T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Doktora Tezi

LİNEER CEBİR DERSİNDE ÇOKLU TEMSİL TEMELLİ VE PROBLEME DAYALI ÖĞRETİMİN ÖĞRETMEN ADAYLARININ DÜŞÜNME YAPILARINA, ANLAMA BOYUTLARINA, AKADEMİK BAŞARILARINA VE ÖZYETERLİK ALGILARINA ETKİSİ

Atiye AYYILDIZ ALTINBAŞ

Danışman
Prof. Dr. Süleyman SOLAK

İkinci Danışman
Prof. Dr. Erhan ERTEKİN

Konya 2021

ÖN SÖZ (TEŞEKKÜR)

Özveri gerektiren bu süreçte motive olmamı sağlayan, tez çalışmam boyunca her daim desteğini ve yardımlarını esirgemeyen, yalnızca bir rehber olarak değil bir model olarak çalışmamı tamamlamamda büyük katkıları olan tez danışmanlarımdan Prof. Dr. Süleyman SOLAK'a ve Prof. Dr. Erhan ERTEKİN'e, doktora sürecinde tanıdığım çalışmama ışık tutan her daim minnetle anacağım Doç. Dr. Tuğba HORZUM'a, lisans öğrenimimden bu yana görüşleriyle destek olan değerli hocalarım Prof. Dr. Ahmet ERDOĞAN'a, Dr. Öğretim Üyesi Ahmet CİHANGİR'e, bölümdeki tüm hocalarıma ve çalışmaya katılan öğretmen adaylarına sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Tüm süreç boyunca desteğini hiç eksik etmeyen, güçlüklerin üstesinden gelmemi sağlayan, her zaman yanımda olan çok değerli aileme; canım anneme, babama, kardeşime, eşime ve hayatım boyunca motivasyon kaynağım olan abime en içten duygularımla teşekkür ederim.

Atiye AYYILDIZ ALTINBAŞ

KONYA- 2021

İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ (TEŞEKKÜR).....İ
İÇİNDEKİLER ..... İİ
TEZ ÇALIŞMASI ORİJİNALLİK RAPORU.....Vİ
BİLİMSEL ETİK BEYANNAMESİ.....Vİİ
SİMGELER VE KISALTMALAR ..... Vİİİ
ÖZET X
ABSTRACT.....Xİ
1 GİRİŞ 1
1.1 Problem Durumu..... 6
1.2 Araştırmanın Amacı 7
1.3 Araştırmanın Önemi..... 10
1.4 Varsayımlar..... 11
1.5 Sınırlılıklar 12
1.6 Tanımlar..... 12
2 ALANYAZIN VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR 14
2.1 Lineer Cebir Öğretimi..... 14
2.2 Çoklu Temsil Temelli Öğretim..... 16
2.3 Probleme Dayalı Öğretim 17
2.4 Düşünme Yapıları 18
2.5. Matematiksel Anlama 21
2.5.1 Beceri algoritma boyutu..... 24
2.5.2 Özellik ispat anlama boyutu..... 25
2.5.3 Temsil metafor anlama boyutu 27
2.5.4 Kullanım modelleme anlama boyutu 30
2.6 Özyeterlik..... 33
2.7 Kavramlar arası ilişkilendirme..... 34
2.8 İLGİLİ ARAŞTIRMALAR 41
2.8.1 Lineer Cebir ile İlgili Çalışmalar 41
2.8.2 Çoklu Temsil Temelli Öğretim ile İlgili Çalışmalar..... 42
2.8.3 Probleme Dayalı Öğretim ile İlgili Çalışmalar 46
2.8.4 Düşünme Yapıları ile İlgili Çalışmalar 48
2.8.5 Anlama Boyutları ile İlgili Çalışmalar..... 49
2.8.6. Özyeterlik ile İlgili Çalışmalar..... 50
2.8.7 Kavramlar Arası İlişkilendirme ile İlgili Yapılan Çalışmalar..... 51
3 YÖNTEM 55
3.1 Araştırmanın Modeli 55

3.2 Araştırmanın Katılımcıları 59
3.3 İşlem Yolu 62
3.3.1 PDÖ'nün uygulandığı deneysel süreç 63
3.3.2 Çoklu temsil temelli GeoGebra destekli öğretimin uygulandığı deneysel süreç 77
3.3.3 Geleneksel uygulama 89
3.4 Veri Toplama Araçları 89
3.4.1 Matematik süreç aracı 90
3.4.2 Matematiğe karşı özyeterlik algısı ölçeği 91
3.4.3 Lineer cebir performans testi 91
3.4.4 Görüşme 96
3.4.5 Değerlendirme formlarının hazırlanması 98
3.4.6 Senaryolar ve modüllerin hazırlanması 100
3.4.7 Çalışma yapraklarının hazırlanması 102
3.5 Verilerin Toplanması 103
3.6 Verilerin Analizi 103
3.6.1 Nicel veri analizi 104
3.6.2 Nitel veri analizi 113
3.6.3 Nitel toplanan verilerin nicel analizi 126
4 BULGULAR VE YORUMLAR 129
4.1 Araştırmanın Birinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar 129
4.2 Araştırmanın İkinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar 130
4.3 Araştırmanın Üçüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar 131
4.4 Araştırmanın Dördüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar 132
4.5 Araştırmanın Beşinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar 136
4.5.1 Çalışma gruplarının lineer birleşim kavramına ilişkin performansları 140
4.5.2 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin performansları 141
4.5.3 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer denklem-LDS kavramına ilişkin performansları 142
4.5.4 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer dönüşüm kavramına ilişkin performansları 143
4.5.5 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının geometrik temsile ilişkin performansları 144
4.5.6 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının rutin olmayan problemlere ilişkin performansları 145
4.6 Araştırmanın Altıncı Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar 146
4.7 Araştırmanın Yedinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar 149
4.7.1 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Lineer Birleşim Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi 150
4.7.2 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Germe Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi 153

4.7.3 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Lineer Bağımlılık/Bağımsızlık Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi ... 157
4.7.4 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Lineer Denklem-LDS Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi ... 161
4.7.5 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Lineer Dönüşüm Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi ... 165
4.8 Araştırmanın Sekizinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar ... 169
4.8.1 Öğretmen Adaylarının Kendini Değerlendirdiği KDF'den Elde Edilen Verilerin Analizine İlişkin Bulgular ... 169
4.8.2 Öğretmen Adaylarının Eğitim Yönlendiricisini Değerlendirdiği EYDF'den Elde Edilen Verilerin Analizine İlişkin Bulgular ... 172
4.8.3 Eğitim Yönlendiricisinin Öğretmen Adaylarını Değerlendirdiği ÖADF'den Elde Edilen Verilerin Analizine İlişkin Bulgular ... 175
4.9 Araştırmanın Dokuzuncu Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar ... 178
4.9.1 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "formal/işlemsel ilişkilendirme" temasının özeti ... 179
4.9.2 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "teorik/özellik ilişkilendirme biçimi" temasının özeti ... 182
4.9.3 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "geometrik ilişkilendirme biçimi" temasının özeti ... 184
4.9.4 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçimi" temasının özeti ... 187
4.9.5 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "uzaysal ilişkilendirme biçimi" temasının özeti ... 191
4.10 Araştırmanın Onuncu Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar ... 193
4.10.1 Lineer birleşim-germe kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular ... 193
4.10.2 Germe-lineer bağımsızlık kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular ... 196
4.10.3 Germe-baz kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular . 202
4.10.4 Lineer bağımsızlık-baz/boyut kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular ... 208
4.10.5 Lineer bağımsızlık- LDS kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular ... 212
4.10.6 Baz- lineer dönüşüm kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular ... 220
4.11 Araştırmanın Onbirinci Alt Probleme İlişkin Bulgular ve Yorumlar ... 223
4.12 Araştırmanın Onikinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar ... 232

5 SONUÇ VE TARTIŞMA ... 234
5.1 Tartışma ... 234
5.2 Sonuç ... 249
5.3 Öneriler ... 251

GENİŞLETİLMİŞ TÜRKÇE ÖZET ... 256

KAYNAKÇA.......... 259

EKLER.......... 283
EK 1. Lineer Cebir Performans Testi 283
EK 2. Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği 288
EK 3. Kendini Değerlendirme Formu.......... 289
EK 4. Eğitim Yönlendiricisini Değerlendirme Formu.......... 290
EK 5. Öğretmen Adayını Değerlendirme Formu.......... 291
EK 6. Modüller 292
EK 7. Çalışma Yaprağı 3 305
EK 8. Çalışma Yaprağı 3 307
EK 9. İlişkilendirme Görüşme Formu 310
EK 10. Öğretmen Adaylarından Birinin (ÇÖ2) Görüşme Sürecine İlişkin Transkript.......... 312
EK 11. Matematik Süreç Aracı İzni.......... 316
EK 12. Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği İzni.......... 317
EK 13. Araştırma İzin Belgesi.......... 318

TEZ ÇALIŞMASI ORİJİNALLİK RAPORU

Lineer Cebir Dersinde Çoklu Temsil Temelli ve Probleme Dayalı Öğretimin Öğretmen Adaylarının Düşünme Yapılarına, Anlama Boyutlarına, Akademik Başarılarına ve Özyeterlik Algılarına Etkisi başlıklı tez çalışmamın İç Kapak, Özetler, Ekler ve Ana Bölümlerden (Giriş, Alan Yazın, Yöntem, Bulgular, Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler) oluşan toplam **298** sayfalık kısmına ilişkin, 6/09/2021 tarihinde tez danışmanım tarafından **Turnitin** adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı **%7** olarak belirlenmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

1. Tez kabul sayfası hariç,
2. Tez çalışması orijinallik raporu sayfası hariç,
3. Bilimsel etik beyannamesi sayfası hariç,
4. Önsöz hariç,
5. İçindekiler hariç,
6. Simgeler ve kısaltmalar hariç,
7. Kaynakça hariç
8. Özgeçmiş hariç,
9. Alıntılar dâhil,
10. 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve tez çalışmamın, bu uygulama esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Atiye AYYILDIZ ALTINBAŞ

Prof. Dr. Süleyman SOLAK

BİLİMSEL ETİK BEYANNAMESİ

Bu tezin tamamının kendi çalışmam olduğunu, planlanmasından yazımına kadar tüm aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez hazırlama kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını ve bu kaynakların kaynakça listesine eklendiğini beyan ederim.

6/09/2021

Atiye AYYILDIZ ALTINBAŞ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

p : Anlamlılık düzeyi

$\bar{x}$: aritmetik ortalama

η^2: Etki büyüklüğü değeri

S_x : Standart sapma

χ^2: Ki kare değeri

n: Öğretmen adayı sayısı

Kısaltmalar

BA: Beceri algoritma

ÇTTÖ: Çoklu temsil temelli öğretim

EYDF: Eğitim Yönlendiricisini Değerlendirme Formu

GÖ: Geleneksel öğretim

HLDS: Homojen lineer denklem sistemi

HOLDS: Homojen olmayan lineer denklem sistemi

İGF: İlişkilendirme görüşme formu

KDF: Kendini Değerlendirme Formu

KM: Kullanım modelleme

LCPT: Lineer Cebir Performans Testi

LDS: Lineer denklem sistemi

MSA: Matematiksel Süreç Aracı

MKÖAÖ: Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği

ÖADF: Öğretmen Adaylarını Değerlendirme Formu

Öİ: Özellik ispat

PDÖ: Probleme dayalı öğretim

TM: Temsil metafor

ÖZET

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi Bilim Dalı
Doktora Tezi

LİNEER CEBİR DERSİNDE ÇOKLU TEMSİL TEMELLİ VE PROBLEME DAYALI ÖĞRETİMİN ÖĞRETMEN ADAYLARININ DÜŞÜNME YAPILARINA, ANLAMA BOYUTLARINA, AKADEMİK BAŞARILARINA VE ÖZYETERLİK ALGILARINA ETKİSİ

Atiye AYYILDIZ ALTINBAŞ

Bu çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının lineer cebir dersinde sergiledikleri anlama boyutlarını belirlemek ve çoklu temsil temelli ve probleme dayalı öğretimin öğretmen adaylarının performanslarına, düşünme yapılarına, anlama boyutlarına ve özyeterlik algılarına etkisini incelemektir. Araştırmanın katılımcılarını, 2018-2019 öğretim yılında İç Anadolu bölgesinde bir devlet üniversitesinin farklı iki eğitim fakültesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünün 2. sınıfında öğrenim görmekte olan öğretmen adayları oluşturmaktadır. Araştırmanın yöntemi özü itibari ile deneysel olup, deneysel kısımdan elde edilen nicel verilerin nitel verilerle desteklenmesi nedeniyle araştırma deseni karma yöntem olarak belirlenmiştir. Uygulama sürecinde lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, germe, baz, lineer denklem sistemi, lineer dönüşüm kavramlarıyla ilgili GeoGebra yazılımından yararlanarak geliştirilen görsel materyaller, bu kavramların gerçek hayattaki uygulamalarından esinlenerek oluşturulan senaryolar ve çalışma yaprakları kullanılmıştır. Araştırmada veriler; Umay (2001) tarafından hazırlanman "*Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği*", Presmeg (1985) tarafından geliştirilen "*Matematik Süreç Aracı*" ve araştırmacılar tarafından geliştirilen açık uçlu sorulardan oluşan "*Lineer Cebir Performans Testi*" ve *"İlişkilendirme Görüşme Formu"* aracılığıyla toplanmıştır. Verilerin nicel analizinde betimsel istatistiklerden, bağımlı gruplar t-testinden, Wilcoxon işaretli sıralar testinden, tek yönlü varyans analizinden, Kruskal Wallis testinden, iki yönlü kay kare testinden, Spearman Rho korelasyon katsayısı tekniğinden, Pearson Momentler Çarpımı Korelasyon katsayısı tekniğinden, McNemar testinden, McNemar Bowker testinden ve tekrarlı ölçümler için tek yönlü varyans analizinden; nitel analizlerde ise sürekli karşılaştırmalı analizden yararlanılmıştır. Araştırma sonucunda lineer cebir dersini çoklu temsil temelli ve probleme dayalı öğrenen ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının, formalizme dayalı geleneksel öğretimle öğrenen ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına göre daha başarılı olduğu ve bu yaklaşımların özyeterlik algısını geliştirmede daha etkili olduğu görülmüştür. Bununla birlikte, karşılaştırma grubunda anlamlı bir farklılaşma olmadığı tespit edilen anlama boyutlarının, çalışma gruplarında zenginleştiği belirlenmiştir. Çalışma gruplarında uygulanan öğretim yaklaşımlarının kavram bazında sergilenen anlama boyutlarına farklı yansımaları olduğu ve anlamanın eksik boyutlarını tamamlama yönünde etkili olduğu tespit edilmiştir. Kavramlar arası ilişkilendirmede, yüksek düzeyde lineer cebir performansı sergileyen öğretmen adaylarının, orta ve düşük düzeyde lineer cebir performansı sergileyen öğretmen adaylarına göre daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmede en çok formal/işlemsel, en az uzaysal ilişkilendirme biçimlerinden yararlandığı tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmedeki yanılgılarının, daha çok çalışmaya konu olan kavramlarla ilgili teoremlere ilişkin yanılgılarından ve bu kavramlara ilişkin yanlış çıkarımlarda bulunmalarından kaynaklandığı sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer cebir, kavramlar arası ilişkilendirme, matematiksel anlama**,** özyeterlilik algısı, çoklu temsil, probleme dayalı öğretim, McNemar Bowker testi.

ABSTRACT

Department of Mathematics and Sciences Education
Mathematics Education Program
Doctoral Thesis

THE EFFECT OF MULTIPLE REPRESENTATION BASED AND PROBLEM BASED INSTRUCTION IN LINEAR ALGEBRA COURSE ON THE THINKING MODES, UNDERSTANDING DIMENSIONS, ACADEMIC ACHIEVEMENTS AND CONTEXTS OF SELF-EFFICACY OF PRE-SERVICE TEACHERS

Atiye AYYILDIZ ALTINBAŞ

The aim of this study is to detect understanding dimensions of preservice teachers in linear algebra and to investigate the effects of multi representation-based instruction and problem-based instruction on preservice teachers'academic achievements, thinking modes, understanding dimensions and self-efficacy perception. Research working group consists of preservice teachers who study Department of Elementary Mathematics Education in two different education faculties of a state university in Central Anatolian Region in 2018-2019 academic year. The research design has been determined as a mixed method since the quantitative data, obtained from the experimental part, were supported by qualitative data for all that the method of the research is experimental in its essence. During the application process, visual materials made with GeoGebra software related to linear combination, linear dependency/independency, span, base, linear equation system, linear transformation concepts and scenarios reflecting real-life applications of these concepts and worksheets have been used. Data in the research; it was collected through the "Mathematics Self-Efficacy Scale" prepared by Umay (2001), "Mathematical Process Instrument" developed by Presmeg (1985) and "Linear Algebra Performance Test" and "Connection Interview Form" consisting of open-ended questions developed by the researchers. In the quantitative analysis of the data, descriptive statistics, dependent groups t-test, Wilcoxon signed-rank test, one-way analysis of variance, Kruskal Wallis test, two-way chi-square significance test, Spearman Rho correlation coefficient technique, Pearson Product Moments Correlation coefficient technique, McNemar test, McNemar Bowker test and one way analyses of variance for repeated measures were used. On the other hand data were qualitatively analyzed using constant comparative analysis. It has been seen in the research results that preservice teachers who learn linear algebra through multi representation-based instruction and problem-based instruction approaches are more successful than the other preservice teachers who learn linear algebra through traditional instruction based on formalism and these approaches are more effective in developing self-efficacy perception. Also, understanding dimensions, which were not found to be significantly different in the control group, found to be enriched in experimental groups. It has been determined that the teaching approaches applied in the study groups have different reflections on the understanding dimensions displayed on the basis of the concept and are effective in completing the deficient dimensions of understanding. It has been determined that pre-service teachers who show high level linear algebra performance are more successful than pre-service teachers who show medium and low level linear algebra performance, in connection between concepts. However, it has been detected that preservice teachers make formal/operational connections the most and make spatial connections the least. It is concluded that preservice teachers'misconceptions in associating concepts are the result of their misconceptions in theorems which subject to studying concepts and because of their false inferences about the concepts.

Keywords: Linear algebra, connection between concepts, mathematical understanding, self-efficacy perception, multi representation, problem-based instruction, McNemar Bowker test.

BÖLÜM 1

1 GİRİŞ

Toplum; devamlı değişmekte ve gelişmekte olan bilim ve teknolojiye, yeniliklere uyum sağlayabilen, bilime katkıda bulunan üretken bireylere ihtiyaç duymaktadır. Bu nedenle topluma; gerçek hayatta karşılaştığı sorunları çözebilen, yaratıcı, iletişim ve problem çözme becerilerine sahip, grupla çalışabilen, analitik ve eleştirel düşünebilen bireyler kazandırmak gerekmektedir. Bireyin becerilerini geliştirerek topluma faydalı olmasını sağlamak eğitimin temel amaçlarındandır. Bu amacı gerçekleştirmenin bir yolu da matematik öğretiminden geçmektedir. Nitekim bir ülkenin geleceği açısından, ülkenin kalkınmasında ve bilgi toplumunun oluşturulmasında, matematik öğretiminin önemli bir katkısı bulunmaktadır (Aydın, 2003a).

Son yıllarda kural ve formüle dayalı matematik öğretiminden çok öğrenci merkezli öğrenmeyi, yani öğrencinin sorgulayarak, yaparak yaşayarak kurallara ulaşmasını ve matematiksel kavramları ezberlemeden öğrenmesini, içselleştirmesini hedefleyen eğitim felsefeleri benimsenmiştir. Bunun için gerçek hayatta karşılaşılan problemlere ilişkin yaratıcı çözümler üretebilme, grupla uyumlu bir şekilde çalışabilme, analitik ve eleştirel düşünebilme gibi becerilerin geliştirilmesinde gerçek hayatta birçok uygulamaya sahip, üniversitelerde matematik ve mühendislik alanlarında verilen lineer cebir dersinin önemli bir yeri bulunmaktadır.

Lineer cebir dersinde öğrencilerin karşılaştığı zorlukları: lineer cebirin doğasından, öğrenim-öğretiminde kullanılan yöntem-tekniklerden, öğrencilerin düşünme stillerinden ve herhangi bir kavramı öğrenmek için gerekli altyapılarının yeterli olmamasından kaynaklanan zorluklar olmak üzere üç kategoride toplamak mümkündür (Haddad, 1999). Lineer cebir dersinin, bireylerin zorlandığı bir ders (Hillel ve Sierpinska,1994) olmasının nedenlerinden biri, yapısı itibariyle soyut kavramlardan oluşmasıdır (Carlson, Johnson, Lay ve Porter, 1993; Diković, 2007; Dorier, 2002; Hillel ve Sierpinska,1994; Wu, 2004). Dolayısıyla yaşanılan bu zorlukların kaynaklarından biri olan soyut yapının öğretimine verilmesi gereken öneme ek olarak öğrencilerin bireysel farklılılıklarının dikkate alınması gerekmektedir. Görsel-uzamsal yetenek, sözel yetenek, yaratıcılık, eleştirel düşünme ve analitik düşünme becerileri, bireysel farklılıkların bilişsel boyutu olarak değerlendirilebilir. Bireysel farklılıkların bilişsel boyutuyla birlikte bir o kadar önemli olan duyuşsal boyutunun da dikkate alınması gerekmektedir. Tutum, motivasyon, öz güven ve özyeterlik algısı da bireysel farklılıkların duyuşsal boyutu olarak değerlendirilebilir. Algılar yoluyla kazanılan bilişsel becerilerin gelişmesinde etkili olan duyuşsal özelliklerden (Duman ve Yakar, 2017) biri olan özyeterlik algısı, öğrenci performansını etkileyen (Kardeş-Birinci, Delice ve Aydın 2014; Kardeş-Birinci, 2016) bir değişkendir. Bunun yanı sıra matematiksel düşünme yapıları da akademik başarıyı etkileyen etkenler arasında yer almaktadır (Kardeş-Birinci, 2016). Nitekim öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarında sergiledikleri performansın, matematiksel düşünme yapılarına göre farklılaştığı görülmüştür (Kardeş-Birinci, 2016). Geleneksel öğretim (GÖ) yerine öğrencinin aktif olduğu yöntem ve tekniklerle derslerin işlenmesi öğrencilerin bilişsel ve duyuşsal gelişim seviyelerini etkileyebilir. Örneğin işbirlikli öğrenme yöntemi, öğrencilerin matematik özyeterlik algılarını artırmada etkili olmaktadır (Ural, 2007). Ayrıca yapılan çalışmalarda öğrencinin sahip olduğu düşünme yapısının belirlenerek öğretimde gerekli düzenlemelerin yapılmasının öğrenci başarısını olumlu yönde etkileyeceği (Carbo, 1980; Özhan-Turan, 2011) vurgulanan noktalar arasındadır. Lineer cebirde öğrenci başarısının artırılması için, öncelikle öğrencilerin zorlandığı temel lineer cebir kavramlarının belirlenmesi ve daha sonra öğretimin bu zorlukları aşacak şekilde planlanması gerekmektedir (Dubinsky, 1997). Bu bağlamda lineer cebir dersinin öğretiminde lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, boyut, lineer denklem sistemi (LDS) (Konyalıoğlu, İpek ve Işık, 2003) gibi temel kavramların; ezberlenmeden, anlamlı öğrenilmesi ve içselleştirilmesi önemlidir. Bu kavramları içselleştirme ve anlamlandırmada geleneksel öğretim yeterli olmayabilir. Öğrencilerin tamamına hitap etmesi açısından kavramların farklı temsil biçimlerine (Kardeş, 2010) dayalı yapılacak öğretimin önemsenmesi ise matematik öğretiminde bireysel farklılıkların göz önüne alınması gereksinimini (Köroğlu ve Yeşildere, 2004) destekler niteliktedir. Görselleştirmenin, konuyu anlamlandırma ve ilişkilendirmede etkili olduğu bilinmektedir (Kardeş, 2010). Lineer cebirin soyut olan kavramlarının geometrik temsillerden yararlanılarak işlenmesi, kavramların daha somut olarak ve anlaşılmasını sağlamaktadır (Aydın, 2009). Dolayısıyla, farklı temsillerden (sembolik, geometrik) yararlanarak gerekli olan esnekliğin olabildiğince açık anlatılması gerekmektedir (Dias, Artigue ve Dıdırem, 1995).

