipschitz kompakt operatör, Lipschitz p −kompakt operatör, Lipschitz zayıf p −kompakt operatör, Lipschitz şartsız p −kompakt operatör, majorizasyon.

ABSTRACT

MS THESIS

SOME LIPSCHITZ OPERATOR CLASSES AND THEIR PROPERTIES

Ramazan İNAL

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Ayşegül KETEN ÇOPUR

2023, 62 Pages

Jury
Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN ÇOPUR
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU
Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN

In this thesis, the classes of Lipschitz operators associated with the concepts of weakly p −compact and unconditionally p −compact sets are studied. The thesis consists of five chapters. In the first chapter, the source research on the subject, the aim and method of the thesis are given. In the second chapter, the basic concepts that will be used throughout the study and that form the basis of the thesis are given. In the third chapter, some classes of Lipschitz operators associated with compact and p −compact sets and some results existing in the literature on these classes are given. At the same time, the concepts of majorization for bounded linear operators and Lipschitz operators and some results existing in the literature on these concepts are given. In the fourth chapter, the results given in the third chapter are considered for weakly p −compact and unconditionally p −compact sets, and some results are obtained, and these results obtained are associated with the majorization concepts. In the fifth chapter, the results obtained from this study and recommendations are given.

Keywords: Lipschitz compact operator, Lipschitz p-compact operator, Lipschitz weakly p −compact operator, Lipschitz unconditionally p −compact operator, majorization.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN ÇOPUR yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'na Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren, ilgi ve önerilerini göstermekten kaçınmayan değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN ÇOPUR'a, jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN'a ve Sayın Doç. Dr. Melek ERDOĞDU'ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım

Hayatım boyunca bana destek olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ramazan İNAL
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET .... **iv**

ABSTRACT .... **v**

ÖNSÖZ .... **vi**

İÇİNDEKİLER .... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR .... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Kaynak Araştırması 1
1.2. Tezin Amacı ve Yöntemi 2

2. TEMEL KAVRAMLAR **4**

2.1. Temel Kavramlar ve Notasyonlar 4
2.2. Banach Uzaylarında Kompakt Küme ve Bazı Versiyonları 11
2.3. Banach Uzaylarında Kompakt Lineer Operatörler ve Bazı Versiyonları 13
2.4. Lipschitz Operatörler ve İlgili Bazı Kavramlar 17

3. KOMPAKT VE p −KOMPAKT KÜMELERLE İLİŞKİLİ LIPSCHITZ OPERATÖRLER **21**

3.1. Lipschitz Kompakt (Lipschitz Zayıf Kompakt) Operatör ve Bazı Özellikleri 23
3.2. Lipschitz p −Kompakt Operatör ve Karakterizasyonları 27
3.3. Lipschitz Serbest p −Kompakt Operatörler 29
3.4. Sınırlı Lineer Operatörler ve Lipschitz Operatörler İçin Majorizasyon Kavramları ve Özellikleri 31

4. ZAYIF p − KOMPAKT VE ŞARTSIZ p −KOMPAKT KÜMELERLE İLİŞKİLİ LIPSCHITZ OPERATÖRLER **34**

4.1. Lipschitz Zayıf p −Kompat Operatörler ve İlişkili Bazı Özellikler 34
4.2. Lipschitz Şartsız p −Kompat Operatörler ve İlişkili Bazı Özellikler 42
4.3. Lipschitz Serbest Zayıf p −Kompakt ve Lipschitz Serbest Şartsız p −Kompakt Operatörler 48
4.4. Majorizasyonlar Kullanılarak Lipschitz Operatörler İçin Elde Edilen Bazı Sonuçlar 53

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **58**

5.1 Sonuçlar 58
5.2. Öneriler 59

KAYNAKLAR **60**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) Cisim uzayı
d	Metrik fonksiyonu
$\|.\|_X$	X vektör uzayı üzerindeki norm fonksiyonu
$Lip(f)$	f operatörünün Lipschitz sayısı
$Lip_0(X,E)$	X noktalı metrik uzayından E normu uzayına tanımlanan (sıfırı sıfıra götüren) bütün Lipschitz operatörlerin sınıfı
$Lip_0^{\mathcal{K}}(X,E)$	$Lip_0(X,E)$ sınıfının tüm Lipschitz kompakt operatörlerinin alt kümesi
$Lip_0^{W}(X,E)$	$Lip_0(X,E)$ sınıfının tüm Lipschitz zayıf kompakt operatörlerinin alt kümesi
$Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X,E)$	$Lip_0(X,E)$ sınıfının tüm Lipschitz $p-$kompakt operatörlerinin alt kümesi
$Lip_0^{W_p}(X,E)$	$Lip_0(X,E)$ sınıfının tüm Lipschitz zayıf $p-$kompakt operatörlerinin alt kümesi
$Lip_0^{up}(X,E)$	$Lip_0(X,E)$ sınıfının tüm Lipschitz şartsız $p-$kompakt operatörlerinin alt kümesi
$Lip_0(X,Y)$	X noktalı metrik uzayında Y noktalı metrik uzayına tanımlanan (sıfırı sıfıra götüren) bütün Lipschitz operatörlerin sınıfı
$\mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X,Y)$	$Lip_0(X,Y)$ sınıfının tüm Lipschitz serbest $p-$kompakt operatörlerinin alt kümesi

$\mathcal{F}Lip_0^{W_p}(X,Y)$	$Lip_0(X,Y)$ sınıfının tüm Lipschitz serbest zayıf p −kompakt operatörlerinin alt kümesi
$\mathcal{F}Lip_0^{up}(X,Y)$	$Lip_0(X,Y)$ sınıfının tüm Lipschitz serbest şartsız p −kompakt operatörlerinin alt kümesi
$\mathcal{L}(E,F)$	E normlu uzayından F normlu uzayına tanımlanan tüm lineer operatörlerin vektör uzayı
$\mathcal{B}(E,F)$	E normlu uzayından F normlu uzayına tanımlanan tüm sınırlı lineer operatörlerin vektör uzayı
$\mathcal{K}(E,F)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm kompakt lineer operatörlerinin alt vektör uzayı
$\mathcal{K}_p(E,F)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm p −kompakt lineer operatörlerinin alt vektör uzayı
$\mathcal{K}_{up}(E,F)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm şartsız p −kompakt lineer operatörlerinin alt vektör uzayı
$W(E,F)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm zayıf kompakt lineer operatörlerinin alt vektör uzayı
$W_p(E,F)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm zayıf p −kompakt lineer operatörlerinin alt vektör uzayı
E^*	E normlu uzayının topolojik duali
$X^\#$	X noktalı metrik uzayının Lipschitz duali
$\mathcal{N}_p(E,F)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm p −nükleer operatörlerinin alt vektör uzayı
$\mathcal{N}_{up}(X,E)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm şartsız p −nükleer operatörlerinin alt vektör uzayı
$\mathcal{N}_p^Q(X,E)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm yarı p −nükleer operatörlerinin alt vektör uzayı
$\mathcal{N}_{up}^Q(X,E)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm yarı şartsız p −nükleer operatörlerinin alt vektör uzayı
$\mathcal{N}_{W_p}^Q(X,E)$	$\mathcal{L}(E,F)$ sınıfının tüm yarı zayıf p −nükleer operatörlerinin alt vektör uzayı

f^t	$f \in Lip_0(X, E)$ operatörünün Lipschitz transpozu
$\mathcal{F}(X)$	X noktalı metrik uzayının Lipschitz serbest Banach uzayı
$co(A)$	A kümesinin konveks gereni
$\overline{abco}(A)$	A kümesinin kapalı konveks dengeli gereni
$\mathrm{span}(A)$	A kümesinin lineer gereni

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Araştırması

Sınırlı lineer operatörlerin farklı türlerinin Lipschitz versiyonları son yıllarda birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Farmer ve Johnson (2009), lineer $p-$toplamsal operatörlerin lineer olmayan bir versiyonu olarak Lipschitz $p-$toplamsal operatörleri tanımlamış, Lipschitz $p-$toplamsal operatörler için Pietsch çarpanlara ayırma teoremini ispat etmiş ve lineer bir operatörün Lipschitz $p-$toplamsal normu ile $p-$toplamsal normunun aynı olduğunu göstermişlerdir. Bu çalışmanın ardından sınırlı lineer operatörlerin farklı sınıflarını Lipschitz bağlamında genişletmek amacıyla birçok çalışma yapılmıştır.

Chen ve Zheng (2011), Farmer-Johnson çarpanlara ayırma teoremini kullanarak Maurey'in ekstrapolasyon teoreminin lineer olmayan bir versiyonunu vermiş ve Grothendieck teoreminin lineer olmayan formunu da bir sonuç olarak elde etmişlerdir. Ayrıca, sonraki çalışmalarında Chen ve Zheng (2012), Lipschitz $p-$nükleer, kuvvetli Lipschitz $p-$nükleer ve kuvvetli Lipschitz $p-$integral operatörleri tanımlamış ve bu operatörler üzerine çalışmışlardır.

Jiménez-Vargas ve ark. (2014), Lipschitz kompakt, Lipschitz zayıf kompakt, Lipschitz sonlu ranklı ve Lipschitz yaklaşılabilir operatör kavramlarını tanımlamışlardır. X noktalı metrik uzayı üzerinde tanımlanan her Lipschitz operatörün, lineer bir genişlemesinin olduğunu göstermeye yarayan $\mathcal{F}(X)$ serbest Banach uzayı kavramı, Pestov (1986) tarafından tanımlanmıştır. Lipschitz operatörlerin lineerleşmesini sağlayan bu yöntem, Banach uzayı teorisinin metotlarını Lipschitz operatörlere uygulamaya olanak sağlamıştır. Jiménez-Vargas ve ark. (2014), bu lineerleşme vasıtasıyla, tanımladıkları Lipschitz operatörler için bazı karakterizasyonlar elde etmişlerdir. Ayrıca noktalı bir X metrik uzayından bir E Banach uzayına tanımlanan her kuvvetli Lipschitz $p-$nükleer operatörün Lipschitz kompakt olduğunu ve her kuvvetli Lipschitz $p-$integral operatörün de Lipschitz zayıf kompakt operatör olduğunu göstermişlerdir.

Grothendieck 1955 yılında, Banach uzayları teorisinin iyi bilinen bir sonucu olan kompaktlık prensibini vermiştir. Grothendieck bu prensip ile Banach uzayında bir kümenin kompakt olması için gerek ve yeter şartları elde ederek, topolojide önemli bir kavram olan kompaktlık kavramının, geometrik olarak incelenebileceğini etkili bir şekilde göstermiştir. Sinha ve Karn (2002), Grothendieck'in kompaktlık prensibinden esinlenerek, Banach uzaylarında p −kompakt (zayıf p −kompakt) küme kavramını ve bu kavram ile ilişkili olarak, p −kompakt (zayıf p −kompakt) lineer operatör kavramını tanımlamış ve çalışmışlardır. Daha sonra bu kümelerin modifikasyonları olarak, şartsız p −kompakt küme (Kim, 2014), Grothendieck p −kompakt (Kim, 2013) küme gibi farklı küme türleri tanımlanmış ve tüm bu kümelerle ilişkilendirilen lineer operatörler ve yaklaşım özellikleri pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Örneğin; Delgado ve ark. (2010), Galicer ve ark. (2012), Kim (2014), Kim (2020) ve benzeri birçok çalışmadan bahsedilebilir.

Son yıllarda p −kompakt kümeler ve p −kompakt operatörler üzerine çalışmalar yalnızca lineer durumda değil, aynı zamanda lineer olmayan durumda da birçok matematikçi tarafından çalışılmaya başlanmıştır.

Achour ve ark. (2019), Sinha ve Karn'nın (2002) lineer p −kompakt operatör kavramının doğal bir genişlemesi olarak Lipschitz p −kompakt operatör kavramını tanımlanmışlar ve lineer durumdaki bazı özellikleri Lipschitz durumu için ele almışlardır. Aynı zamanda, Lipschitz serbest p −kompakt operatör ve Lipschitz lokal olarak p −kompakt operatör kavramlarını tanımlamış ve bu kavramları birbirleriyle kıyaslayarak farklı özelliklerini elde etmişlerdir.

Barnes (2004), sınırlı lineer operatörlerin; görüntü kümeleri, çarpanlara ayrılması ve majorizasyonu kavramları arasındaki ilişkileri inceleyerek bazı karakterizasyonlar elde etmiştir. Sahraoui (2021) tez çalışmasında, sınırlı lineer operatörlerin majorizasyon kavramını Lipschitz operatör durumu için tanımlamış ve Barnes'ın (2004) çalışmasındaki sonuçların bazılarını Lipschitz durumu için elde etmiştir.

Literatürde, Lipschitz operatörlerin pek çok sınıfı ve bu sınıflara ait bazı özellikler, Lipschitz operatörlerin idealleri ve yaklaşım özellikleri gibi pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür. Bu operatör sınıflarının çoğu, lineer operatörlerin lineer olmayan bir genişlemesi olması açısından önemlidir.

1.2. Tezin Amacı ve Yöntemi

Bu tez çalışmasında, Jiménez-Vargas ve ark.nın (2014) kompakt kümeler (zayıf kompakt kümeler) ile ilişkili olarak tanımladığı, Achour ve ark.nın (2019) p −kompakt kümeler ile ilişkili olarak tanımladığı Lipschitz operatörleri, zayıf p −kompakt ve şartsız

p −kompakt kümeler ile ilişkili olarak tanımlamak ve tanımlanan bu Lipschitz operatör sınıfları için onların elde ettiği bazı sonuçların benzer versiyonlarını elde etmek, elde edilen sonuçları majorizasyon kavramı ile ilişkilendirmek amaçlanmıştır.

Bu amaçlara ulaşmak için, Kim'in (2014 ve 2017) lineer şartsız p −kompakt operatörler ve Kim'in (2019 ve 2020) lineer zayıf p −kompakt operatörler üzerine yapmış olduğu çalışmalardan elde ettiği sonuçlar temel olarak kullanılmıştır. Elde edilen sonuçları majorizasyon kavramı ile ilişkilendirmek için ise, Barnes'ın (2004) ve Sahraoui'nin (2021) majorizasyon kavramlarından ve sonuçlarından faydalanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan notasyonlar, temel tanımlar ve teoremlerden oluşan ön bilgilere yer verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar ve Notasyonlar

Çalışma boyunca $\mathbb{R}$ (reel sayılar) veya $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) cismi, $\mathbb{K}$ notasyonu ile gösterilecektir. Bir E normlu uzayı için S_E ve B_E notasyonları, sırasıyla, E nin birim küresini ve kapalı birim yuvarını, I_E notasyonu ise E üzerinde tanımlanan birim operatörü gösterecektir. Bir $x_0 \in E$ ve $r > 0$ sayısı için $B_r(x_0)$ kümesi, x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvarı belirtecektir.

Tanım 2.1.1 (Metrik Uzay) X boştan farklı bir küme olmak üzere $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

(i) $d(x,y) = 0$ dır ancak ve ancak $x = y$ dir.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri özelliği)

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği özelliği)

koşullarını sağlarsa d fonksiyonuna bir metrik, (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.1.2 (Noktalı Metrik Uzay) X bir metrik uzay ve e_X, X de baz noktası olsun. (X, e_X) ikilisi noktalı metrik uzay olarak adlandırılır (bkz. Weaver, 1999).

Tanım 2.1.3 (Normlu Uzay) E, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. E üzerinde norm fonksiyonu, her $x, y \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ skaleri için

(i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0$ dır ancak ve ancak $x = 0$ dır.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (mutlak homojenlik özelliği)

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği özelliği) koşullarını sağlayan $\|\,.\,\|: E \to \mathbb{R}$ (reel değerli) fonksiyon olarak tanımlanır. $(E, \|\,.\,\|)$ sıralı ikilisine normlu uzay veya normlu vektör uzayı denir (bkz. Megginson, 1998).

Çalışma boyunca bir E normlu uzayı ile $(E, \|.\|)$ ikilisi kastedilecektir.

Tanım 2.1.4 (Normdan İndirgenen Metrik) E normlu bir uzay olsun. Bu takdirde $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $d(x, y) := \|x - y\|$ fonksiyonu E üzerinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe normdan indirgenen (üretilen) metrik denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.1.5 (Normlu Uzayda Cauchy Dizisi ve Yakınsaklık) E normlu bir uzay, $(x_n)_n$, E de bir dizi ve $x \in E$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall n, m > n_\varepsilon$ iken $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $(x_n)_n$ dizisine E de bir Cauchy dizisidir denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall n > n_\varepsilon$ iken $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $(x_n)_n$ dizisi E de x vektörüne yakınsaktır denir (bkz. Kreyzsig, 1978).

Tanım 2.1.6 (Banach Uzayı) E normlu bir uzay olsun. Eğer E uzayından alınan her Cauchy dizisi (normdan indirgenen metriğe göre) E uzayında bir x vektörüne yakınsak ise E normlu uzayı Banach uzayı olarak adlandırılır (bkz. Megginson, 1998).

Örnek 2.1.1 Her $x \in \mathbb{K}$ için $\|x\| := |x|$ şeklinde tanımlanan fonksiyon, $\mathbb{K}$ üzerinde bir norm olup, bu norma göre $\mathbb{K}$ cisim uzayı bir Banach uzayıdır (bkz. Megginson, 1998).

Şimdi çalışma için gerekli olan bazı dizi uzaylarının tanımları verilecektir.

Tanım 2.1.7 (Cisim Uzayında Tanımlanan Dizi Uzayları) $(x_n)_n$, $\mathbb{K}$ cisim uzayında bir dizi ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$l_p := \{(x_n)_n : \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ yakınsak veya } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

$$c_0 := \left\{(x_n)_n : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ veya } |x_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0\right\},$$

$$l_\infty := \left\{(x_n)_n : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan her bir küme, dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{K}$ cisim üzerinde birer vektör uzayıdır (bkz. Megginson, 1998). Bu uzaylara sırasıyla $\mathbb{K}$ cisim uzayında p −toplanabilen, sıfıra yakınsayan ve sınırlı dizilerin uzayı denir. Ayrıca l_p uzayı $\|(x_n)_n\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}$ normu ile bir Banach uzayıdır. c_0 ve l_∞ uzayları da $\|(x_n)_n\| := \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ normu ile birer Banach uzayıdır (bkz. Megginson, 1998).

Bu uzaylar cisim uzayı $\mathbb{K}$ dan ziyade normlu bir uzayda aşağıdaki şekillerde tanımlanırlar.