Dufour-Janvier, Bednarz ve Belanger (1987), temsil kavramının en genel anlamda iki başlık altında incelenebileceğini belirtmekte olup bu başlıkları iç ve dış temsiller olarak belirtmiştir. İç temsiller olarak geçen yapılar; bireyin etrafında gördüğü, formülleştirdiği ve kendi bilgisi çerçevesinde yeniden yapılandırdığı zihinsel şekil, bilgi veya imgelerden meydana gelir (Goldin ve Kaput, 1996). İç temsiller doğası gereği doğrudan gözlemlenemediğinden imgeseldir. Dış temsiller ise matematiksel kavram ve fikirlerin anlaşılması ve aktarılmasını sağlayan gözlemlenebilir yapılardır (Goldin, 1998). Dış temsil türleri arasından, "Matematikte Temsil Sistemleri" olarak adlandırılan grafik, nümerik ve cebirsel temsil matematiğin temel sunum biçimleri olarak gösterilmektedir (Goldin ve Kaput, 1996). Kavramların anlaşılmasını ve aktarılmasını sağladığından (Goldin, 1998) matematik öğretiminde çeşitli temsil türlerinden yararlanılmaktadır. Disiplin içinde ve disiplinler arası alanda temsil türlerinden yararlanılan öğretim biçimlerinden biri de çoklu temsil temelli öğretimdir (ÇTTÖ). Çoklu temsil temelli öğretim; kavramların farklı temsillerinin (cebirsel, somut, grafik, tablo, matris) ilişkilendirilerek sunulduğu, ders içi katılımın ve ilgi düzeyinin artırılmaya çalışıldığı öğretim yaklaşımıdır. Öğretimin bilgisayar yazılımlarından yararlanılarak gerçekleştirilebildiği bu yaklaşım, bilgisayar desteği alınmadan da uygulanabilmektedir. Ancak, bilgisayar desteği alınmayan çoklu temsillere göre GeoGebra destekli geliştirilen çoklu temsillerin problemin derinlemesine incelenmesini kolaylaştırdığı bilinmektedir (Özdemir, 2012). Dolayısıyla, bu araştırmada çoklu temsil temelli lineer cebir kavramlarının öğretimi GeoGebra yazılımından yararlanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu yazılımın, kavramların temsillerini ilişkilendirmeyi sağladığı (Diković, 2009) bilinmektedir. Öğretim sürecinde, kavram temsilleri arasındaki ilişkilendirmenin yanı sıra kavramın gerçek hayat uygulamaları ile ilişkilendirilmesinin de önemli olduğu düşünülmektedir.

Öğrenilenlerle gerçek hayat arasında gerçek bir bağ kurulamaması ezberciliğin nedenleri arasında yer almaktadır (Akyüz, 2001). Bu nedenle ders içerisinde matematiksel kavramların günlük yaşam içerisinde kullanımının verilmesi önemlidir (İlgar ve Gülten, 2013). Probleme dayalı öğrenme öğrencilerin gerçek hayat ile ders arasında ilişki kurmalarını ve matematiksel anlamalarına, yaratıcı ve eleştirel düşünmelerine olumlu yönde katkı sağlamaktadır (Cantürk-Günhan ve Başer, 2009; Ersoy, 2012). O halde probleme dayalı öğretimde (PDÖ) olduğu gibi çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilere kazandırdığı yaşantılar, ilişkilendirme becerilerini ve matematiksel anlamalarını etkileyebilir. Bu aşamada hangi yöntem ve tekniğin daha çok katkı sağlayacağının araştırılması önemlidir.

Günümüze kadar matematiksel anlamayı açıklamaya yönelik araştırmacılar tarafından bazı yaklaşımlar oluşturulmuştur (Hiebert ve Carpenter, 1992; Sierpinska, 1994). Matematiksel anlama ile ilgili ilk yaklaşımın kurucusu olan Skemp (1976), matematiksel anlamayı ilişkisel anlama ve işlemsel anlama olarak sınıflandırmıştır. Öğrenci ilişkisel anlamada neyi, niçin ve nasıl yaptığını bilirken işlemsel anlamada yalnızca kuralları etkili ve bilinçli olarak doğru bir şekilde uygulamaktadır. Herscovics ve Bergeron'un (1983) matematiksel anlamaya yönelik yaklaşımında ise sezgisel anlama; ilk kavramsallaştırma, soyutlama ve formalleştirme seviyelerini içeren bir model ortaya atılmıştır. Bunlara ek olarak Usiskin (2012) ise matematiksel anlamaya yönelik beş boyuttan oluşan bir yaklaşım ortaya koymuştur. Usiskin (2012) Skemp'in yaklaşımının hala matematiksel anlamaya yönelik en yaygın betimleme olduğunu ama bunlara ek olarak farklı anlama türlerinin olduğunu belirtmiştir. Usiskin'in (2012) yaklaşımı beceri-algoritma (BA), özellik-ispat (Öİ), temsil-metafor (TM), kullanım-modelleme (KM), tarih kültürel anlama boyutlarından oluşmaktadır. Usiskin (2012) bu yaklaşımında aşağıdaki özellikleri savunmaktadır:

- Beceri-algoritma boyutunun Skemp'in (1976) işlemsel anlama boyutunda olduğu gibi cevabı nasıl bulacağını bilme olarak ifade edildiğini,
- Özellik-ispat boyutunun cevabın altında yatan matematiksel özelliklerin, neyi, niçin elde edildiğinin bilinmesi olarak düşünüldüğünü,
- Kullanım-modelleme boyutunun, bilginin ne zaman kullanılacağının farkında olabilmek olarak ifade edildiğini,
- Beceri-algoritma boyutuna göre kullanım-modelleme boyutunun daha üst düzey düşünme gerektirdiğini,
- Beceri-algoritma, özellik-ispat ve kullanım-modelleme anlama boyutlarını bilen öğrencilerin kavram ile ilgili geniş bilgiye sahip olsa da matematiksel anlamasının tam olarak gerçekleşmiş sayılmadığını,
- Anlamanın tam olması için öğrenilen kavramın temsil edilmesi gerektiğini,
- Öğrenilen kavramın bir grafikle, metaforla, materyalle ifade edilmesinin temsil metafor boyutunun sergilendiğini gösterdiğini.

Geleneksel öğretimde metaforlar ve materyallerden yararlanma durumu daha az gerçekleşmektedir. Bu anlama boyutlarından başka son yıllarda önemle araştırmacıların üzerinde durduğu tarihsel anlama boyutunda ise matematiksel kavramların kültürel tarihinden yararlanılmaktadır. Probleme dayalı öğretim yöntemi gerçek hayat durumlarından ve rutin olmayan problemlerden yararlanarak gerçekleştirildiğinden kullanım-modelleme, çoklu temsil temelli öğretim ise kavramların çoklu temsilleriyle verilmesinden dolayı temsil-metafor anlama boyutu bağlamında öğrencilerin matematiksel anlamasına katkı sağlayabilir. Bu bağlamda bu araştırmada öğretmen adaylarının anlama boyutları beceri-algoritma, özellik-ispat, temsil-metafor, kullanım-modelleme boyutları dikkate alınarak analiz edilmiştir. Bu yöntem ve tekniklerden yararlanarak gerçekleştirilen öğretim; kavramların anlaşılmasındaki boyutları etkileyebileceği gibi bilişsel becerileri kullanmadaki tercihleri de etkileyebilir. "Matematiksel düşünme yapıları" da bilişsel becerileri kullanmadaki tercihler arasında yer almaktadır.

Matematiksel düşünme sürecinin bir çeşit sınıflandırması olan matematiksel düşünme yapıları, Krutetskii (1976) tarafından oluşturulmuştur. Matematiksel düşünme sürecinde bireyin sahip olduğu bilişsel becerileri kullanmadaki tercihi matematiksel düşünme yapısı olarak tanımlanmaktadır (Presmeg, 1985). Presmeg (1985), deneyimlerine dayanarak aritmetik, geometrik ve harmonik olmak üzere üç farklı matematiksel düşünme yapısı tanımlamıştır. Bu yapılar, bireyin yeteneği değil sözel-mantıksal ya da görsel-resimsel öğelere yatkınlığıdır. Sözel-mantıksal ya da görsel-resimsel öğenin güçlülüğü veya zayıflığı, öğrencinin analitik, geometrik ya da harmonik düşünme yapısında olup olmadığının belirlenmesini sağlamaktadır. Matematiksel düşünme yapıları bir yetenek değil tercihtir (Kardeş-Birinci, 2016). Bireyler yaşantıları sonucu tercihlerini değiştirebilmektedir. Ayrıca yaşantıları sonucu yargılarını da değiştirebilmektedir. Bu yüzden öğretim sürecinde uygulanan farklı yöntem ve tekniklerin matematiksel düşünme yapılarını etkileyebileceği gibi özyeterlik algılarını da etkileyebileceği düşünülmektedir.

Özyeterlik, bireyin belli bir durumla ilgili performansı göstermek için gerekli etkinlikleri organize edip başarılı olarak yapma becerisine ilişkin kendi ile ilgili düşüncesidir (Bandura, 1986). Öz yeterliliği yüksek olan birey, herhangi bir işin üstesinden gelmek için düşük olan bireye göre daha çok çaba harcamaktadır ve bu bireyler herhangi birşeyi denemekten korkmamaktadırlar (Senemoğlu, 2015). Dolayısıyla özyeterlik algı düzeyi yüksek olan öğrenciler, herhangi bir konuda daha aktif olduğundan öğretim sürecinde başarılı olarak topluma katkı sağlayacaktır (Yaman, Koray ve Altınçekiç, 2004). Ayrıca, öğretmenlerin; özyeterlik algısını güçlendirmek için, öğrencilerin bireysel farklılıklarına uygun öğretim yapması, çeşitli etkinliklere yer vermesi de özyeterliliği geliştirmede etkili olabilir. Nitekim yapılan araştırmalarda işbirlikli öğrenme, proje bazlı öğrenme gibi bazı öğretim yöntemlerinin özyeterlik düzeyini geliştirdiği tespit edilmiştir (Tonbuloğlu, Aslan, Altun ve Aydın, 2013; Tuğran, 2015). Yanı sıra Azar, (2010) öğretmen adaylarının özyeterlik inançlarında branşlara göre önemli farklar olduğu sonucuna varmıştır. Probleme dayalı öğretim yöntemi; öğrenenlerin farklı kaynaklardan edindikleri bilgilerini ve becerilerini kullanmaları, bir disiplin alanı kapsamında muhakeme etme ve problem çözme becerilerini, özyeterlik algı düzeylerini geliştirmeleri bağlamında etki etmektedir (Boud ve Feletti, 1991). Bu bağlamda lineer cebir dersinde uygulanan probleme dayalı ve çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin özyeterlik algı düzeylerine etkilerinin araştırılması gerektiği düşünülmektedir.

1.1 Problem Durumu

Vektörler, matrisler, lineer dönüşümler lineer cebir dersi için temel kavramlardandır (Uhlig, 2003). Lineer cebir dersinde de anlatılan birer lineer dönüşüm olan yansıma ve dönme kavramları; öğrencilerin ortaokuldan üniversiteye kadar karşı karşıya kalmalarına rağmen, öğrenmede güçlük çektikleri veya ilişkilendirmede yetersiz kaldıkları kavramlar arasında yer almaktadır. Öğrencilerin lineer denklem sistemlerinin çözümlerini ve matris hesaplamalarını öğrendiği ancak alt vektör uzayı, germe ve lineer bağımsızlık konularına geçildiğinde zihinlerinin karıştığı bilinmektedir (Carlson ve ark., 1993). Öğrencilerin zihinlerinin karışmasının birçok kavramla ilişkili olan ve lineer cebirin özünü oluşturan lineerlik şartını kavrayamadıklarından kaynaklandığı düşünülmektedir (Uhlig, 2003). Bu nedenle öğrencilerin lineerlik şartını ezberlemesi yeterli olmamakla birlikte bu şartı içselleştirmeleri gerekmektedir.

Öğrencilerin lineer cebiri zor bulmaları; öğrencilerin soru çözümünde aksiyomatik yaklaşımı tercih etmelerinden kaynaklanmaktadır (Dorier ve Sierpinska, 2001). Sadece aksiyomatik yaklaşımla soruyu çözmek kavramlar arası ilişkilendirme için yeterli değildir. Öğrenciler, kavramları anlama, ilişkilendirme, kalıcı öğrenme yerine sınavlarda gerekli teknik ve işlemleri ezberleyip uygulayarak sadece dersi geçmeyi hedeflemektedir (Dorier, 1990). Lineer cebir dersinde vektör uzayı, matris, determinant, lineer denklem sistemi, baz, boyut, lineer bağımsızlık, lineer dönüşüm gibi kavramlar önemli ve birçok kavramla bağlantılıdır. Bu nedenle ezberlemek yerine içselleştirilmesi gereken kavramlar arasında yer almaktadır. Yapılan çalışmalar bu kavramlarda yaşanılan zorlukların sebepleri olarak; öğrencilerin altyapılarının ve hazırbulunuşluk düzeylerinin yeterli olmamasını, bazı kavramların işlemsel algoritmalarının olmamasını, zorlanılan kavramların farklı sorularda farklı algoritmalar gerektirmesini, bu kavramların öğrencilerin önceki bilgileriyle ilişkilendirilmeden geleneksel öğretim yöntemleriyle öğretilmesini göstermiştir (Carlson ve ark., 1993). Matematik başarısı için, öğrencinin sahip olduğu düşünme yapısının belirlenip ona göre hareket edilmesi, öğrenci başarısını olumlu yönde etkilemektedir (Carbo, 1980). Lineer cebir dersinde de farklı düşünme yapılarına sahip öğrencilere hitap edebilmek için çeşitli öğretim yöntemlerinden yararlanılabilir. Bu araştırma, lineer cebir dersinde öğrencilerin anlamlandırmada ve ilişkilendirmede güçlük çektikleri disiplin içinde ve ekonomi, mühendislik, fen bilimleri gibi disiplinlerarası alanda önemli bir yeri olan lineer cebir kavramlarının (lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, boyut, lineer denklem sistemi ve lineer dönüşüm) öğretim sürecinin sonunda; öğretmen adaylarının akademik başarılarının, anlama boyutlarının, düşünme yapılarının, özyeterlik algı düzeylerinin farklı öğretim yöntem ve tekniklerinden ne düzeyde etkilendiğini araştırmak için yürütülmüştür. Bu bağlamda araştırmada uygulanacak olan öğretim yaklaşım ve yöntemleri; probleme dayalı, çoklu temsil temelli ve geleneksel öğretimdir.

1.2 Araştırmanın Amacı

Dorier ve Sierpinska (2001) yapmış oldukları çalışmada lineer cebir öğretimi için hazırlanan ders ortamlarının iyi yapılandırılmadığını, verimli öğretim yapılmadığını ve lineer cebirin nasıl öğretileceği noktasında yeterli bilginin olmadığını tespit etmiştir. Ders ortamlarında teknolojik araçlar ve somut modellerin kullanılması, öğretimin daha iyi yapılandırılmasını (Ersoy, 2006) ve öğrencilerin öğrendiklerini hem gerçek hayat ile hem de diğer derslerle ilişkilendirmelerini sağlayabilir. Matematik öğretim programlarında da öğretmenlerin öğrencileri çoklu temsilleri kullanmaya teşvik etmelerinin gerekliliği dikkate alınmalıdır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Matematik öğretmenleri, öğrencilerin kendi temsil biçimlerini ortaya koymalarına fırsat verecek ortamları düzenlemeli ve bir matematiksel kavramın farklı temsiller arasındaki ilişkileri keşfetmelerine yardımcı olmalıdır (NCTM, 2000). Öğrencilerin matematiksel bilgiyi yapılandırma süreçlerinin, çoklu temsiller ve materyallerle desteklenmesi gerektiği vurgulanmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018a). Harel'e (2000) göre soyut lineer cebir kavramlarının geometrik olarak somutlaştırılmasının sürekliliği, öğrencilerin kavramları anlamaları için sağlam bir temel oluşturabilir. Bu araştırmada, lineer cebir dersinde uygulanacak çoklu temsil temelli ve probleme dayalı öğretimin öğretmen adaylarının düşünme yapılarına, anlama boyutlarına, akademik başarılarına, özyeterlik algılarına etkisinin ne düzeyde olduğunu ve farklı yöntem ve yaklaşımlarla öğrenim gören farklı düzeyde performansa sahip öğretmen adaylarının lineer cebirdeki bazı kavramları nasıl ilişkilendirdiklerini belirlemek amaçlanmıştır.

Bu araştırmada araştırmanın amacına uygun olarak problem cümlesi şu şekilde belirlenmiştir:

"Lineer cebirde çoklu temsil temelli ve probleme dayalı öğretimin öğretmen adaylarının düşünme yapılarına, anlama boyutlarına, akademik başarılarına, özyeterlik algılarına etkisi nedir ve farklı düzeyde performans (düşük, orta ve yüksek) gösteren öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme becerileri nasıldır?"

Bu çerçevede, araştırmanın alt problemleri aşağıdaki gibidir:

1) Probleme dayalı öğretim yapılan çalışma grubundaki öğretmen adaylarının; Lineer Cebir Performans Testi'nden (LCPT'den) ve Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği'nden (MKÖAÖ'den) aldıkları ön test-son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

2) Çoklu temsil temelli öğretim yapılan çalışma grubundaki öğretmen adaylarının; Lineer Cebir Performans Testi'nden ve Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği'nden aldıkları ön test-son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

3) Geleneksel öğretim yapılan karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının; Lineer Cebir Performans Testi'nden ve Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği'nden aldıkları ön test-son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

4) Çoklu temsil temelli, probleme dayalı ve geleneksel öğretimin uygulandığı çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının; Lineer Cebir Performans Testi'nden, Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği'nden ve Matematiksel Süreç Aracı'ndan (MSA'dan) aldıkları son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

5) Çoklu temsil temelli, probleme dayalı ve geleneksel öğretimin uygulandığı çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının; Lineer Cebir Performans Testi'ndeki belirlenen (vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-lineer denklem sistemi ve lineer dönüşüm) kavramlara ilişkin sorularda sergiledikleri performansları ne düzeydedir ve bu kavramlar bazında çalışma ve karşılaştırma gruplarının performansları arasında anlamlı farklılık var mıdır?

6) Öğretmen adaylarının vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-lineer denklem sistemi ve lineer dönüşüm kavramları ile ilgili sergiledikleri performansları arasında anlamlı bir ilişki var mıdır?

7) Çoklu temsil temelli, probleme dayalı ve geleneksel öğretimin uygulandığı çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının; Lineer Cebir Performans Testi'ndeki lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-lineer denklem sistemi ve lineer dönüşüm kavramlarına ilişkin sorularda sergiledikleri ön test-son test anlama boyutları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

8) Probleme dayalı öğretim uygulanan gruptaki öğretmen adaylarının; modüllerin her birinin sonunda tekrarlı bir şekilde uygulanan Kendini Değerlendirme Formu'ndan (KDF), Eğitim Yönlendiricisini Değerlendirme Formu'ndan (EYDF) ve Öğretmen adaylarını değerlendirme Formu'ndan (ÖADF) aldıkları puanlar arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?

9) Öğretmen adayları; lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz- boyut, lineer denklem sistemi ve lineer dönüşüm kavramlarını nasıl ilişkilendirmektedir?

10) Öğretmen adaylarının, eksik ve yanlış ilişkilendirmeleri hangi ilişkilendirme biçimlerinden kaynaklanmaktadır?

11) Öğretmen adaylarının; lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem sistemi ve lineer dönüşüm kavramları arasındaki ilişkilendirme ağları nasıldır?

12) Öğretmen adaylarının kavramlar arasındaki ilişkilendirme puanları ne düzeydedir ve bu öğretmen adaylarının kavramlar arasındaki ilişkilendirme puanları ile lineer cebir performans puanları arasındaki ilişki nasıldır?

1.3 Araştırmanın Önemi

Alanyazın incelendiğinde lineer cebir ile ilgili yapılan çalışmalar; öğrencilerin öğrenme zorluklarının bazı sebeplerini ortaya çıkarmak ve yeni programlar geliştirmek için yapılan araştırmalar, lineer cebirde geometri kullanımını dengelemeyi amaçlayan ve lineer cebirin formal yapısı üzerindeki bilişsel esneklik araştırmaları, yazılım programları ile yapılan lineer cebir öğretiminin değerlendirilmesiyle ilgili araştırmalar başlıkları altında toparlanabilir (Aydın, 2009). Bunlardan lineer cebir öğretimine ilişkin yapılan çalışmalar incelendiğinde daha çok kavramların görselleştirilmesi ve geometrik yorumu (Güven ve Yılmaz, 2012; Konyalıoğlu ve ark., 2003), çoklu temsil temelli veya bilgisayar destekli öğretim (Aydın, 2009; Çevik, 2015; Diković, 2007; Diković, 2009; Doğan, 2001; Doğan, 2018; Dorier, 2002; İzgiol, 2014; Kan, 2014; Pecuch-Herrero, 2000; Turğut, 2010; Wu, 2004) ile ilgili çalışmalara yoğunlaşıldığı probleme dayalı öğretim (Kar, 2010) ve rutin olmayan problem ile ilgili çalışmaların (Wawro, Rasmussen, Zandieh, Sweeney ve Larson, 2012) yok denecek kadar az olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, alan yazında lineer cebirin nasıl öğretileceği noktasında yeterli bilginin olmadığı vurgulanmaktadır (Dorier ve Sierpinska, 2001). Yanı sıra ulaşılan alanyazında düşünme yapılarını (Doğan-Dunlap, 2007; Doğan-Dunlap, 2010) konu alan çalışma bulunsa da matematiksel anlamanın ve lineer cebir dersinde uygulanan öğretim yöntem ve yaklaşımlarının bu değişkene etkisinin incelendiği çalışmaların da yeterli olmadığı düşünülmektedir. Ayrıca, lineer cebir alanında bilişsel özellikler arasında yer alan bu değişkenin yanı sıra duyuşsal özelliklerden özyeterlik algısını etkileyebilecek öğretim biçimlerinin incelendiği çalışma pek fazla bulunmamaktadır. Ancak, beceri seviyelerini gözetmeksizin öğrencilerin tamamı bireysel farklılıklara sahiptir ve dolayısıyla matematik öğretiminde bireysel farklılıkların gözönüne alınması gerekmektedir (Köroğlu ve Yeşildere, 2004). Lineer cebir dersinin öğretim sürecinde kullanılan geleneksel öğretimden farklı yöntem ve yaklaşımlar, bireysel farklılıklara sahip öğrencilerin öğrenme stillerine uygun öğretim yapılmasını sağlayabilir.

Lineer cebir öğretimine ilişkin yapılan çalışmalarda; bazı kavramların (lkineer denklem, matris,…) öğrenilmesinde zorluk yaşanmadığı ancak vektör uzayı (Dorier, 2002) ve lineer dönüşüm (Carlson ve ark., 1993) gibi soyut yapıdaki bazı kavramların öğrenilmesinde zihinlerin karıştığı vurgulanmaktadır. Alanyazın incelendiğinde ise daha çok lineer bağımlılık/bağımsızlık (Doğan-Dunlap, 2010; Kan, 2014; Turğut, 2010) ve denklem sistemi (Batısta, Baptısta 2014; Kan, 2014; Mallet, 2007; Uhlig, 2003) kavramlarına yoğunlaşıldığı lineer birleşim, germe, lineer dönüşüm (Çevik, 2015; Güven ve Yılmaz, 2012; Turğut, 2010) kavramları ile ilgili çalışmaların oldukça az olduğu ve burada bahsi geçen lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmenin pek fazla incelenmediği belirlenmiştir. Ancak, kalıcı öğrenmeyi sağlayan ilişkilendirme becerisi (Bosse, 2003), temel becerilerin (problem çözme, akıl yürütme ve iletişim) gelişimi ve sinir sisteminin işleyişi ile ilişkili (Evitts, 2005) olması açısından matematik eğitiminin kritik bir bileşenidir (Eli, 2009). Dolayısıyla ilişkilendirme ile ilgili yapılan çalışmaların yeterli olmadığı düşünülmektedir (Evitts, 2005).

Öğrencilerin lineer cebir alanındaki kavramlar arası ilişkilendirme becerileri ve kavramlar arası ilişkilendirmedeki yanılgılarının kaynağı merak edilmektedir. Ayrıca, lineer cebir öğretimi için gerekli temel ilkeleri (Harel, 2000; Uhlig, 2003) sağladığı düşünüldüğünde probleme dayalı ve çoklu temsil temelli öğretim yaklaşımlarının üniversitede verilen lineer cebir dersinde uygulanabileceği düşünülmektedir. Dolayısıyla, bu iki öğretim yaklaşımının lineer cebir dersinin öğretim sürecinde uygulanmasının; matematiksel anlama, düşünme yapıları, akademik performans ve bunlarla birlikte özyeterliğe etkisinin tespit edilmesi yukarıda bahsi geçen alanyazındaki eksikleri doldurması ve yapılan çalışmalara çeşitlilik katması açısından önemlidir.

1.4 Varsayımlar

Çalışma ve karşılaştırma gruplarının deneysel uygulama sürecinde birbiriyle etkileşime geçmediği varsayılmıştır.

Öğretmen adaylarının görüşme sürecinde birbiriyle etkileşime geçmediği varsayılmıştır.

Öğretmen adaylarının araştırma kapsamındaki soruları yanıtlarken gerçek duygu ve düşüncelerini içtenlikle yansıttıkları varsayılmıştır.

Uygulama sürecini olumsuz yönde etkileyen kontrol edilemeyen değişkenlerin, çalışma ve karşılaştırma gruplarını aynı düzeyde etkilediği varsayılmıştır.

1.5 Sınırlılıklar

Araştırma; lineer cebir dersindeki lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz-boyut, koordinat, lineer denklem sistemi ve lineer dönüşüm kavramlarıyla sınırlıdır.

Araştırma; temsil türlerinden Schultz ve Waters'un (2000) çalışmasında değindiği cebirsel, geometrik ve matris temsilleriyle sınırlandırılmıştır.

Araştırma; düşünme yapılarından Presmeg'in (1985) belirlediği analitik, geometrik ve harmonik düşünme yapılarıyla sınırlandırılmıştır.

Araştırma; Usiskin'in (2012) belirttiği anlama boyutlarından, beceri-algoritma, özellik-ispat, temsil-metafor, kullanım-modelleme boyutlarıyla sınırlandırılmıştır.

1.6 Tanımlar

Matematiksel Düşünme Yapısı: Matematiksel düşünme sürecinde bireyin sahip olduğu bilişsel becerileri kullanmadaki tercihi matematiksel düşünme yapısı olarak tanımlanmaktadır (Presmeg, 1985).

Özyeterlik: Bireyin belli bir durum karşısında performans göstermek için gerekli etkinlikleri organize ederek, başarılı olarak yapma becerisine ilişkin kendisiyle ilgili yargısıdır (Bandura, 1986).

Matematiksel Anlama: Öğrencilerin matematikle uğraşırken neyi, ne zaman, niçin ve nasıl yaptığını anlaması matematiksel anlama olarak ifade edilmektedir (Kardeş-Birinci, 2016).

Matematiksel Anlama Boyutları: Beceri-algoritma, özellik-ispat, temsil-metafor, kullanım-modelleme, tarih-kültürel olmak üzere 5 anlama boyutundan oluşur (Usiskin, 2012).

Temsil: Matematiksel fikir, olgu, nesne veya gerçeklerin düzenlenmesini, kaydedilmesini, aktarılmasını, modellenmesini, yorumlanmasını sağlayan gösterim biçimleri temsil olarak ifade edilmektedir (NCTM, 2000).

Çoklu Temsil: Bir matematiksel kavrama yönelik farklı bilgi, anlam ve içeriklerin bir arada ilişkilendirilerek sunulmasına fırsat sağlayan araçlardır (Keller ve Hirsch, 1998).

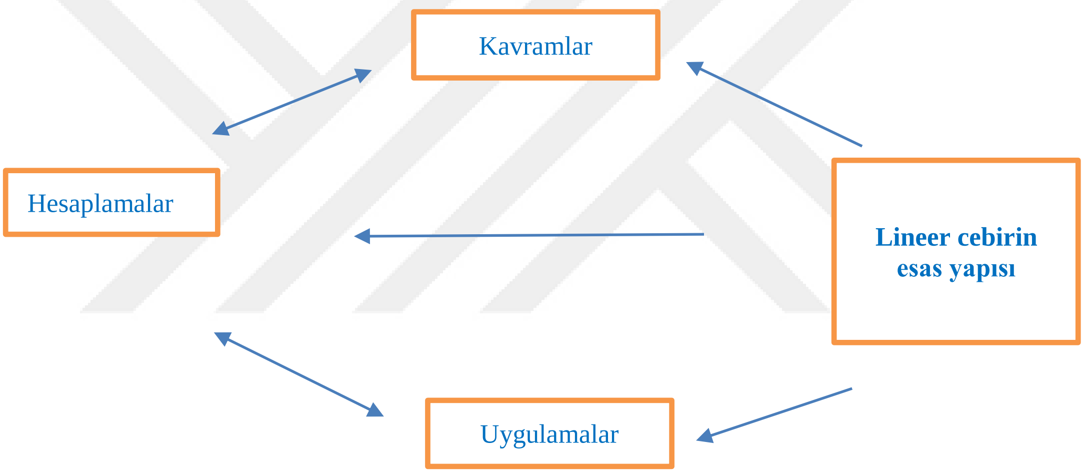
Probleme Dayalı Öğretim (PDÖ): Bir problem ya da senaryo yardımı ile öğrencilerin bireysel ya da küçük gruplar halinde bir problem durumuyla karşılaştırıldıkları, öğrenmeyi kolaylaştırıcı rolünde süreçte yer alan bir eğitim yönlendiricisi rehberliğinde, öğrencilerin problem durumuyla ilgili bilgi ve becerileri kazanmalarını sağlayan öğrenci merkezli bir yaklaşımdır (Dağyar, 2014). Bu yaklaşımda problem çözme süreciyle birlikte öğrencilerin kendi kendilerini değerlendirebilme becerisi kazanmaları da amaçlanmaktadır ve öğretim sürecinde problem çözme yönteminin temel alınmasının yanı sıra farklı yöntem ve tekniklerden de yararlanılabilir (Dağyar, 2014).

BÖLÜM 2

2 ALANYAZIN VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1 Lineer Cebir Öğretimi

Uhlig (2003), bir lineer cebir dersinin sadece kavram ya da sadece uygulama ağırlıklı olmasının yeterli olmadığını bunun yanı sıra aşağıdaki diyagramın bileşenleri arasında dengeli bir yaklaşım uygulandığında öğretimin seviyesinin artacağını vurgulayarak elementer lineer cebir öğretimi için felsefik ve pedagojik bir yaklaşım ortaya koymuştur. Uhlig (2003) tarafından ortaya koyulan felsefik ve pedagojik yaklaşıma dayalı olarak oluşturulan dengeli ve kavramsal lineer cebir öğretimi için gerekli ilkeler aşağıda Şekil 2.1'de sunulmaktadır.



Şekil 2.1 Dengeli ve kavramsal lineer cebir öğretimi için gerekli ilkeler (Uhlig, 2003)

Şekil 2.1'de yansıtılan kavramlar, hesaplamalar ya da uygulamaların, dengeli ve kavramsal lineer cebir öğretimi için gerekli olduğu ve bunlardan herhangi biri ile öğretime başlanabileceği savunulmaktadır. Uhlig'e (2003) göre bu yaklaşımda dikkate alınması gereken ilkelerden bazıları aşağıdaki gibidir:

- Lineerlik şartının, lineer cebirin temelini oluşturduğu ve vektör, matris, lineer dönüşüm kavramlarının ve kavramların geometrik yorumlarının öğrenilmesinin önemli olduğu,
- Öğretimin somuttan soyuta, bilinenden bilinmeyene doğru yapılandırılması gerektiği,

- Örneklerin verilip daha sonra kavramların anlatılmasının uygun olmadığı,
- Öğretim sürecinde örnekler ile giriş yapmak yerine, lineer cebirin temel yapısını, ve özünü ortaya çıkaracak tanıtım ve hatırlatmanın yapılması gerektiği.

Öğrencinin lineer cebiri en iyi şekilde öğrenebilmesi ve öğretmenin lineer cebir öğretimini en iyi şekilde yapabilmesi için aşağıdaki Şekil 2.2'de sunulan pedagojik prensiplerin dikkate alınması gerektiği vurgulanmaktadır (Uhlig, 2003).

Şekil 2.2 Lineer cebir öğreniminin ve öğretiminin pedagojik prensipleri (Uhlig, 2003)

Şekil 2.2'de yaratıcılık; bağımsız düşünebilmeyi harekete geçirmeyi, açıklık; öğrencilerin olgunlaşmasını ve lineer cebir dünyasına girmelerini sağlamayı, somutluk; somut hesaplamaların kavramları güçlendirmesi ve kavramayı kolaylaştırmasını, uygulamalar; esas yapı içinde düşünmeyi ifade etmektedir. Uhlig'e (2003) göre bu pedagojik yaklaşımda aşağıda ifade edilen prensipler vurgulanmaktadır.

- Kavramsal öğrenmenin öğrencilerin lineer cebir dersindeki kavramları anlamlandırmalarını ve ilişkilendirmelerini sağladığı,
- Kavramsal öğrenmenin öğrenme güçlüklerini ortadan kaldırabileceği,
- Kavramsal alıştırmalar ve kavramların keşfedici türde tanıtılmasının lineer cebir'in soyut olarak anlaşılmasına olanak sağladığı,
- Kavramların ve uygulamaların kavranmasında öğrenme sürecinin uzun zaman alabileceği.

Bu pedagojik yaklaşım ile bazı ortak ilkelere sahip başka bir yaklaşımda lineer cebir öğretimine ilişkin üç temel ilke belirlenmiştir (Harel, 2000).

Harel (2000) lineer cebir öğretimi için; somutluk, gereksinim ve genellenebilirlik ilkelerinin dikkate alınması gerektiğini savunmaktadır. Lineer cebir öğretiminde temel alınan ilkelerden biri olan “gereksinim” ile bilginin bir problemin çözümü olarak gelişeceği vurgulanmaktadır. Bununla birlikte temel alınan ilkelerden bir diğeri olan “somutluk” ilkesi ile soyut olan lineer cebir kavramlarının geometrik olarak somutlaştırılması ve öğrencilerin kavramları anlamaları için sağlam bir temel oluşturulması gerektiği ifade edilmektedir. Lineer cebir dersinde kavramların çoklu temsillerinden yararlanılarak anlatılmasının soyut yapısını somutlaştırdığı ve dolayısıyla öğrencilerin açık, yaratıcı ve esas yapıyı içselleştirerek düşünmelerini sağladığı ortaya konmaktadır (Uhlig, 2003). Ayrıca, lineer cebir dersinde probleme dayalı öğrenmenin, yaratıcı düşünmeyi (Kar, 2010) ve derslerde rutin olmayan problemlere ilişkin kazanılan deneyimlerin, gerçek hayatta karşılaşılan problemleri çözmek için motivasyonu sağladığı (Pourdavood, 2012) bilinmektedir. PDÖ ve ÇTTÖ yaklaşımlarının; soyut lineer cebir kavramlarının somut olarak ele alınması ve lineer cebir dersinin uygulamaları yani hangi kavramın ne işe yaradığı hangi alanlarda kullanıldığı konusunda öğretmen adaylarının bilgilerinin artması ve bu dersi bir gereksinim olarak değerlendirebilmesi açısından işlevsel olabileceği ve dolayısıyla bu iki öğretim yaklaşımın Uhlig’in pedagojik prensiplerini ve Harel’ in (2000) ilkelerini sağladığı düşünülmektedir.

2.2 Çoklu Temsil Temelli Öğretim

Alanyazında farklı temsil biçimlerine rastlanmakla birlikte; grafik, nümerik ve cebirsel temsil araştırmacıların büyük çoğunluğunun sınıflandırma sürecinde birleştiği ve birçok matematiksel kavramının öğretiminde yararlanılan önemli temsil türlerindendir (Girard, 2002). Lineer cebir dersinde bunlara ek olarak matris temsili bazı kavramların temsilinde kullanılabilir. Nitekim Schultz ve Waters (2000), lineer denklem sistemlerin çözümünde; somut temsil, tablo temsili, grafik temsili, cebir temsili ve matris temsili biçiminde beş farklı gösterim biçiminden kullanılabileceğine dikkat çekmektedir. Araştırmaya konu olan lineer cebir kavramlarının temsiline uygun olması bakımından bu araştırmada; cebirsel, geometrik ve matris temsilleri dikkate alınarak gerçekleştirilen öğretim yaklaşımlarından biri çoklu temsil temelli öğretimdir. Çoklu temsil temelli yaklaşımda kavramların farklı temsil türlerinin dikkate alınmasının gerekliliği vurgulanmaktadır. Yanı sıra yapılan çalışmalar, öğrencilerin temsil türlerine ilişkin tercihlerinin ve performans düzeylerinin değişebildiği ve öğrencilerin bazı temsil türleri arasında ilişkilendirme yapamadığından başarısız oldukları ortaya konmaktadır (Çatlı ve Solak, 2013; Ertekin, Solak ve Yazıcı, 2010; Tekay ve Doğan, 2015). Nitekim, öğrenciler birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümünde, cebirsel ve geometrik temsili kullanarak iki türlü çözümü ve daha çok cebirsel çözümü tercih etmektedirler (Çatlı ve Solak, 2013). Bunun yanı sıra lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarıyla ilgili soruların çözümünde öğrenciler geometrik temsile göre cebirsel temsilde daha başarılı olmaktadır (Ertekin ve ark., 2010). Öğrenciler; cebirsel gösterimle, grafiksel gösterim arasında bir bağ kuramadıkları için konuyu anlamakta zorlanmaktadır (Tekay ve Doğan, 2015).

2.3 Probleme Dayalı Öğretim

PDÖ; tıp bilimlerinde popüler olmakla birlikte günümüzde artık mühendislik, bilim ve mimarlık ile birlikte öğretmen adaylarının eğitimi de dahil olmak üzere hukuk, ekonomi ve psikoloji gibi birçok alanda (Boud ve Feletti, 1991; Cawley, 1989; Garland, 1995; Maitland, 1998; Oberlander ve Talbert-Johnson, 2004; Reynolds, 1997) ve yükseköğretimde (Hung, Jonassen ve Liu, 2008, s.487) yaygın olarak kullanılmaktadır.

PDÖ, gerçek hayat durumlarını yansıtan problem durumları ile konu alanına ilişkin bilgilerin öğretilmesinin yanı sıra, küçük grup çalışmaları ile birlikte problem çözme becerisi kazandıran öğrenci merkezli bir yaklaşım olarak tanımlanmaktadır (Johnstone ve Biggs, 1998). Yanı sıra; öğrencilerin gerçek hayat problemlerini baz alarak işbirliği içinde hedefe uygun çözümler bulmasına ve konu alanına ilişkin bilgileri kendilerinin keşfetmesine imkân sağlayan bir yöntem (Roh, 2003) olarak ta ifade edilmektedir. Burada her iki tanım neredeyse tamamen örtüşmekle birlikte birinde PDÖ'nün bir yaklaşım diğerinde ise bir yöntem olduğu belirtilmektedir. Benzer şekilde alanyazında PDÖ'yü yöntem olarak tanımlayan çalışmalar (Boud ve Feletti 1991; Roh, 2003) olduğu gibi yaklaşım olarak (Barrows, 2002; Edens, 2000; Savery, 2015) tanımlayan çalışmalar da bulunmaktadır. Diğer taraftan alanyazında, probleme dayalı öğrenme (problem based learning) veya probleme dayalı öğretim (problem based instruction) ifadeleri kullanılmaktadır (Savery, 2015). Alanyazında bu model; öğrencinin problem çözerken aynı zamanda konuyu aktif olarak öğrenmesi amaçlandığından "probleme dayalı öğrenme" ve öğrencilere öğrenme imkanı sunacak öğrenme ortamı hazırlanmasını gerektirdiğinden "probleme dayalı öğretme" olarak adlandırılmaktadır (Kılıç, 2016a, s.645). PDÖ'ye ilişkin ifadelerde, gerçek hayat durumunu yansıtan “problem durumu”, öğrenmede aktif rol oynayan “öğrenci”, öğrenme ortamını düzenleyen “eğitim yönlendiricisi” bileşenleri vurgulanmaktadır (Yaman, 2003). Bununla birlikte, PDÖ’nün uygulama sürecinde birçok farklı yöntem ve tekniğin (bilgisayar destekli öğretim, beyin fırtınası, simülasyon, kavram haritası,…) kullanılabildiği dikkate alındığında ve “yaklaşım” ifadesinin yöntem ve tekniklerin seçiminde yol gösterici ve bu iki kavrama göre daha genel bir kavram olduğu düşünüldüğünde PDÖ’nün bir yaklaşım (Barrows, 2002; Dağyar, 2014; Edens, 2000; Savery, 2015) olarak ifade edilebileceği açıktır. Yukarıda bahsedilenler ışığında bu çalışmada, PDÖ ile “probleme dayalı öğretim yaklaşımı” kastedilmektedir. Öğretme-öğrenme sürecinde önemi ortaya konulan PDÖ (Schwartz, Mennin ve Webb, 2001), öğrencilerle birlikte eğitimcilere de hitap eden güçlü bir öğretim biçimidir (Hung ve ark., 2008, s.487). Bu öğretim biçiminin temel bileşenlerinden senaryolar; gerçek hayat durumlarını ya da gerçeğe yakın rutin olmayan problem durumlarını yansıtan, öğrencilerin güdülenmesini, bilgileri keşfetmesini ve sentezlemesini sağlayan (Açıkgöz, 2004) eğitim araç (Kılınç, 2007) ve gereçleridir (Peterson ve Treagust, 1998). Dolayısıyla senaryolar; çok boyutlu, karmaşık, araştırmayı, bilgi toplamayı ve yansıtmayı gerektirecek, yapılandırılmamış halde (Kaptan ve Korkmaz, 2001), öğretim sürecinde çözüme ulaşabilecek kapsamda, öğrencilerin zihinsel düzeyine uygun, grupla çalışmaya ve hipotez geliştirmeye imkan tanıyacak (Duch, Groh ve Allen, 2001) ve yaratıcı düşünmeyi gerektirecek (Dağyar, 2014) biçimde hazırlanmalıdır.

PDÖ sürecinde senaryoların yanı sıra öğrenen ve eğitim yönlendiricisi önemli faktörler arasında yer almaktadır. Öğretim sürecinde eğitim yönlendiricisinin; beklenen hedefler, problemin çözümünde yararlanılacak kaynaklar ve sürecin nasıl değerlendirileceği hususunda öğrenenleri bilgilendirmesi ve öğrenenlere dönüt vermesi gerekmektedir (Kılıç, 2016a). Öğrenenler ise karmaşık, yapılandırılmamış, birçok cevabı olabilen problem durumlarına ilişkin araştırma yapmakta ve problem durumlarının çözümünde aktif rol oynamaktadır (Kılıç, 2016a).

2.4 Düşünme Yapıları

Bilişsel yetenek; bilginin edinilmesini, geliştirilmesini ve organize edilmesini kapsayan psikolojik gelişme ve etkinliklerin tamamını ifade etmektedir (Oakley, 2004). Bir süreç gerektiren bilişsel yeteneklerin gelişimi bireyin bilgiye ulaşmasına (Aydın, 2003b, s.31) ve edindiği bilgileri hatırlamasına, çevresini anlamlandırmasına ve çevreye uyum sağlamasına (Cüceloğlu, 1999, s.62) yardımcı olmaktadır. Burada vurgulanan bilişsel yeteneklerin önemi öğretim programlarında da dikkate alınmaktadır. Nitekim, "Liseyi tamamlayan öğrencilerin; ilkokulda ve ortaokulda kazandıkları yetkinlikleri geliştirmek suretiyle temel düzey beceri ve yetkinlikleri kazanmış, ilgi ve yetenekleri doğrultusunda bir mesleğe, yükseköğretime ve hayata hazır bireyler olmalarını sağlamak" eğitim ve öğretim programlarının (MEB, 2018a; MEB, 2018b) amaçları arasında yer almaktadır.

Diğer taraftan zeka, algılama, hatırlama, muhakeme, karar alma ve problem çözme bilişsel yetenekler arasında bulunmaktadır (Atkinson, Atkinson, Smith, Bem ve Nolen-Holeksema, 2008, s.13). Bu bileşenlerden zekanın; doğuştan gelen, genetik olarak kuşaktan kuşağa aktarılan; deneyim, öğrenme ve çevresel faktörlerden etkilenen bir kavram olduğu düşünüldüğünde; zeka da dahil olmak üzere (İnal, 2011) bilişsel yeteneklerin tamamının geliştirilebileceği söylenebilir. Bireylerin birbirinden farklı deneyimler geçirebileceği, farklı öğretim durumlarıyla ve çevresel faktörlerle karşılaşabileceği düşünüldüğünde; bilişsel yeteneklerin, bireysel farklılıklar arasında yer aldığı söylenebilir. Dolayısıyla, bireysel farklılıklardan biri olan matematiksel yeteneklerin de deneyimle, öğrenme durumları ve çevresel faktörlerle değişebileceği ve geliştirilebileceği (Bishop, 2008) bilinmektedir. Yukarıda anlatılanlar ışığında farklı düzeylerde bireyler bulunduğu gibi aynı düzeyde matematiksel yetenekleri olan bireylerin matematiksel yapıları değişik yollarla açıklayabildiği belirlenmiştir (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005). Nitekim, matematik alanında başarılı bireylerin tamamının aynı düşünmediğine veya matematiksel yapıları aynı şekilde açıklamadığına ilişkin sonuçlar bulunmaktadır (Krutetskii, 1976; Shama ve Dreyfus, 1994). Bireylerin yararlandıkları yapılar sözel/mantıksal, görsel/resimsel (Krutetskii, 1976) veya fiziksel/kinestetik gösterim biçimleri ağırlıklı olabilir (Thomas ve Mulligan, 1994). Sergilenen birbirinden farklı matematiksel düşünme yapıları, bir bilişsel seviye belirtmemekle birlikte (Krutetskii, 1976) bireylerin farklı yönlerini ortaya koymaktadır. Ayrıca bireylerin yukarıda bahsi geçen bileşenlerin (sözel/mantıksal, görsel/resimsel ve fiziksel/kinestetik) bazılarından birlikte yararlandığı durumlarla da karşılaşılmaktadır. Dolayısıyla alanyazında düşünme yapılarına ya da düşünme stillerine ilişkin farklı sınıflamalar mevcuttur. Öğrencilerin görsel yöntemleri kullanma ve tercih etme yeteneğine dayanan matematiksel düşünme yapılarına ilişkin sınıflamalardan biri "analitik", "geometrik" ve "harmonik" olmak üzere üçe ayrılmaktadır (Krutetskii, 1976). Bu düşünme yapılarından "analitik" daha çok sözel/mantıksal ifadeleri, "geometrik" daha çok görsel/resimsel ifadeleri ve "harmonik" ise sözel/mantıksal ve görsel/resimsel ifadeleri birbirine yakın ağırlıkta tercih eden bireyleri ifade etmektedir. Bu sınıflandırmaya nispeten benzeyen başka bir yaklaşımda; grafik, şekil, çizelge ve resim ağırlıklı düşünen bireyler "görsel yaklaşım eğilimliler", sembolik olarak düşünen bireyler "analitik yaklaşım eğilimliler", sınıflandırma yapan ve soyut düşünen bireyler "kavramsal yaklaşım eğilimliler" olarak ifade edilmektedir (Ferri, 2003). Bu iki sınıflandırmayla ortak noktaları olan bir başka sınıflandırmada ise düşünme yapıları "görselleyen, görsellemeyen ve karma" olmak üzere üçe ayrılmaktadır (Clements, 1982). Çözüm sürecinde görsel ifadelerin tercih edilip edilmemesine göre sınıflandırma hususu, oluşturulan farklı yaklaşımların ortak noktası olarak karşımıza çıkmaktadır. Başarılı öğrencilerin çoğunun görsel olmayan ifadelerden yararlandığı sonucuna varılan çalışmalar (Krutetskii, 1976; Presmeg, 1985) bulunsa da sergilenen farklı düşünme yapıları düzey belirtmemektedir. Düzey belirtmemesine rağmen elde edilen bu sonucun nedenleri alanyazında öğretim programlarının, ders kitaplarının ve öğretim uygulamalarının daha çok görsel olmayan yöntemlere ağırlık vermesi ile açıklanmaktadır (Presmeg, 1985). Ayrıca, alanyazında görsel/resimsel ve sözel/mantıksal bileşenlerini farklı ağırlıklarda sergileyen öğrencilerin matematikte eşit derecede başarılı olabilecekleri sonucuna varılan bir çalışma bulunmaktadır (Krutetskii, 1976). Çoğunluğun matematiksel kavramlara ilişkin düşüncelerinde görsel imgelerden daha az yararlandığı (Bishop, 2008, s.75; Krutetskii, 1976, s. 158-159) ve bu durumun nedenleri arasında öğretmenlerin öğretim sürecinde daha çok görsel olmayan ifadelerden yararlanması (Lean ve Clements, 1981; Presmeg ve Bergsten, 1995) gösterilmektedir. Farklı düşünme yapısına sahip bireylerin zihinlerindeki şemaların farklılığından dolayı bireyler farklı özelliklere sahip olabilir (Alkan ve Bukova Güzel, 2005). Dolayısıyla öğrencilerin daha zengin düşünme yapılarına sahip olması için öğretim sürecinde görsel imgelerle birlikte hangi gösterimlere yer verilmesi ve öğretim sürecinin nasıl zenginleştirilmesi gerektiği (Krutetskii, 1976, s. 14) ve hangi öğretim yaklaşımlarının düşünme yapılarını değiştirebileceğinin araştırılması önemlidir. Dolayısıyla bu araştırmada Krutetskii'nin (1976) düşünme yapılarının dikkate alınmış ve iki farklı öğretim yaklaşımının düşünme yapılarını değiştirip değiştiremeyeceği incelenmiştir.