Tanım 2.1.8 (Normlu Uzayda Tanımlanan Dizi Uzayları) $(x_n)_n$, E normlu uzayında bir dizi ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$l_p(X) = \{(x_n)_n \subset E : \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p \text{ yakınsak veya } \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p < \infty\},$$

$$c_0(X) = \left\{(x_n)_n \subset E : \|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0\right\},$$

$$l_\infty(X) = \left\{(x_n)_n \subset E : \sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\| < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeler, dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre birer vektör uzaylarıdırlar. Bu uzaylara sırasıyla, E normlu uzayında p −toplanabilen, sıfıra yakınsayan ve sınırlı dizilerin uzayı denir. E Banach uzayı ise $l_p(E)$ uzayı $\|(x_n)_n\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{1/p}$ normu ile bir Banach uzayıdır. $c_0(E)$ ve $l_\infty(E)$ uzayları ise $\|(x_n)_n\| := \sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|$ normu ile birer Banach uzayıdır (bkz. Sinha ve Karn, 2002).

Tanım 2.1.9 (Normlu Uzaylar Üzerinde Lineer ve Sınırlı Operatör) E ve F (aynı cisim uzayı üzerinde tanımlanan) iki vektör uzayı ve $T: E \longrightarrow F$ bir dönüşüm olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ve $x, y \in E$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa T dönüşümüne lineer operatördür denir (bkz, Megginson, 1998).

$(E, \|.\|_E)$ ve $(F, \|.\|_F)$ normlu uzaylar ve $T: E \longrightarrow F$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in E$ için, $\|T(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ olacak şekilde pozitif bir k reel sayısı varsa T lineer operatörüne sınırlıdır denir (bkz. Megginson, 1998).

E den F ye tanımlanan tüm lineer operatörlerin vektör uzayını $\mathcal{L}(E, F)$ notasyonu ile, tüm sınırlı lineer operatörlerin vektör uzayı da $\mathcal{B}(E, F)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.10 (Operatör Normu) E ve F normlu uzaylar ve $T \in \mathcal{B}(E, F)$ olsun.

$$\|T\| \coloneqq \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir norm belirtir. Bu norma operatör normu denir (bkz. Megginson, 1998). Ayrıca F bir Banach uzayı ise $\mathcal{B}(E, F)$ uzayı, operatör normu ile bir Banach uzayı olur (bkz. Megginson, 1998).

Eğer $F = \mathbb{K}$ ise $\mathcal{B}(E, F)$ uzayı, E nin (topolojik) duali olarak adlandırılır ve E^* ile gösterilir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.1.11 (İnjektif Banach Uzayı) E bir Banach uzayı olsun. Her F Banach uzayı, F uzayının her F_0 alt uzayı ve her bir $T \in \mathcal{B}(F_0, E)$ operatörü için $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ olacak şekilde bir $\tilde{T} \in \mathcal{B}(F, E)$ genişlemesi varsa, E injektif Banach uzayı olarak adlandırılır (bkz. Albiac ve Kalton, 2006, s. 44).

l_∞ Banach uzayının injektif olduğu literatürde iyi bilinmektedir (bkz. Albiac ve Kalton, 2006, s. 45).

Tanım 2.1.12 (Eşlenik Operatör) E ve F normlu uzaylar ve $T \in \mathcal{B}(E, F)$ olsun. $\forall y^* \in F^*$ ve $\forall x \in E$ için, $(T^* y^*)(x) := y^*(Tx)$ şeklinde tanımlanan $T^*: F^* \longrightarrow E^*$ operatörüne T operatörünün eşleniği denir. Ayrıca $T^* \in \mathcal{B}(F^*, E^*)$ ve $\|T\| = \|T^*\|$ dır (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.1.13 (Zayıf p −Toplanabilen Dizilerin Uzayı) E bir Banach uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun.

$$l_p^w(E) := \{(x_n)_n \subset E : \forall\, x^* \in E^* \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p < \infty \}$$

şeklinde tanımlanan küme bir vektör uzayı olup, bu uzay E uzayında zayıf p −toplanabilen dizilerin vektör uzayı olarak adlandırılır. Bir $(x_n)_n \in l_p^w(E)$ için

$$\|(x_n)_n\|_p^w := \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p\right)^{1/p}$$

$$= \sup\left\{\|\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n\|_X : \ (\lambda_n)_n \in B_{l_{p^*}}\right\} \text{ (burada } l_{p^*} = \left(l_p\right)^* \text{ dır)}$$

fonksiyonu $l_p^w(E)$ uzayı üzerinde bir norm tanımlar, bu norm ile $l_p^w(E)$ uzayı bir Banach uzayıdır (bkz. Diestel ve ark., 1995, s. 32-33 ve bkz. Ryan, 2002, s. 134).

Tanım 2.1.14 (Şartsız p −Toplanabilen Dizilerin Uzayı) $1 \leq p < \infty$ ve E bir Banach uzayı olsun. $l_p^u(E)$ uzayı, $l_p^w(E)$ uzayının

$$\|(0,0,\dots,0,x_m,x_{m+1},\dots)\|_p^w \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

şartını sağlayan $(x_n)_n$ dizilerinden oluşan kapalı bir alt uzayıdır. $l_p^u(E)$ uzayı E uzayında şartsız p −toplanabilen dizilerin uzayı olarak adlandırılır (bkz. Diestel ve ark., 2008, s. 16, bkz. Ain ve Oja, 2015, s. 1574).

Not 2.1.1 E bir Banach uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $l_p(E) \subset l_p^u(E) \subset l_p^w(E)$ dir (bkz. Diestel ve ark., 2008, Teorem 1.1.20, bkz. Ain ve Oja, 2015, s. 1574).

Not 2.1.2 E ve F Banach uzayları ve $T \in \mathcal{B}(E,F)$ olsun. Eğer $(x_n)_n \in l_p(E)$ ise $(Tx_n)_n \in l_p(F)$ ve eğer $(x_n)_n \in l_p^w(E)$ ise $(Tx_n)_n \in l_p^w(F)$ dir (bkz. Diestel ve ark., 1995, s. 34).

Lemma 2.1.1 Bir E Banach uzayındaki bir $(x_n)_n$ dizisi için $(x_n)_n \in l_p^u(E)$ olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \delta_n y_n$ olacak şekilde $(\delta_n)_n \in c_0$ ve $(y_n)_n \in l_p^w(E)$ dizilerinin mevcut olmasıdır (Fourie ve Swart, 1979, Lemma 1.2).

Gözlem 2.1.1 E ve F Banach uzayları ve $T \in \mathcal{B}(E,F)$ olsun. Lemma 2.1.1 ve Not 2.1.2 göz önüne alındığında $(x_n)_n \in l_p^u(E)$ iken $(Tx_n)_n \in l_p^u(F)$ olduğu elde edilir.

Gerçekten, $(x_n)_n \in l_p^u(E)$ ise Lemma 2.1.1'den her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \delta_n y_n$ olacak şekilde $(\delta_n)_n \in c_0$ ve $(y_n)_n \in l_p^w(E)$ dizileri vardır. $T: E \to F$ lineer bir operatör olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $T(x_n) = \delta_n T(y_n)$ elde edilir. Diğer taraftan $(y_n)_n \in l_p^w(E)$ olduğundan Not 2.1.2 kullanılırsa $(Tx_n)_n \in l_p^w(F)$ olur. Böylece Lemma 2.1.1 ile $(Tx_n)_n \in l_p^u(F)$ dir.

Tanım 2.1.15 (p −Toplamsal Operatör) $p \geq 1$ olmak üzere E, F Banach uzayları ve $T \in \mathcal{B}(E,F)$ olsun. Eğer her $(x_n)_n \in l_p^w(E)$ için $(Tx_n)_n \in l_p(F)$ oluyorsa, T operatörü p −toplamsal denir (bkz. Sinha ve Karn, 2002).

Tanım 2.1.16 (Sonlu Ranklı Lineer Operatör) E ve F vektör uzayları, $T: E \to F$ lineer bir operatör olsun. Eğer $R(T) := T(E)$ uzayı F de sonlu boyuta sahip ise T ye sonlu ranklı lineer operatördür denir. Diğer bir ifadeyle, görüntüsü sonlu boyutlu olan lineer operatöre sonlu ranklı lineer operatör denir. T lineer operatörünün rankı $rank(T)$ olmak üzere, $rank(T)$, $R(T)$ uzayının boyutuna eşittir (bkz. Cotlar ve Cignoli, 1974).

Örnek 2.1.2 E ve F normlu uzaylar, $x^* \in E^*$ ve $y \in F$ olmak üzere $x \in E \longrightarrow x^*(x)y \in F$ operatörü $x^* \otimes y$ ile belirtilir. Açık olarak, $x^* \neq 0$ ve $y \neq 0$ ise $x^* \otimes y$ operatörü sonlu ranklı lineer operatör olup rankı 1 dir (bkz. Diestel ve ark., 1995, s. 37).

Tanım 2.1.17 (İzometrik İzomorfizma) E ve F normlu uzaylar olmak üzere $T : E \to F$ lineer bir operatör olsun. Eğer T operatörü, örten ve her $x \in E$ için $\|Tx\|_F = \|x\|_E$ eşitliğini sağlıyorsa T operatörüne izometrik izomorfizma, E ve F uzaylarına da izometrik olarak izomorftur denir ve $E \cong F$ ile gösterilir. Ayrıca $T: E \to T(E) \subset F$ bir izometrik izomorfizma ise T operatörüne izometrik gömmedir denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.1.18 (Refleksif (Yansımalı) Uzay) E bir normlu uzay olsun. Eğer her $x \in E$ ve $x^* \in E^*$ için, $(J_E x)(x^*) := x^*(x)$ şeklinde tanımlanan (sınırlı lineer) kanonik tasvir

$J_E: E \longrightarrow E^{**}$, örten ise E refleksif (veya yansımalı) Banach uzayıdır denir (bkz. Megginson, 1998).

Örnek 2.1.3 Her sonlu boyutlu normlu uzay yansımalıdır. Ayrıca, $1 < p < \infty$ olmak üzere l_p uzayı yansımalıdır (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.1.19 (Operatör İdeal ve Banach Operatör İdeal) $\mathcal{B}$ keyfi Banach uzayları arasında tanımlanan bütün sınırlı lineer operatörlerin sınıfı, $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$ sınıfının bir alt sınıfı olsun. Eğer bütün E, F Banach uzayları için $\mathcal{A}$ sınıfının,

$$\mathcal{A}(E,F) \coloneqq \mathcal{B}(E,F) \cap \mathcal{A}$$

bileşenleri, $\mathcal{B}(E,F)$ nin aşağıdaki şartları sağlayan bir alt vektör uzayı ise $\mathcal{A}$ ya operatör idealdir denir.

i. Herhangi $x^* \in E^*,\ y \in F$ için $x^* \otimes y \in \mathcal{A}(E,F)$ dir.

ii. (İdeal özelliği) E, F, G, H Banach uzayları, $v \in \mathcal{B}(E,G)$, $u \in \mathcal{A}(G,H)$ ve $w \in \mathcal{B}(H,F)$ için $w \circ u \circ v \in \mathcal{A}(E,F)$ dir.

Ayrıca, her E ve F Banach uzayları için $\mathcal{A}(E,F)$ aşağıdaki şartları sağlayan bir $\|.\|_{\mathcal{A}}$ normu ile donatılmış olsun.

a. Tüm bir ranklı $x^* \otimes y$ operatörleri için $\|x^* \otimes y\|_{\mathcal{A}} = \|x^*\|\|y\|$ dir.

b. E, F, G, H Banach uzayları $v \in \mathcal{B}(E,G)$, $u \in \mathcal{A}(G,H)$ ve $w \in \mathcal{B}(H,F)$ iken

$\|w \circ u \circ v\|_{\mathcal{A}} \leq \|w\|\|u\|_{\mathcal{A}}\|v\|$ dir.

c. $(\mathcal{A}(E,F), \|.\|_{\mathcal{A}})$ bir Banach uzayıdır.

Bu takdirde $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{A}})$ bir Banach operatör ideal veya kısaca Banach ideal olarak adlandırılır (bkz. Diestel ve ark., 1995, s. 131).

Tüm sonlu ranklı operatörlerin uzayı $\mathcal{F}$, tüm zayıf kompakt operatörlerin uzayı W, tüm kompakt operatörlerin uzayı $\mathcal{K}$, tüm sınırlı lineer operatörlerin uzayı $\mathcal{B}$ olmak üzere, bu sınıfların herbiri, operatör normuna göre Banach ideallerinin iyi bilinen örnekleridirler (bkz. Diestel ve ark., 1995, s. 131).

Tanım 2.1.20 (Konveks Küme ve Mutlak Konveks Küme) E bir vektör uzayı ve A, E nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in A$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in A$ oluyorsa A kümesine konveks kümedir denir. Eğer $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ için $\alpha x + \beta y \in A$ oluyorsa A kümesi mutlak konveks kümedir denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.1.21 (Mutlak Konveks Geren (veya Zarf)) E bir vektör uzayı ve A, E uzayının bir alt kümesi olsun. A kümesini içeren tüm mutlak konveks kümelerin kesişimine A kümesinin mutlak konveks gereni veya zarfı denir ve $abco(A)$ ile gösterilir (bkz. Köthe, 1969).

Açık olarak, A kümesini içeren en küçük mutlak konveks küme $abco(A)$ kümesidir. Aynı zamanda $abco(A)$ kümesi $\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \leq 1,\ n \in \mathbb{N}$ ve $x_1, x_2 \dots x_n \in A\}$ kümesine eşittir (bkz. Köthe, 1969).

Tanım 2.1.22 (Kapalı Mutlak Konveks Geren (veya Zarf)) E bir normlu uzay ve A, E uzayının bir alt kümesi olsun. A kümesini içeren tüm kapalı mutlak konveks kümelerin kesişimine A kümesinin kapalı mutlak konveks gereni veya zarfı denir ve $\overline{abco}(A)$ ile gösterilir (bkz. Köthe, 1969).

Bir E normlu uzayının bir A alt kümesi için $\overline{abco}(A) = \overline{abco(A)}$ dir (bkz. Köthe, 1969, s. 175).

2.2. Banach Uzaylarında Kompakt Küme ve Bazı Versiyonları

Bu kısımda Grothendieck'in (1955) kompakt küme karakterizasyonu ve bu karakterizasyondan esinlenerek tanımlanan bazı kümeler verilecektir.

Grothendieck (1955) Banach uzayında kompakt bir kümeyi sıfıra yakınsayan diziler vasıtasıyla aşağıdaki şekilde karakterize etmiştir.

Teorem 2.2.1 (Grothendieck'in Relatif Kompakt Küme Karakterizasyonu) E bir Banach uzayı ve $K \subset E$ olsun. K kümesinin relatif kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$K \subset \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : (a_n)_n \in B_{l_1}\right\} = \overline{abco(\{x_n\})}$$

olacak şekilde bir $(x_n)_n \in c_0(E)$ dizisinin mevcut olmasıdır (Burada $abco(\{x_n\})$, $(x_n)_n$ dizisinin mutlak konveks zarfıdır) (Grothendieck, 1955).

Grothendieck'in (1955) relatif kompakt küme karakterizasyonundan esinlenerek Sinha ve Karn (2002) relatif $p-$kompakt küme kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 2.2.1 (Relatif $p-$Kompakt Küme) E bir Banach uzayı, $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ ve $K \subset E$ olsun. Eğer

$$K \subset \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : (a_n)_n \in B_{l_{p^*}}\right\} = p - con(\{x_n\})$$

olacak şekilde $(x_n)_n \in l_p(E)$ ($p = \infty$ ise $(x_n)_n \in c_0(E)$) varsa K kümesine relatif $p-$kompakt kümedir denir. Burada $p - con(\{x_n\})$, $(x_n)_n$ dizisinin $p-$konveks zarfı olarak adlandırılır (Sinha ve Karn, 2002).

Relatif $\infty-$kompakt küme, relatif kompakt küme ile aynıdır. $1 \leq p < \infty$ için her relatif $p-$kompakt küme aynı zamanda relatif kompakt kümedir (Sinha ve Karn, 2002).

Tanım 2.2.2 (Relatif Zayıf $p-$Kompakt Küme) $1 \leq p < \infty$, E bir Banach uzayı, $K \subset E$ olmak üzere,

$$K \subset p - con(\{x_n\})$$

olacak şekilde $(x_n)_n \in l_p^w(E)$ varsa K kümesi relatif zayıf $p-$kompakttır denir (Sinha ve Karn, 2002).

Tanım 2.2.3 (Relatif Şartsız $\boldsymbol{p}$ −Kompakt Küme) $1 \leq p < \infty$, E bir Banach uzayı ve $K \subset E$ olsun.

$$K \subset p - con(\{x_n\})$$

olacak şekilde bir $(x_n)_n \in l_p^u(E)$ varsa K kümesi relatif şartsız p −kompakt kümedir denir (Kim, 2014).

Her şartsız p −kompakt küme aynı zamanda kompakt bir kümedir (Kim, 2014).

Relatif kompakt ve kapalı olan bir küme, kompakt küme olarak, relatif p −kompakt (relatif zayıf p −kompakt, relatif şartsız p −kompakt) ve kapalı olan bir küme de p −kompakt (zayıf p −kompakt, şartsız p −kompakt) küme olarak adlandırılır.

Not 2.1.1 ile her p −kompakt kümenin şartsız p −kompakt, her şartsız p −kompakt kümenin de zayıf p −kompakt küme olduğu görülür (Kim, 2014, Sinha ve Karn, 2002,).

2.3. Banach Uzaylarında Kompakt Lineer Operatörler ve Bazı Versiyonları

Bu kısımda bir önceki alt bölümde verilen kümeler ve dizilerle ilişkilendirilen lineer operatörler verilecektir.

Tanım 2.3.1 (Kompakt (Zayıf Kompakt) Lineer Operatör) E ve F Banach uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ lineer bir operatör olsun. $T(B_E)$, F'nin relatif kompakt (relatif zayıf kompakt) alt kümesi ise T operatörüne kompakt (zayıf kompakt) lineer operatördür denir (bkz. Megginson, 1998).

E den F ye tanımlanan tüm kompakt (zayıf kompakt) lineer operatörlerin sınıfı $\mathcal{K}(E,F)$ $(W(E,F))$ notasyonu ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.2 ($\boldsymbol{p}$ −Kompakt ve Zayıf $\boldsymbol{p}$ −Kompakt Operatör) $1 \leq p < \infty$, E ve F Banach uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ lineer bir operatör olsun. Eğer $T(B_E)$, F'nin relatif p −kompakt bir alt kümesi ise T operatörüne p −kompakt operatör, relatif zayıf

p −kompakt bir alt kümesi ise T operatörüne zayıf p −kompakt operatördür denir (Sinha ve Karn, 2002).