2.5. Matematiksel Anlama

Anlama, bir olay veya önermenin daha önce bilinen bir formülün sonucunda elde edildiğini görebilmek anlamında kullanılmakla birlikte (Türk Dil Kurumu [TDK]) dengeye ulaşma (Piaget, 2000) ve zihinde nesneyi temsil eden bir iz (Sierpinska, 1994, s.29) olarak tanımlanmaktadır. Alanyazında "anlama" ya ilişkin çeşitli tanımlamalar (Piaget, 2000; Skemp,1976) bulunmakla birlikte bu kavramın, anlaşılmasının, tanımlanmasının ve herkesin kabul edeceği biçimde genellenmesinin zor olduğu düşünülmektedir (Sierpinska, 1994; Usiskin, 2012). Yapılan bazı çalışmalarda "anlama" ile "bilgi edinme" kavramlarının eşdeğer (Skemp,1976) olarak değerlendirilmesi bir takım sorunlara neden olmuş (Sierpinska, 1990, s.24) ve çalışmalar neticesinde bu iki kavramın birbirinden farklı kavramlar olduğu (Harari-Eshel, 2001) sonucuna varılarak bu anlaşmazlıklar nispeten ortadan kaldırılmıştır. Nitekim anlama, yalnızca bilgi edinmeyi veya deneyim kazanmayı ifade etmemekle birlikte öğrenciye özgü, sürekli geliştirilebilen, sınırsız ve kapsamlı bir süreçtir (Pirie ve Kieren, 1992, s.508).

Temel bileşenlerini içerecek biçimde tanımlanacak olursa anlama, bir nesne ile karşılaşıldığında oluşan algıyı zihinde bulunan nesnelerle ilişkilendirebilme olarak ifade edilmektedir (Ajdukiewicz, 1974, s.7). Burada anlamanın temel bileşenlerinden biri olan nesne; "zihinsel temsil" yani "imaj" ya da "yapı" anlamında kullanılmaktadır (Sierpinska, 1994, s.28). Anlamanın gerçekleşmesi için algılanan nesnelerin olduğu gibi resmedilmesinin yeterli olmadığı kavramların özünü keşfetmek gerektiği savunulmaktadır (Sierpinska, 1994). Bu duruma ilişkin lineer cebirde iki vektörün lineer bağımsızlığının; "birbirinin skaler katı olmayan iki vektör" ya da "aynı doğrultuda olmayan iki vektör" olarak algılanmasının yeterli olmadığı ve bu kavramın vektör uzayının özellikleri bağlamında anlam kazandığı (Sierpinska, 1994, s.46) düşünülmektedir. Anlama süreci, nesnelerin algılanması ile başlamakta, basamak görevi gören ilişkilendirme ile bütünlük sağlanmakta (Sierpinska, 1994, s.72-73) ve bütün bunlar gerçekleşirken süreçteki eylemler oldukça yoğun bir ağ oluşturmaktadır (Sierpinska, 1994, s.73). Bu süreçte, zihinde nesnelerin algılanması için öncelikle görme, işitme ve dokunma gibi duyular ile bilince iletilmesi gerekmektedir (Akarsu, 1975). Nitekim uyaranlar; duyu organları tarafından alınıp sinirlerle beyne iletilerek, duyuya dönüştürüldükten sonra algılanmaktadır (Çilenti, 1988). Algılanan iletiler öğrencinin zihninde yaşantı denilen izler bırakmakta ve bu izler, zihindeki deneyimlerin izleriyle karşılaştırılarak yorumlanmaktadır. Ayrıca, genel olarak bir kavramın oluşumu için birden fazla yaşantı geçirilmesi (Çilenti, 1988) ve bir kavramın tam olarak anlaşılması için anlama boyutlarının tamamının sergilenmesi gerekmektedir. Bir nesne ile karşılaşıldığında oluşan algıyı zihinde bulunan nesnelerle ilişkilendirebilme (Ajdukiewicz 1974, s.7) olarak düşünüldüğünde anlamanın gerçekleşmesi için uyaranların etkililiği önemli hale gelmektedir. Bundan dolayı birden fazla duyu organını uyarabileceği düşünülen çoklu temsil temelli öğretim yaklaşımının ve merak uyandırıcı olması açısından dikkat çekebileceği düşünülen probleme dayalı öğretim yaklaşımının öğretim sürecinin etkililiğini artıran araçlar olduğu söylenebilir. Bu iki öğretim yaklaşımının, "matematikle uğraşırken hangi yolları neden tercih etmesi gerektiğinin farkında olma" anlamı taşıyan matematiksel anlamaya (Kardeş-Birinci, 2016) etkisinin olabileceği düşünülmektedir.

Matematiksel anlama, Skemp (1978) tarafından "ilişkisel anlama" ve "kurala dayalı anlama" (enstrümantal anlama) olarak birbirinden tamamen bağımsız iki kategoriye ayrılmıştır. Bu sınıflandırmada, öğrenme sürecinde nedenini bilerek kuralların uygulanması ilişkisel anlama; nedenini bilmeden kuralların uygulanması enstrümantal (işlemsel) anlama olarak açıklanmaktadır (Skemp, 1978, s.9). Alanyazında bu iki anlama çeşidinin tamamen birbirinden farklı olarak değerlendirildiği ve ilişkisel anlamanın daha üst düzey bir anlama çeşidi olduğunu (Skemp, 1978) kabul eden çalışmalar bulunsa da günümüzde iki anlama çeşidinin birbirine göre farklı üstünlükleri olduğu ve bunların ilişkilendirilmesinin gerekliliği vurgulanmaktadır. İlişkisel anlama; kolay ve uzun süre hatırlamayı, yeni durumlara kolay uyarlamayı enstrümantal anlama ise; kolay öğrenmeyi, sonuca kısa sürede ulaşmayı sağlamaktadır (Skemp, 1987, s.152-163). Skemp'in (1976) öne sürdüğü bu sınıflandırmadan sonra, ilişkisel ve enstrümantal anlamaya iki kategori daha eklenerek anlamanın; ilişkisel, enstrümantal, mantıksal (Skemp, 1979) ve sembolik (Skemp, 1982) olmak üzere dört kategorisi oluşturulmuştur. Ayrıca, Herscovics ve Bergeron (1983); sezgisel anlama, ilk kavramsallaştırma, soyutlama ve formalleştirme seviyelerinin olduğu farklı bir anlama modeli öne sürmüştür. Tall (2004); matematiksel anlama düzeylerini üç kategoride toplayarak en düşük düzey olarak bilinen birinci kategorinin sayılarla nesneleri eşleştirme becerisini kazanabilen, ikinci kategorinin hesaplama, genelleme yapabilen, en yüksek düzey olarak bilinen üçüncü kategorinin mantıksal tümdengelimsel çıkarımlarda bulunarak yeni zihinsel yapılar inşa edebilen bireylerden oluştuğunu ifade etmektedir (Tall, 2004). Bununla birlikte, Skemp'in (1982) yaklaşımı hala yaygın olarak kabul gören bir yaklaşım olsa (Usiskin, 2012) da farklı yaklaşımlara dayalı birçok anlama modeli geliştirilmeye devam edilmektedir (Hiebert ve Carpenter, 1992; Pirie ve Kieren, 1994; Sierpinska, 1994; Usiskin, 2012).

Pirie ve Kieren (1994), yapılandırmacı yaklaşıma dayalı olarak doğrusal olmayan, dinamik bir süreç olarak nitelendirdiği anlamanın, oluşumuna ilişkin içe içe geçmiş sekiz katman belirlemiştir ve bu matematiksel anlama modelinde bir bireyin yeni öğrendiği herhangi bir kavramı hangi aşamalardan geçerek yapılandırdığı ve bu aşamaların doğrusal olmadığı belirtilmiştir (Pirie ve Kieren, 1994, s.165). Burada sürecin doğrusal olmaması, katmanlar arası geçişlerin ileri geri sağlanması ile açıklanmaktadır.

Skemp'ten günümüze kadar matematiksel anlama üzerine oluşturulan yaklaşımların bazı noktalarda farklılaştığı (doğrusallık, sınıflandırma) görülse de uzlaştıkları noktaların daha çok olduğu düşünülmektedir. Bunlar, eski bilgi yeni bilgi ya da nesneler arasında ilişkilendirmenin öneminin vurgulanması; anlama çeşitleri (Skemp, 1987), katmanları (Pirie ve Kieren, 1994) ve boyutlarından (Usiskin, 2012) her birinin diğerlerine göre üstün özelliklerinin olması ancak bunların seviye belirtmemesi ve birbirinden tamamen ayrıştırılamaması (Usiskin, 2012) ve anlamanın tam olarak gerçekleşmesi için kapsamlı bir sürece gereksinim olması biçiminde sıralanabilir.

Alanyazında matematiksel anlama boyutlarına ilişkin çalışmaların sayısında son yıllarda artış olmakla birlikte (Kardeş-Birinci, 2016; Long ve Dunne, 2014; O'Sullivan, 2014; Plooy ve Long, 2014; Thompson, Kaur ve Bleiler, 2010; Yi, Yoo ve Lee, 2013) matematiksel kavramları anlamanın neyi ifade ettiğini tanımlamak, farklı teorilerle anlama boyutlarını açıklamak (Usiskin, 2012) ve bu anlama boyutlarının tamamını sergilemeyen ya da sergileyemeyen çok sayıda öğrenciyi incelemek ve bu durumun nedenlerini ortaya çıkarmak için yapılan çalışmaların yeterli olmadığı düşünülmektedir. Yapılan çalışmaların anlama boyutlarının tamamını içermediği (Yi ve ark., 2013) ve nispeten ilköğretim ve orta öğretim düzeyinde yoğunlaştığı (Herendiné-Kónya, 2015; Long ve Dunne, 2014) özellikle lisans düzeyinde çalışmaların (Kardeş-Birinci, 2016) daha az sayıda olduğu görülmektedir. Matematiksel anlama yaklaşımları içerisinde bu çok boyutlu yaklaşımla ilgili tüm boyutları içeren çalışmaların ilköğretim düzeyinde çok fazla olmaması; öğrencilerin, zihinsel olarak yeterli gelişim seviyesinde olmamalarından ve anlamanın gerçekleşmesi için öncelikle kavramların inşasına ihtiyaç duymalarından dolayı hangi işlemi neden yaptıklarını bilmediklerinden kaynaklanıyor olabilir. Bu nedenle, özellikle şekilleri anlama gerçekleşene kadar aritmetiğin biçimsel kısmı ile ilgili araştırmaların ilköğretim yıllarında yapılmasının uygun olmadığı düşünülmektedir (Usiskin, 2012).

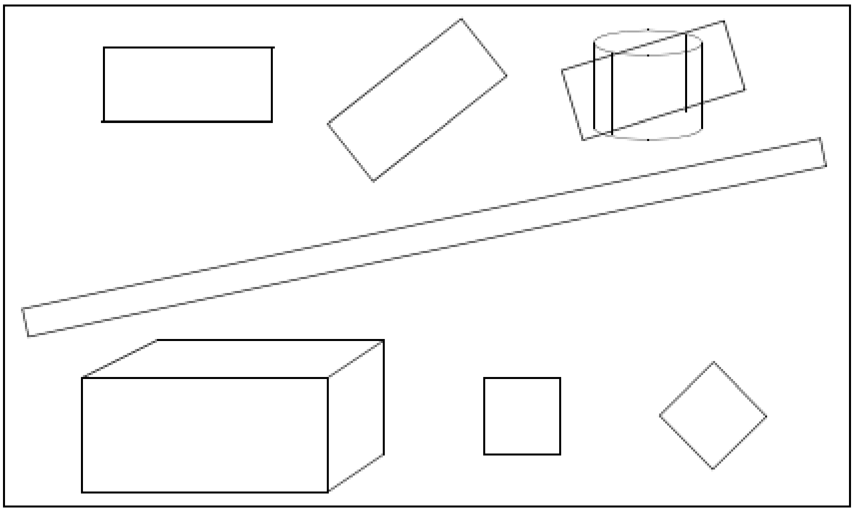
Usiskin (2012), Freudenthal'ın (1986) didaktik fenomonoloji ve Hiebert ve Carpenter'ın (1992) anlamlı öğrenme ve öğretme yaklaşımlarına dayalı olarak belirli bir kavramın anlamını açıklığa kavuşturmaya ve geliştirmeye yönelik öğretim materyallerinin oluşturulmasında yararlanılabilecek çok boyutlu bir yaklaşım oluşturmuştur. Bu yaklaşımda, kavram ve problemlerle çalışmayı içeren matematiksel etkinlikleri anlamanın, öğretim üyeleri, öğretmen ve öğrenciler için farklı bir durum olduğu savunulmaktadır. Matematiksel bir kavramın öğrenen açısından ve öğreten açısından anlaşılmasını ele alan bu yaklaşımda anlama boyutlarının ikiden fazla olduğu vurgulanarak beş boyut ortaya konmaktadır. Bu boyutlar: BA, Öİ, KM, TM ve tarih kültür boyutu olarak sınıflandırılmıştır. Matematiksel anlama "gerçek hayattaki doğru" ve "tam anlamıyla öğrenme" bileşenlerine sahip çok boyutlu bir oluşumdur. Anlama boyutlarından tarih-kültür boyutu gerçek hayattaki doğru bileşeninin bir parçasıdır ve matematiksel kavramların anlatımında bu boyuta gereken önemin verilmediği düşünülmektedir (Usiskin, 2012). Bu araştırmada; BA, Öİ, KM ve TM boyutları dikkate alındığından bu dört anlama boyutunun genel özellikleri Usiskin'in tanımladığı (2012) biçimde aşağıda detaylandırılmaktadır.

2.5.1 Beceri algoritma boyutu

Matematik eğitimcilerinden bazılarının savunduğu işlemsel anlamanın kavramsal anlama kadar derin olmadığı düşüncesine benzer olarak; basit bir işlemin/ formülün veya işlemler dizisinin uygulaması ve becerilerin sergilenmesi, bilişsel anlamda düşük seviyeler olarak değerlendirilebilmektedir (Webb, 2009). Usiskin (2012) ise işlemleri anlamanın diğer anlama boyutlarına göre daha düşük seviyede anlama olarak değerlendirilemeyeceğini düşünmektedir. İşlemsel anlama, sadece bir algoritma uygulamaktan çok daha fazlasıdır. Beceri-algoritma anlama boyutuna sergileyen kişiler bununla birlikte diğer anlama boyutlarını sergileyebiliyor olabilir. Bu durumda anlama boyutları arasında bazılarının yüksek düzeyde sergilenmesi, çözüm yolları içinden en etkili olduğu düşünülen çözüm sürecinin tercih edilmesinden kaynaklanmaktadır.

İnsanların çoğunun BA boyutuna sahip olması becerileri üzerinde fazlaca vakit harcamalarından kaynaklanmaktadır (Usiskin, 2012).

Algoritmanın seçilmesi, algoritmaların karşılaştırılması, yeni algoritmaların bulunması (hesap makineleri ve bilgisayarlar dâhil) gibi özetle "cevapın nasıl elde edileceğinin bilinmesi" olarak açıklanan beceri-algoritma boyutu, Skemp'in (1976) tanımladığı enstrümental anlama ile örtüşmektedir (Kardeş, 2016, s.15). Belirli bir şeklin alanını ve çevresini hesaplamak için uygun bir algoritma seçebilmek (Herendiné-Kónya, 2015, s.537), BA boyutuna örnektir. Dikdörtgen kavramının BA anlama boyutunda sergilenmesine ilişkin bir örnek aşağıdaki Şekil 2.3'de sunulmaktadır.



Şekil 2.3 Dikdörtgen kavramının BA anlama boyutunda sergilenmesine ilişkin örnekler (Usiskin, 2015, s.22).

Geometride istenilen şeklin çizimini yapabilme, şekli gösterebilme veya şekli tanıma BA anlama boyutunun sergilendiğini göstermektedir. Dikdörtgeni bir cetvelle çizebilme veya çizim yazılımı yardımıyla bir bilgisayar ekranında Şekil 2.3'teki gibi gösterebilme BA boyutunun sergilendiğini göstermektedir.

2.5.2 Özellik ispat anlama boyutu

Günümüzde halen matematikte teorik yapıyı bilmeden aritmetiğin anlaşılamayacağını savunanlar bulunmaktadır. İşlemsel anlama ve kavramsal anlamaya benzer olarak matematiksel özellikleri anlama ve beceriyi anlama karşılaştırılmaktadır. 1960 ve 1974 tarihleri arasında Amerika'da "Yeni Matematik" alanında yapılan çalışmalarda matematiksel çıkarımları anlayanların ve matematiksel dili doğru kullananların daha becerikli olduğu ancak matematiksel özellikleri anlama ile becerileri gerçekleştirmeye yönelik direk bir geçiş olmadığı sonucuna varılmıştır. Ayrıca, birbirinden farklı becerileri sergileyebilmek, çeşitli algoritmalar arasından seçim yapabilmek esneklik ve pratiklik gerektirmektedir (Usiskin, 2012).

Birçok insan için anlama ile etkili bir tutum sergileyerek doğru cevabı bulma birbirinden ayrılmaktadır. Usiskin (2012), "kavramları anlama" ile "soruları çözme" karşılaştırıldığında cevabı bulmak için seçtiğin yolda kullanılması gereken özelliklerin dayandığı gerekçeleri bilmeden kavramların tamamen anlaşılmış sayılamayacağını ve bu tip anlamanın daha çok ilköğretimdeki matematik derslerinde gerçekleştiğini belirtmektedir. Soruların çözüm yollarının gerekçelerinin tamamı bir dizi ispatı gerektirmektedir ve karmaşık algoritmalar, karmaşık matematiksel altyapı ile desteklenmektedir (Usiskin, 2012). Öİ anlama boyutu, BA boyutundan oldukça farklı olmakla birlikte bu boyut, matematiksel kuralların gerekçelerini içermektedir (Usiskin, 2012). Örneğin lineer cebirde lineer birleşim kavramı, vektörlerde toplama ve skalerle çarpmanın yaygın özelliklerinden yararlanarak tanımlanmaktadır.

Bir kavrama ilişkin özelliklerin gerekçelerini bilme, özellikleri ispatlayabilme ve farklı özellikleri elde edebilme, cevabı elde etmenin neden işe yaradığını bilme, yani temel formüllerin çıkarımını yapabilme özellik ispat anlama boyutunun sergilendiğini göstermektedir (Usiskin, 2012). Aynı şeklin alanı ve çevresini ilişkilendirebilme Öİ anlama boyutuna örnektir (Herendiné-Kónya, 2015, s.537). Kesirlerde çarpma işleminin Öİ anlama boyutunda sergilenmesine ilişkin bir örnek;

$\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0, c \neq 0$ için $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \left(a\frac{1}{b}\right).\left(c\frac{1}{d}\right)$ bölmenin tanımından

$= a.\left(\frac{1}{b}.c\right).\frac{1}{d}$ çarpmanın birleşme özelliğinden

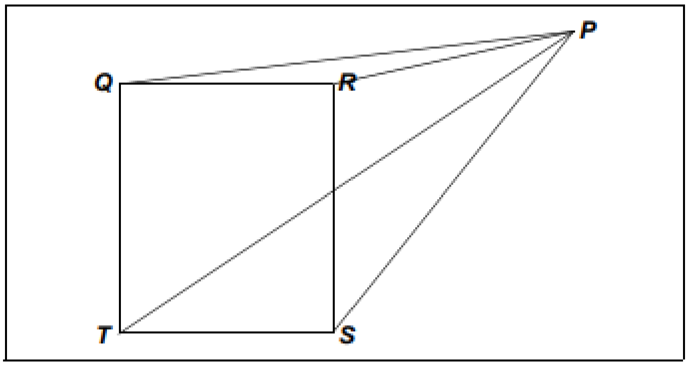
$= a.\left(c.\frac{1}{b}\right).\frac{1}{d}$ çarpmanın değişme özelliğinden

$= (ac).\left(\frac{1}{b}.\frac{1}{d}\right)$ çarpmanın birleşme özelliğinden

$= (ac).\left(\frac{1}{b}\frac{1}{d}\right)$ çarpmaya göre tersin tekliğinden

$= \frac{ac}{bd}$ bölmenin tanımından

Dikdörtgen kavramının Öİ anlama boyutunda sergilenmesine ilişkin bir örnek aşağıdaki Şekil 2.4'te sunulmaktadır.



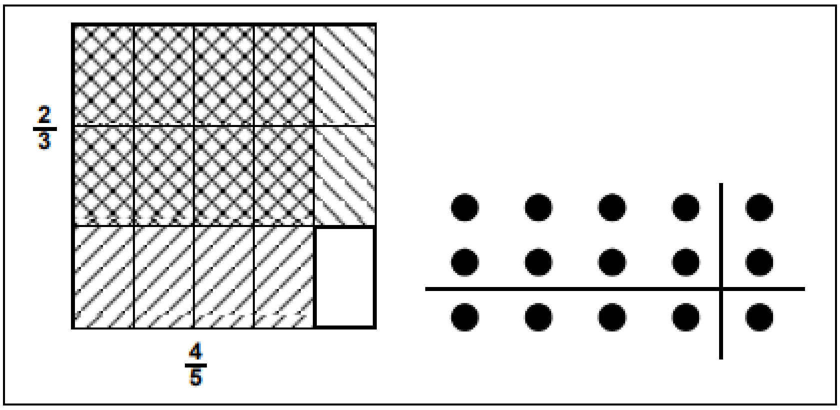
Şekil 2.4 QRST dikdörtgeni ve herhangi bir P noktası için $PQ^2 + PS^2 = PR^2 + PT^2$ özelliği (Usiskin, 2015, s.23).

Öİ anlama boyutu ortaöğretimde dikdörtgen kavramının öğretiminde yaygın olarak kullanılan bir boyuttur. Kenarlarının dik, karşılıklı kenarlarının paralel ve köşegenlerinin eşit uzunlukta olması tanımdan gelen özelliklerdir. Dikdörtgenlerin tamamı aynı zamanda bir paralelkenar olduğundan köşegenlerin birbirini ortalaması ve her bir köşegenin dikdörtgeni iki eş üçgene bölmesi paralelkenarlardan alınan özellikler dikdörtgenlerde bulunmaktadır. Ayrıca, dikdörtgenlerin tamamı aynı zamanda bir yamuk olduğundan yamuklardan alınan özellikler ve tüm dörtgenler için geçerli olan özellikler dikdörtgenler için de sağlanmaktadır. Öİ anlama boyutundan BA anlama boyutuna geçişin otomatik olmadığı, becerinin sergilenmesi için pratik ve olası algoritmalar arasından seçim yapabilme esnekliğinin gerekliliği vurgulanmaktadır (Usiskin, 2012).

2.5.3 Temsil metafor anlama boyutu

Bilişsel kuramcılara göre TM anlama boyutu kavranmadan matematiksel anlama tam anlamıyla gerçekleşmemektedir. Bazı temsil formlarını bilmeyen insanlar derin kavram bilgisine sahip olabilir ancak somut nesnelerin ya da görsel temsillerin diğer anlama boyutlarına büyük katkı sağladığı düşünüldüğünde BA, Öİ anlama boyutlarının matematiksel kavramları anlamak için yeterli olmadığı söylenebilir (Usiskin, 2012).

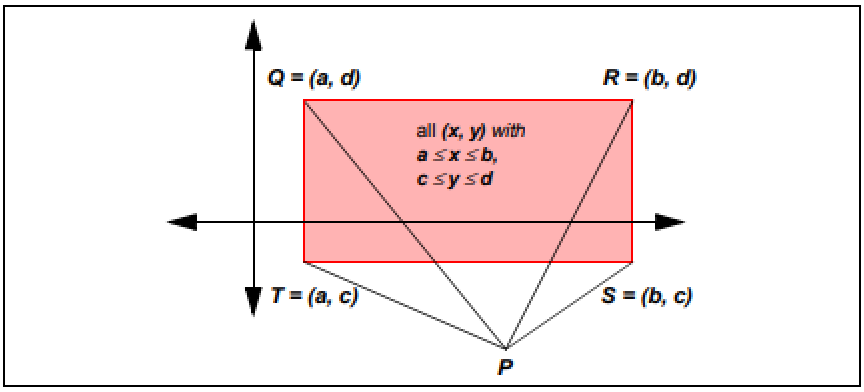
Kavramların TM boyutu; bazen nesnelerle, bazen benzetmelerle bazen de kavramların grafik temsiliyle yapılabilmektedir. Kavramların temsilleriyle oluşturulan anlama daha fazla anlam içerdiğinden alanyazında ve disiplinler arası birçok alanda grafik ve diyagrama başvurulmaktadır. Ayrıca, bilgisayar cebir sistemleri ve bazı yazılımları kullanarak teknolojinin sunduğu imkanlar doğrultusunda temsil-anlama boyutunu oluşturabilmek için kavramların farklı temsillerini içeren etkinlikler hazırlanması ve uygulanması daha kolay hale gelmektedir. Bununla birlikte, basit aritmetik işlemlerle ilgili birçok uygulama bulunsa da özellikle lisans düzeyinde anlatılan soyut cebir, lineer cebir ve analizin bazı kısımlarında soyut yapıdaki kavramların geometrik temsillerine ilişkin uygulamaların çok fazla olmadığı düşünülmektedir. Ancak bu alanlarda tek başına cebirsel temsilin verilmesine göre daha fazla bilgi içermesinden dolayı kavramların geometrik temsillerinin ve grafiklerinin kullanılması gerekmektedir (Usiskin, 2012). Matematiksel ifadelerin temsillerinin bilinmesi, bu temsillerin yorumlanması ve yeni temsillerin elde edilmesi TM anlama boyutunun sergilendiğini göstermektedir ve kesirlerde çarpma işleminin TM anlama boyutunda sergilenmesine ilişkin bir örnek aşağıdaki Şekil 2.5'de sunulmaktadır.



Şekil 2.5 $\frac{2}{3}$ ve $\frac{4}{5}$ kesirlerinin çarpımının iki farklı temsili (Usiskin, 2012)

Şekil 2.5'e göre; ilk temsilde çarpma işlemini temsil etmenin genel olarak kullanılan bir yolu, dikdörtgenin alanından yararlanmaktır. Dikdörtgenin alanı kenar uzunluklarının çarpımı ile hesaplanmaktadır. Bir birim kareyi alıp üç parçaya bölerek ve üstteki iki parçayı boyayarak $\frac{2}{3}$'ü temsil ederiz. Aynı kareyi dikey olarak beş parçaya bölerek ve soldaki dört parçayı, kullanılandan farklı bir şekille boyayarak $\frac{4}{5}$ 'i temsil ederiz. Bu karede on beş dikdörtgenden sekizinin iki kez boyandığından ve $\frac{2}{3}$ ve $\frac{4}{5}$ kesirlerinin çarpımının sonucu $\frac{8}{15}$ olarak elde edilmektedir.

Şekil 2.5'e göre; $\frac{2}{3}$ ve $\frac{4}{5}$ kesirlerinin çarpımının sonucunu elde etmek için noktalar dizisinden yararlanacak olursak üç noktanın ikisini yatay bir çizginin üzerine koyarak $\frac{2}{3}$'ü temsil edersek; beş noktanın dördünü dikey bir çizginin soluna koyarak $\frac{4}{5}$ 'i temsil edersek; sonuç on beş noktanın sekizi (hem yatay çizgilerin üzerinde ve dikey çizgilerin solunda kalan) olarak elde edilmektedir. Dikdörtgen kavramının TM anlama boyutunda sergilenmesine ilişkin bir örnek aşağıdaki Şekil 2.6'da sunulmaktadır.



Şekil 2.6 Koordinat düzleminde dikdörtgenin temsili (Usiskin, 2015, s.24)

İki boyutlu geometrik şekiller, bir koordinat düzleminde gösterilebilmektedir. Bir dikdörtgen cebirsel olarak dört sıralı ikili ile ifade edilebilmektedir. Şekil 2.6'da oluşan dikdörtgensel bölge; iki eşitsizlikle,

$$\forall(x, y) \text{ için } a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d$$

arasındaki uzaklık formülünden yararlanılarak, daha önce bahsedilen QRST dikdörtgeni ve herhangi bir P noktası için,

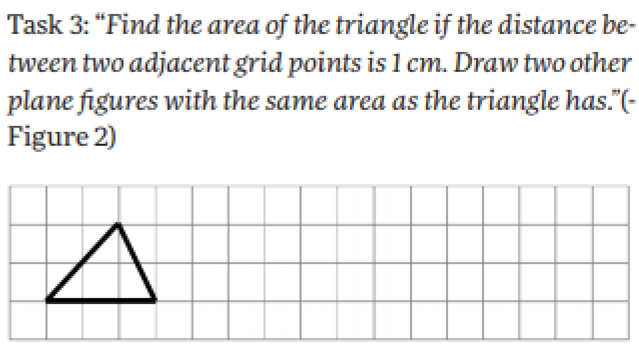
$$PQ^2 + PS^2 = ((x-a)^2) + ((y-d)^2) + ((x-b)^2) + ((y-c)^2)$$

$$= ((x-b)^2) + ((y-d)^2) + ((x-a)^2) + ((y-c)^2) = PR^2 + PT^2$$

$$PQ^2 + PS^2 = PR^2 + PT^2$$

özelliği elde edilmektedir.

Aşağıdaki Şekil 2.7'de bir üçgenin alanını işleme dayalı bulmak yerine alanın korunumu özelliğinden yararlanarak aynı alana sahip farklı bir şekil çizmeleri istenmiştir (Herendiné-Kónya, 2015, s.538)



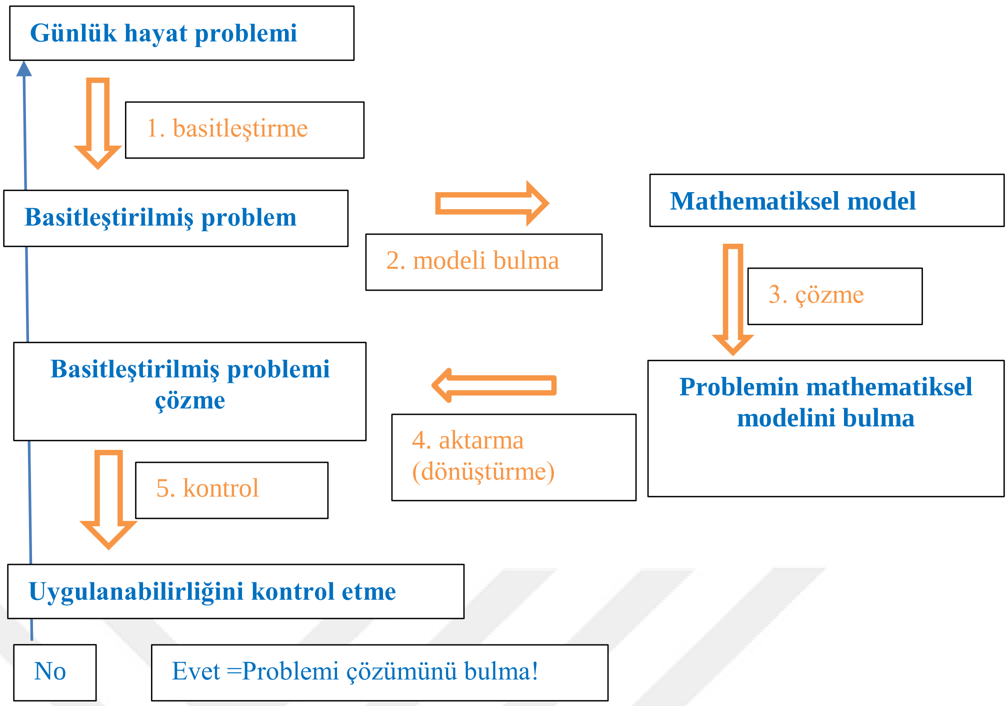
Şekil 2.7 Üçgenin alanına ilişkin bir soru (Herendiné-Kónya, 2015, s.538)

Bir öğrenci üçgenin alanı ile aynı alana sahip başka bir şekil çizebiliyorsa, alan kavramına ilişkin doğru bir zihinsel görüntüye sahip olduğu (Herendiné-Kónya, 2015, s.540) ve TM boyutunu sergilediği anlamına gelmektedir.

2.5.4 Kullanım modelleme anlama boyutu

KM anlama boyutu, BA ya da Öİ anlama boyutundan daha zor ya da daha yüksek bir seviye olmamakla birlikte öğrencilerin diğer anlama boyutlarından farklı, alışılmamış bir boyut olarak gördüğü ve genel olarak sergilemediği bir boyuttur (Usiskin, 2012). Derslerde zamanın çoğu aritmetik işlemlerin öğretimiyle geçmekte ve bu işlemlerin gerçek hayatta nerede kullanılacağı ve nasıl uygulanacağı üzerinde çok fazla zaman harcanmamaktadır. Dolayısıyla uygulama performansı beceri performansından daha düşük olduğundan kullanım ve modellemenin daha zor olduğu düşünülmektedir. Ancak bazı uygulamaların, bazı becerilerden; bazı becerilerin de bazı uygulamalardan daha zor olması mümkündür (Usiskin, 2012).

Gerçek bir problemle başlayan modelleme sürecinde ilk adımda, gerçek durumun bazı ayrıntılarını dikkate almadan prıoblem sade hale getirilir. Bir sonraki adım, sade haldeki problemin matematiksel olarak modellenmesidir. Üçüncü adım sorunun matematiksel çözümünü bulmaktır. Daha sonra, matematik problemine bir çözüm bulunduğunda, çözümü orijinal duruma geri çevirme ve daha sonra çözümün uygulanabilir olup olmadığını kontrol etme adımı vardır. Modelleme süreci; Polya'nın (1962) problem çözme şemasındaki adımlarına benzer bir biçimde aşağıdaki Şekil 2.8'de sunulmaktadır.



Şekil 2.8 Modelleme süreci (Usiskin, 2015, s.14).

Matematiksel kavramlara ilişkin bilgilerini gerçek dünyada uygulayabilme, matematiksel modelleri kullanabilme ve yeni matematiksel modeller oluşturabilme KM anlama boyutunun sergilendiğini göstermektedir. Kesirlerde çarpma işleminde KM anlama boyutunun sergilenmesini gerektirebilecek örnek sorular aşağıda verilmektedir (Usiskin, 2012):

- Dikdörtgensel bölge şeklindeki bir tarlanın kenar uzunlukları 2/3 ve 4/5 km ise bu tarlanın alanı kaçtır?
- Bir hayvan 3 saatte 2 km yol yürüyebiliyorsa, 48 dakikada kaç km yürür?
- İki bağımsız olayın gerçekleşme olasılıkları 2/3 ve 4/5'tir. İkisinin birlikte gerçekleşme olasılığı nedir?
- Bir kâğıt üzerindeki bir parça 4/5 birim uzunluğundaysa ve bir fotokopi makinesine orijinal uzunluğunun 2/3 ü yerleştirilirse, son uzunluğu ne olur?
- Bir ürün maliyetinin (yani orijinal fiyatında) 1/3 üne satılacakken % 20 indirim yapılırsa, satış fiyatı maliyetinin kaçta kaçıdır?

Gerçek hayatta, kullanım alanları geniş olduğundan dikdörtgenlerin uygulamalarına ilişkin birçok örnek bulunmaktadır. Bununla birlikte, Gerçek hayatta karşılaşılan bazı cisimlerin şekillerinin dikdörtgen olarak seçilmesinin nedeninin sorgulandığı aşağıdaki sorulara verilen cevaplar KM anlama boyutunun sergilenmesine ilişkin örneklerdir (Usiskin, 2012):

- Kitapların sayfaları neden dikdörtgen oluyor?
- Bir futbol sahası neden dikdörtgen?
- Şehir planlamasında neden dikdörtgen ızgaralar kullanılmaktadır?

Diğer taraftan, öğrenim-öğretim sürecinde sayıların ve toplama-çıkarma işlemlerinin öğretimiyle birlikte KM anlama boyutunun kullanımına başlanması gerekmektedir (Usiskin, 2015, s.14). Buraya kadar vurgulanan anlama boyutlarının tamamının sergilenmesine ilişkin gereklilik kabul edilse de hangi anlama boyutlarından başlanması gerektiği sorusu akla gelmektedir. Ancak, matematiksel kavramların öğretim sürecine gerçek dünya durumları, beceriler, somut materyaller ya da matematiksel özellik, ispat bileşenlerinden hangisi ile başlanması ve daha sonra hangi anlama boyutlarına yer verilmesi gerektiğine ilişkin matematik eğitimcileri arasında bir uzlaşma sağlanamamıştır. Matematik eğitimcilerinin, anlama boyutlarının bazılarının matematiksel anlamanın özünü yansıtmadığına ve anlama boyutlarının bazılarının üstünlüğüne ilişkin görüşleri olsa da; öğrenim ve öğretimde anlama boyutları diğer anlama boyutlarından izole bir biçimde anlatıldığından herhangi birinin diğerine göre bir üstünlüğü bulunmamaktadır (Usiskin, 2012). Anlama çeşitleri farklı özelliklere sahip olmakla birlikte (Skemp, 1976; Usiskin, 2012) bunlar birbirinden tamamen farklı olmasa da aynı konuyu anlamanın farklı yönleri olarak değerlendirilmektedir (Usiskin, 2012, s.12). Anlama boyutları nispeten bağımsızdır ve herhangibir boyuttan önce diğer bir boyutun anlaşılmasına gerek yoktur dolayısıyla seviye açısından anlama boyutları arasında bir aşama yoktur (Herendiné-Kónya, 2015, s.537; Usiskin, 2012). Farklı anlama boyutlarını sergileyen öğrencilerin hiçbiri diğerinden daha yüksek düzeyde performansa sahip ya da daha başarılı olarak değerlendirilemez (Usiskin, 2012). Algoritmaları bulabilen, ispatları özümseyebilen, matematiksel bilgilerini gerçek durumlara uyarlayabilen, yeni temsil ve metaforlar geliştirebilen öğrencilerin, yüksek düzeyde performans sergilediği ve yaratıcı düşünebildiği savunulmaktadır (Usiskin, 2012). Öğrenciler açısından tam olarak bir anlamanın gerçekleşmesi için boyutlar arasında ilişkilendirmenin sağlanması (Kardeş, 2016) ve anlama boyutlarının tamamına ilişkin bir anlamanın oluşması (Thompson ve ark., 2010) gerektiği ortaya konmaktadır. Yukarıda anlatılanlar ışığında; lisans düzeyinde zihinsel gelişiminin anlama boyutlarının tamamını anlayabilecek seviyede olduğu dikkate alınarak, anlama boyutlarının tamamının geliştirilmesi için öğrenme ortamlarının nasıl tasarlanması gerektiğinin belirlenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla, bu araştırmada uygulanan probleme dayalı ve çoklu temsil temelli öğretim yaklaşımların kavram bazında sergilenen anlama boyutlarını etkileyip etkilemeyeceği ve etkinin tespit edildiği durumlarda bunun sergilenen anlama boyutlarını çeşitlendirme yönünde olup olmayacağı hususu akla gelmektedir. Bununla birlikte ulaşılan alanyazında, PDÖ ve ÇTTÖ'nün ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının anlama boyutlarını nasıl etkilediği konusunda bir çalışma olmadığı görülmüştür. GÖ'den farklı yöntem ve yaklaşımların ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının sergiledikleri anlama boyutlarına etkisinin tespitiyle bu araştırmanın öğretim materyalleri geliştirme noktasında lineer cebir eğitimcilerine ve program geliştirme uzmanlarına yol göstermesi bakımından matematik eğitimine katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

2.6 Özyeterlik

Matematik öğrenimini etkileyen önemli duyuşsal özelliklerden biri olan inançların bireylerin düşünce ve davranışları üzerinde güçlü bir etkisi bulunmaktadır (Yılmaz, 2007). Öğretim sürecinde, karşılaştığımız bazı durumlara ilişkin azim, çaba gösterme gibi olumlu inançlar olduğu gibi endişelenmek, vazgeçmek, korkmak gibi olumsuz inançlarımız da bulunmaktadır. Bunlar arasından, bireylerin belli bir durumla ilgili performansını göstermek için gerekli etkinlikleri organize edip başarılı olarak yapma ve farklı durumlarla baş etme becerisine olan inancı (Bandura, 1986) özyeterlik olarak ifade edilmektedir. Alanyazında, özyeterlik, öğretim sürecinde karşı karşıya kalınan bilişsel engellerin aşılmasını sağlayan (Panaoura, 2014) ve dolayısıyla öğrencilerin performansını (Bandura, 2012) ön öğrenme (Pajares ve Miller, 1994), zihinsel yetenek (Pajares ve Kranzler, 1995) gibi bilişsel becerilerden daha çok etkileyen karmaşık (Bengmark, Thunberg ve Winberg, 2017) bir değişkendir. Bununla birlikte özyeterlik inancının; bireyin kendi deneyimlerine, dolaylı deneyimlerine, çevresi ile etkileşimine ve süreçteki anlık hislerine bağlı olarak farklılaştığı bilinmektedir (Cassidy ve Eachus, 2002). Bunlar arasında bireyin, kendi deneyimleri farklı durumlarla baş etme becerisine ilişkin yargısını yani özyeterlik inancını etkileyen en önemli etkenlerdendir (Bandura, 1997). Ayrıca, öğretim yöntemi, grup çalışması ve öğretmen tutumunun öz yeterliliği etkileyen diğer önemli değişkenlerden olduğu (Hammad, Graham, Dimitriadis ve Taylor, 2020) düşünüldüğünde görsel materyallerle ve senaryolarla zenginleştirilmiş öğrenme ortamlarının özyeterlik inancına etkisinin belirlenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir.

Alanyazında, özyeterliliğin akademik performansı yordadığını (Pajares ve Miller, 1994) ve problem çözme (Öztürk ve Güven, 2016), motivasyon (Gürlen, 2011), ilgi, tutum değişkenleri ile ilişkili olduğunu gösteren birçok çalışma bulunmakla (Bandura, 1997) birlikte öz yeterliliği hangi değişkenlerin yordadığına ve nasıl öğrenme ortamlarının etkileyebileceğine ilişkin çok az şey bilinmektedir. Ayrıca, matematiksel anlama boyutlarına ilişkin Usiskin'in yaklaşımını dikkate alan birçok çalışma bulunmakla birlikte (Kardeş-Birinci, 2016; Long ve Dunne, 2014; O'Sullivan, 2014; Plooy ve Long, 2014; Thompson ve ark., 2010; Yi ve ark., 2013) anlama boyutlarının tamamının incelendiği lisans düzeyinde çalışmaların (Kardeş-Birinci, 2016) daha az sayıda olduğu ve bunların da öğretim ortamlarının tasarlanmasına yönelik olmadığı görülmüştür. Lineer cebir kavramlarının öğretiminde görselleştirme yaklaşımlarından (Aytekin ve Kıymaz, 2019; Çevik, 2015; Konyalıoğlu ve ark., 2003) geometrik (Doğan-Dunlap, 2010) ve çoklu temsillerden (Doğan, 2018; Mallet, 2007) yararlanıldığı az da olsa kavramlara ilişkin rutin olmayan problemleri konu alan (Fischer, 2005; Kar, 2010; Wawro ve ark., 2012) çalışmalar olduğu ve bu çalışmaların bazılarında kavram bazında performansın incelendiği ancak sergilenen anlama boyutlarının dikkate alınmadığı görülmektedir. Ancak öğrencileri karşılaştırılmak amacıyla yararlanılan bu verilerden, performans farklılıklarının hangi bilgilerin eksikliğinden ve neden (kavramlara ilişkin hangi anlama boyutundaki eksikliklerinden) kaynaklandığına dair çok fazla bilgi elde edilememektedir. Alanyazında herhangi bir kavramı anlamanın birçok yönü olduğu (Usiskin, 2012) ve bir kavram üzerinde çalışılırken cevaptan daha fazlasının (çözüm sürecinin) yani sergilenen anlama boyutlarının incelenmesi gerektiği vurgulanmaktadır (Usiskin (2014) akt. Kardeş-Birinci, 2016).

2.7 Kavramlar arası ilişkilendirme

İlişkilendirme, iki nesne arasındaki karşılıklı bağ, ilgi, alaka, bağlantı, temas anlamına gelmektedir. Matematiksel ilişkilendirme örümcek ağı gibi yapılandırılmış zihinsel bir ağın parçası olarak ifade edilmektedir (Hiebert ve Carpenter, 1992). Temel matematiksel kavramları belirli bir matematiksel fikir veya temsile bağlayan bir kavram düğümü ise matematiksel ilişkilendirme olarak tanımlanmaktadırlar (Ma, 1999). Burada bahsi geçen düğümler (bağlantı noktaları), temsil edilen bilgi parçalarını; aralarındaki ipler ise bağlantı veya ilişkileri temsil etmekle birlikte birbirine bağlı olan bu düğümler üzerinde kurulan bağlantılar takip edilerek bir kavramdan diğerine geçiş yapılabilmektedir (Hiebert ve Carpenter, 1992, s. 67). Ayrıca, matematiksel ilişkilendirme, bir şemanın bileşenleri veya bir zihinsel ağ içindeki bağlantılı şema gruplarıdır (Eli, 2009). Matematiksel ilişkilendirmeyi içeren şema gruplarının gücü ve tutarlılığı, şema içindeki veya şema grupları arasındaki bileşenlerin doğru bir biçimde bağlanabilirliği ile ortaya konmaktadır (Eli, 2009). Matematiksel ilişkilendirme; yeni bilgiyi zihinsel ağına bağlandığı, yeni bilgi ile zihinsel ağların özdeşleştirildiği veya mevcut bilgi bileşenleri arasında yeni ilişkiler oluşturulduğu ve dolayısıyla bilgi yapılarındaki yanılgıların giderilip şemalarını yeniden düzenlendiği (Eli, 2009) bir matematiksel süreç (Coxford, 1995; Narlı, 2016) becerisidir. Matematiksel ilişkilendirme; oluşumu zaman aldığından süreci, süreç sonunda oluşan yapı olarak düşünüldüğünde bir ürünü ve kişiden kişiye değiştiğinden bir beceriyi temsil etmektedir (Narlı, 2016).