E den F ye tanımlanan tüm p −kompakt ve zayıf p −kompakt lineer operatörlerin sınıfı sırasıyla $\mathcal{K}_p(E,F)$ ve $W_p(E,F)$ notasyonları ile gösterilecektir. $\mathcal{K}_p(E,F)$ ve $W_p(E,F)$ sınıfları $\mathcal{B}(E,F)$ uzayının birer alt vektör uzayları olup bu uzaylar üzerinde, sırasıyla

$$\|T\|_{\mathcal{K}_p} \coloneqq \inf\{\|(y_n)_n\|_p \colon T(B_E) \subset p-con(\{y_n\}),\ (y_n)_n \in l_p(F)\}$$

$$\|T\|_{W_p} \coloneqq \inf\{\|(y_n)_n\|_p \colon T(B_E) \subset p-con(\{y_n\}),\ (y_n)_n \in l_p^w(F)\}$$

fonksiyonları birer norm tanımlar ve $(\mathcal{K}_p, \|.\|_{\mathcal{K}_p})$ ve $(W_p, \|.\|_{W_p})$ sınıfları birer Banach operatör idealdir (Delgado ve ark., 2010 ve Kim, 2020).

Tanım 2.3.3 (Şartsız p −Kompakt Operatör) $1 \leq p < \infty$, E ve F Banach uzayları ve $T\colon E \to F$ lineer bir operatör olsun. $T(B_E)$, F'nin relatif şartsız p −kompakt alt kümesi ise T operatörüne şartsız p −kompakt operatördür denir (Kim, 2014).

E den F ye tanımlanan tüm şartsız p −kompakt lineer operatörlerin sınıfı $\mathcal{K}_{up}(E,F)$ notasyonu ile gösterilecektir.

$\mathcal{K}_{up}(E,F)$ sınıfı $\mathcal{K}(E,F)$ nin bir alt vektör uzayı olup, bu uzay üzerinde

$$\|T\|_{up} \coloneqq \inf\{\|(y_n)_n\|_p^w \colon T(B_E) \subset p-con(\{y_n\}),\ (y_n)_n \in l_p^u(F)\}$$

fonksiyonu bir norm tanımlar ve $(\mathcal{K}_{up}, \|.\|_{up})$ bir Banach operatör idealdir (Kim, 2014, Teorem 2.1).

Tanım 2.3.4 (p −Nükleer Operatör) $1 \leq p < \infty$, E ve F Banach uzayları ve $T\colon E \longrightarrow F$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in E$ için

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, y_n \qquad (2.3.1)$$

olacak şekilde $(x_n^*)_n \in l_p(E^*)$ ve $(y_n)_n \in l_{p^*}^w(F)$ ($p = 1$ ise $(y_n)_n \in c_0(F)$) varsa T p −nükleer operatördür denir (bkz. Diestel ve ark., 1995, s. 112).

E den F ye tanımlanan tüm p −nükleer operatörlerin sınıfı $\mathcal{N}_p(E,F)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Eğer $T \in \mathcal{N}_p(E,F)$ ise

$$\|T\|_{\mathcal{N}_p} := \inf\{\|(x_n^*)_n\|_p \, \|(y_n)_n\|_{p^*}^w\}$$

fonksiyonu $\mathcal{N}_p(E,F)$ uzayı üzerinde bir norm tanımlar ve $(\mathcal{N}_p, \|.\|_{\mathcal{N}_p})$ sınıfı bir Banach operatör idealdir (bkz. Diestel ve ark., 1995, s. 113).

Kim (2019) p −nükleer operatörlerin zayıf versiyonu olarak, zayıf p −nükleer operatör kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.3.5 (Zayıf p −Nükleer Operatör) $1 \le p < \infty$, E ve F Banach uzayları ve $T: E \to F$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in E$ için

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, y_n \tag{2.3.2}$$

olacak şekilde $(x_n^*)_n \in l_p^w(E^*)$ ve $(y_n)_n \in l_{p^*}^w(F)$ ($p = 1$ ise $(y_n)_n \in c_0^w(F)$) varsa T operatörüne zayıf p −nükleer operatördür denir (Kim, 2019).

E den F ye tanımlanan tüm zayıf p −nükleer operatörlerin sınıfı $\mathcal{N}_{wp}(E,F)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Eğer $T \in \mathcal{N}_{wp}(E,F)$ ise

$$\|T\|_{\mathcal{N}_{wp}} := \inf\{\|(x_n^*)_n\|_p^w \, \|(y_n)_n\|_{p^*}^w\}$$

fonksiyonu $\mathcal{N}_{wp}(E,F)$ uzayı üzerinde bir norm belirtir (burada infimum T operatörünün (2.3.2) deki tüm temsilleri üzerinden alınmaktadır). Ayrıca $(\mathcal{N}_{wp}, \|.\|_{\mathcal{N}_{wp}})$ sınıfı bir Banach operatör idealdir (Kim, 2019, Teorem 2.1).

Tanım 2.3.6 (Şartsız p −Nükleer Operatör) $1 \leq p < \infty$, E ve F Banach uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ lineer bir operatör olsun. T operatörünün (2.3.1) deki temsilinde $l_p(E^*)$ ve $l_{p^*}^w(F)$ uzayları sırasıyla, $l_p^u(E^*)$ ve $l_{p^*}^u(F)$ uzayları ile değiştirilirse T operatörü şartsız p −nükleer operatör (veya klasik p −kompakt operatör) olarak adlandırılır (bkz. Kim, 2014).

E den F ye tanımlanan tüm şartsız p −nükleer operatörlerin sınıfı $\mathcal{N}_{up}(E,F)$ notasyonu ile gösterilecektir. Bu uzay üzerinde norm fonksiyonu,

$$\|T\|_{up} := \inf\{ \|(x_n^*)_n\|_p^w \|(y_n)_n\|_{p^*}^w \}$$

şeklinde tanımlanır (Burada infimum T şartsız p −nükleer operatörünün tüm temsilleri üzerinden alınır). Ayrıca $1 \leq p < \infty$ için $(\mathcal{N}_{up}, \|.\|_{up})$ sınıfı bir Banach operatör idealdir (bkz. Kim, 2014).

Persson ve Pietsch (1969) p −nükleer operatörlerin zayıf versiyonu olarak, yarı p −nükleer operatör kavramını, Kim (2019) de yarı p −nükleer operatörlerin zayıf versiyonu olarak, yarı zayıf p −nükleer operatör kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 2.3.7 (Yarı p −Nükleer Operatör ve Yarı Zayıf p −Nükleer Operatör) $1 \leq p < \infty$, E ve F Banach uzayları ve $T: E \to F$ lineer bir operatör olmak üzere, eğer her $x \in E$ için

$$\|Tx\| \leq \|(x_n^*(x))_n\|_p \tag{2.3.3}$$

olacak şekilde bir $(x_n^*)_n \in l_p(E^*)$ varsa T operatörü yarı p −nükleerdir denir (Persson ve Pietcsh, 1969). Eğer bu tanımda $l_p(E^*)$ uzayı, $l_p^w(E^*)$ ile değiştirilirse yarı zayıf p −nükleer operatör kavramı elde edilir (Kim, 2019).

E den F ye tanımlanan tüm yarı p −nükleer operatörlerin uzayı $\mathcal{N}_p^Q(E,F)$ ve tüm yarı zayıf p −nükleer operatörlerin uzayı $\mathcal{N}_{wp}^Q(E,F)$ olmak üzere, bu uzaylar üzerinde sırasıyla

$$\|T\|_{\mathcal{N}_p^Q} \coloneqq \inf\|(x_n^*)_n\|_p, \quad ((x_n^*)_n \in l_p(E^*)),$$

$$\|T\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \coloneqq \inf\|(x_n^*)_n\|_p^w, \quad ((x_n^*)_n \in l_p^w(E^*))$$

fonksiyonları norm belirtir (burada infimum, sırasıyla (2.3.3) eşitsizliğini sağlayan tüm $(x_n^*)_n \in l_p(E^*)$ ve $(x_n^*)_n \in l_p^w(E^*)$ dizileri üzerinden alınır). Ayrıca $(\mathcal{N}_p^Q, \|.\|_{\mathcal{N}_p^Q})$ ve $(\mathcal{N}_{wp}^Q, \|.\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q})$ sınıfları birer Banach operatör idealdir (Persson ve Pietcsh, 1969 ve Kim, 2019).

Tanım 2.3.8 (Yarı Şartsız p −Nükleer Operatör) $1 \le p < \infty$, E ve F Banach uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ bir lineer operatör olmak üzere, eğer her $x \in E$ için (2.3.3) eşitsizliği bir $(x_n^*)_n \in l_p^u(E^*)$ dizisi için sağlanıyorsa T operatörüne yarı şartsız p −nükleer operatördür denir (Kim, 2014).

E den F ye tanımlanan tüm yarı şartsız p −nükleer operatörlerin sınıfı $\mathcal{N}_{up}^Q(E,F)$ olmak üzere, bir $T \in \mathcal{N}_{up}^Q(E,F)$ için $\|T\|_{up}^Q \coloneqq \inf\|(x_n^*)_n\|_p^w$ fonksiyonu bir norm belirtir (burada infimum her $x \in E$ için (2.3.3) eşitsizliğini sağlayan $(x_n^*)_n \in l_p^u(E^*)$ dizileri üzerinden alınır). Bu norm ile birlikte $(\mathcal{N}_{up}^Q, \|.\|_{up}^Q)$ sınıfı bir Banach operatör idealdir (Kim, 2014).

2.4. Lipschitz Operatörler ve İlgili Bazı Kavramlar

Tanım 2.4.1 (Lipschitz Operatör) (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $f: X \longrightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \le \alpha d_1(x_1, x_2) \tag{2.4.1}$$

olacak şekilde bir $\alpha \ge 0$ sayısı varsa f Lipschitz operatördür denir (bkz. Weaver, 1999).

Her Lipschitz operatör (düzgün) süreklidir. Fakat tersi genelde doğru değildir (bkz. Weaver, 1999). Banach uzayları arasında tanımlanan her sınırlı lineer operatör açık olarak aynı zamanda bir Lipschitz operatördür (bkz. Weaver, 1999).

Tanım 2.4.2 (Lipschitz Sayısı) (2.4.1) eşitsizliğini sağlayan en küçük α sayısına f operatörünün Lipschitz sayısı denir ve $Lip(f)$ ile gösterilir (bkz. Weaver, 1999).

Alternatif olarak $Lip(f)$ sayısı

$$Lip(f) = \sup_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{d_2(f(x),f(y))}{d_1(x,y)}$$

şeklinde de tanımlanabilir (bkz. Weaver, 1999).

Önerme 2.4.1 (bkz. Weaver, 1999, Önerme 1.5.2) X bir metrik uzay ve $f,g: X \longrightarrow \mathbb{K}$ birer Lipschitz operatör olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

a) $Lip(af) = |a|Lip(f),$ her $a \in \mathbb{K}$,

b) $Lip(f+g) \leq Lip(f) + Lip(g).$

(X, e_X) ve (Y, e_Y) noktalı metrik uzaylar ve $f: X \longrightarrow Y,\ f(e_X) = e_Y$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Böyle bir dönüşüme baz noktasını koruyan dönüşüm denir (bkz. Weaver, 1999).

Önerme 2.4.2 (Lipschitz Operatörlerin Banach Uzayı) (X, e_X) noktalı bir metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f: X \longrightarrow E$ baz noktasını koruyan (yani, $f(e_X) = 0$ olan) bir Lipschitz operatör olsun (eğer X normlu uzay ise, X in baz noktası orjindir). X ten E ye tanımlanan ve baz noktasını koruyan tüm f Lipschitz operatörlerin kümesi $Lip_0(X,E)$ olmak üzere, $Lip_0(X,E)$ kümesi aşağıda verilen Lipschitz normu altında bir Banach uzayıdır.

$$Lip(f) := \sup_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)}$$

(bkz. Weaver, 1999, bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

Not 2.4.1 Önerme 2.4.2'de verilen $f(e_X) = 0$ şartı $Lip(f)$ fonksiyonunun normun (i). aksiyomunu sağladığını göstermek için gereklidir. Gerçekten,

$\Rightarrow f = 0$ ise $Lip(f) = 0$ olduğu açıktır.

$\Leftarrow Lip(f) = 0$ ise, X deki her $x \neq y$ elemanı için $\|f(x) - f(y)\| = 0$ ve böylece $f(x) = f(y)$ olacaktır. $y = e_X$ olarak alınırsa, her $x \neq e_X \in X$ için $f(x) = 0$ elde edilir. Böylece $f = 0$ olup norm fonksiyonunun (i). aksiyomu sağlanır.

$Lip_0(X, E)$ uzayının elemanları Lipschitz operatörler olarak adlandırılacaktır. $E = \mathbb{K}$ olması durumunda $Lip_0(X, \mathbb{K})$ uzayı, $X^\#$ ile gösterilecek ve bu uzay X uzayının Lipschitz duali olarak adlandırılacaktır (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

Özel olarak, E ve F Banach uzayları olmak üzere $\mathcal{B}(E, F)$, $Lip_0(E, F)$ uzayının bir alt uzayı ve E^* da $E^\#$ nin bir alt uzayıdır (bkz. Achour ve ark., 2019).

Tanım 2.4.3 (Lipschitz Serbest Banach Uzayı) X noktalı metrik uzay olmak üzere bir $x \in X$ için δ_x: $Lip_0(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ (Lipschitz değer) fonksiyoneli

$$\delta_x(f) = f(x),\ f \in Lip_0(X, \mathbb{F})$$

şeklinde tanımlanmış olsun. $\{\delta_x : x \in X\}$ kümesinin $\left(Lip_0(X, \mathbb{K})\right)^* = (X^\#)^*$ uzayında kapalı lineer gereni, X üzerinde Lipschitz-Serbest Banach uzayı olarak adlandırılır ve $\mathcal{F}(X)$ ile gösterilir, yani, $\mathcal{F}(X) = \overline{\mathrm{span}\{\delta_x : x \in X\}}^{\left(\mathrm{Lip}_0(X,\mathbb{K})\right)^*}$ dir (bkz. Achour ve ark., 2019).

$\widetilde{X} = \{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$ ve $(x, y) \in \widetilde{X}$ olsun. $X^\#$ uzayı üzerinde Lipschitz değer fonksiyonelleri vasıtasıyla $\delta_{(x,y)}$ fonksiyonu

$$\delta_{(x,y)} := \frac{\delta_x - \delta_y}{d(x, y)}$$

şeklinde tanımlansın. $\delta_{(x,y)}$ fonksiyonelleri $\mathcal{F}(X)$ uzayının kapalı birim yuvarını tanımlamak için (diğer bölümde) kullanılacaktır (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

$\delta_X: X \to \mathcal{F}(X)$ dönüşümü her $x \in X$ ve $f \in X^{\#}$ için $\delta_X(x)(f) = \delta_x(f)$ şeklinde tanımlanan bir dönüşümdür (bkz. Achour ve ark. 2019) (Aslında, bu dönüşüm lineer olmayan izometrik bir gömmedir, bkz. Godefroy, 2015).

$\delta_{\widetilde{X}}: \widetilde{X} \to (X^{\#})^*$ dönüşümü her $(x,y) \in \widetilde{X}$ için $\delta_{\widetilde{X}}(x,y) \coloneqq \delta_{(x,y)}$ şeklinde tanımlanan bir dönüşümdür (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

Teorem 2.4.1 X, Y ve Z metrik uzaylar ve $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ Lipschitz operatörler olsunlar. Bu takdirde $g \circ f: X \longrightarrow Z$ bir Lipschitz operatördür ve $Lip(g \circ f) \leq Lip(f)Lip(g)$ dir (bkz. Weaver, 1999, Önerme 1.2.2).

3. KOMPAKT VE p −KOMPAKT KÜMELERLE İLİŞKİLİ LIPSCHITZ OPERATÖRLER

Bu bölümde Lipschitz kompakt (zayıf kompakt), Lipschitz p −kompakt operatörler, sınırlı lineer operatörlerin ve Lipschitz operatörlerin majorizasyonu üzerine literatürde mevcut olan bazı sonuçlar verilecektir.

Aşağıdaki lemmada X noktalı metrik uzayının, Lipschitz serbest Banach uzayı $\mathcal{F}(X)$ ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Lemma 3.1 (bkz. Auchour ve ark., 2019) X ve Y noktalı metrik uzaylar ve E bir Banach uzayı olmak üzere,

a) $\mathcal{F}(X)$ uzayının dual uzayı $\mathcal{F}(X)^*$, $Q_X: X^{\#} \longrightarrow \mathcal{F}(X)^*$

$Q_X(f)(\gamma) = \gamma(f),\ f \in X^{\#},\ \gamma \in F(X)$

operatörü altında, $X^{\#}$ uzayına izometrik olarak izomorftur.

b) Herhangi bir $f \in Lip_0(X, Y)$ operatörü için, bir tek $\widehat{f}: \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ lineer operatörü vardır öyle ki $\widehat{f} \circ \delta_X = \delta_Y \circ f$ dir. Yani, aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_X"'] & Y \arrow[d, "\delta_Y"] \\
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\widehat{f}"'] & \mathcal{F}(Y)
\end{tikzcd}
$$

Ayrıca $\|\widehat{f}\| = Lip(f)$ tir.

c) Bir $\beta_E: \mathcal{F}(E) \longrightarrow E$ sınırlı lineer operatörü (özel olarak, bölüm tasviri) vardır öyle ki $\beta_E \circ \delta_E = I_E$ dir.

d) Herhangi bir $f \in Lip_0(X,E)$ operatörü için bir tek $T_f : \mathcal{F}(X) \longrightarrow E$ lineer operatörü vardır öyle ki $f = T_f \circ \delta_X$ dir yani, aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\delta_X"'] & & E \\ & \mathcal{F}(X) \arrow[ur, "T_f"'] & \end{tikzcd}$$

Ayrıca $\|T_f\| = Lip(f)$ tir.

Özel olarak (b) ve (c)'den $T_f = \beta_E \circ \widehat{f}$ elde edilir (bkz. Achour ve ark., 2019).