Matematik dersi öğretim programlarında temel beceriler arasında yer alan ilişkilendirme ile birlikte problem çözme, akıl yürütme ve iletişim becerilerinin gelişiminin önemi vurgulanmaktadır (MEB, 2013; NCTM, 2000). Bu temel beceriler birbiriyle bağlantılı ve birbirinin gelişimini destekleyici rol oynamaktadır. Nitekim yapılan araştırmalarda, problem çözme sürecinde öğrencinin öğrenmesine katkıda bulunabilecek çok sayıda etken olmakla birlikte, bunlar arasında bilgilerin organize edilmesinin önemli bir etken olduğu ortaya konmaktadır (Anderson, 2009; Chinnappan ve Lawson, 2000; Evitts, 2005; Lee, 2012; Pugalee, 2001;). Zihnindeki bilgi şemaları içinde uygun ilişkiler kurabilen ve organize edilmiş bilgiye kolayca erişebilen bireylerin problem çözme becerisine sahip olduğu söylenebilir (Eli, 2009). Problem çözmede gelişimin sağlanması için bireylerin bileşenlere sahip olması bununla birlikte gerektiğinde bu bileşenlere erişebilmesi gerekmektedir (Chinnappan ve Lawson, 2000; Sabella ve Redish, 2004). Nitekim birçok öğrencinin, bir problemi çözmek için gerekli bilgiye sahip olduğu ancak bu bilgiyi kullanamadığı ortaya konmaktadır (Lawson ve Chinnappan, 1994). Ayrıca, günlük dili, matematiksel dil ve sembollerle; matematiksel dili, günlük dil ve sembollerle ilişkilendirme davranışlarının kazanılmasının öğrencilerin matematiksel iletişim becerilerinin gelişmesinde etkili olduğu vurgulanmaktadır (MEB, 2013). Bunlarla birlikte ilişkilendirme becerisinin gelişimi akıl yürütme becerilerinin gelişimine de katkı sağlamaktadır. Nitekim Milli Eğitim

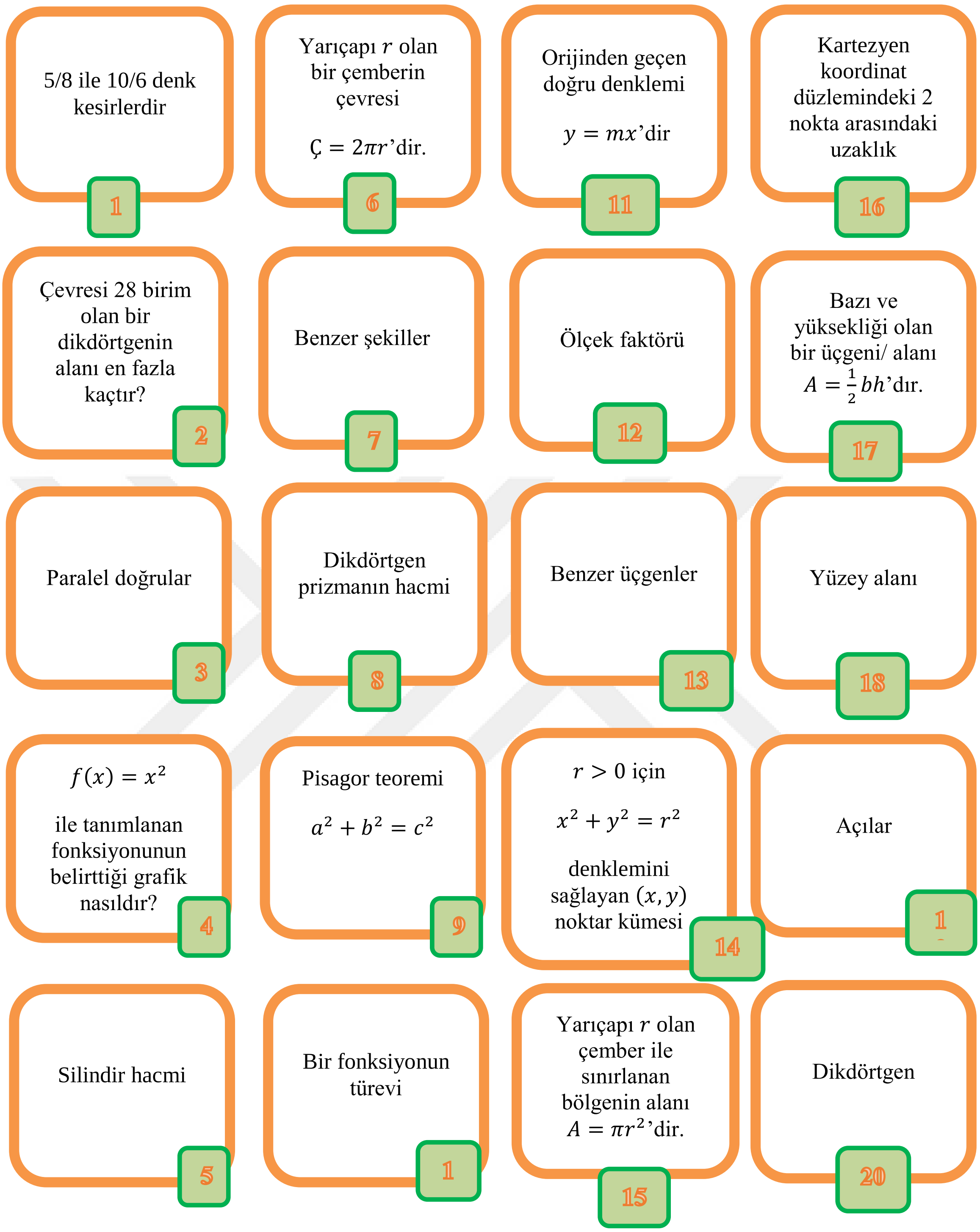
Bakanlığının (MEB, 2013) hazırladığı öğretim programında; bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel ilişkiler kullanıldığında, düşüncelerini açıklarken matematiksel modeller, kurallar ve matematikteki ilişkilerden yararlanıldığında bu becerinin gelişiminin sağlanabileceği vurgulanmaktadır. Dolayısıyla ilişkilendirme becerisi ile akıl yürütme, problem çözme ve iletişim becerileri birbirini desteklemektedir.

Diğer taraftan, matematiksel bağlantılardan yararlanarak kendine özgü çıkarımlarda bulunabilme olarak ifade edilen ilişkisel anlamada (Byers ve Herscovics, 1977) matematiksel kavramlar arası ilişkilendirme vurgulanmaktadır. Bunun yanı sıra alanyazında; disiplinler arası ilişkilendirme ve gerçek hayat ile ilişkilendirme (Monroe ve Mikovch, 1994; Mousley, 2004) ve ön öğrenmelerle ilişkilendirme (Hiebert ve Lefevre, 1986; Kızıloğlu ve Konyalıoğlu, 2002) türlerini dikkate alan çalışmalar bulunmakla birlikte; farklı sınıflandırmaların yer aldığı çalışmalar (Coxford, 1995; Eli, 2009; Eli, Mohr-Schroeder ve Lee, 2013; Leikin ve Levav-Waynberg, 2007;) da yer almaktadır. Bunlar arasında Eli (2009, 2013) tarafından yapılan çalışmalarda diğerlerine göre daha fazla sayıda ilişkilendirme türü belirlenmiş ve ilişkilendirme becerisi derinlemesine incelenmiştir. Bu çalışmalardan birinde (Eli, 2009); işlemsel, karakteristik/özellik, cebirsel/geometrik, türetimsel ve 2-3 boyutlu ilişkilendirme olmak üzere beş tür ilişkilendirme belirlenmiştir. Diğer çalışmasında (Eli ve ark., 2013) işlemsel, karakteristik/özellik ve türetimsel ilişkilendirme türlerine ek olarak kategorik ve müfredatla ilişkilendirme türleri tanımlanmıştır. Eli, Mohr-Schroeder ve Lee (2013)'nin çalışmasında geometrik kavramlar arasında yapılan ilişkilendirmeleri; kategorik, karakteristik/özellik, işlemsel, müfredatla ve türetimsel ilişkilendirme türlerini dikkate alarak aşağıdaki biçimde değerlendirmektedir:

- İşlemsel ilişkilendirme: Katılımcının kartlar arasındaki matematiksel ilişkilendirmesine ilişkin açıklaması; matematiksel bir işleme veya algoritmaya dayanıyorsa işlemsel ilişkilendirme sergilediği kabul edilmektedir,
- Karakteristik/özellik: Katılımcının kartlar arasındaki matematiksel ilişkilendirmeye ilişkin açıklaması, kavram özelliklerine veya bu kavramlarla ilgili olan diğer kavramların özelliklerine dayanmaktadır,

- Kategorik ilişkilendirme: Katılımcının kartlar arasındaki matematiksel ilişkilendirmeye ilişkin açıklaması, temelde kavram ile ilgili bir gruplandırmaya veya kategori oluşturmaya dayanmaktadır,
- Müfredatla ilişkilendirme: Katılımcının kartlar arasındaki matematiksel ilişkilendirmesine ilişkin açıklamasında; ilgili kavramın öğretiminin müfredata etkisini, kavram ve konuların öğretileceği sıraya bağlı kalmaksızın değerlendiriyorsa müfredatla ilişkilendirme yaptığı düşünülmektedir,
- Türetimsel ilişkilendirme: Katılımcının kartlar arasındaki matematiksel ilişkilendirme yapması; bir kavrama ilişkin bilgi veya bilgileri, diğer kavram veya kavramlar üzerinden inşa etmesine dayanıyorsa ve bir formülü türetebiliyorsa türetimsel ilişkilendirme olarak kabul edilmektedir.

Eli vd. (2013), aşağıda Şekil 2.9'da yer alan kartlardan hangilerini ilişkilendirdiğine bakarak öğrencilerin sergilediği ilişkilendirme türlerini belirlemiştir.



Şekil 2.9 Kartları gruplandırma etkinliğinde kullanılan kartlardan bazıları (Eli, 2009; Eli, 2013)

Bu çalışmada (Eli ve ark., 2013) bir katılımcı;

- 4 ve 10 numaralı kartları bir arada gruplandırırken; 4. kartta verilen fonksiyonun türevinin nasıl alındığına ilişkin kuraldan yararlanarak açıklıyorsa "işlemsel ilişkilendirme",

- 19, 20 ve 3 numaralı kartları bir arada gruplandırırken “Dikdörtgenin ikişer ikişer paralel doğrulardan oluşması ve dört açısının doksan derece olması” bilgilerinden yararlanıyorsa “karakteristik/özellik” ilişkilendirmesi,
- 9. ve 14. kartları ilişkilendirirken, a’nın x ve b’nin y olduğunu düşünerek formüllerin benzerliğinden yararlanıyorsa “kategorik” ilişkilendirme,
- 6 ve 15 numaralı kartları birlikte gruplandırmasının nedenini müfredatla ilgili bir bağlantı kurarak açıklıyorsa “müfredatla ilişkilendirme”,
- 5, 6, 8, 15 ve 18 numaralı kartları gruplandırmasının nedenini; bir silindirin yüzey alanını bulurken yanal alan formülünü; silindirin açılımında dikdörtgen oluşumuna ve bu dikdörtgenin bir kenarının silindirin bazındaki dairenin çevresi ile aynı değeri almasına ve dikdörtgenin diğer kenarının silindirin yüksekliği olduğu bilgisine dayalı olarak açıklıyorsa bununla birlikte silindirin hacim formülünü silindirin taban alanı (dairenin alanı) ile yüksekliğinin çarpılması formülüne dayalı olarak buluyorsa “türetimsel” ilişkilendirme

olarak değerlendirilmektedir. Bu örneklerde de olduğu gibi ilişkilendirme; iki ifadeyi eşleştirme ile sınırlı olmamakla birlikte birden fazla ifade veya kavram arasında bağlantı kurma anlamını taşımaktadır. İlişkilendirmeyi oluşturan düğümlerden bazıları doğrusal zincire benzeyen ağlarla birbirine doğrudan bağlı basit bir yapıdan oluşurken bazıları da her bir düğüme bağlı birçok bağlantıyla oldukça karmaşık bir yapı halindedir (Hiebert ve Carpenter, 1992, s. 67). Bazı çalışmalarda, kavramlar arsındaki bu bağlantılardan oluşan ağın gelişimiyle kavram bilgisinin anlamlandırılabileceği (Hiebert ve Lefevre, 1986; Hiebert vd., 1997) ve kavramları anlamlandırma seviyesinin bu ilişkilendirme ağındaki bağlantı sayısı ile belirlenebileceği ifade edilmektedir (Hiebert vd., 1997).

Diğer taraftan, anlamaya ilişkin bazı tanımlamalarda ön öğrenmeleri ile yeni bilgi ya da nesneler arasında ilişkilendirmenin önemi vurgulanmaktadır (Ajdukiewicz, 1974, s.7; Hiebert ve Lefevre, 1986; Piaget, 2000; Sierpinska, 1994, s.72-73). Anlama, temel bileşenlerini içerecek biçimde bir nesne ile karşılaşıldığında oluşan algıyı zihinde bulunan nesnelerle (zihinsel temsil, imaj ve yapı (Sierpinska, 1994, s.28)) ilişkilendirebilme olarak tanımlanmaktadır (Ajdukiewicz, 1974, s.7). Nesnelerin algılanması ile başlayan anlama sürecinde, basamak görevi gören ilişkilendirme ile bütünlük sağlanmakta (Sierpinska, 1994, s.72-73) ve bütün bunlar gerçekleşirken süreçteki eylemler oldukça yoğun bir ağ oluşturmaktadır (Sierpinska, 1994, s.73). Örümcek ağına benzetilen bu yapı (Hiebert ve Carpenter, 1992) ilişkilendirmenin önemini ortaya koymaktadır.

Alanyazında kavramlar arası ve ön öğrenmelerle ilişkilendirmenin (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] , 2009, s.2) yanı sıra gerçek hayat (Lee, 2012) ve disiplinler arası (MEB, 2018a) ilişkilendirmenin önemi (MEB, 2013) ve öğrencilerin bu ilişkilendirme becerilerinin yeterli olmadığı (Lee, 2012; Özgen, 2013) vurgulanmaktadır. Bununla birlikte öğretmenlerin öğretim sürecinde ilişkilendirmenin anlamadaki öneminin dikkate alındığı gerçek hayat durumlarını yeterince kullanmadığı (Kızıloğlu ve Konyalıoğlu, 2002) ve gerçek hayat durumlarına örnek vermede zorlandığı (Leikin ve Levav-Waynberg, 2007) ortaya konmaktadır. Yapılan çalışmalar gerçek hayattaki kullanımlarına ilişkin problem durumlarının temel alındığı öğretimin; formal tanımı oluşturmada ve kavram imajını zenginleştirmede etkili (Wawro ve ark., 2012) olabileceğini ve anlamlı öğrenmeyi sağlayacağı ve bununla birlikte bilişsel becerileri geliştirmeye yardımcı olabileceğini (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto ve Miller, 1997) göstermektedir. Genel anlamda matematiksel ilişkilendirmenin kalıcı öğrenmeyi sağladığı (Bosse, 2003), derse ilgiyi artırdığı ve neden-sonuç ilişkisi kurmaya yardımcı olduğu (Aladağ ve Şahinkaya, 2013) bilinmektedir. Özelde ise yukarıda bahsi geçen ilişkilendirme türlerinin (gerçek hayat ile ilişkilendirme ve disiplinler arası ilişkilendirme) dikkate alındığı öğretim sürecinin, öğrencilerin matematiği daha rahat ve daha anlamlı öğrenmelerini sağlayacağı, bilgi ve becerilerin kalıcı hale gelmesi ve matematiğe karşı öz güvenin artması yönünde etki edebileceği ve matematiğe yönelik olumlu tutum oluşturabileceği düşünülmektedir (MEB, 2013). İlişkilendirme becerisi; problem çözme, akıl yürütme ve iletişim gibi temel beceri ve yeterliliklerin gelişimi ve bunların yanı sıra, sinir sisteminin işleyişi ile bağlantılı (Evitts, 2005) olması açısından öğretim sürecine olumlu etkileri olan; matematik eğitiminin kritik bir bileşenidir (Eli, 2009). Dolayısıyla alanyazında, ilişkilendirme ile ilgili yapılan araştırmalar (Bartels, 1995; Evitts, 2005; Eli, 2009; Eli, Mohr-Schroeder ve Lee, 2011; Mumcu, 2018; Özgen, 2013; Roddy, 1992; Wood; 1993) bulunmakla birlikte daha fazla araştırma yapılmasının gerekliliğine işaret edilmektedir (Evitts, 2005). Bu doğrultuda eldeki araştırma ile lineer cebirde sergilenen matematiksel ilişkilendirme türlerinden kavramlar arası ilişkilendirme biçimleri üzerinde durulmuş ve bu duruma ilişkin ilişkilendirmelerin eksik veya yanlış yapılmasının nedenleri araştırılmıştır. Bu nedenle bu araştırmanın alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

2.8 İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.8.1 Lineer Cebir ile İlgili Çalışmalar

Lineer cebir konularından özellikle denklem sistemleri ile ilgili çalışmalar oldukça fazladır (Batısta, Baptısta 2014; Kan, 2014; Mallet, 2007; Uhlig, 2003). Ayrıca vektör uzayları, lineer bağımlılık ve bağımsızlık konularıyla ilgili çalışmalar (Doğan-Dunlap, 2010; Kan, 2014; Turğut, 2010) bulunmasına rağmen özellikle lineer dönüşümler ile ilgili çalışmalar yok denecek kadar azdır (Çevik, 2015; Turğut, 2010). Yapılan çalışmalar da birkaç lineer dönüşümün daha çok geometrik özellikleriyle sınırlı kalmıştır (Güven ve Yılmaz, 2012).

Alanyazında elementer lineer cebir öğretimi için felsefik ve pedagojik bir yaklaşım bulunmaktadır. Bu yaklaşıma göre bir lineer cebir dersinin sadece kavram ya da sadece uygulama ağırlıklı olamayacağı, dengeli bir yaklaşım uygulandığında öğretimin seviyesinin artacağı ifade edilmektedir (Uhlig, 2003). Uhlig'in ortaya attığı bu yaklaşımda, klasik anlayışın yerine lineer cebirin temel yapısını, özünü ve kavramları ortaya çıkaracak şekilde öğretim yapılmalıdır. Çalışmanın esasını vektörler, lineer birleşim ve lineer dönüşüm arasındaki ilişki oluşturmaktadır. Kavramlar arası ilişkilendirme ve kavramsal öğrenmenin başarıyı artırdığı ve iyi bir öğrenim ve öğretim için açıklık, somutluk, uygulamalar, yaratıcılık pedagojik prensiplerine uyulması gerektiği sonucuna varılmıştır (Uhlig, 2003). Bu çalışmada PDÖ yaratıcılık ve uygulamalar; ÇTTÖ somutluk, açıklık pedagojik prensipleriyle örtüşmektedir.

Oktaç (2004) tarafından lineer cebire giriş dersinin grup çalışması olarak uzaktan öğretim şeklinde gerçekleştirildiği çalışmada özdeğer ve özvektör kavramlarını içeren bir problem hakkında öğrencilerin yaşadıkları kavramsal ve mantıksal zorluklar sunulmuştur. Çalışmada uzaktan öğretimin öğrencilere, kendilerini özgürce ifade etmeleri için fırsat ve öğrencilerin net olmayan bilgiyi paylaşmalarına cesaret verdiği nerede başarısız olduklarını ve birbirlerini nasıl ikna etmeye çalıştıklarını inceleyerek matematiksel akıl yürütmenin türü ve düzeyi belirlenmeye çalışılmıştır. Öğretim için yeni iletişim teknolojilerini kullanmadaki başarının yeni teknolojik ortamları anlamaya bağlı olduğu ve bunun da öğretme ve öğrenme fenomenlerini yorumlama açısından bakış açısında değişiklik getireceği sonucuna varılmıştır.

Erçerman (2008), tez çalışmasını lineer cebir ile ilgili öğrenci bilgilerinin işlem ve kavram bilgisi bağlamında değerlendirilmesi amacıyla yapmıştır. Öğrencilerin çoğunda lineer cebir bilgilerinin, kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında tutarsız, eksik bilgiler olduğu ve işlemsel bilgilerinin ağırlıkta olduğu sonucuna varılmıştır. Lineer cebir ile ilgili kavramların somutlaştırılarak verilmesi gerektiği ve işlemsel bilgilerin öğretilmesine önem verildiği kadar kavramsal bilgilerin öğretilmesine de önem verilmesi gerektiği tespit edilmiştir.

Akyıldız (2013), çalışmasını ilköğretim matematik öğretmen adaylarının lineer cebir dersine yönelik tutumlarını ve alan dili becerilerini incelemek amacıyla yürütmüştür. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının lineer cebir dersine yönelik tutumları ve becerileri ile adaylara ait cinsiyet, öğretim şekli ve çalışma değişkenleri arasında anlamlı fark olmadığı ancak lineer cebir dersine yönelik tutumları ve becerileri ile sınıf düzeyi ve yaş değişkenleri arasında anlamlı farklar olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca, 17-19 yaş aralığındaki öğretmen adaylarının lineer cebir dersine yönelik tutumlarının daha olumlu ve lineer cebir dersi kavramlarını öğrenme başarılarının daha yüksek olduğu ancak genel olarak öğretmen adaylarının lineer cebir dersine yönelik tutumlarının olumsuz, lineer cebir kavramlarını öğrenme başarılarının düşük olduğu görülmüştür.

Alanyazında ÇTTÖ ile ilgili çalışmalardan lineer cebir alanında yapılan çalışmalar (Doğan-Dunlap, 2010; Kardeş, 2010; Mallet, 2007) az olmakla birlikte, gerçek hayat problemlerinden veya rutin olmayan problemlerden yararlanılarak kavramların keşfedici türden öğretildiği probleme dayalı öğretimin uygulandığı çalışmalar (Kar, 2010) daha da azdır. Bu çalışmanın değişkenlerinden olan ÇTTÖ, PDÖ, düşünme yapıları, özyeterlik algısı ve kavramlar arası ilişkilendirme ile ilgili yapılan araştırmalar aşağıda ele alınmaktadır.

2.8.2 Çoklu Temsil Temelli Öğretim ile İlgili Çalışmalar

Kardeş (2010), tez çalışmasını matematik öğretmen adaylarının lineer denklem sistemleri çözüm süreçlerini özyeterlik algısı ve çoklu temsil bağlamında incelemek amacıyla yürütmüştür. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının özyeterlik algılarının yüksek, lineer denklem sistemleri çözme performanslarının ve temsil dönüşüm başarılarının orta düzeyde olduğu, lineer denklem sistemleri performansları ile özyeterlik algıları ve lineer denklem sistemleri performansları ile temsil dönüşüm başarıları arasında orta düzeyde ilişki olduğu; özyeterlik algılarının lineer denklem sistemlerini çözme performanslarını, lineer denklem sistemlerini çözme performanslarının da temsil dönüşüm başarılarını etkilediği tespit edilmiştir.

Kan (2014), tez çalışmasını öğretmen adaylarının GeoGebra destekli öğretimin öğretmen adaylarının lineer cebir dersine ait bazı konulardaki akademik başarıları üzerine etkisini araştırmak amacıyla yürütmüştür. GeoGebra destekli uygulamalar sayesinde öğretmen adaylarının vektör, matris cebiri, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem sistemi kavramlarıyla ilgili akademik başarı düzeyleri, bu kavramların birbirleri ile ilişkilendirme ve geometrik özellikleri ile cebirsel özellikleri arasındaki ilişkileri keşfetme becerileri üzerinde etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

İzgiol (2014), tez çalışmasında teknoloji destekli ÇTTÖ'nün öğrencilerin lineer cebir öğrenimine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisini araştırmak ve öğrencilerin teknoloji destekli çoklu temsil temelli öğretime yönelik görüşlerini almak amacıyla yapmıştır. Teknoloji destekli çoklu temsil temelli lineer cebir öğretiminin lineer cebir başarısını artırmada etkili olduğu ancak matematiğe yönelik tutumlarını etkilemediği ve öğretmen adaylarının teknoloji destekli çoklu temsil temelli öğretim yönteminin diğer matematik alan derslerinde ve diğer matematik öğretim kademelerinde kullanımına ilişkin görüşlerinin olumlu yönde olduğu, ancak uzaktan eğitimle gerçekleştirilen kısımlarla ilgili olumsuz görüşleri olduğu sonucuna varmıştır.

Çevik (2015) yüksek lisans tezini bilgisayar destekli lineer cebir materyallerinin öğretmen adaylarının derse karşı ilgi ve farkındalıklarına, uzamsal görselleştirmelerine ve memnuniyetlerine etkisini ortaya çıkarmak amacıyla yürütmüştür. Lineer cebir dersine yönelik hazırlanan materyallerin öğrenme ortamını olumlu yönde etkilediği ve görselleştirmeyi kolaylaştırdığı tespit edilmiştir.

Turğut (2010) doktora çalışmasında, teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine, geometrik düşünme düzeylerine, başarılarına etkisini ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri, geometrik düşünme düzeyleri, cinsiyet, lineer cebir başarısı ve akademik başarı arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Öğretmen adaylarının uzamsal yetenekleri ile lineer cebir başarısı ve akademik başarı arasında orta düzeyde pozitif ilişki olduğu tespit edilmiştir.

Ergene (2011) tez çalışmasını matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerini çoklu temsiller bileşeninde incelemek ve Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi çerçevesinde matematik öğretmen adaylarının başarılı bir teknoloji entegrasyonu için ihtiyaç duyacakları bilginin kazandırılmasını hedefleyen bir program geliştirmek amacıyla yürütmüştür. Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi eğitimleri sonucunda elde edilen veriler, öğretmen adaylarının çoklu temsil bilgilerinin çoklu temsilleri kullanma ve kullandıkları temsiller arasındaki bağlantıları kurma yönünde geliştiği ve bu gelişimin teknolojinin devreye girmesiyle daha çok belirginleştiği tespit edilmiştir.

Özdemir (2012), tez çalışmasını ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoklu temsiller kullanılarak problem çözme algılarına etki eden faktörleri araştırmak amacıyla yürütmüştür. Öğretmen adaylarının problem çözüm sürecinde somut temsil, resimli temsil, sembolik temsilleri tercih ettiği, her aşamada sembolik temsilleri kullandıkları ve GeoGebra destekli geliştirilen çoklu temsillerin, klasik anlamda kullanılan çoklu temsillere oranla problemin derinlemesine incelenmesinde daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

Bal (2015), çalışmasını öğretmen adaylarının çoklu temsilleri kullanma ve dönüştürme becerilerini incelemek amacıyla yapmıştır. Öğretmen adaylarının temsiller arası dönüşümlerde genellikle başarılı ancak, sözlü temsillerin diğer temsillere dönüştürülmesinde başarısız ve temsiller arası diğer dönüşümlere göre sözel sunumları cebirsel temsile dönüştürmede daha başarılı olduğu tespit edilmiştir.

Kardeş-Birinci, Delice ve Aydın (2014) yaptıkları çalışmada lineer denklem sistemlerinin matrisle çözüm süreci araştırılmıştır. Öğrencilerin konuyla ve sembollerle ilgili yanlış bilgilere sahip olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin daha çok aritmetik-analitik yapıda düşündüğü, öğrendikleri yeni metotları ve matrisleri kullanmaktansa; kavram imajlarında olan üniversiteden önce öğrendikleri bilgileri tercih ettikleri ve elemanter işlemlerde sıkıntı yaşadıkları sonucuna varılmıştır.

Kaya (2015), tez çalışmasında bilgisayar yazılımıyla desteklenmiş çoklu temsil temelli öğretimin yedinci sınıf cebir öğretiminde öğrencilerin cebirsel muhakeme becerilerine, cebirsel düşünme düzeylerine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisini incelemiştir. Deney grubunda yer alan öğrencilerle gerçekleştirilen bilgisayar yazılımı destekli çoklu temsil temelli öğretimin, kontrol grubunda gerçekleştirilen düz anlatımla gerçekleştirilen klasik öğretime göre; farklı cebirsel ifadeleri kullanma, uygun cebirsel muhakemeyi belirleme, çıkarımlarda bulunma, sonucun doğruluğuna ve çözüm yoluna karar verme ve farklı problem türlerini çözme becerilerini geliştirmede daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

Deniz (2016), tez çalışmasını fonksiyon konusuna temel teşkil eden doğrusal denklemlerin 7. sınıflarda öğretiminde geometri Sketchpad kullanımını çoklu temsil ve enstrümantal yaklaşım boyutunda incelemek amacıyla yürütmüştür. Araştırma sonunda öğrencilerin matematiksel terimlerden çok günlük konuşma dilini kullandıkları, grafik temsili oluşturmada başarılı olmalarına rağmen grafiği yorumlamada zorlandıkları, cebirsel temsili çözümlemede geometri Sketchpad ile oluşturdukları grafik temsilini kullanarak yaşadıkları zorlukların üstesinden geldikleri, Geometri Sketchpad kullanarak gerçekleştirdikleri çözümlerde öğrencilerin farklı enstrümanlı teknikler geliştirdikleri tespit edilmiştir.

Çetin (2016) tarafından doktora tezi olarak hazırlanan çalışma; sorgulayıcı öğrenme yaklaşımı çerçevesinde tam sayı kavram ve işlemlerinin sorgulayıcı öğrenme yaklaşımıyla çoklu temsil destekli dinamik çoklu modelleme ile öğretiminin, öğrencilerin başarılarına etkisini, tam sayılar konusuna ilişkin model tercihlerini, temsiller arası geçiş becerilerini ve Sorgulayıcı Öğrenme süreci aşamalarındaki yeterlilik düzeylerini incelemek amacıyla yapılmıştır. Araştırma sonucunda, tam sayılar konusunu sorgulayıcı öğrenme yaklaşımına dayalı çoklu temsil destekli Dinamik Çoklu Modelleme ile öğrenen öğrencilerin, geleneksel yöntemle öğrenen öğrencilere göre daha başarılı oldukları, tam sayılar konusunu sorgulayıcı öğrenme yaklaşımına dayalı çoklu temsil destekli Dinamik Çoklu Modelleme ile öğrenen öğrencilerin model tercihlerinin karşılaştırma grubu öğrencilerin model tercihlerine kıyasla daha çeşitli olduğu ve tam sayılar konusunda geliştirilen özgün materyallerin öğrenci başarısını arttırdığı sonucuna varılmıştır.

Doğan (2001) çalışmasında Mathematica adlı bilgisayar programı kullanımının lineer cebirin temel kavramlarının öğrenimine etkilerini araştırmıştır. Çalışmanın sonucunda, deney grubunun karşılaştırma grubundan sadece kavramsal bilgi içeren kısımlarda önemli ölçüde daha iyi bir performans sergilediği kanıtlanmıştır.

Doğan-Dunlap (2007) tarafından yüksek lisans tezi olarak hazırlanan çalışma; lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarının cebirsel ve grafik temsili üzerine öğrencilerin düşünme biçimlerini araştırmak amacıyla yapılmıştır. Bazı öğrencilerin grafik ve cebirsel temsil arasında ilişki kuramadığı görülmüştür. Düz anlatımın gerekli olduğu ancak yeterli olmadığı, bilgisayar destekli öğretimin kavramsal anlamaya ve kavram yanılgılarını gidermeye yardımcı olduğu sonucuna varılmıştır.

Mallet (2007) çalışmasında lineer denklem sistemleri ve çözümlerini farklı temsiller bağlamında incelemiştir. Öğrencilerin bir kısmının buldukları parametreye bağlı çözümü, yanlış yorumladığı tespit edilmiştir.

Doğan-Dunlap (2010) çalışmasını eşolon form ve grafik temsili yorumlamaya dayalı 2 farklı bölümde sorulan lineer bağımsızlık sorularına öğrencilerin verdiği cevaplar arasındaki farklılıkları sunmak amacıyla yapmıştır. Geometrik temsilin, aritmetik ya da cebirsel temsilin tam olarak yerini tutamayacağı, ancak öğrencileri çoklu temsilleri kullanmada cesaretlendirdiği bir kavramın esnek olarak çeşitli temsillerini düşünmeye yardımcı olduğu tespit edilmiştir.

Doğan-Dunlap (2018) tarafından yapılan çalışmada bilgisayar destekli uygulamadan sonra üç gruba ayrılan öğrencilerle yapılan görüşmelerle öğrencilerin farklı öğretim biçimleri karşısında farklı düşünme biçimleri araştırılmıştır. İki gruptan birinde geometrik temsillerle, diğerinde ise etkileşimli bilgisayar programı Mathematica yardımıyla öğretim yapılmıştır. Grupların her birinde öğrencilerin analitik yapısal (Analytic-Structural) yorumunun en yüksek yüzdeye, analitik-aritmetik (Analytic-Arithmetic) yapıda yorumunun en düşük yüzdeye sahip olduğu görülmüştür. Gruplar arasında bu üç yapı arasındaki eğilimlerin farklılaştığı sonucuna varılmıştır.

2.8.3 Probleme Dayalı Öğretim ile İlgili Çalışmalar

Haris, Marcus ve Mclaren (2001) yaptıkları çalışmada farklı seviyelere yönelik matematik konularında probleme dayalı öğrenmenin uygulanmasına ait üç örnek vermişlerdir. İlköğretim öğrencilerinden iki boyutlu cisimlerin çevresini ve dairenin alanını bulmaları, öğrencilerin doğrusal ilişkileri incelemeleri ve verilen senaryodan genellemelere ulaşmaları istenmiştir. Üçüncü örnek ise ilköğretim öğretmen adaylarına yönelik asal sayılar ve çarpanlara ayırma konusunda hazırlanan bir etkinlikten oluşmaktadır. Öğretmen adaylarının bu çalışma ile kendi kendilerine matematiksel konularda çalışabileceklerini anlamaları sağlanmıştır. Çalışma sonunda bu üç örnekle matematiksel kavramların daha iyi oluşacağı iddiası ortaya atılmıştır.

Katwibun (2004) tez çalışmasını probleme dayalı öğrenme ile ilköğretim öğrencilerinin matematiksel eğilimlerini ortaya çıkarmak amacıyla yürütmüştür. Araştırma sonucunda elde ettiği veriler doğrultusunda probleme dayalı öğrenme yöntemi ile öğrencilerin grup çalışmasını sevdikleri, matematiğin yararlı olduğuna ve günlük yaşamda kullanıldığına dair inançlarının oluştuğu tespit edilmiştir.

Uslu (2006) tez çalışmasını probleme dayalı öğrenmenin matematik dersinde öğrencilerin derse ilişkin tutum, akademik başarı ve kalıcılık düzeylerine etkisini belirlemek amacıyla yapmıştır. Çalışmadan elde edilen bulgular sonucunda matematik öğretiminde probleme dayalı öğrenme yönteminin öğrencilerinin tutumunu, başarılarını ve bilginin kalıcılık düzeyini geleneksel yönteme göre olumlu yönde daha fazla etkilediği sonucuna varılmıştır.

Akın (2009) yapmış olduğu yüksek lisans çalışmasında 5. sınıf öğrencilerinin matematik dersinde, kesirler konusunu öğrenmelerinde probleme dayalı öğrenme yönteminin öğrenci başarısına etkisini araştırmıştır. Çalışmanın sonunda probleme dayalı öğrenme yöntemiyle işlenen dersin, öğrenci başarı düzeyini artırmada daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

Cantürk-Günhan ve Başer (2009) çalışmalarında probleme dayalı öğrenmenin 7. sınıf öğrencilerinin eleştirel düşünme becerileri üzerinde etkisinin olup olmadığını incelemiştir. Araştırma sonunda probleme dayalı öğrenme yönteminin matematik dersinde öğrencilerin eleştirel düşünme becerilerini geliştirmede GÖ yöntemlerine göre daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

Kar (2010) yüksek lisans çalışmasında; lineer cebirde vektör uzayları ünitesinde yer alan lineer kombinasyon, bir kümenin gerdiği uzay, alt vektör uzayı, lineer bağımlılık/bağımsızlık ve baz-boyut kavramlarının probleme dayalı olarak öğrenilmesinin öğrencilerin akademik başarılarına, problem çözme becerilerine ve yaratıcılıklarının gelişimine olumlu etkisi olduğunu tespit etmiştir.

2.8.4 Düşünme Yapıları ile İlgili Çalışmalar

Taşova (2011) matematik öğretmeni adaylarının sahip olduğu matematiksel düşünme yapılarının matematiksel modelleme etkinliklerindeki görselleme sürecini nasıl etkilediğini ve bu durumun bireysel veya grup olarak çalışıldığında nasıl değiştiğini araştırmıştır. Çalışmanın sonucunda geometrik düşünen öğretmen adaylarının zihnin görsel-resimsel bileşenlerini sözel-mantıksal bileşenlerine göre büyük oranda daha az tercih ettikleri tespit edilmiştir.

Delice ve Sevimli (2011) araştırmalarında "Farklı matematiksel düşünme yapısına sahip analiz dersi öğrencilerinin integral yoluyla hacim hesabı problemlerini çözme yaklaşımları arasında bir farklılık var mıdır?" sorusuna cevap aramışlardır. Çalışmanın sonucunda düşünme yapısı farklılıklarının matematik öğretmeni adaylarının problem çözme yaklaşımlarını ve başarısını doğrudan etkilemediği, farklı düşünme yapısındaki katılımcıların, görsel süreçleri kullanma, yorumlama ve tercih etme algıları açısından farklılıklarının olduğu tespit edilmiştir.

Olgun (2016) tarafından yapılan çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel düşünme yapılarını, görsel-uzamsal temsilleri kullanımlarını, görsel-uzamsal yeteneklerini ve sözel matematik problemlerini çözme performanslarını incelemek ve bu değişkenler arasındaki ilişkileri araştırmak amaçlanmıştır. Farklı tipteki temsil kullanımının problem çözme performansını etkilediği, şematik temsilin kullanıldığı sorulardaki doğru cevap oranının resimsel temsilin kullanıldığı sorulara göre daha yüksek olduğu ve görsel-uzamsal yeteneklerinin yalnızca şematik temsil kullanımı ile anlamlı pozitif bir ilişkisi olduğu tespit edilmiştir.

Uçuş (2017) tarafından yapılan çalışmada, bilişim teknolojileri aracılığıyla uzaktan eğitim sürecinde görme engelli öğrencilerin erişilebilir matematiksel elektronik metin ile sunulan matematiksel problemleri çözüm performansları ve süreçleri düşünme yapıları ve matematiksel iletişim süreçleri bağlamında incelenmiştir.

Özhan-Turan (2011) tarafından yapılan çalışmada üç farklı düşünme yapısında olan öğrencilerin matematiğin bir dalı olan analitik geometri dersindeki doğru durumlarındaki temsil geçişlerinin ne düzeyde olduğu ve soruları çözerken tercih ettikleri temsil türleri incelenmiştir.

Köse (2018) üst düzey uzamsal yeteneğe sahip matematik öğretmen adaylarının düşünme yapılarına göre solo taksonomisi düzeylerini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre üst düzey uzamsal yeteneğe sahip olan öğretmen adaylarının büyük bir kısmının "Çok Yönlü Yapı" seviyesinde olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının problem çözümlerinde sorunun farklı yönlerinin farkında olduğu ancak çözüm için tam bütünlük sağlayamadıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının çok az bir kısmının geometrik düşünme yapısına sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

2.8.5 Anlama Boyutları ile İlgili Çalışmalar

Yi, Yoo ve Lee (2013), trigonometrik oranlar konusunda farklı bir yaklaşımla tarih-kültür boyutunun kavramların anlaşılmasındaki etkisini incelemişlerdir. Deneysel desen kullanılan çalışmada, deney grubuna tarih-kültür boyutu dikkate alınarak trigonometrik oranlar konusu anlatılmıştır. Deney grubunun karşılaştırma grubuna göre daha iyi matematiksel anlamaya sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

Plooy ve Long (2014) anlama boyutları yaklaşımı ile bilişsel düzeylerin nasıl değerlendirilebileceği ile ilgili bir matris hazırlamışlardır. Bu matrisin satırları ve sütunları sırasıyla Usiskin'in 4 anlama boyutunu (BA, Öİ, TM, KM) ve bilişsel anlama düzeylerini içermektedir. bir araç olarak matris gösteriminden yararlanarak, oran kavramının tam olarak anlaşılması için gerekli olan tüm bilişsel düzeylerde, matematiksel anlama boyutlarının değerlendirmesine yer verilmiştir.

O'Sullivan (2014) ise matematik ders kitaplarının analizinde anlama boyutlarını kullanmıştır. Ders kitaplarını anlamanın beş boyutunu (BA, Öİ, TM, KM, tarih-kültürel) kullanarak değerlendirmiştir.

Thompson, Kaur ve Bleiler (2010) bu çok boyutlu yaklaşımı öğrencilerin matematiksel bilgilerinin değerlendirilmesinde kullanmışlardır ve anlamalarının boyutlara göre nasıl farklılaştığını analiz etmiştir.

Kardeş-Birinci (2016) doktora tezi çalışmasını matematik öğretmeni adaylarının lineer cebir kavramlarında sergiledikleri anlama boyutları performanslarını, uzamsal yetenekleri ve matematiksel düşünme yapıları bağlamında değerlendirmek amacıyla yürütmüştür. Öğretmen adaylarının bazı lineer cebir kavramlarında sergiledikleri anlama boyutlarının kavram bazında ve katılımcıların matematiksel düşünme yapılarına ve uzamsal yeteneklerine göre farklılaştığı görülmüştür.

2.8.6. Özyeterlik ile İlgili Çalışmalar

Özyeterlik algısı birçok alanda ölçülmek için çaba sarf edilen bir kavramdır ve bunun için ölçekler hazırlanmaktadır. Kardeş (2010), çalışmasında lineer cebir alanında öğrencilerin yetkinlik derecelerini belirleyebilmek için Lineer Denklem Sistemleri Özyeterlik Algısı Ölçeği geliştirmiştir ve öğretmen adaylarının lineer denklem sistemleri çözüm süreçlerini, özyeterlik algıları ve çoklu temsil bağlamında incelemiştir.

Gerez-Cantimer (2015) çalışmasında özel eğitim gereksinimli öğrencilerin öğretmenlerinin mesleklerine yönelik özyeterlik algılarının belirlenebilmesi için Özel Eğitim Öğretmenlerinin Mesleki Özyeterlik Algısı Ölçeğini ve matematik öğretimlerine yönelik özyeterlik algılarının belirlenebilmesi için Özel Eğitim Öğretmenlerinin Matematik Öğretimlerine Yönelik Özyeterlik Algısı Ölçeğini geliştirmiştir.

Işıksal ve Çakıroğlu (2006) çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören öğretmen adaylarının matematiğe yönelik özyeterlik algılarının öğrenim görülen üniversite ve üniversite sınıf seviyesine göre anlamlı bir fark oluşturup oluşturmadığını araştırmışlardır. Çalışma sonucunda, öğretmen adaylarının matematiğe karşı özyeterlik algılarının sınıf seviyesine göre değiştiği tespit edilmiştir.

Umay (2001) çalışmasında yenilenen ilköğretim matematik öğretmenliği programının öğrencilerin matematiğe karşı özyeterlik algılarına etkisini incelemiş ve ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programı son sınıf öğrencilerinin matematiğe karşı özyeterlik algılarının birinci sınıf öğrencilerinden istatistiksel olarak yüksek düzeyde olduğunu tespit etmiştir.

Malpass, O’Neil, Harold ve Hocevar (1999) yaptıkları çalışmalarında, matematik konusunda yetenekli lise öğrencilerinin öz-düzenleme, amaç yönelimi, özyeterlik ve matematik başarıları arasındaki yüksek düzeyde ilişki olduğunu tespit etmişlerdir.

Yürekli (2008) çalışmasında sınıf öğretmeni adaylarının matematiğe yönelik özyeterlik algılarını ele almış, tutumları ile arasındaki ilişkilerini araştırmıştır. Araştırmasının sonucunda sınıf öğretmeni adaylarının matematiğe yönelik özyeterlik algılarının oldukça yüksek olduğu görülmüştür.

2.8.7 Kavramlar Arası İlişkilendirme ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Burada alanyazında yer alan, katılımcıları öğretmen adaylarından oluşan kavramlar arası ilişkilendirme ile ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilecektir.

Evitts (2005)**,** araştırmasında (Öğretmen adaylarının yeni müfredata uygun hazırlanan problem çözümünde yararlandıkları ve geliştirdikleri matematiksel ilişkilendirmelerin incelenmesi) yedi ilköğretim matematik öğretmeni adayından oluşan klatılımcılardan, yenilenen müfredata uygun hazırlanan iki karmaşık problemi çözmelerini istemiş ve görüşmelerden hazırlanan transkriptler ve katılımcıların yazılı dökümanlarından elde edilen veriler analiz edilerek matematiksel ilişkilendirme türlerini belirlenmiştir. Katılımcıların; modelleme (modeling), yapısal (structural), temsili (representational), prosedürsel-kavramsal (procedure-concept) ve matematiksel unsurlar arasında (between strands of mathematics) olarak beş farklı matematiksel ilişkilendirme sergilediği belirlenmiştir. Bununla birlikte, ilişkilendirmenin özü türetilmiş bir dizi özellik bağlamında, tümevarımsal bir yaklaşımla incelenmiştir.

Hau (1993)'nun çalışmasında (Bir ilkokul öğretmenliği öğretim programında öğretmen adayları tarafından sergilenen matematiksel ilişkilendirmelerin analizi) ders kitabında ağırlıklı olarak matematiksel ilişkilendirmelerden hangilerine ağırlık verildiği araştırılmış ve ilişkilendirme türlerinin dengeli olarak dikkate alınmadığı ortaya konmuştur. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının yapısal, kültürel-tarihsel, kavramsal-işlemsel, disiplin içi ve disiplinler arası ilişkilendirme türlerinin her birini aynı düzeyde anlamadıkları ve disiplin içi matematiksel ilişkilendirmeyi temelde bir uygulama olarak gördükleri belirlenmiştir. Ders kitabında daha çok yapısal ilişkilendirmeye ilişkin bilgiler verildiği, bununla birlikte öğretmen adaylarının ders kitabında nispeten az sayıda olan disiplinler arası uygulamaları tanınmama eğiliminde olduğu ve işlemsel-kavramsal ilişkilendirmelere daha çok aşina oldukları sonucuna varılmıştır.

Wood (1993) çalışmasını (İlişkilendirmeleri geliştirme: ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının temel anlayışları), matematik öğretmen adayları özellikle ortaöğretim müfredatının içeriğindeki kavramlar arasında kurabildikleri ilişkilendirmeleri araştırmak amacıyla gerçekleştirilmiştir. Çalışmada ilişkilendirmeler, 8 öğretmen adayı ile yapılan birçok görüşme (6 görüşme) ile derinlemesine incelenmiş bununla birlikte 121 öğretmen adayından oluşan büyük bir örnekleme uygulanan ölçekle, öğretmen adaylarının matematiksel fikirler arasında nasıl ilişki kurduğu ve matematiksel ilişkilendirmenin diğer bazı değişkenlerle ilişkisini değerlendirmek amacıyla yapılmıştır. Anketten elde edilen veriler istatistiksel yöntemlerle ve görüşmelerden elde edilen veriler ise nitel yöntemlerle analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının sahip olduğu fikirlerin çoğunun ilişkilendirilmediği ve dolayısıyla parçalar halinde yer aldığı bu durumun bazı matematiksel kavramlara odaklanılmasından kaynaklandığı belirlenmiştir. Bununla birlikte kavramlar arası ilişki kuran öğretmen adaylarının da problem temelindeki matematiksel ilkeler yerine kavramın yüzeysel veya bağlamsal özellikleri üzerine yapıldığı ortaya konmuştur. İlişkilendirmeler ile cinsiyet, ana dal veya öğretmenlik deneyimi olup olmaması arasında anlamlı bir ilişki olmadığı görülmektedir. Anketler ve mülakatlar arasındaki arasında tutarsız sonuçların ilişkilendirme becerisi ve matematiksel arka plan kaynaklı olduğu vurgulanmıştır. Bununla birlikte; zayıf, orta ve yüksek düzeyde performansa sahip öğretmen adaylarının, yanlış matematiksel ilişkilendirmeler sergilediği tespit edilmiştir ve öğretmen adaylarının başarılı bir matematik geçmişinin olmasının matematiksel kavramlar arasında tam olarak doğru bir fikir geliştirmeyi sağlayamadığı sonucuna varılmıştır. Ayrıca araştırmada çok çeşitli ilişkilendirme türlerinin olduğu ve bunlardan bazılarının (işlemsel) öğretmen adaylarının çoğu tarafından sergilendiği ancak bazılarının (kavramsal) ise çok fazla sergilenmediği tespit edilmiştir. Bu farklılıkların ve geniş bir yelpazeye sahip öğretmen adayları arasında birçok içerik alanında farklı öğrenim geçmişlerinden kaynaklı olabileceği ortaya konmuştur.

Eli (2009), Çocuk Geride Kalmasın kanunun (No Child Left Behind Legislation) ve yeni müfredatın uygulanmasıyla, öğretmen adaylarının kavramsal düzeyde öğrenmeyi kolaylaştıracak yeterlikte olmasının gerekliliğine işaret ettiği çalışmasında (Öğretmen Adaylarının Geometrideki Matematiksel İlişkilendirmelerine İlişkin Bir Karma Yöntem Araştırması) geometri öğretimindeki matematiksel bilgilerini ve sergilenen matematiksel ilişkilendirmeleri incelemek amacıyla yapılan karma yöntem araştırması büyük bir devlet üniversitesinde 28 öğretmen adayının katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar, geometrik bilgiler bağlamında ölçüme, matematiksel ilişkilendirmeye ilişkin değerlendirmelere ve kart gruplandırma etkinliğinden elde edilen sonuçlara dayalı olarak incelenmiştir. Karma yöntemlerle veri analizi sonucunda öğretmen adaylarının geometri öğretimi için matematik bilgilerinin az gelişmiş olduğu, matematiksel ilişkilendirme becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı bununla birlikte öğretmen adaylarının sergilediği matematiksel ilişkilendirmelerin doğası gereği kavramsal olmaktan çok işlemsel olduğu sonucuna varılmıştır.

Eli vd. (2013), çalışmasında matematiksel bağlantıların kurulması ve güçlendirilmesi hususunda; öğretmen adaylarının kavramsal olarak indekslenmiş, geniş bazlı bir matematik bilgisi temelini destekleyen matematiksel zihin alışkanlıklarını geliştirmelerine yardımcı olmak için öğretmen eğitimi programlarının önemini vurgulamıştır. Karma yöntemin uygulandığı çalışmada öğretmen adaylarının öğretim için geometri öğretimine ilişkin matematik bilgilerinin yeterli olup olmadığı ve açık ve kapalı kart gruplandırma performanslarını sergilerken kurdukları ilişkilendirmeleri incelemek amacıyla yapılmıştır. Öğretmen adaylarının işlemsel, kategorik, türetimsel (derivational) ve müfredatla ilgili (curricular) olmak üzere beş farklı İlişkilendirme becerilerini sergilediği ve bunlar içinden müfredatla ilgili ilişkilendirme türünün geometri öğretiminde matematik bilgisi üzerinde istatistiksel olarak anlamlı pozitif bir etkisinin olduğu sonucuna varılmıştır.