Lemma 3.2 X noktalı metrik uzay olmak üzere, $\mathcal{F}(X)$ uzayının kapalı birim yuvarı $\{\delta_{(x,y)} : (x,y) \in \widetilde{X}\} \subset (X^{\#})^*$ kümesinin kapalı, konveks ve dengeli gerenidir, yani, $B_{\mathcal{F}(X)} = \overline{abco}(\delta_{\widetilde{X}}(\widetilde{X}))$ dir (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

Tanım 3.1 (Bir Lipschitz Operatörün Görüntüsü) X bir metrik uzay ve E bir Banach uzayı olsun. Bir $f : X \longrightarrow E$ dönüşümü için

$$\left\{ \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} : \ x, y \in X, \ x \neq y \right\}$$

kümesi f dönüşümünün Lipschitz görüntüsü olarak tanımlanır (Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

f dönüşümünün Lipschitz görüntüsü çalışma boyunca $Im_{Lip}(f)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Eğer Lipschitz görüntü kümesi E uzayının sınırlı bir alt kümesi ise, yani, her $x, y \in X$ için

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha d(x,y)$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı mevcut ise f bir Lipschitz operatör olur (Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

3.1. Lipschitz Kompakt (Lipschitz Zayıf Kompakt) Operatör ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda Jiménez-Vargas ve ark.nın (2014) Lipschitz kompakt (Lipschitz zayıf kompakt) operatörler ile ilgili elde ettiği bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 3.1.1 (Lipschitz Kompakt (Lipschitz Zayıf Kompakt) Operatör) X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olmak üzere bir $f \in Lip_0(X,E)$ operatörünün Lipschitz görüntü kümesi E de relatif kompakt (relatif zayıf kompakt) ise, f operatörüne Lipschitz kompakttır (Lipschitz zayıf kompakttır) denir (Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

X uzayından E uzayına tanımlanan tüm Lipschitz kompakt ve Lipschitz zayıf kompakt operatörlerin kümesi sırasıyla $Lip_0^{\mathcal{K}}(X,E)$ ve $Lip_0^{W}(X,E)$ notasyonları ile gösterilecektir.

Belirtelim ki $Lip_0^{\mathcal{K}}(X,E)$ ve $Lip_0^{W}(X,E)$ kümeleri $Lip_0(X,E)$ uzayının alt vektör uzaylarıdır ve

$$Lip_0^{\mathcal{K}}(X,E) \subset Lip_0^{W}(X,E) \subset Lip_0(X,E)$$

dir (Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

Eğer X ve E Banach uzayları, $f: X \longrightarrow E$ lineer kompakt (zayıf kompakt) bir operatör ise, f operatörünün Lipschitz görüntüsü,

$$\begin{aligned} Im_{Lip}(f) &= \left\{\frac{f(x)-f(y)}{\|x-y\|} :\ x,y \in X,\ \ x \neq y\right\} \\ &= \left\{\frac{f(x-y)}{\|x-y\|} :\ x,y \in X,\ \ x \neq y\right\} \\ &= \left\{f\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) :\ x,y \in X,\ \ x \neq y\right\} \end{aligned}$$

$$= f(S_X)$$

olacağından f Lipschitz kompakt (Lipschitz zayıf kompakt) bir operatördür (Jiménez-Vargas ve ark., 2014). Dolayısıyla bu bağlamda Lipschitz kompakt (zayıf kompakt) operatör kavramı, kompakt (zayıf kompakt) lineer operatör kavramının bir genelleşmesidir (Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

Aşağıdaki önerme bir $f \in Lip_0(X, E)$ Lipschitz operatörünün kompaktlığı ile onun lineerleşmesi olan (Lemma 3.1'de verilen) $T_f \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(X), E)$ operatörünün kompaktlığı arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Önerme 3.1.1 X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olmak üzere $f \in Lip_0(X, E)$ olsun. f operatörünün Lipschitz kompakt olması için gerek ve yeter şart T_f operatörünün kompakt olmasıdır (Jiménez-Vargas ve ark., 2014, Önerme 2.1).

E ve F normlu uzaylar ve $T: E \to F$ lineer (sınırlı) bir operatör olsun. Eğer bir G normlu uzayı, $R: E \to G$ ve $S: G \to F$ lineer (sınırlı) operatörleri $T = S \circ R$ olacak şekilde varsa, T operatörünün G uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabildiği söylenir.

Davis ve ark. (1974), Banach uzayları arasında tanımlanan her zayıf kompakt lineer operatörün refleksif bir Banach uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabildiğini göstermişlerdir.

Aşağıda verilen önerme Lipschitz zayıf kompakt operatörlerin de refleksif bir Banach uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabildiğini göstermektedir.

Önerme 3.1.2 (Jiménez-Vargas ve ark., 2014, Önerme 2.2) X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X, E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktirler.

i. f operatörü Lipschitz zayıf kompakttır.

ii. f operatörünün lineerleşmesi $T_f \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(X), E)$ zayıf kompakttır.

iii. Refleksif bir F Banach uzayı, sınırlı lineer bir $T \in \mathcal{B}(F,E)$ operatörü ve bir $g \in Lip_0(X,F)$ Lipschitz operatörü vardır öyle ki $f = T \circ g$ dir.

Aşağıdaki önermede Jiménez-Vargas ve ark. (2014), Lipschitz kompakt (zayıf kompakt) operatörlerin ideal özelliğine sahip olduğunu göstermişlerdir.

Önerme 3.1.3 X ve Y noktalı metrik uzaylar, E ve F Banach uzayları, $h \in Lip_0(Y,X)$ ve $S \in \mathcal{B}(E,F)$ olsun. Eğer $f \in Lip_0^{\mathcal{K}}(X,E)$ ($f \in Lip_0^{W}(X,E)$) ise $Sfh \in Lip_0^{\mathcal{K}}(Y,F)$ ($Sfh \in Lip_0^{W}(Y,F)$) dır (Jiménez-Vargas ve ark., 2014, Önerme 2.3).

Tanım 3.1.2 (Lipschitz Rank) X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olsun. Bir $f \in Lip_0(X,E)$ operatörünün Lipschitz görüntüsünün lineer gereni E uzayının sonlu boyutlu bir alt uzayı ise f Lipschitz sonlu boyutlu ranka sahiptir denir. Bu uzayın boyutu f operatörünün Lipschitz rankı olarak tanımlanır ve $\mathrm{Lrank}(f)$ ile gösterilir. (Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

Bu tanım aşağıdaki kavram ile yakından ilişkilidir.

X bir küme ve E bir vektör uzayı olsun. Bir $f: X \longrightarrow E$ dönüşümünün görüntüsünün lineer gereni, E uzayının sonlu boyutlu bir alt uzayı ise f sonlu boyutlu ranka sahiptir denir ve bu uzayın boyutu f in rankı olarak tanımlanır, $\mathrm{rank}(f)$ ile gösterilir. Yani $\mathrm{rank}(f)$, $\mathrm{span}(f(X))$ uzayının boyutudur (Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

Önerme 3.1.4 (Vargas ve ark., 2014, Önerme 2.4) X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X,E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktirler.

i. f operatörü sonlu boyutlu Lipschitz ranka sahiptir.

ii. f operatörü sonlu boyutlu ranka sahiptir.

iii. $T_f \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(X),E)$ lineerleşmesi sonlu ranka sahiptir.

Bu durumda, $\mathrm{span}(f(X)) = T_f(\mathcal{F}(X))$ ve $\mathrm{Lrank}(f) = \mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(T_f)$ dir (Vargas ve ark., 2014).

Şimdi bir Lipschitz operatörün Lipschitz transpozu tanımı ve bu transpozla ilgili mevcut bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 3.1.3 (Lipschitz Eşlenik ve Lipschitz Transpoz Operatör) X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olsun. Her $f \in Lip_0(X, E)$ operatörü için, f in Lipschitz eşlenik operatörü $f^{\#}: E^{\#} \to X^{\#}$, $f^{\#}(g) = g \circ f$, her $g \in E^{\#}$ şeklinde tanımlanan lineer sınırlı bir operatördür ve $\|f^{\#}\| = Lip(f)$ dir. $f^{\#}$ operatörünün E^* uzayına kısıtlanışı sınırlı lineer bir operatör tanımlar, bu operatöre de f in Lipschitz transpoz operatörü denir ve f^t ile gösterilir (Vargas ve ark., 2014).

Açık olarak, bir $f \in Lip_0(X, E)$ için

$$Q_X \circ f^t = T_f^* \quad \text{ve} \quad \widehat{f}^{\,*} \circ Q_Y = Q_X \circ f^{\#} \tag{3.1.1}$$

dır. Burada T_f^*, f operatörünün lineerleşmesi olan T_f operatörünün eşleniğidir (Achour ve ark., 2019).

Aşağıdaki önerme bir $f \in Lip_0(X, E)$ operatörünün kompaktlığı (zayıf kompaktlığı) ile f^t Lipschitz transpozunun kompaktlığı (zayıf kompaktlığı) arasındaki ilişkiyi gösterir.

Önerme 3.1.5 (Vargas ve ark., 2014, Önerme 3.5 (ve Önerme 3.4)) X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X, E)$ olmak üzere aşağıdakiler denktir.

a) f operatörü Lipschitz kompakttır (Lipschitz zayıf kompakttır).

b) $f^t: E^* \to X^{\#}$ operatörü kompakttır (zayıf kompakttır).

Önerme 3.1.5 aynı zamanda, kompakt lineer bir operatörün eşleniğinin kompakt olması üzerine dayanan Schauder teoreminin (bkz. Megginson, 1998) Lipschitz versiyonunu vermektedir.

3.2. Lipschitz p −Kompakt Operatör ve Karakterizasyonları

Bu kısımda Achour ve ark.nın (2019) Lipschitz p −kompakt operatörler ile ilgili elde ettiği bazı sonuçlar verilecektir.

Achour ve ark. (2019), Jiménez-Vargas ve ark.nın (2014) Lipschitz kompakt operatör kavramından hareketle, Lipschitz p −kompakt operatör kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 3.2.1 (Lipschitz p −Kompakt Operatör) X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $p \geq 1$ olsun. Bir $f \in Lip_0(X, E)$ operatörünün Lipschitz görüntü kümesi E de relatif p −kompakt ise, f operatörü Lipschitz p −kompakttır denir. Eğer $p = \infty$ ise Lipschitz p −kompakt operatör kavramı Lipschitz kompakt operatör kavramı ile çakışır (Achour ve ark., 2019).

X ten E ye tanımlanan tüm Lipschitz p −kompakt operatörlerin sınıfı $Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X, E)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Lipschitz p −kompakt operatörler lineer p −kompakt operatörlerin bir genişlemesi olarak düşünülebilir (Achour ve ark., 2019). Aslında, E ve F Banach uzayları ve $T: E \to F$ herhangi bir lineer operatör ise $abco(Im_{Lip}(T))$ ve $T(B_E)$ kümeleri çakışıktır (Achour ve ark., 2019). Gerçekten,

$$Im_{Lip}(T) = \left\{\frac{T(x) - T(y)}{\|x - y\|} : x, y \in E, x \neq y\right\}, T \text{ lineer olduğundan}$$

$$= \left\{T\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right) : x, y \in E, x \neq y\right\}$$

dir. Böylece $Im_{Lip}(T) \subset T(B_E)$ elde edilir. $T(B_E)$ kümesi konveks ve dengeli olduğundan (bkz. Megginson, 1998), $Im_{Lip}(T) \subset abco(Im_{Lip}(T)) \subset T(B_E)$ elde edilir.

Şimdi $y \in T(B_E)$ olsun. Bu takdirde $y = Tx$ olacak şekilde bir $x \in B_E$ vardır. T operatörünün lineerliği kullanılarak

$$y = \frac{T(x) - T(0)}{\|x - 0\|} \|x\|$$

yazılabilir. $T\left(\frac{x-0}{\|x-0\|}\right) \in Im_{Lip}(T)$ ve $\|x\| \leq 1$ olduğundan $T\left(\frac{x-0}{\|x-0\|}\right)\|x\| \in abco(Im_{Lip}(T))$ dir. Bu ise $y \in T(B_E) \subset abco(Im_{Lip}(T))$ olduğunu gösterir. Böylece $abco(Im_{Lip}(T))$ ve $T(B_E)$ kümeleri çakışıktır.

Sonuç olarak, $T: E \longrightarrow F$ operatörü $p-$kompakt lineer bir operatör olduğundan, $T(B_E)$ relatif $p-$kompakttır, dolayısıyla $Im_{Lip}(T)$ kümesi de relatif $p-$kompakt olur. Bu ise T nin Lipschitz $p-$kompakt bir operatör olduğunu gösterir.

$1 \leq p \leq q \leq \infty$ iken her relatif $p-$kompakt küme relatif $q-$kompakt küme olduğundan (Sinha ve Karn, 2002), Achour ve ark. (2019) aşağıdaki önermeyi vermişlerdir.

Önerme 3.2.1 $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olmak üzere X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olsun. Her Lipschitz $p-$kompakt operatör Lipschitz $q-$kompakttır. Özel olarak, her Lipschitz $p-$kompakt operatör Lipschitz kompakttır (Achour ve ark. 2019, Önerme 3.3).

Aşağıdaki teorem, Önerme 3.1.1'de kompakt kümelerin $p-$kompakt kümelerle değiştirilmesi durumunda elde edilen sonucu göstermektedir.

Teorem 3.2.1 X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı, $p \geq 1$ ve $f \in Lip_0(X, E)$ olsun. f operatörünün Lipschitz $p-$kompakt olması için gerek ve yeter şart T_f lineerleşmesinin $p-$kompakt operatör olmasıdır (Achour ve ark., 2019, Teorem 3.4).

Delgado ve ark. (2010) sınırlı lineer bir operatörün $p-$kompakt olması için gerek ve yeter şartın operatörün eşleniğinin yarı $p-$nükleer olması gerektiğini göstermişlerdir. Achour ve ark. (2019) bu sonucu Lipschitz operatör durumuna aşağıdaki teoremle genişletmişlerdir.

Teorem 3.2.2 X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bir $f \in Lip_0(X,E)$ operatörü Lipschitz $p-$kompakttır ancak ve ancak onun Lipschitz transpozu $f^t: E^* \to X^\#$ yarı $p-$nükleer operatördür (Achour ve ark., 2019, Önerme 3.12).

Önerme 3.2.2 X ve Z noktalı metrik uzaylar ve E bir Banach uzayı olmak üzere, $f \in Lip_0(X,E)$ ve $g \in Lip_0(Z,E^*)$ olsun. $1 \leq p < \infty$ için T_f lineerleşmesi $p-$toplamsal ve g operatörü Lipschitz kompakt ise $f^t \circ g$ dönüşümü Lipschitz $p-$kompakttır (Achour ve ark., 2019, Önerme 3.13).

Galicer ve ark.nın (2012, Önerme 2.9) lineer $p-$kompakt operatörleri çarpanlara ayırma sonucunu kullanarak, Achour ve ark. (2019), Lipschitz $p-$kompakt operatörler için aşağıdaki çarpanlara ayırma sonucunu elde etmişlerdir.

Önerme 3.2.3 $1 \leq p < \infty$, X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X,E)$ olsun. $f \in Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X,E)$ olması için gerek ve yeter şart $f = w \circ u \circ S$ olacak şekilde l_{p^*} uzayının kapalı bir M alt uzayı, ayrılabilir bir Z Banach uzayı, $u \in \mathcal{K}_p(l_{p^*}/M, Z)$ operatörü, $S \in Lip_0^{\mathcal{K}}(X, l_{p^*}/M)$ operatörü ve bir $w \in \mathcal{K}(Z,E)$ operatörünün mevcut olmasıdır (Achour ve ark., 2019, Önerme 3.9).

3.3. Lipschitz Serbest $p-$Kompakt Operatörler

Bu kısımda Achour ve ark.nın (2019) $p-$kompakt kümelerle ilişkili olarak tanımladığı Lipschitz operatörlerin diğer bir sınıfı ve bu sınıf üzerine elde ettiği bazı sonuçlar verilecektir.

Achour ve ark. (2019), Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas'ın (2016) Lipschitz serbest kompakt operatör kavramından hareketle aşağıdaki tanımı vermişlerdir. Belirtelim ki, bu tanım metrik uzaylar arasındaki Lipschitz operatörler için verilmiştir.

Tanım 3.3.1 (Lipschitz Serbest $\boldsymbol{p}$ −Kompakt Operatör) X ve Y noktalı metrik uzaylar ve $p \geq 1$ olsun. Bir $f \in Lip_0(X,Y)$ operatörü için $\delta_Y \circ f : X \to \mathcal{F}(Y)$ operatörü Lipschitz p −kompakt oluyorsa f Lipschitz serbest p −kompakt operatördür denir (Achour ve ark., 2019).

X ten Y ye tanımlanan tüm Lipschitz serbest p −kompakt operatörlerin kümesi $\mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X,Y)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Teorem 3.3.1 (Achour ve ark., 2019, Teorem 4.2) X ve Y noktalı metrik uzaylar ve $f \in Lip_0(X,Y)$ olsun. $p \geq 1$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

a) f Lipschitz serbest p −kompakt operatördür.

b) $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ operatörü p −kompakttır.

c) $f^{\#}: Y^{\#} \longrightarrow X^{\#}$ operatörü yarı p −nükleer operatördür.

Not 3.3.2 $1 \leq p \leq q \leq \infty$ iken her relatif p −kompakt küme relatif q −kompakt olduğundan $\mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X,Y) \subset \mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_q}(X,Y)$ yazılabilir (Achour ve ark., 2019).

Aşağıdaki önerme p −kompakt kümeler ile ilişkili olarak tanımlanan Lipschitz operatör sınıfları arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Önerme 3.3.1 $p \geq 1$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_p} \subset Lip_0^{\mathcal{K}_p}$ dir ve bu kapsamanın tersi genelde doğru değildir (Achour ve ark., 2019, Önerme 4.6).

Teorem 3.3.2 (Kuvvetli İdeal Özelliği) X, Y, Z, W noktalı metrik uzaylar ve $p \geq 1$ olmak üzere, eğer $R \in Lip_0(X,Y)$, $T \in \mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_p}(Y,Z)$ ve $S \in Lip_0(Z,W)$ ise $S \circ T \circ R \in \mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X,W)$ dır (Achour ve ark., 2019, Teorem 4.8).

3.4. Sınırlı Lineer Operatörler ve Lipschitz Operatörler İçin Majorizasyon Kavramları ve Özellikleri

Sınırlı lineer operatörler için majorizasyon kavramının bazı özellikleri ve karakterizasyonları Barnes (2004) tarafından incelenmiştir.

Tanım 3.4.1 (Majorizasyon) E, F ve G Banach uzayları, $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ve $S \in \mathcal{B}(E, G)$ olmak üzere, her $x \in E$ için

$\|S(x)\| \leq M\|T(x)\|$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa T operatörü S operatörünü majorize eder denir (bkz. Harte, 1988).

Barnes (2004) majorizasyon kavramı için aşağıdaki karakterizasyonları elde etmiştir.

Önerme 3.4.1 E, F ve G Banach uzayları, $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ve $S \in \mathcal{B}(E, G)$ olsun. T operatörünün S operatörünü majorize etmesi için gerek ve yeter şart $S = V \circ T$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{B}(\overline{T(E)}, G)$ operatörünün mevcut olmasıdır (Barnes, 2004, Önerme 3).

Teorem 3.4.1 (Barnes, 2004, Teorem 7) E, F ve G Banach uzayları olmak üzere,

a) $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ve $S \in \mathcal{B}(E, G)$ olsun. T operatörü S operatörünü majorize ediyor ise $R(S^*) \subset R(T^*)$ dir.

b) $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ve $S \in \mathcal{B}(E, G)$ olsun. $R(S^*) \subset R(T^*)$ ise T operatörü S operatörünü majorize eder.

c) $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ve $S \in \mathcal{B}(G, F)$ ve $R(S) \subset R(T)$ ise T^* operatörü S^* operatörünü majorize eder.

Önerme 3.4.2 (Barnes, 2004, Önerme 6) E, F, G, H Banach uzayları olsun ve $T \in \mathcal{B}(E, F)$, $S \in \mathcal{B}(E, G)$ operatörleri verilsin. T operatörü S operatörünü majorize ediyor ise aşağıdakiler sağlanır.

a) T operatörü kompakt ise S operatörü de kompakttır.

b) T operatörü zayıf kompakt ise S operatörü de zayıf kompakttır.

Önerme 3.4.3 (Barnes, 2004, Önerme 8) $E,\ F$ ve G Banach uzayları olmak üzere $T \in \mathcal{B}(E,F)$ ve $S \in \mathcal{B}(G,F)$ operatörleri verilsin. Bu takdirde,

a) $R(S) \subset R(T)$ ve T operatörü kompakt ise S operatörü de kompakttır.

b) $R(S) \subset R(T)$ ve T operatörü zayıf kompakt ise S operatörü de zayıf kompakttır.

Sahraoui (2021) majorizasyon kavramını, bir metrik uzaydan Banach uzayına tanımlanan Lipschitz operatörlerin majorizasyonu kavramına genişletmiş ve bu kavramın bazı özelliklerini ve karakterizasyonlarını elde etmiştir.

X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olmak üzere bir $f \in Lip_0(X,E)$ için $f(X)$ kümesinin baz noktasının 0 olduğu kabul edilecektir (Sahraoui, 2021).

Tanım 3.4.2 (Lipschitz Majorizasyon) X noktalı metrik uzay, E ve F Banach uzayları, $f \in Lip_0(X,E)$ ve $g \in Lip_0(X,F)$ olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq C\|f(x_1) - f(x_2)\|$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı varsa f operatörü g operatörünü majorize eder denir (Sahraoui, 2021, Tanım 3.1.1).

Önerme 3.4.4 X noktalı metrik uzay, E ve F Banach uzayları, $f \in Lip_0(X,E)$ ve $g \in Lip_0(X,F)$ olsun. f operatörünün g operatörünü majorize etmesi için gerek ve yeter şart $g = V \circ f$ ve $Lip(V) \leq C$ olacak şekilde bir $V \in Lip_0(\overline{f(X)},F)$ operatörünün mevcut olmasıdır (Sahraoui, 2021, Önerme 3.1.1).

Önerme 3.4.5 X noktalı metrik uzay, E ve F Banach uzayları, $f \in Lip_0(X,E)$ ve $g \in Lip_0(X,F)$ olsun. Eğer f operatörünün lineerleşmesi T_f, g operatörünün lineerleşmesi T_g operatörünü majorize ediyor ise f operatörü g operatörünü majorize eder (Sahraoui, 2021, Önerme 3.1.2).

Teorem 3.4.2 (Sahraoui, 2021, Teorem 3.1.1) X noktalı metrik uzay, E ve F Banach uzayları olsun.

a) $f \in Lip_0(X,E)$ ve $g \in Lip_0(X,F)$ olsun. f operatörü g operatörünü majorize ediyor ise $R(g^t) \subset R(f^t)$ dir.

b) $f \in Lip_0(X,E)$ ve $g \in Lip_0(X,F)$ ve $R(g^t) \subset R(f^t)$ olsun. f operatörü birebir ise f operatörü g operatörünü majorize eder.

c) $f \in Lip_0(X,E)$ ve $g \in Lip_0(Y,E)$ ve $Im_{Lip}(g) \subset Im_{Lip}(f)$ olsun. Bu takdirde f^t operatörü g^t operatörünü majorize eder.

Önerme 3.4.6 (Sahraoui, 2021, Önerme 3.1.3) X noktalı metrik uzay, E ve F Banach uzayları, $f \in Lip_0(X,E)$ ve $g \in Lip_0(X,F)$ olsun öyle ki f operatörünün lineerleşmesi T_f, g operatörünün lineerleşmesi T_g operatörünü majorize etsin. Bu takdirde,

a) f operatörü Lipschitz kompakt ise g operatörü de Lipschitz kompakttır.

b) f operatörü Lipschitz zayıf kompakt ise g operatörü de Lipschitz zayıf kompakttır.

4. ZAYIF $p-$KOMPAKT VE ŞARTSIZ $p-$KOMPAKT KÜMELERLE İLİŞKİLİ LIPSCHITZ OPERATÖRLER

Bu bölümde, üçüncü bölümde verilen literatürdeki çalışmalar zayıf $p-$kompakt ve şartsız $p-$kompakt kümeler için ele alınacaktır.

Öncelikle Lipschitz zayıf $p-$kompakt operatör tanımı verilecek ve bu operatör sınıfının özellikleri incelenecektir.

4.1. Lipschitz Zayıf $p-$Kompat Operatörler ve İlişkili Bazı Özellikler

Aşağıdaki tanım, Lipschitz kompakt ve Lipschitz $p-$kompakt operatör kavramlarından esinlenilerek bu kavramların zayıf $p-$kompakt kümeler üzerine uyarlanması olarak verilecektir.

Tanım 4.1.1 (Lipschitz Zayıf $p-$Kompakt Operatör) $1 \leq p < \infty$, X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olmak üzere, bir $f \in Lip_0(X, E)$ operatörünün Lipschitz görüntü kümesi E de relatif zayıf $p-$kompakt ise, f operatörü Lipschitz zayıf $p-$kompakt operatördür denir (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014, Tanım 2.1, bkz. Achour ve ark., 2019, Tanım 3.1).

X ten E ye tanımlanan tüm Lipschitz zayıf $p-$kompakt operatörlerin kümesi $Lip_0^{W_p}(X, E)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Not 4.1.1 $p \geq 1$ olmak üzere bir $(x_n)_n \in l_p^w(E)$ dizisinin $p - con(\{x_n\})$ zarfı mutlak konveks bir kümedir. $p > 1$ ise bu küme aynı zamanda zayıf kompakttır, özel olarak (norm) kapalıdır (Delgado ve ark., 2010, s. 293).

Gerçekten $p - con(\{x_n\})$ kümesinin mutlak konveks bir küme olduğu kolayca gösterilebilir. $p > 1$ iken bu kümenin zayıf kompakt olduğunu gösterelim. $x = (x_n)_n \in l_p^w(E)$ için $T_x: l_{p^*} \longrightarrow E$, $T_x((\alpha_n)_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ şeklinde tanımlanan operatör lineer ve sınırlıdır (bkz. Sinha ve Karn, s. 19). Diğer taraftan l_{p^*} refleksif bir Banach uzayı olduğundan $B_{l_{p^*}}$ zayıf kompakt kümedir (bkz. Megginson, 1998). T_x lineer ve sınırlı olduğundan $T_x(B_{l_{p^*}}) = p - con(\{x_n\})$ kümesi de zayıf kompakt olacaktır. Ayrıca, zayıf kompakt küme, zayıf kapalı ve böylece norm kapalı (bkz. Maligranda, 1992) olduğundan $p - con(\{x_n\})$ kümesi norm kapalıdır.

Not 4.1.1'i kullanılarak aşağıdaki lemmayı elde ederiz.

Lemma 4.1.1 $1 < p < \infty$ ve E bir Banach uzayı olsun. Eğer $A \subset E$ relatif zayıf p −kompakt bir küme ise, $\overline{abco}(A)$ kümesi E de zayıf p −kompakt bir kümedir (bkz. Delgado ve ark., 2010).

İspat Kabul edelim ki A kümesi E uzayında relatif zayıf p −kompakt olsun. Bu takdirde

$$A \subset p - con(\{x_n\}) := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : (a_n)_n \in B_{l_{p^*}}\right\}$$

olacak şekilde bir $(x_n)_n \in l_p^w(E)$ dizisi vardır. $p > 1$ olduğundan Not 4.1.1'den $p - con(\{x_n\})$ kümesi mutlak konveks ve (norm) kapalı bir kümedir. A kümesini kapsayan en küçük mutlak konveks küme $abco(A)$ olduğundan,

$$A \subset abco(A) \subset p - con(\{x_n\})$$

kapsaması elde edilir. Bu kapsamadaki kümelerin kapanışları alınırsa

$$A \subset \overline{A} \subset \overline{abco(A)} = \overline{abco}(A) \subset \overline{p - con(\{x_n\})}$$

elde edilir. $p - con(\{x_n\})$ kümesi (norm) kapalı olduğundan

$$A \subset \overline{abco}(A) \subset p - con(\{x_n\})$$

bulunur. Böylece $\overline{abco}(A)$ kümesinin zayıf p −kompakt küme olduğu elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde, Önerme 3.1.1 ve Teorem 3.2.1'in zayıf p −kompaktlık durumu ele alınmıştır. Teoremin ispatı Jiménez-Vargas ve ark.nın (2014, Önerme 2.1) ispat adımları takip edilerek yapılacaktır.

Teorem 4.1.1 $1 < p < \infty$, X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X,E)$ olsun. f operatörünün Lipschitz zayıf p −kompakt olması için gerek ve yeter şart f in lineerleşmesi T_f operatörünün zayıf p −kompakt olmasıdır (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

İspat Bölüm 2.4.4 de tanımlanan dönüşümler ve Lemma 3.1 kullanılarak

$$T_f\left(\delta_{\widetilde{X}}(\widetilde{X})\right) = \left\{T_f(\delta_{\widetilde{X}}(x,y)) : (x,y) \in \widetilde{X}\right\}$$

$$= \left\{T_f\left(\frac{\delta_x - \delta_y}{d(x,y)}\right) : (x,y) \in \widetilde{X}\right\}, \ T_f \text{ lineer olduğundan}$$

$$= \left\{\frac{T_f(\delta_x) - T_f(\delta_y)}{d(x,y)} : x,y \in X, x \neq y\right\}$$

$$= \left\{\frac{T_f(\delta_X(x)) - T_f(\delta_X(y)))}{d(x,y)} : x,y \in X, x \neq y\right\}$$

$$= \left\{\frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} : x,y \in X, x \neq y\right\} = Im_{Lip}(f) \tag{4.1.1}$$

elde edilir. T_f operatörünün lineerliği ve sürekliliğinden

$$T_f\left(\overline{abco}\left(\delta_{\widetilde{X}}(\widetilde{X})\right)\right) \subset \overline{abco}\left(T_f\left(\delta_{\widetilde{X}}(\widetilde{X})\right)\right) \tag{4.1.2}$$

yazılabilir. Diğer taraftan Lemma 3.2 ile $B_{\mathcal{F}(X)} = \overline{abco}\left(\delta_{\widetilde{X}}(\widetilde{X})\right)$ olduğundan (4.1.2) den

$$T_f\left(B_{\mathcal{F}(X)}\right) \subset \overline{abco}\left(T_f\left(\delta_{\widetilde{X}}(\widetilde{X})\right)\right) \tag{4.1.3}$$

elde edilir. $T_f\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right) \subset T_f\left(\overline{abco}\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right)$ olduğu ve (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) kullanılırsa

$$Im_{Lip}(f) \subset T_f\left(B_{\mathcal{F}(X)}\right) \subset \overline{abco}\left(Im_{Lip}(f)\right) \tag{4.1.4}$$

elde edilir.

$\Longrightarrow$ Kabul edelim ki f Lipschitz zayıf $p-$kompakt bir operatör olsun. Bu takdirde $Im_{Lip}(f)$ kümesi E de relatif zayıf $p-$kompakt bir küme olacaktır. Lemma 4.1.1 ile de $\overline{abco}\left(Im_{Lip}(f)\right)$ kümesi zayıf $p-$kompakttır. Böylece (4.1.4) kapsamasından $T_f\left(B_{\mathcal{F}(X)}\right)$ relatif zayıf $p-$kompakt olup, T_f zayıf $p-$kompakt operatördür.

$\Longleftarrow$ T_f lineerleşme operatörü zayıf $p-$kompakt olsun. Bu takdirde $T_f\left(B_{\mathcal{F}(X)}\right)$ relatif zayıf $p-$kompakt küme olur. (4.1.4) kapsaması ile $Im_{Lip}(f)$ kümesi de relatif zayıf $p-$kompakt bir küme olup, f operatörü Lipschitz zayıf $p-$ kompakttır. Böylece ispat tamamlanır. □

Kim (2019, Teorem 3.7 (c)), zayıf $p-$kompakt lineer bir operatörün eşleniğinin, yarı zayıf $p-$nükleer bir operatör olduğunu göstermiştir. Aşağıdaki önerme bu sonucu Lipschitz operatör durumuna genişletmektedir. Aynı zamanda, bu önerme, Teorem 3.2.2'nin zayıf $p-$kompakt kümeler için bir versiyonudur. Fakat Lipschitz zayıf $p-$kompakt operatörler durumunda bu önerme, Teorem 3.2.2'de olduğu gibi gerek yeter şart olarak elde edilememiştir.

Önerme 4.1.1 $1 < p < \infty$, X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olmak üzere, $f \in Lip_0(X,E)$ Lipschitz zayıf $p-$kompakt bir operatör ise $f^t: E^* \to X^\#$ yarı zayıf $p-$nükleer operatördür ve $\|f^t\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \leq \left\|T_f\right\|_{w_p}$ dir (bkz. Kim, 2019, Teorem 3.7 (c), bkz. Achour ve ark., 2019, Önerme 3.12).

İspat $f \in Lip_0(X,E)$ Lipschitz zayıf $p-$kompakt ise Teorem 4.1.1 ile T_f lineerleşmesi zayıf $p-$kompakttır. $T_f: \mathcal{F}(X) \longrightarrow E$ zayıf $p-$kompakt lineer bir operatör olduğundan

Kim (2019, Teorem 3.7 (c))'den $T_f{}^*: E^* \longrightarrow \mathcal{F}(X)^*$ yarı zayıf p −nükleer operatör ve $\|T_f{}^*\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \leq \|T_f\|_{W_p}$ dir. (3.1.1)'den

$$T_f{}^* = Q_X \circ f^t \text{ ve } Q_X^{-1} \circ T_f{}^* = f^t$$

olduğundan, yarı zayıf p −nükleer operatörlerin ideal özelliğinden f^t operatörü de yarı zayıf p −nükleer operatör olarak elde edilir. Ayrıca ideal normunun özelliğinden

$$\|T_f{}^*\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \leq \|Q_X\| \|f^t\|_{N_{wp}^Q} \quad \text{ve} \quad \|f^t\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \leq \|Q_X^{-1}\| \; \|T_f{}^*\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q}$$

yazılabilir. Q_X operatörünün izometrik izomorfizma olduğu göz önüne alınırsa

$$\|T_f{}^*\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \leq \|f^t\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \quad \text{ve} \quad \|f^t\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \leq \|T_f{}^*\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$\|f^t\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} = \|T_f{}^*\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q}$$

bulunur. $\|T_f{}^*\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \leq \|T_f\|_{W_p}$ olduğu da kullanılarak

$$\|f^t\|_{\mathcal{N}_{wp}^Q} \leq \|T_f\|_{W_p}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

$1 \leq p \leq q \leq \infty$ olmak üzere her zayıf p −kompakt küme zayıf q −kompakt küme olduğundan (Sinha ve Karn, 2002) ve $p > 1$ iken her relatif zayıf p −kompakt küme relatif zayıf kompakt olduğundan (Delgado ve ark., 2010) aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Önerme 4.1.2 X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. $f \in Lip_0(X, E)$ operatörü Lipschitz zayıf p −kompakt ise aynı zamanda Lipschitz zayıf q −kompakt operatördür. Özel olarak, $p > 1$ iken f Lipschitz zayıf p −kompakt operatör ise aynı zamanda Lipschitz zayıf kompakt operatördür.

Aşağıdaki önerme, Önerme 3.2.2'nin hipotezlerinde T_f operatörünün p −toplamsallığını, T_f^* operatörünün p −toplamsallığı ile, g Lipschitz operatörünün Lipschitz kompaktlığını, Lipschitz zayıf p −kompaktlığı ile değiştirdiğimizde aynı sonucun elde edilebileceğini göstermektedir.

Önerme 4.1.3 X, Z noktalı metrik uzaylar ve E bir Banach uzayı olmak üzere, $f \in Lip_0(X,E)$ ve $g \in Lip_0(Z,E^*)$ olsunlar. $1 < p < \infty$ olmak üzere, T_f^* operatörü p −toplamsal ve g operatörü Lipschitz zayıf p −kompakt ise $f^t \circ g$ operatörü Lipschitz p −kompakttır (bkz. Achour ve ark., 2019, Önerme 3.13).

İspat g Lipschitz zayıf p −kompakt olduğundan Teorem 4.1.1'den $T_g \in W_p(\mathcal{F}(Z),E^*)$ olduğunu biliyoruz. T_f^* operatörü p −toplamsal ve T_g zayıf p −kompakt lineer operatör olduğundan, Sinha ve Karn (2002, Önerme 5.4) vasıtasıyla, $T_f^* \circ T_g$ operatörünün p −kompakt olduğunu elde ederiz. Diğer taraftan (3.1.1)'den $T_f^* = Q_X \circ f^t$ olduğundan

$$Q_X^{-1} \circ T_f^* \circ T_g = f^t \circ T_g$$

elde edilir. $T_f^* \circ T_g$ operatörü p −kompakt olduğundan $f^t \circ T_g$ operatörü de p −kompakt olacaktır. Lemma 3.1 (d) ile $T_g \circ \delta_Z = g$ olduğundan

$$f^t \circ T_g \circ \delta_Z = f^t \circ g$$

olur. Teorem 2.4.1 ile $f^t \circ g \in Lip_0(Z,X^\#)$ dir ve Lemma 3.1 (d)'de belirtildiği gibi lineerleşmenin tekliğinden, $f^t \circ g$ Lipschitz operatörünün lineerleşmesi $f^t \circ T_g$ operatörü olacaktır. Diğer taraftan $f^t \circ T_g$ operatörü p −kompakt olduğundan Teorem 3.2.1 ile $f^t \circ g$ operatörü de Lipschitz p −kompakt olur. □

Not 4.1.2 E ve F Banach uzayları ve $S: E \to F$ lineer sınırlı operatör olsun. $A \subset E$ de relatif zayıf p −kompakt ise relatif zayıf p −kompakt kümenin tanımı ve Not 2.1.2 kullanılarak, $S(A)$ kümesinin de F de relatif zayıf p −kompakt olduğu gözlemlenir (bkz. Sinha ve Karn, 2002 ve bkz. Diestel ve ark., 1995, s. 34).

Kim (2020, Önerme 2.4) zayıf $p-$kompakt lineer operatörlerin çarpanlara ayrılışını karakterize eden bir sonuç vermiştir. Kim'in bu sonucu vasıtasıyla, Lipschitz zayıf $p-$kompakt operatörlerin çarpanlara ayrılışını karakterize eden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.1.2 $1 < p < \infty$, X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X,E)$ olsun. $f \in Lip_0^{W_p}(X,E)$ olması için gerek ve yeter şart $f = S \circ g$ olacak şekilde l_{p^*} uzayının bir Z bölüm uzayı, bir $S \in W_p(Z,E)$ operatörü ve bir $g \in Lip_0^{W_p}(X,Z)$ operatörünün mevcut olmasıdır. Ayrıca $Lip(f) \leq \|S\|_{W_p} Lip(g)$ dir (bkz. Kim, 2020, Önerme 2.4).

İspat $\Leftarrow$ Kabul edelim ki f hipotezde belirtilen $f = S \circ g$ ayrılışına sahip olsun. Bu takdirde

$$Im_{Lip}(f) = \left\{\frac{S(g(x)) - S(g(y))}{d(x,y)} : x, y \in X, x \neq y\right\}, (S \text{ lineer olduğundan})$$

$$= \left\{S\left(\frac{g(x) - g(y)}{d(x,y)}\right) : x, y \in X, x \neq y\right\}$$

$$= S(Im_{Lip}(g))$$

olacaktır. $g \in Lip_0^{W_p}(X,Z)$ olduğundan $Im_{Lip}(g)$ kümesi relatif zayıf $p-$kompakttır. S lineer sınırlı bir operatör olduğundan $S(Im_{Lip}(g))$ kümesi de Not 4.1.2'den relatif zayıf $p-$kompakttır. Böylece f Lipschitz zayıf $p-$kompakt operatördür.

$\Rightarrow$ Şimdi $f \in Lip_0(X,E)$ operatörü Lipschitz zayıf $p-$kompakt olsun. Teorem 4.1.1'den $T_f \in W_p(\mathcal{F}(X),E)$ olacağından, Kim'in (2020, Önerme 2.4) çarpanlara ayırma sonucu ile

$$T_f = S \circ R$$

olacak şekilde l_{p^*} uzayının bir Z bölüm uzayı, bir $R \in W_p(\mathcal{F}(X),Z)$ operatörü ve bir $S \in W_p(Z,E)$ operatörü vardır. Diğer taraftan Lemma 3.1 (d)'den

$f = T_f \circ \delta_X$

olduğundan $f = S \circ R \circ \delta_X$ elde edilir.

Şimdi $g := R \circ \delta_X$ olsun. Açık olarak $g \in Lip_0(X, Z)$ dir. Böylece, Lemma 3.1 (d)'den R operatörü g operatörünün lineerleşmesi olan T_g olacaktır. Böylece $T_g \in W_p(\mathcal{F}(X), Z)$ olup, Teorem 4.1.1'den $g \in Lip_0^{W_p}(X, Z)$ elde edilir. Böylece $f = S \circ g$ olacak şekilde l_{p^*} uzayının bir Z bölüm uzayı, $S \in W_p(Z, E)$ ve $g \in Lip_0^{W_p}(X, Z)$ operatörleri vardır.

Ayrıca Lemma 3.1 (d)'den $Lip(f) = \|T_f\|$ ve Sinha ve Karn'dan (2002, s. 22) $\|S\| \leq \|S\|_{W_p}$ olduğundan

$$Lip(f) = \|T_f\| = \|S \circ R\| \leq \|S\|\|R\| \leq \|S\|_{W_p}\|R\| = \|S\|_{W_p}\|T_g\| = \|S\|_{W_p}Lip(g)$$

olup ispat tamamlanır. □

$p > 1$ iken her zayıf p −kompakt operatörün aynı zamanda zayıf kompakt operatör olduğunu biliyoruz. Davis ve ark.nın (1974) zayıf kompakt lineer operatörleri refleksif Banach uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayırma sonucunu ve yukarıdaki teoremi kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Önerme 4.1.4 X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı, $1 < p < \infty$ ve $f \in Lip_0(X, E)$ olsun. $f \in Lip_0^{W_p}(X, E)$ olması için gerek ve yeter şart $f = Q \circ T \circ g$ olacak şekilde l_{p^*} uzayının bir Z bölüm uzayı, refleksif bir W Banach uzayı, $T \in \mathcal{B}(Z, W)$, $Q \in \mathcal{B}(W, E)$ operatörleri ve bir $g \in Lip_0^{W_p}(X, Z)$ operatörünün mevcut olmasıdır. Ayrıca $Lip(f) \leq \|Q\|\|T\|Lip(g)$ dir (bkz. Kim, 2020, Önerme 2.4, bkz. Davis ve ark., 1974).

Bu bölümü, Lipschitz zayıf p −kompakt operatörlerin ideal özelliğine sahip olduğunu göstererek bitireceğiz. Aşağıdaki sonuç Jiménez-Vargas ve ark.nın (2014, Önerme 2.3) Lipschitz kompakt operatörler için elde ettiği ideal özelliğinin Lipschitz zayıf p −kompakt operatörler için uyarlanmış halidir. İspat onların yöntemi takip edilerek ve Teorem 4.1.1 kullanılarak yapılacaktır.

Önerme 4.1.5 $p > 1$, X ve Y noktalı metrik uzaylar, E ve F Banach uzayları, $h \in Lip_0(Y,X)$ ve $S \in \mathcal{B}(E,F)$ olsun. Eğer $f \in Lip_0^{W_p}(X,E)$ ise $Sfh \in Lip_0^{W_p}(Y,F)$ dir (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014, Önerme 2.3).

İspat $h \in Lip_0(Y,X)$ olduğundan Lemma 3.1 (b)'den $\hat{h}\delta_Y = \delta_X h$ olacak şekilde bir tek $\hat{h} \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(Y),\mathcal{F}(X))$ operatörü vardır. Diğer taraftan Lemma 3.1 (d)'den $f = T_f\delta_X$ olduğundan $Sfh = ST_f\delta_X h = ST_f\hat{h}\delta_Y$ elde edilir. Lemma 3.1 (d) göz önüne alınırsa bu eşitlik Sfh operatörünün lineerleşmesi olan T_{Sfh} operatörünün, $ST_f\hat{h}$ operatörüne eşit olduğunu gösterir. Yani, $T_{Sfh} = ST_f\hat{h}$ dır. $f \in Lip_0^{W_p}(X,E)$ olduğundan Teorem 4.1.1'e göre $T_f \in W_p(\mathcal{F}(X),E)$ olur. W_p sınıfının ideal özelliğinden $T_{Sfh} \in W_p(\mathcal{F}(Y),F)$ elde edilir. Böylece Teorem 4.1.1 ile $Sfh \in Lip_0^{W_p}(Y,F)$ olup ispat tamamlanır. □

4.2. Lipschitz Şartsız p −Kompat Operatörler ve İlişkili Bazı Özellikler

Bu bölümde Lipschitz şartsız p −kompakt operatör kavramı tanımlanacak ve bu operatör ile ilgili bazı özellikler elde edilecektir.

Not 4.1.1 kullanılarak $p > 1$ olmak üzere bir $(x_n)_n \in l_p^u(E)$ dizisi için $p-con(\{x_n\})$ kümesinin mutlak konveks ve norm kapalı olacağı söylenebilir. Gerçekten $x = (x_n)_n \in l_p^u(E)$ iken $x \in l_p^w(E)$ olacağından Not 4.1.1'den $p - con\{(x_n)_n\}$ kümesinin mutlak konveks olacağı görülür. Diğer taraftan $x = (x_n)_n \in l_p^u(E)$ iken $T_x: l_{p^*} \longrightarrow E$ dönüşümü de lineer ve sürekli olacaktır. Böylece Not 4.1.1'deki ispat adımları takip edilerek $p - con(\{x_n\})$ kümesinin norm kapalı olduğu elde edilir.

Lemma 4.1.1'deki benzer adımlarla aşağıdaki lemma elde edilebileceği için bu lemma ispatsız verilecektir.

Lemma 4.2.1 $p > 1$ olmak üzere bir E Banach uzayının bir A alt kümesi şartsız p −kompakt ise $\overline{abco}(A)$ kümesi de şartsız p −kompakttır (bkz. Delgado ve ark., 2010).

Aşağıdaki tanım, Lipschitz kompakt ve Lipschitz $p-$kompakt operatör kavramlarından esinlenilerek bu kavramların şartsız $p-$kompakt kümeler üzerine uyarlanması olarak verilecektir.

Tanım 4.2.1 (Lipschitz Şartsız $\boldsymbol{p}$ −Kompakt Operatör) $p \geq 1$, X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olmak üzere $f \in Lip_0(X,E)$ olsun. f operatörünün Lipschitz görüntü kümesi $Im_{Lip}(f)$, E'de relatif şartsız $p-$kompakt ise, f operatörü Lipschitz şartsız $p-$kompakttır denir (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014, Tanım 2.1, bkz. Achour ve ark., 2019, Tanım 3.1).

X ten E ye tanımlanan tüm Lipschitz şartsız $p-$kompakt operatörlerin kümesi $Lip_0^{up}(X,E)$ notasyonu ile gösterilecektir.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere her $p-$kompakt kümenin şartsız $p-$kompakt küme olduğunu ve her şartsız $p-$kompakt kümenin de kompakt küme olduğunu kullanarak (Kim, 2014) aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.2.1 X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $f \in Lip_0(X,E)$ Lipschitz $p-$kompakt operatör ise aynı zamanda Lipschitz şartsız $p-$kompakt operatördür. f Lipschitz şartsız $p-$kompakt operatör ise aynı zamanda Lipschitz kompakt operatördür.

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 4.1.1'in ispatındaki adımlar birebir takip edilerek ve Lemma 4.2.1 kullanılarak elde edilebilir. Bu nedenle teorem, ispatı yapılmaksızın verilecektir.

Teorem 4.2.1 $p > 1$, X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X,E)$ olsun. f operatörünün Lipschitz şartsız $p-$kompakt olması için gerek ve yeter şart T_f lineerleşme operatörünün şartsız $p-$kompakt olmasıdır (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014).

Kim (2014, Teorem 2.4) (aynı zamanda, bkz. Kim, 2017, Teorem 5.6) lineer bir operatörün şartsız $p-$kompakt olması için gerek ve yeter şartın operatörün eşleniğinin yarı şartsız p −nükleer olması gerektiği sonucunu elde etmiştir. Aşağıdaki önermeyle bu sonucu Lipschitz operatör durumuna genişleteceğiz. Bu önerme aynı zamanda şartsız p −kompakt kümeler için Teorem 3.2.2'nin bir versiyonudur.

Önerme 4.2.2 $p > 1$, X noktalı metrik uzay ve E bir Banach uzayı olmak üzere $f \in Lip_0(X, E)$ olsun. f operatörünün Lipschitz şartsız p −kompakt olması için gerek ve yeter şart $f^t: E^* \to X^\#$ operatörünün yarı şartsız p −nükleer operatör olmasıdır. Bu durumda $\|f^t\|_{\mathcal{N}_{up}^Q} = \|T_f\|_{up}$ dir (bkz. Kim, 2014, Teorem 2.4, bkz. Achour ve ark., 2019, Önerme 3.12).

İspat $\Rightarrow$ $f \in Lip_0(X, E)$ operatörü Lipschitz şartsız p −kompakt olsun. Teorem 4.2.1'den $T_f: \mathcal{F}(X) \to E$ lineerleşme operatörü şartsız p −kompakttır. Kim (2014, Teorem 2.4)'den ${T_f}^*$ yarı şartsız p −nükleer operatördür. (3.1.1)'den

$${T_f}^* = Q_X \circ f^t \text{ ve } f^t = Q_X^{-1} \circ {T_f}^*$$

olduğundan yarı şartsız p −nükleer operatörlerin ideal özelliği ile f^t yarı şartsız p −nükleer operatör olur.

$\Leftarrow$ $f^t: E^* \to X^\#$ operatörünün yarı şartsız p −nükleer operatör olduğunu kabul edelim. ${T_f}^* = Q_X \circ f^t$ bileşkesinde Q_X lineer sürekli olduğu için ${T_f}^*$ operatörü de yarı şartsız p −nükleer operatör olur. Kim'in (2014 Teorem 2.4) sonucu kullanılarak $T_f \in K_{up}(\mathcal{F}(X), E)$ elde edilir. Böylece, Teorem 4.2.1'den f operatörü Lipschitz şartsız p −kompakttır.

Ayrıca (3.1.1) göz önüne alınarak yarı şartsız p −nükleer operatörlerin ideal özelliği kullanılırsa

$$\|f^t\|_{\mathcal{N}_{up}^Q} = \|{T_f}^*\|_{\mathcal{N}_{up}^Q}$$

eşitliği elde edilir. Kim'den (2017, Teorem 5.6)

$$\|{T_f}^*\|_{\mathcal{N}_{up}^Q} = \|T_f\|_{up}$$

olduğundan $\|f^t\|_{\mathcal{N}_{up}^Q} = \|T_f{}^*\|_{\mathcal{N}_{up}^Q} = \|T_f\|_{up}$ elde edilir. □

Kim'in (2014, Teorem 2.4) sonucunu Teorem 4.2.1 ile birleştirerek aşağıdaki önermeyi elde ederiz. Bu önermede kısmen Achour ve ark.nın (2019, Önerme 3.13) sonucundan esinlenilmiştir.

Önerme 4.2.3 $p > 1$, X ve Z noktalı metrik uzaylar, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X, E)$ olsun. Eğer f operatörünün lineerleşmesi T_f zayıf $p-$toplanabilen dizileri şartsız $p-$toplanabilen dizilere dönüştüren bir operatör ve $S \in Lip_0^{W_p}(Z, \mathcal{F}(X))$ ise $S^t T_f^* \in \mathcal{N}_{up}^Q(E^*, Z^\#)$ dir (bkz. Kim, 2014, Teorem 2.4, bkz. Achour ve ark., 2019, Önerme 3.13).

İspat $S \in Lip_0^{W_p}\big(Z, \mathcal{F}(X)\big)$ olduğundan Teorem 4.2.1'den $T_S \in W_p\big(\mathcal{F}(Z), \mathcal{F}(X)\big)$ dır. T_f zayıf $p-$toplanabilen dizileri şartsız $p-$toplanabilen dizilere dönüştüren bir operatör olduğundan $T_f \circ T_S \in \mathcal{K}_{up}(\mathcal{F}(Z), E)$ elde edilir. Kim'den (2014, Teorem 2.4), $(T_f \circ T_S)^* \in \mathcal{N}_{up}^Q(E^*, \mathcal{F}(Z)^*)$ elde edilir. (3.1.1)'den $T_S^* = Q_Z \circ S^t$ olduğundan

$$Q_Z \circ S^t \circ T_f^* = T_S^* \circ T_f^* = (T_f \circ T_S)^* \in \mathcal{N}_{up}^Q(E^*, \mathcal{F}(Z)^*)$$

olup Q_Z operatörünün izometrik izomorfizma olduğu ve $\mathcal{N}_{up}^Q$ nin ideal özelliği kullanılırsa $S^t T_f^* \in \mathcal{N}_{up}^Q(E^*, Z^\#)$ elde edilir. □

Teorem 4.2.1 ve Kim'in (2014) elde ettiği bazı sonuçları birleştirerek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.2.2 $1 < p < \infty$ ve X noktalı metrik uzay olsun öyle ki $\mathcal{F}(X)^*$ uzayı injektif bir Banach uzayı olsun. E injektif bir Banach uzayı olmak üzere bir $f \in Lip_0(X, E)$ dönüşümü için $f \in Lip_0^{up^*}(X, E)$ ise $T_f \in \mathcal{N}_{up}(\mathcal{F}(X), E)$ dir (bkz. Kim, 2014).

İspat Kabul edelim ki $f \in Lip_0^{up^*}(X, E)$ olsun. Teorem 4.2.1'den $T_f \in \mathcal{K}_{up^*}(\mathcal{F}(X), E)$ olduğunu biliyoruz. Kim'den (2014, Teorem 2.4), $T_f{}^* \in \mathcal{N}_{up^*}^Q(E^*, \mathcal{F}(X)^*)$ dir. $\mathcal{F}(X)^*$

uzayının injektifliği göz önüne alınarak, Kim'in (2014, Lemma 2.6) sonucu kullanılırsa ${T_f}^* \in \mathcal{N}_{up^*}(E^*, \mathcal{F}(X)^*)$ elde edilir. Kim'in (2014, Önerme 2.2) ispatından $\mathcal{N}_{up^*} \subset \mathcal{K}_{up}$ olduğu göz önüne alınırsa ${T_f}^* \in K_{up}(E^*, \mathcal{F}(X)^*)$ elde edilir. Kim (2014, Teorem 2.3) ile $T_f \in \mathcal{N}_{up}^{Q}(\mathcal{F}(X), E)$ olur. E injektif Banach uzayı olduğundan Kim'den (2014, Lemma 2.6) $T_f \in \mathcal{N}_{up}(\mathcal{F}(X), E)$ elde edilir. □

Aşağıdaki not $\mathcal{F}(X)^*$ uzayı injektif bir Banach uzayı olacak şekilde en az bir X noktalı metrik uzayının varlığını gösterir.

Not 4.2.1 $X = \mathbb{R}$ ise, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1$ olduğunu biliyoruz (Godefroy, 2015). Ayrıca $L_1^* = L_\infty$ ve L_∞ injektif bir Banach uzayıdır (bkz. Albiac ve Kalton, 2006, Önerme 4.3.8 (ii)). Böylece $\mathcal{F}(\mathbb{R})^*$ uzayı injektif bir Banach uzayı olur.

Not 4.2.2 E ve F Banach uzayları ve $S: E \to F$ lineer sınırlı bir operatör olsun. $A \subset E$ de relatif şartsız p −kompakt ise relatif şartsız p −kompakt kümenin tanımı ve Gözlem 2.1.1 kullanılarak, $S(A)$ kümesinin de F de relatif şartsız p −kompakt küme olduğu gözlemlenir (bkz. Kim, 2014 ve bkz. Fourie ve Swart, 1979, Lemma 1.2).

Kim'in (2017, Teorem 2.2) lineer şartsız p −kompakt operatörleri çarpanlara ayırışı sonucunu ve Teorem 4.2.1'i kullanarak, Lipschitz şartsız p −kompakt operatörlerin çarpanlara ayrılışı için aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.2.3 $p > 1$, X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X, E)$ olsun. $f \in Lip_0^{up}(X, E)$ olması için gerek ve yeter şart $f = S \circ g$ olacak şekilde l_{p^*} uzayının bir Z bölüm uzayı ve $S \in \mathcal{K}_{up}(Z, E)$ ve $g \in Lip_0^{up}(X, Z)$ operatörlerinin mevcut olmasıdır. Bu durumda $Lip(f) \leq \|S\|_{up} Lip(g)$ dir (bkz. Kim, 2017, Teorem 2.2).

İspat $\Leftarrow$ $f \in Lip_0(X, E)$ belirtilen çarpanlara ayrılmaya sahip ise, Teorem 4.1.2'nin ispatındaki gibi $Im_{Lip}(f) = S(Im_{Lip}(g))$ olduğu ve Not 4.2.2 kullanılarak $f \in Lip_0^{up}(X, E)$ elde edilir.

$\Rightarrow$ Kabul edelim ki $f \in Lip_0^{up}(X, E)$ olsun. Teorem 4.2.1'den $T_f \in \mathcal{K}_{up}(\mathcal{F}(X), E)$ olduğundan, Kim'in (2017, Teorem 2.2) çarpanlara ayırma sonucu ile

$T_f = S \circ R$

olacak şekilde l_{p^*} uzayının bir Z bölüm uzayı, bir $R \in \mathcal{K}_{up}(\mathcal{F}(X), Z)$ operatörü ve bir $S \in \mathcal{K}_{up}(Z, E)$ operatörü vardır. Diğer taraftan Lemma 3.1 (d)'den

$f = T_f \circ \delta_X$

olduğundan $f = S \circ R \circ \delta_X$ elde edilir. $g := R \circ \delta_X$ olsun. Bu takdirde $g \in Lip_0(X, Z)$ olduğu açıktır. Lemma 3.1 (d)'den, g operatörünün $g = T_g \circ \delta_X$ olacak şekilde bir tek T_g lineerleşmesi olduğundan $T_g = R$ elde edilir. Böylece $T_g \in \mathcal{K}_{up}(\mathcal{F}(X), Z)$ olup Teorem 4.2.1'den $g \in Lip_0^{up}(X, Z)$ elde edilir. O halde $f = S \circ g$ olacak şekilde bir Z bölüm uzayı, bir $S \in \mathcal{K}_{up}(Z, E)$ operatörü ve bir $g \in Lip_0^{up}(X, Z)$ operatörü vardır. Ayrıca

$Lip(f) = \|T_f\| = \|S \circ R\| \leq \|S\|_{W_p} \|R\| \leq \|S\|_{up}\, Lip(g)$

olup ispat tamamlanır. □

Kim'in (2017, Teorem 2.3) lineer p −kompakt operatörleri, lineer şartsız p −kompakt ve lineer p −kompakt operatörler vasıtasıyla çarpanlara ayırışı sonucunu kullanarak, Lipschitz p −kompakt operatörlerin çarpanlara ayrılışı için aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.2.4 $p > 1$, X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $f \in Lip_0(X, E)$ olsun. $f \in Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X, E)$ olması için gerek ve yeter şart $f = S \circ g$ olacak şekilde l_{p^*} uzayının bir Z bölüm uzayı, $S \in \mathcal{K}_p(Z, E)$ ve $g \in Lip_0^{up}(X, Z)$ operatörlerinin mevcut olmasıdır. Bu durumda $Lip(f) \leq \|S\|_{\mathcal{K}_p} Lip(g)$ dir (bkz. Kim, 2017, Teorem 2.3).

İspat $\Leftarrow f = S \circ g$ ise Teorem 4.1.2'nin ispatından $Im_{Lip}(f) = S(Im_{Lip}(g))$ olduğunu biliyoruz. Hipotezler altında $Im_{Lip}(g)$ kümesi relatif şartsız p −kompakt böylece relatif kompakt bir kümedir. S lineer p −kompakt operatör olduğundan, sınırlı kümeleri relatif p −kompakt kümelere dönüştürür (Sinha ve Karn, 2002). Böylece $S(Im_{Lip}(g))$ relatif p −kompakt bir küme olup $f \in Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X, E)$ elde edilir.

$\Longrightarrow f \in Lip_0^{\mathcal{K}_p}(X,E)$ iken Teorem 3.2.1'den $T_f \in \mathcal{K}_p(\mathcal{F}(X),E)$ olduğunu biliyoruz. Kim'in (2017, Teorem 2.3) sonucunu kullanarak

$$T_f = S \circ R$$

olacak şekilde l_{p^*} uzayının bir Z bölüm uzayı, bir $R \in \mathcal{K}_{up}(\mathcal{F}(X),Z)$ operatörü ve bir $S \in \mathcal{K}_p(Z,E)$ operatörünün mevcut olduğunu elde ederiz. Teorem 4.2.3'teki benzer adımları takip ederek de istenen sonucu elde ederiz. □

Bu bölümü, Lipschitz şartsız p −kompakt operatörlerin ideal özelliğine sahip olduğunu gösteren bir sonucu vererek bitireceğiz. Bu sonuç, Önerme 4.1.5'teki adımlar takip edilerek ve Teorem 4.2.1 kullanılarak ispatlanabilir.

Önerme 4.2.4 $p > 1$, X ve Y noktalı metrik uzaylar, E ve F Banach uzayları, $h \in Lip_0(Y,X)$ ve $S \in \mathcal{B}(E,F)$ olsun. Eğer $f \in Lip_0^{up}(X,E)$ ise $Sfh \in Lip_0^{up}(Y,F)$ dir (bkz. Jiménez-Vargas ve ark., 2014, Önerme 2.3).

4.3. Lipschitz Serbest Zayıf p −Kompakt ve Lipschitz Serbest Şartsız p −Kompakt Operatörler

Bu bölümde, Bölüm 3.3'te verilen Lipschitz serbest p −kompakt operatör kavramı ve özellikleri, zayıf p −kompakt ve şartsız p −kompakt kümeler durumunda ele alınacaktır.

Öncelikle Lipschitz serbest zayıf p −kompakt operatör ve Lipschitz serbest şartsız p −kompakt operatör kavramlarını tanımlayacağız. Belirtelim ki, bu kavramlar Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas'ın (2016) tanımladığı Lipschitz serbest kompakt (zayıf kompakt) operatör ve Achour ve ark.nın (2019) tanımladığı Lipschitz serbest p −kompakt operatörler kavramlarının zayıf p −kompakt ve şartsız p −kompakt kümelere uyarlanmış halleridir.

Tanım 4.3.1 (Lipschitz Serbest Zayıf p −Kompakt Operatör) X ve Y noktalı metrik uzaylar ve $p \geq 1$ olmak üzere $f \in Lip_0(X,Y)$ operatörü verilsin. $\delta_Y \circ f : X \to \mathcal{F}(Y)$

operatörü Lipschitz zayıf p −kompakt ise f Lipschitz serbest zayıf p −kompakttır denir (bkz. Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas, 2016, bkz. Achour ve ark., 2019).

Tanım 4.3.2 (Lipschitz Serbest Şartsız $\boldsymbol{p}$ −Kompakt Operatör) X ve Y noktalı metrik uzaylar ve $p \geq 1$ olmak üzere $f \in Lip_0(X,Y)$ operatörü verilsin. $\delta_Y \circ f : X \to \mathcal{F}(Y)$ operatörü Lipschitz şartsız p −kompakt ise f Lipschitz serbest şartsız p −kompakttır denir (bkz. Cabrera–Padilla ve Jiménez-Vargas, 2016, bkz. Achour ve ark., 2019).

X ten Y ye tanımlanan tüm Lipschitz serbest şartsız p −kompakt operatörlerin kümesi $\mathcal{F}Lip_0^{up}(X,Y)$ notasyonu ile, tüm Lipschitz serbest zayıf p −kompakt operatörlerin kümesi de $\mathcal{F}Lip_0^{W_p}(X,Y)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Cabrera-Padilla ve Jiménez-Vargas'ın (2016, Teorem 2.3) Lipschitz serbest kompakt operatörler için, Achour ve ark.nın (2019, Teorem 4.2) Lipschitz serbest p −kompakt operatörler için elde ettiği karakterizasyonların benzeri aşağıdaki teoremde, Lipschitz serbest şartsız p −kompakt operatörler için elde edilmiştir. Teoremin ispatı çalışmadan elde edilen sonuçlarla birlikte, Achour ve ark.nın (2019, Teorem 4.2) ispat yöntemi takip edilerek yapılacaktır.

Teorem 4.3.1 (bkz. Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas, 2016, Teorem 2.3, bkz. Achour ve ark., 2019, Teorem 4.2) X ve Y noktalı metrik uzaylar ve $f \in Lip_0(X,Y)$ olsun. $p > 1$ için aşağıdakiler denktir.

(a) f Lipschitz serbest şartsız p −kompakttır.

(b) $\widehat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ operatörü lineer şartsız p −kompakttır.

(c) $f^{\#}: Y^{\#} \to X^{\#}$ operatörü yarı şartsız p −nükleerdir.

İspat Teoremin ispatından önce belirtelim ki, $f \in Lip_0(X,Y)$ iken $\delta_Y \circ f: X \to \mathcal{F}(Y)$ Lipschitz operatör olup, Lemma 3.1 (d)'den $\delta_Y \circ f = T_{\delta_Y \circ f} \circ \delta_X$ olarak yazılabilir ve aynı zamanda Lemma 3.1 (b)'den $\widehat{f} \circ \delta_X = \delta_Y \circ f$ dir. Buradan $\delta_Y \circ f = \widehat{f} \circ \delta_X = T_{\delta_Y \circ f} \circ \delta_X$ olup, Lemma 3.1 (d)'den lineerleşmenin tekliği ile $\widehat{f} = T_{\delta_Y \circ f}$ elde edilir.

(a) $\Leftrightarrow$ **(b)** f Lipschitz serbest şartsız $p-$kompakt ise $\delta_Y \circ f : X \to \mathcal{F}(Y)$ operatörü Lipschitz şartsız $p-$kompakttır. Teorem 4.2.1'den $T_{\delta_Y \circ f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ operatörü lineer şartsız $p-$kompakt olacağından, $\widehat{f}$ operatörünün lineer şartsız $p-$kompaktlığı elde edilir. Tersine olarak, $\widehat{f}$ operatörü lineer şartsız $p-$kompakt ise, $T_{\delta_Y \circ f}$ operatörü lineer şartsız $p-$kompakttır. Teorem 4.2.1 ile $\delta_Y \circ f : X \to \mathcal{F}(Y)$ operatörü Lipschitz şartsız $p-$kompakt olup, f operatörünün Lipschitz serbest şartsız $p-$kompaktlığı elde edilir.

(b) ve (c) şıklarının denkliğini göstermek için, (3.1.1) kullanılarak elde edilebilen $(Q_X)^{-1} \circ \widehat{f}^{\,*} \circ Q_Y = f^{\#}$ eşitliğini kullanacağız.

(b) $\Leftrightarrow$ **(c)** $\widehat{f}$ lineer operatör şartsız $p-$kompakt ise, onun transpozu $\widehat{f}^{\,*}$ operatörünün yarı şartsız $p-$nükleer olduğunu, Kim (2014, Teorem 2.4) ile biliyoruz. Lineer yarı şartsız $p-$nükleer operatörlerin ideal özelliği ile $f^{\#}$ operatörünün yarı şartsız $p-$nükleer olduğu elde edilir. Tersine olarak, $f^{\#}$ operatörü yarı şartsız $p-$nükleer ise ideal özelliğinden, $\widehat{f}^{\,*} = Q_X \circ f^{\#} \circ (Q_Y)^{-1}$ yarı şartsız $p-$nükleer operatördür. Böylece Kim'in (2014, Teorem 2.4) sonucu ile $\widehat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ lineer şartsız $p-$kompakt operatör olarak elde edilir. □

Not 4.3.1 $p \geq 1$ olmak üzere E ve F Banach uzayları $T \in W_p(E,F)$ ise $T^* \in \mathcal{N}_{wp}^{Q}(F^*, E^*)$ olduğunu biliyoruz (Kim, 2019, Teorem 3.7). Bu önermenin tersinin doğruluğunu bilmediğimiz için Teorem 4.3.1'in zayıf $p-$kompaktlık durumu için aşağıdaki teoremi elde ederiz. Teoremin ispatı, Teorem 4.1.1 kullanılarak Teorem 4.3.1'e benzer olarak yapılabileceğinden teoremi ispatlamaksızın vereceğiz.

Teorem 4.3.2 (bkz. Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas, 2016, Teorem 2.3, bkz. Achour ve ark., 2019, Teorem 4.2) X ve Y noktalı metrik uzaylar ve $f \in Lip_0(X,Y)$ olsun. $p > 1$ için aşağıda verilenler denktir.

(a) f Lipschitz serbest zayıf $p-$kompakttır.

(b) $\widehat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ operatörü lineer zayıf $p-$kompakttır.

$\mathcal{F}Lip_0^W$ ve $\mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}}$ notasyonları sırasıyla, Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas'ın (2016, Tanım 2.1) tanımlamış olduğu Lipschitz serbest zayıf kompakt ve Lipschitz serbest kompakt operatörlerin kümesini gösterecektir.

p −kompakt, şartsız p −kompakt, zayıf p −kompakt, kompakt ve zayıf kompakt kümeler arasındaki ilişkiler ve ilgili tanımlar göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.3.1 $1 < p \leq q$ olmak üzere

$$\mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_p} \subset \mathcal{F}Lip_0^{up} \subset \mathcal{F}Lip_0^{W_p} \subset \mathcal{F}Lip_0^W,$$

$$\mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_p} \subset \mathcal{F}Lip_0^{up} \subset \mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}} \subset \mathcal{F}Lip_0^W,$$

$$\mathcal{F}Lip_0^{\mathcal{K}_p} \subset \mathcal{F}Lip_0^{up} \subset \mathcal{F}Lip_0^{W_p} \subset \mathcal{F}Lip_0^{W_q} \subset \mathcal{F}Lip_0^W$$

kapsamaları elde edilir.

Aşağıdaki önerme zayıf p −kompakt kümeler ile ilişkili olarak tanımlanan iki Lipschitz operatör sınıfı arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Önermenin ispatı Achour ve ark.nın (2019, Önerme 4.6) ispat adımları takip edilerek yapılacaktır.

Önerme 4.3.2 $p > 1$ olmak üzere $\mathcal{F}Lip_0^{W_p} \subset Lip_0^{W_p}$ dir (bkz. Achour ve ark. 2019, Önerme 4.6).

İspat X noktalı metrik uzay, E bir Banach uzayı ve $p > 1$ olmak üzere $f \in \mathcal{F}Lip_0^{W_p}(X, E)$ olsun. Bu takdirde, $\delta_E \circ f : X \to \mathcal{F}(E)$ Lipschitz zayıf p −kompakt operatör olacağından $Im_{Lip}(\delta_E \circ f)$ kümesi relatif zayıf p −kompakttır. Diğer taraftan, Cabrera-Padilla ve Jiménez-Vargas'ın (2016, Önerme 2.2) ispatından, $\beta_E\big(Im_{Lip}(\delta_E \circ f)\big) = Im_{Lip}(f)$ eşitliği yazılabilir. β_E sınırlı lineer bir operatör olduğundan, Not 4.1.2'den $Im_{Lip}(f)$ kümesi relatif zayıf p −kompakt olur. Böylece $f \in Lip_0^{W_p}(X, E)$ olup $\mathcal{F}Lip_0^{W_p} \subset Lip_0^{W_p}$ elde edilir. □

Önerme 4.3.2'deki benzer adımlar relatif şartsız $p-$kompakt kümeler içinde benzer şekilde çalışacağından aşağıdaki önermeyi ispatını yapmaksızın vereceğiz.

Önerme 4.3.3 $p > 1$ olsun. Bu takdirde, $\mathcal{F}Lip_0^{up} \subset Lip_0^{up}$ dır (bkz. Achour ve ark. 2019, Önerme 4.6).

Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas (2016, Önerme 2.6) Lipschitz serbest kompakt (zayıf kompakt) operatörlerin ideal özelliğini gösteren bir sonuç, Achour ve ark. da (2019, Teorem 4.8) Lipschitz serbest $p-$kompakt operatörlerin ideal özelliğini gösteren bir sonuç elde etmişlerdir. Aşağıdaki teoremlerde bu sonuçların, şartsız $p-$kompakt ve zayıf $p-$kompakt kümeler için versiyonları elde edilmiştir. Teoremlerin ispatı çalışmadan elde edilen sonuçlar kullanılarak, Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas'ın (2016, Önerme 2.6) (aynı zamanda, Achour ve ark.nın, 2019, Teorem 4.8) ispat metodu takip edilerek yapılacaktır.

Teorem 4.3.3 (İdeal Özelliği) X, Y, Z, W noktalı metrik uzaylar ve $p > 1$ olmak üzere eğer $R \in Lip_0(X, Y)$, $f \in \mathcal{F}Lip_0^{up}(Y, Z)$ ve $S \in Lip_0(Z, W)$ ise $S \circ f \circ R \in \mathcal{F}Lip_0^{up}(X, W)$ dir (bkz. Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas, 2016, Önerme 2.6, bkz. Achour ve ark., 2019, Teorem 4.8).

İspat $\widehat{SfR} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(W)$ lineer operatörünün şartsız $p-$kompakt olduğunu gösterirsek Teorem 4.3.1 ile $S \circ f \circ R \in \mathcal{F}Lip_0^{up}(X, W)$ olduğunu göstermiş oluruz. $f \in \mathcal{F}Lip_0^{up}(Y, Z)$ olduğundan Teorem 4.3.1'den $\hat{f} \in \mathcal{K}_{up}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(Z))$ dir. $\mathcal{K}_{up}$ sınıfının ideal özelliğinden $\hat{S} \circ \hat{f} \circ \hat{R} \in \mathcal{K}_{up}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(W))$ olur. Diğer taraftan Lemma 3.1 (b)'den

$$\hat{R} \circ \delta_X = \delta_Y \circ R \quad \text{ve} \quad \hat{f} \circ \delta_Y = \delta_Z \circ f \quad \text{ve} \quad \hat{S} \circ \delta_Z = \delta_W \circ S \tag{4.3.1}$$

ve

$$\widehat{SfR} \circ \delta_X = \delta_W \circ (S \circ f \circ R) \tag{4.3.2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece (4.3.2) eşitliğinde, (4.3.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\delta_W \circ (S \circ f \circ R) = \hat{S} \circ \delta_Z \circ f \circ R = \hat{S} \circ \hat{f} \circ \delta_Y \circ R \; = \; \hat{S} \circ \hat{f} \circ \hat{R} \circ \delta_X$$

elde edilir. Lemma 3.1 (b) göz önüne alınırsa $\widehat{SfR} \; = \; \hat{S} \circ \hat{f} \circ \hat{R}$ olduğu görülür. Böylece $\widehat{SfR} \; \in \mathcal{K}_{up}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(W))$ elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.3.3'teki benzer adımlar, relatif şartsız $p-$kompakt kümeler içinde benzer şekilde çalışacağından aşağıdaki teoremi ispatını yapmaksızın vereceğiz.

Teorem 4.3.4 (İdeal Özelliği) X, Y, Z, W noktalı metrik uzaylar ve $p > 1$ olmak üzere eğer $R \in Lip_0(X, Y)$, $f \in \mathcal{F}Lip_0^{W_p}(Y, Z)$ ve $S \in Lip_0(Z, W)$ ise $S \circ f \circ R \in \mathcal{F}Lip_0^{W_p}(X, W)$ dir (bkz. Cabrera–Padilla ve Jiménez–Vargas, 2016, Önerme 2.6, bkz. Achour ve ark., 2019, Teorem 4.8).

4.4. Majorizasyonlar Kullanılarak Lipschitz Operatörler İçin Elde Edilen Bazı Sonuçlar

Bu bölümde, Bölüm 4.1 ve Bölüm 4.2'de elde edilen sonuçların bir kısmı, Bölüm 3.4'te verilen majorizasyon sonuçları ile değerlendirilerek bazı sonuçlar elde edilecektir.

Aşağıdaki önerme, Önerme 3.4.6'nın $p-$kompakt, zayıf $p-$kompakt ve şartsız $p-$kompakt kümeler üzerine uyarlanması olarak verilecektir. Önermenin ispatı çalışmamızdan elde edilen sonuçlar ve Sahraoui'nin (2021, Önerme 3.1.3) ispatında olduğu gibi Barnes'ın (2004, Önerme 6) sonucu kullanılarak yapılacaktır.

Önerme 4.4.1 (bkz. Barnes, 2004, Önerme 6, bkz. Sahraoui, 2021, Önerme 3.1.3) X noktalı metrik uzay, E ve F Banach uzayları, $f \in Lip_0(X, E)$ ve $g \in Lip_0(X, F)$ olsun öyle ki f operatörünün lineerleşmesi T_f, g operatörünün lineerleşmesi T_g operatörünü majorize etsin. Bu takdirde,

a) f operatörü Lipschitz $p-$kompakt ise g operatörü de Lipschitz $p-$kompakttır.

b) f operatörü Lipschitz zayıf $p-$kompakt ise g operatörü de Lipschitz zayıf $p-$kompakttır.

c) f operatörü Lipschitz şartsız $p-$kompakt ise g operatörü de Lipschitz şartsız $p-$kompakttır.

İspat a) Kabul edelim ki T_f operatörü T_g operatörünü majorize etsin ve f operatörü Lipschitz $p-$kompakt olsun. Teorem 3.2.1'den T_f operatörü $p-$kompakttır ve Önerme 3.4.1'den $T_g = V \circ T_f$ olacak şekilde $V \in \mathcal{B}(\overline{T_f(\mathcal{F}(X))}, F)$ operatörü vardır. T_f operatörü $p-$kompakt olduğundan ve $p-$kompakt lineer operatörlerin ideal özelliğinden T_g operatörü de $p-$kompakttır. Böylece Teorem 3.2.1'den g operatörü de Lipschitz $p-$kompakttır.

b) Teorem 4.1.1 ve Önerme 3.4.1 kullanılarak (a) şıkkına benzer şekilde ispatlanır.

c) Teorem 4.2.1 ve Önerme 3.4.1 kullanılarak (a) şıkkına benzer şekilde ispatlanır. □

Önerme 4.4.2 $p > 1$, X, Y noktalı metrik uzaylar, E Banach uzayı, $f \in Lip_0(X, E)$ ve $g \in Lip_0(Y, E)$ olsun ve f^t operatörü g^t operatörünü majorize etsin. Bu takdirde,

a) f operatörü Lipschitz $p-$kompakt ise g operatörü de Lipschitz $p-$kompakttır.

b) f operatörü Lipschitz şartsız $p-$kompakt ise g operatörü de Lipschitz şartsız $p-$kompakttır.

İspat a) f Lipschitz $p-$kompakt ise, Teorem 3.2.2'den $f^t: E^* \longrightarrow X^\#$ yarı $p-$nükleer operatördür. O halde Tanım 2.3.7'den, her $e^* \in E^*$ için

$$Lip\big(f^t(e^*)\big) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{**}(e^*)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.4.1}$$

olacak şekilde bir $(x_n^{**})_n \in l_p(E^{**})$ vardır. Diğer taraftan $f^t: E^* \longrightarrow X^\#$ operatörü $g^t: E^* \longrightarrow Y^\#$ operatörünü majorize ettiğinden Tanım 3.4.1'den, her $e^* \in E^*$ için

$$Lip\big(g^t(e^*)\big) \leq MLip\big(f^t(e^*)\big) \tag{4.4.2}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. (4.4.1) ve (4.4.2)'den, her $e^* \in E^*$ için

$$Lip\big(g^t(e^*)\big) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|(Mx_n^{**})(e^*)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Diğer taraftan $(Mx_n^{**})_n \in l_p(E^{**})$ olacağından Tanım 2.3.7 ile g^t de yarı p −nükleer operatör olur. Teorem 3.2.2 ile de g operatörünün Lipschitz p −kompakt olduğu elde edilir.

b) f Lipschitz şartsız p −kompakt ise, Önerme 4.2.2'den $f^t: E^* \longrightarrow X^\#$ yarı şartsız p −nükleer operatördür. O halde Tanım 2.3.8'den, her $e^* \in E^*$ için

$$Lip\big(f^t(e^*)\big) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{**}(e^*)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4.4.3)$$

olacak şekilde bir $(x_n^{**})_n \in l_p^u(E^{**})$ vardır. Diğer taraftan $f^t: E^* \longrightarrow X^\#$ operatörü $g^t: E^* \longrightarrow Y^\#$ operatörünü majorize ettiğinden Tanım 3.4.1'den, her $e^* \in E^*$ için

$$Lip\big(g^t(e^*)\big) \leq MLip\big(f^t(e^*)\big) \qquad (4.4.4)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. (4.4.3) ve (4.4.4)'den her $e^* \in E^*$ için

$$Lip\big(g^t(e^*)\big) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(Mx_n^{**})(e^*)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Diğer taraftan $(Mx_n^{**})_n \in l_p^u(E^{**})$ olacağından Tanım 2.3.8 ile g^t de yarı şartsız p −nükleer operatör olur. Önerme 4.2.2 ile de g operatörünün Lipschitz şartsız p −kompakt olduğu elde edilir. □

Not 4.4.1 Önerme 4.1.1 gerek ve yeter şart olarak elde edilemediği için, Önerme 4.4.2'den elde edilen sonuçlar zayıf p −kompakt kümeler üzerinde verilememiştir.

Önerme 4.4.3 $p > 1$, X, Y noktalı metrik uzaylar, E bir Banach uzayı, $f \in Lip_0(X, E)$ ve $g \in Lip_0(Y, E)$ olsun. Eğer f^t operatörü yarı zayıf p −nükleer ve g^t operatörünü majorize ediyor ise g^t operatörü de yarı zayıf p −nükleerdir.

İspat $f^t: E^* \longrightarrow X^\#$ operatörü $g^t: E^* \longrightarrow X^\#$ operatörünü majorize ediyorsa Tanım 3.4.1'den, her $e^* \in E^*$ için

$$Lip\big(g^t(e^*)\big) \leq MLip\big(f^t(e^*)\big)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. f^t yarı zayıf p −nükleer operatör olduğundan Tanım 2.3.7'den, her $e^* \in E^*$ için

$$Lip\big(f^t(e^*)\big) \leq (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{**}(e^*)|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olacak şekilde bir $(x_n^{**})_n \in l_p^w(E^{**})$ vardır. Böylece, her $e^* \in E^*$ için

$$Lip\big(g^t(e^*)\big) \leq M(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{**}(e^*)|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{n=1}^{\infty}|(Mx_n^{**})(e^*)|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olup $(Mx_n^{**})_n \in l_p^w(E^{**})$ olduğundan Tanım 2.3.7'den g^t de yarı zayıf p −nükleer operatör olur. □

Önerme 4.4.3'ün bir sonucu olarak aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.4.4 $p > 1$, X, Y noktalı metrik uzaylar, E bir Banach uzayı, $f \in Lip_0(X, E)$, $g \in Lip_0(Y, E)$ ve $Im_{Lip}(g) \subset Im_{Lip}(f)$ olsun. Eğer f^t yarı zayıf p −nükleer operatör ise g^t de yarı zayıf p −nükleer operatördür.

İspat $Im_{Lip}(g) \subset Im_{Lip}(f)$ olduğundan Teorem 3.4.2'den f^t operatörü g^t operatörünü majorize eder. Ayrıca f^t yarı zayıf p −nükleer operatör olduğundan, ispat Önerme 4.4.3'ün ispatından takip edilir. □

Aşağıdaki önerme, Önerme 3.4.6'da (Sahraoui, 2021, Önerme 3.1.3) T_f operatörünün T_g operatörünü majorize etmesi şartını, f operatörünün g operatörünü majorize etmesi şartı ile değiştirdiğimizde de aynı sonucun elde edilebileceğini göstermektedir. Önermenin ispatı, Sahraoui'nin (2021, Teorem 3.1.1 (a)), Vargas ve ark.nın (2014, Önerme 3.5 ve Önerme 3.4) ve Barnes'ın (2004, Önerme 8) sonuçları kullanılarak yapılacaktır.

Önerme 4.4.5 X noktalı metrik uzay, E ve F Banach uzayları, $f \in Lip_0(X, E)$ ve $g \in Lip_0(X, F)$ olsun ve f operatörü g operatörünü majorize etsin. Eğer f Lipschitz (zayıf) kompakt ise g de Lipschitz (zayıf) kompakttır (bkz. Sahraoui, 2021, Önerme 3.1.3).

İspat f operatörü g operatörünü majorize ettiğinden Teorem 3.4.2'den $R(g^t) \subset R(f^t)$ olur. f Lipschitz (zayıf) kompakt olduğundan Önerme 3.1.5'ten f^t (zayıf) kompakt operatördür. O halde Önerme 3.4.3 gereğince g^t (zayıf) kompakt operatör ve Önerme 3.1.5 gereğince de g operatörü Lipschitz (zayıf) kompakttır. □

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, Lipschitz zayıf kompakt operatörlerin güçlü bir versiyonu olarak Lipschitz zayıf p −kompakt operatörler ve Lipschitz p −kompakt operatörlerin zayıf bir versiyonu olarak da Lipschitz şartsız p −kompakt operatörler üzerine çalışılmıştır. Banach uzayları arasında tanımlanan bu operatör sınıflarının sırasıyla, lineer zayıf p −kompakt ve lineer şartsız p −kompakt operatörlerin doğal bir genişlemesi olduğu ve dolayısıyla lineer durumda mevcut olan bazı özelliklerin Lipschitz durumuna taşınabildiği gözlemlenmiştir. Bu bağlamda, noktalı bir metrik uzaydan Banach uzayına tanımlanan ve baz noktasını koruyan bir Lipschitz operatör için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Lipschitz operatörün zayıf p −kompaktlığı ile operatörün lineerleşmesinin zayıf p −kompaktlığının denk olduğu (Teorem 4.1.1), Lipschitz zayıf p −kompakt operatörün, bir bölüm uzayı ve zayıf p −kompakt lineer bir operatör vasıtasıyla çarpanlara ayrılabildiği (Teorem 4.1.2), Lipschitz zayıf p −kompakt operatörün Lipschitz transpozunun yarı zayıf p −nükleer operatör olduğu (Önerme 4.1.1) ve Lipschitz zayıf p −kompakt operatörün ideal özelliğine sahip olduğu (Önerme 4.1.5) sonuçları elde edilmiştir.

Lipschitz operatörün şartsız p −kompaktlığı ile operatörün lineerleşmesinin şartsız p −kompaklığının denk olduğu (Teorem 4.2.1), Lipschitz operatörün şartsız p −kompaktlığı ile Lipschitz transpozunun yarı şartsız p −nükleerliğinin denk olduğu (Önerme 4.2.2), Lipschitz şartsız p −kompakt operatörün, bir bölüm uzayı ve şartsız p −kompakt lineer bir operatör vasıtasıyla çarpanlara ayrılabildiği (Teorem 4.2.3) ve Lipschitz şartsız p −kompakt operatörün ideal özelliğine sahip olduğu (Önerme 4.2.4) sonuçları elde edilmiştir.

Noktalı iki metrik uzay arasında tanımlanan ve baz noktasını koruyan bir Lipschitz operatör için, operatörün Lipschitz serbest şartsız p −kompaktlığı ve Lipschitz serbest zayıf p −kompaktlığı ile ilgili karakterizasyonlar (sırasıyla, Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2) elde edilmiştir. Ayrıca Lipschitz serbest zayıf p −kompakt operatörün Lipschitz zayıf p −kompakt olduğu (Önerme 4.3.2) ve Lipschitz serbest şartsız p −kompakt operatörün Lipschitz şartsız p −kompakt olduğu sonucu (Önerme

4.3.3) elde edilmiştir. Aynı zamanda Lipschitz serbest şartsız p −kompakt ve Lipschitz serbest zayıf p −kompakt operatörlerin ideal özelliğine sahip oldukları sonuçları (sırasıyla, Teorem 4.3.3 ve Teorem 4.3.4) elde edilmiştir.

Son olarak birinin lineerleşmesi diğerinin lineerleşmesini majorize eden iki Lipschitz operatör verildiğinde, operatörler arasındaki Lipschitz p −kompakt, Lipschitz zayıf p −kompakt ve Lipschitz şartsız p −kompaktlık ilişkilerini gösteren bir sonuç (Önerme 4.4.1) elde edilmiştir. Lineerleşme yerine Lipschitz transpoz alınması durumunda da benzer ilişkilerin kısmen elde edilebildiğini gösteren bir sonuç (Önerme 4.4.2) verilmiştir.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada, Achour ve ark.nın (2019) tanımlamış ve çalışmış olduğu Lipschitz lokal olarak p −kompakt operatör kavramı ve bu operatöre ait özelliklere ve bu operatörün zayıf p −kompakt, şartsız p −kompakt kümeler için tanımlanabilecek versiyonlarına değinilmemiştir. Konu ile ilgilenen araştırmacılar, belirtilen operatör sınıfları üzerine çalışarak bu sınıfların özelliklerini ve tez çalışmasında verilen operatör sınıfları ile aralarındaki ilişkileri inceleyebilirler.

KAYNAKLAR

Achour, D., Dahia, E. and Turco, P., 2019, Lipschitz $p-$compact mappings, *Monatshefte für Mathematik*, 189, 595-609.

Albiac, F. and Kalton, N. J., 2006, Topics in Banach space theory, New York, *Springer*.

Ain, K. and Oja, E., 2015, On (p,r) $-$null sequences and their relatives, *Mathematische Nachrichten*, 288 (14-15), 1569-1580.

Barnes, B.A., 2004, Majorization, range inclusion, and factorization for bounded linear operators, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 133 (1), 155-162.

Cabrera-Padilla, M. G., and Jiménez-Vargas, A., 2016, A new approach on Lipschitz compact operators, *Topology and its Applications*, 203, 22-31.

Chen, D. And Zheng, B., 2011, Remarks on Lipschitz $p-$summing operators, *Proceedings of the American Mathematical* Society, 139 (8), 2891-2898.

Chen, D., and Zheng, B., 2012, Lipschitz $p-$integral operators and Lipschitz p $-$nuclear operators, *Nonlinear Analysis*, 75 (13), 5270-5282.

Cotlar, M. and Cignoli, R., 1974, An introduction to functionals analysis, North-Holland, Amsterdam.

Davis, W. J., Figiel, T., Johnson, W.B. and Pelczynski, A., 1974, Factoring weakly compact operators, *Journal of Functional Analysis*, 17 (3), 311-327.

Delgado, J.M., Pineiro, C. and Serrano, E., 2010, Operators whose adjoints are quasi p $-$nuclear, *Studia Mathematica*, 197 (3).

Diestel, J., Jarchow, H. and Tonge, A., 1995, Absolutely summing operators, *Cambridge University Press*.

Diestel, J., Fourie, J.H and Swart, J., 2008, The metric theory of tensor products (Grothendieck's resume revisited), *American Mathematical Society*, Providence.

Farmer, J., and Johnson, W., 2009, Lipschitz p $-$summing operators, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137 (9), 2989-2995.

Fourie, J., and Swart, J., 1979, Banach ideals of p $-$compact operators, *Manuscripta Mathematica*, 26 (4), 349-362.

Galicer, D., Lassalle, S., Turco, P., 2012, The ideal of p-compact operators: a tensor product approach, *Studia Mathematica,* 211 (3), 269-286.

Godefroy, G., 2015, A survey on Lipschitz-free Banach spaces, *Commentationes Mathematicae*, 55 (2), 89-118.

Grothendieck, A., 1955, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 16.

Harte, R., 1988, Invertibility and singularity for bounded linear operators, *Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, New York and Basel.

Jiménez-Vargas, A., Sepulcre, J. M. and Villegas-Vallecillos, M., 2014, Lipschitz compact operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 415 (2), 889–901.

Kim, J.M., 2013, The approximation properties via the Grothendieck p-compact sets, *Mathematische Nachrichten*, 286 (4), 360-373.

Kim, J.M., 2014, Unconditionally $p-$null sequences and unconditionally $p-$compact operators, *Studia Mathematica*, 224 (2), 133-142.

Kim, J.M., 2017, The ideal of unconditionally $p-$compact operators, *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 47 (7), 2277-2293.

Kim, J.M., 2019, The ideal of weakly $p-$nuclear operators and its injective and surjective hulls, *Journal of the Korean Mathematical* Society, 56 (1), 225-237.

Kim, J.M., 2020, The ideal of weakly $p-$compact operators and its approximation property for Banach spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math*, 45 (2), 863-876.

Köthe, G., 1969, Topological Vector Spaces I, *Springer-Verlag*, New York.

Kreyszig, E., 1978, Introductory functional analysis with applications, *John Wiley & Sons*, New York.

Maligranda, L., 1992, Weakly compact operators and interpolation, *Acta Applicandae Mathematica*, 27, 79-89.

Megginson, R. E., 1998, An introduction to Banach space theory, *Springer-Verlag*, New York.

Persson, A. and Pietsch, A., 1969, $p-$nukleare und $p-$integrale Abbildungen in Banachräumen, *Studia Mathematica*, 33 (1), 19-62.

Pestov, V.G., 1986, Free Banach spaces and representations of topological groups, *Functional Analysis and Its Applications*, 20 (1), 70-72.

Ryan, R.A., 2002, Introduction to tensor products of Banach spaces, *Springer-Verlag*, London.

Sahraoui, A., 2021, Majorizimg Lipschitz operators, *Master Thesis*, Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département de Mathématiques-Option: Analyse Fonctionnelle.

Sinha, D.P. and Karn, A.K., 2002, Compact operators whose adjoints factor through subspaces of l_p, *Studia Mathematica*, 150 (1), 17-33.

Weaver, N., 1999, Lipschitz algebras, *World Scientific Publishing*, Singapore.