Dilberoğlu (2015) çalışmasında (Ortaokul matematik öğretmen adaylarının alan derslerindeki matematik ile ortaokul matematiğini ilişkilendirme becerilerinin incelenmesi); öğretmen adaylarının bir öğretmen yetiştirme programında, alan dersleri kapsamında öğrendikleri matematik bilgisini, ortaokul matematiğini öğretme ile ilişkilendirip ilişkilendirmediğini incelemek amacıyla yapılmıştır. Çalışmada, açık uçlu sorulardan oluşan yarı-yapılandırılmış görüşme tekniğiyle elde edilen veriler; öğretmen adaylarının konu ile ilgili görüşlerini sorgulamak yapılandırılmış göreve dayalı görüşme tekniğiyle elde edilen veriler; sayılar teorisi bilgisini nasıl kullandıklarına ilişkin bilgi edinmek amacıyla incelenmiştir. Öğretmen yetiştirme programının üçüncü ve dördüncü sınıfında öğrenim görmekte olan 14 ortaokul matematik öğretmeni adayından oluşan çalışmada, öğretmen adaylarının alan dersleri hakkında karmaşık fikirlere sahip olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adayları, alan derslerinde öğretilen bilgileri; üst düzey, ortaokul matematiği ile ilgisiz ve ortaokul matematiğinin öğretiminde uygulanamaz olarak nitelendirirken diğer taraftan bu bilgilerin, ortaokul matematiğinin temeli olduğunu ifade etmiştir. Yüksek düzeyde performans sergileyen öğretmen adayları arasından seçilmiş olmalarına rağmen katılımcıların, öğretmen yetiştirme programında elde ettikleri bilgilerini, matematik öğretiminin gerekleri ile ilişkilendirmede zorluklar yaşadığı sonucuna varılmıştır.

Tataroğlu-Taşdan, Uğurel ve Koyunkaya (2017), ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematik içi ilişkilendirmenin nasıl yapılması gerektiğine ilişkin görüşlerini belirlemek ve matematiksel ilişkilendirme becerilerini matematik öğrenme etkinliklerine nasıl yansıttıklarını incelemek amacıyla yaptığı çalışmasında (Matematik Öğretmen Adaylarının Geliştirdikleri Matematik Öğrenme Etkinliklerinin Matematik İçi İlişkilendirmeye İlişkin Görüşleri Kapsamında İncelenmesi) nitel araştırma desenlerinden durum çalışması yöntemini kullanmıştır. Öğretmen adaylarının çoğu matematik içi ilişkilendirmenin; matematiğin aşamalı, yığılmalı ve sistematik bir bilim dalı olması nedeniyle sergilendiğini ifade etmiştir. Matematik içi ilişkilendirmenin bir başka nedenini yeni bir bilginin önceki bilgi üzerine inşa edilmesi ile açıklayan öğretmen adayları, geliştirdikleri etkinliklerde matematik içi ilişkilendirmenin bu türünü (ön bilgi ile yeni bilgi arasında ilişkilendirme) dikkate almıştır. Genel anlamda, öğretmen adayları matematik içi ilişkilendirmenin gerekliliğine inansa da, bu görüşlerini etkinlik oluşturma sürecine yeterince yansıtamamıştır. Öğretmen adaylarının geliştirdikleri etkinliklerde sadece soru cümlelerinin yer alması, matematik içi ilişkilendirmelerin nasıl yapılacağına ya da bunların sınıf içinde nasıl uygulanacağına ilişkin yeterince bilgi verilmemesi etkinlik geliştirme düzeylerinin yeterli olmadığı sonucunu ortaya koymuştur.

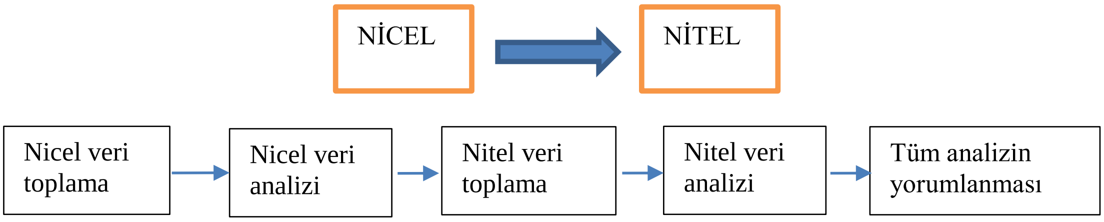
BÖLÜM 3

3 YÖNTEM

Bu bölümde; araştırmanın deseni, çalışma grubu, araştırmanın uygulama süreci, veri toplama araçları, araştırmanın geçerliliği ve güvenirliği ve veri analizinden bahsedilmiştir.

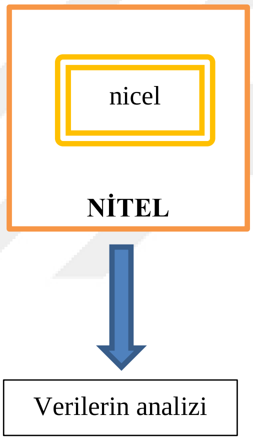
3.1 Araştırmanın Modeli

Tek bir yöntem yerine birbirini destekleyen iki ya da daha çok yöntemin birlikte kullanıldığı yöntemde çeşitleme yapılan çalışmalar son zamanlarda daha çok tercih edilmektedir. Bu araştırma özü itibari ile deneysel olup, nicel ve nitel yöntemlerin birlikte kullanılmasından dolayı karma yönteme sahip bir araştırma olarak da ifade edilebilir. Karma yöntem çalışma içerisinde nitel ve nicel yöntem, yaklaşım ve kavramlarının birleştirilmesi olarak tanımlanmaktadır (Creswell, 2003). Çoklu yöntemlerin kullanılması araştırma desenini daha güçlü hale getirmektedir. Creswell ve Plano Clark'a (2007) göre karma yöntemin asıl amacı, nicel ve nitel yaklaşımı bir arada kullanarak araştırma problemleri ve karmaşık bir olgunun daha iyi anlaşılmasını sağlamaktır. Tek bir araştırma içerisinde nitel ve nicel yöntemleri birleştirmek olayı farklı yönleriyle açıklamaya fırsat vermektedir. Karma yöntemlerde nitel ve nicel yöntemler, eş zamanlı uygulanmakla birlikte birinin odak diğerinin destekleyici olduğu sıralı bir biçimde de uygulanabilmektedir. Böylece karma yöntemler bu uygulanış biçimlerine bağlı olarak tanımlanmış farklı desenlere ayrılmaktadır. Karma yöntemleri farklı şekilde çeşitlendiren araştırmacılar bulunmakla birlikte Creswell ve Plano Clark'a (2007) göre karma yöntemler; çeşitleme deseni (eş zamanlı desen), açıklayıcı desen, açımlayıcı desen, gömülü desen olmak üzere dörde ayrılmaktadır. Bu araştırma, bahsi geçen desenlerden açıklayıcı karma yöntem deseni ve çeşitleme deseni kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Açıklayıcı karma yöntem deseni gerçekleştirilirken öncelikle, nicel verilerin toplandığı ve analiz edildiği daha sonra bu verileri tamamlamak ve açıklamak için nitel verilerin toplandığı belli bir sıranın takip edilmesi gerekmektedir. Daha sonra toplanan nitel veriler, nicel verileri desteklemek amacıyla analiz edilmektedir (Gökçek, 2016). Bu sürece karşılık gelen sıralı açıklayıcı desenin temsili aşağıda Şekil 3.1'de sunulmaktadır.



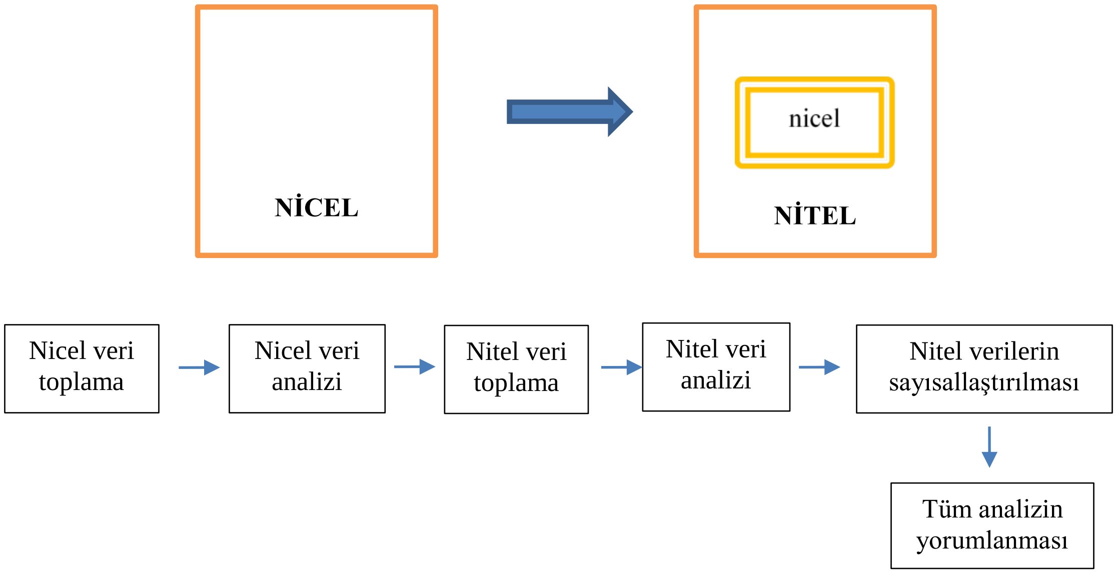
Şekil 3.1 Sıralı açıklayıcı karma yöntem deseni (Gökçek, 2016, s.394).

Bu araştırmada Şekil 3.1'deki aşamalar takip edilerek öncelikle nicel yöntemle toplanan veriler analiz edilmiş ve daha sonra görüşmelerle toplanan nitel veriler sürekli karşılaştırmalı analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Nitel analizin tamamlanmasının ardından nitel verilerin sayısallaştırılması yoluna gidilmiş ve bunlar nicel verilerle karşılaştırmalı olarak raporlanmıştır. Bu sürece karşılık gelen çeşitleme deseninin (eşzamanlı desen) temsili aşağıda Şekil 3.2'de sunulmaktadır.



Şekil 3.2 Eşzamanlı desen (Gökçek, 2016, s.395).

Çeşitleme deseni olarak adlandırılan bu süreç, nicel ve nitel yöntemlerden birlikte yararlanarak bir yöntemin zayıf yanlarının diğer yöntemin güçlü yönleri ile desteklenmesi amacıyla (Yıldırım ve Şimşek, 2018, s.326) gerçekleştirilmiştir. Sıralı açıklayıcı ve eşzamanlı karma yöntem desenlerinin gerçekleştirildiği araştırma sürecinin temsili aşağıda Şekil 3.3'te sunulmaktadır.



Şekil 3.3 Sıralı açıklayıcı ve eşzamanlı karma yöntem desenlerinin gerçekleştirildiği araştırma süreci

Üniversitede sınıflar üniversite yönetimi tarafından oluşturulmasından ve bu sınıfların aynı dersleri farklı zamanlarda almasından dolayı gruplara seçkisiz atama yapılamayacağından, üniversitede gerçekleştirilen eğitim araştırmalarının birçoğunda gerçek deneysel modelin kullanılması mümkün olmayabilir. Bu durumda yönetim tarafından daha önceden oluşturulmuş gruplardan bir veya birkaçının çalışma grubu ve karşılaştırma grubu olarak rastgele belirlendiği model yarı deneysel model olarak adlandırılmaktadır (Özmen, 2016, s.60). Bu araştırmada; PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün öğretmen adaylarının, anlama boyutlarına, düşünme yapılarına, özyeterlik algılarına etkisi ön test-son test eşitlenmemiş kontrol gruplu yarı deneysel model ile araştırılmıştır. Ön test-son test eşitlenmemiş karşılaştırma gruplu model, bu araştırmanın ilk kısmını oluşturmaktadır. Bu kısımda, araştırma sürecinde deney grubu üzerinde etkisine bakılacak bağımsız değişkenler PDÖ ve ÇTTÖ'dür. Bu nedenle çalışma gruplarında PDÖ ve ÇTTÖ, karşılaştırma grubunda ise GÖ yöntemi kullanılmıştır. Araştırmada uygulanan yarı deneysel deseninin sembolik temsili aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.1 Ön test-son test eşitlenmemiş kontrol gruplu model

G_1	$O_{1,1}$	X_1	$O_{1,2}$
G_2	$O_{2,1}$	X_2	$O_{2,2}$
G_3	$O_{3,1}$	X_3	$O_{3,2}$

G_1: PDÖ'nün uygulandığı çalışma grubu.
G_2: ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma grubu
G_3: GÖ'nün uygulandığı karşılaştırma grubu.
X_1: Çalışma gruplarından birinde uygulanan PDÖ
X_2: Çalışma gruplarından birinde uygulanan ÇTTÖ.
X_3: Geleneksel öğretim.
$O_{1,1}$, $O_{2,1}$, $O_{3,1}$: LCPT ön test puanları
$O_{1,2}$, $O_{2,2}$, $O_{3,2}$: LCPT son test puanları

Araştırmanın deneysel kısmında, çalışma grubu üzerinde etkisi incelenen yaklaşımlar "PDÖ" ve "ÇTTÖ" dir. Bu yaklaşımların etkiliğini incelemek amacıyla karşılaştırma grubunda ise "GÖ yöntemi" kullanılmıştır. Bu kısmın bağımlı değişkenleri; öğretmen adaylarının lineer cebir performansı, düşünme yapısı, anlama boyutları ve özyeterlik algısıdır. Araştırmada ölçme aracı olarak MSA, LCPT ve MKÖAÖ ön test ve son test olarak kullanılmıştır. Araştırmanın deneysel kısmındaki süreç aşağıda Tablo 3.2'de özetlenmiştir.

Tablo 3.2 Deneysel süreç tablosu

Grup	Çalışma öncesi	İşlemler	Çalışma öncesi
PDÖ	LCPT	PDÖ	LCPT
	MSA	Senaryoları içeren modüller	MSA
	MKÖAÖ	Çalışma yaprakları	MKÖAÖ
ÇTTÖ	LCPT	ÇTTÖ	LCPT
	MSA	GeoGebrada uygulamalar	MSA
	MKÖAÖ	Çalışma yaprakları	MKÖAÖ
GÖ	LCPT		LCPT
	MSA	GÖ	MSA
	MKÖAÖ		MKÖAÖ

Diğer taraftan araştırmanın ikinci kısmı nitel yöntemden yararlanılarak gerçekleştirilmiştir. Nicel analizlerden elde edilen bulgulara dayanarak nitel yöntemi gerçekleştirmek üzere katılımcılar belirlenmiştir. Bunun için bir veya daha fazla özel durumda çalışılmak istendiğinde tercih edilen, belli özellikleri karşılayan bireylerin seçildiği seçkisiz olmayan bir örnekleme yaklaşımı olan amaçlı örnekleme yöntemi (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2016) tercih edilmiştir. Bu yöntemden yararlanarak çalışma gruplarından bağıl değerlendirme ile seçilen düşük, orta ve yüksek düzeyde başarı sergileyen öğretmen adayları ile nitel kısım gerçekleştirilmiştir. Nitel yöntemin gerçekleştirildiği araştırmanın bu kısmında deneysel desenden elde edilen sonuçları derinlemesine incelemek için verilerin toplanmasında, veri toplama araçlarından görüşme tercih edilmiştir. Bu görüşmelerde, farklı yöntemlerle öğrenim gören çalışma gruplarından amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilmiş farklı düzeylerde (düşük, orta, yüksek) lineer cebir performansı sergileyen öğretmen adaylarının bilgilerini derinlemesine incelemek için açık uçlu sorular sorulmuştur. Deneysel uygulama sürecinde lineer cebir dersinde öğretimi tamamlanan kavramlar (lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, boyut, LDS ve lineer dönüşüm) birbiriyle ilişkili iç içe geçmiş kavramlardan oluşmaktadır. Dolayısıyla, görüşmelerde, bu kavramları anlamlandırma ve ilişkilendirme becerilerini derinlemesine incelemek amacıyla iki çalışma grubundan farklı düzeylerde seçilen öğretmen adayları ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bununla birlikte, nitel kısımda gerçekleştirilen görüşmelerin analizi sonucunda elde edilen bulgulara dayalı olarak öğretmen adaylarının her birinin kavramlar arası ilişkilendirme becerisini ortaya koyan ilişkilendirme ağları oluşturulmuştur.

3.2 Araştırmanın Katılımcıları

Araştırmanın katılımcıları, 2018-2019 öğretim yılında İç Anadolu bölgesinde bir büyükşehir üniversitesinin iki farklı eğitim fakültesinde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim görmekte olan 2. sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Araştırmanın katılımcıları seçilirken iki farklı eğitim fakültesinin tercih edilmesinin nedeni tek fakültede yeterli sayıda grup olmamasıdır. Araştırmada iki çalışma ve bir karşılaştırma grubundan oluşan üç gruba nicel kısımda öntest-sontest eşitlenmemiş kontrol gruplu yarı deneysel desen uygulanmıştır. Araştırmanın deneysel kısmının çalışma grubunu, İlköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf öğrencilerinden A şubesinde öğrenim gören 38, B şubesinde öğrenim gören 31 ve karşılaştırma grubunu ise aynı üniversitenin farklı bir eğitim fakültesinde öğrenim gören 21 ilköğretim matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Uygulamaya başlamadan önce üç ayrı sınıfa; MSA, LCPT ve MKÖAÖ ön test olarak uygulanmıştır. Kullanılacak olan istatistiksel analizleri belirlemek için, öncelikle yapılan ölçümlerde grupların normal dağılım gösterip göstermedikleri incelenmiştir. Can (2016), normallik analizlerinin grup büyüklüğüne bağlı olarak değiştiğini ve gruptaki gözlem sayısı 30 ve üzerinde olduğu durumda Kolmogorov-Simirnov; gruptaki gözlem sayısı 30'un altında olduğu durumda

Shapiro-Wilk testlerinin kullanılmasının uygun olduğunu belirtmektedir. Deneysel çalışmalarda her bir grupta en az 15 kişi bulunması gerekmektedir (Akarsu, 2016). Ön test uygulaması yapılan gruplardaki ilköğretim matematik öğretmen adayı sayıları A şubesinde 38, B şubesinde 31 ve kontrol grubunda ise 21 dir. Bu durumda A ve B şubesinde Kolmogorov-Simirnov, karşılaştırma grubunda ise Shapiro-Wilks normallik testlerinin kullanılması uygun görülmüştür. Yapılan ön test ölçümlerinin analizleri aşağıda Tablo 3.3'te sunulmuştur.

Tablo 3.3 Ön test ölçümlerinin normallik analizleri

Ölçüm	**Grup**	**N**	$\bar{x}$	S_x	**İstatistik**	**p**
LCPT-Ön test	PDÖ	38	44.57	7.05	0.122	0.161
	ÇTTÖ	31	45.04	6.88	0.098	0.200
	GÖ	21	41.97	5.30	0.976	0.851
MKÖAÖ- Ön test	PDÖ	38	49.74	3.58	0.193	0.040
	ÇTTÖ	31	39.12	5.34	0.154	0.200
	GÖ	21	39.52	3.18	0.181	0.065

Can (2016), p>.05 ise grupların normal dağılım gösterdiğini; eğer p<.05 ise grupların normal dağılım göstermediğini belirtmektedir. Tablo 3.3'ten görüldüğü gibi ölçümlerin normallik analizi sonucunda, grupların tamamının LCPT'den aldıkları puanların normal dağılım gösterdiği gözlenmiştir. Ayrıca bu performans testinden elde edilen verilerin analizinde tek yönlü varyans analizinin kullanılması için varyansların eşitliği ön koşulu da sağlanmaktadır. Bu durumda, üç grubun LCPT ön test puanlarını karşılaştırmada tek yönlü varyans analizinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo3.4'te sunulmuştur.

Tablo 3.4 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının LCPT ön test puanlarına ilişkin tek yönlü varyans analizi sonuçları

Varyansın Kaynağı	**Kareler Toplamı**	**Sd**	**Kareler Ortalaması**	**F**	**p**	**Anlamlı Fark**
Gruplar arası	130.740	2	65.370	1.486	.232	-
Gruplar içi	3826.853	87	43.987			
Toplam	3957.594	89				

Tablo 3.4'e göre çalışma ve karşılaştırma gruplarının LCPT ön test puanları arasında anlamlı fark olmadığı belirlenmiştir (F=1.486; p>.05). İlköğretim matematik öğretmenliği bölümünde üç farklı gruptaki öğretmen adaylarına bir nitel değişken olan

düşünme yapıları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için iki sınıflamalı değişkenler için iki yönlü kay kare testi yapılmıştır. Burada nitel değişkenlerden biri farklı yöntem ya da stratejilerin uygulanacağı üç grup, diğeri ise analitik, harmonik, geometrik kategorilerinden oluşan düşünme yapılarıdır.

Tablo 3.5 Farklı gruplardaki öğretmen adaylarının düşünme yapılarına ilişkin iki yönlü kay kare analizi sonuçları

Gruplar	N	Analitik	Harmonik	Geometrik	χ^2	p
PDÖ grubu	35	16	17	2	4.553	.336
ÇTTÖ grubu	31	11	15	5		
GÖ grubu	21	9	7	5		
Genel	87					

Tablo 3.5'deki iki yönlü kay kare testi sonucuna göre, öğretmen adaylarının bulunduğu gruplar ile düşünme yapıları arasında anlamlı bir farklılık olmadığı belirlenmiştir.

Tablo 3.3'ten görüldüğü gibi ölçümlerin normallik analizi sonucunda, grupların bazılarının MKÖAÖ'den aldıkları puanların normal dağılım göstermediği gözlenmiştir. Bu durumda üç grubun MKÖAÖ ön test puanları, parametrik olmayan testlerden Kruskal Wallis testi ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 3.6 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının özyeterlik algısı ölçeği ön test puanlarına ilişkin Kruskal Wallis testi sonuçları

Gruplar	N	Sıra Ortalaması	Sd	χ^2	p	Anlamlı Fark
PDÖ grubu	38	49.74	2	3.118	.210	-
ÇTTÖ grubu	31	40.87				
GÖ grubu	21	39.05				

Tablo 3.6'ya göre çalışma ve karşılaştırma gruplarının MKÖAÖ ön test puanları arasında anlamlı fark olmadığı belirlenmiştir. Bu bulgulara dayanarak gruplar homojen olduğundan PDÖ uygulanacak çalışma grubu A şubesi, ÇTTÖ uygulanacak çalışma grubu B şubesi, karşılaştırma grubu ise aynı üniversitenin diğer eğitim fakültesindeki tek şube olarak belirlenmiştir.

Diğer taraftan, nitel kısımda görüşme yapılacak katılımcılar deneysel uygulama sürecinin tamamlanmasının ardından LCPT'den aldığı puan dikkate alınarak performans düzeyine göre gerekli özellikleri taşıyan (lineer cebir performans düzeyi bağlamında) öğretmen adayları arasından amaçlı örnekleme tekniği ile seçilmiştir.

3.3 İşlem Yolu

Uygulamaya başlamadan önce çalışma gruplarına, GeoGebra yazılımından yararlanarak geliştirilen materyaller temelinde gerçekleştirilen ÇTTÖ'nün ve rutin olmayan problemlerden oluşan senaryolar temelinde gerçekleştirilen PDÖ'nün uygulama süreci ile ilgili bilgi verilmiştir. Bunun ardından, öğretmen adayları ile birlikte PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün uygulanmasına ilişkin örnek birer uygulama yapılmıştır. Geometrik temsili ile birlikte cebirsel temsil ve matris temsilinin dikkate alındığı ÇTTÖ, öğretmen adaylarının uygulama sürecinden önce lineer cebir dışındaki bir derste öğrendikleri GeoGebra yazılımından yararlanarak geliştirilen materyaller temelinde uygulanmıştır. Çalışma gruplarında öğretim süreci, karşılaştırma grubundan farklı olarak öğretmen adaylarının sorgulayarak ve keşfederek öğrenmesine yönelik gerçekleştirilmiştir. Öğretim sürecinde materyaller ya da senaryolar üzerinde düşünme ve deneyimleme imkânı sağlanmasıyla birlikte ulaştıkları bilgileri aktarmaları için öğretmen adaylarından araştırmacıların hazırladığı çalışma kâğıdındaki soruları bireysel olarak cevaplandırmaları istenmiştir. Böylece, öğretmen adaylarının her birinin aktif olarak sürece katılması ve daha çok yaratıcı fikirler elde edilmesi sağlanmıştır. Çalışma kâğıtlarının toplanmasının ardından öğretmen adayları arasında paylaşım sağlanmış ve geri bildirimde bulunulmuştur. Bu süreçte, ÇTTÖ'den farklı olarak heterojen gruplarla yürütülen PDÖ'de öğretmen adaylarına öncelikle kendi gruplarıyla daha sonra diğer gruplarla paylaşma ve tartışma imkânı tanınmıştır. Deneysel süreçte öğretim boyunca araştırmacı, öğretmen adaylarına eksik bilgilerini fark etmeleri ve tamamlamaları hususunda rehberlik etmiştir.

PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma grupları ile GÖ'nün uygulandığı karşılaştırma grubunda uygulama süreci eş zamanlı olarak başlatılmış ve eş zamanlı olarak sonlandırılmıştır. Araştırmanın uygulaması 12 hafta sürmüştür. Haftalık 3 saat işlenen lineer cebir dersinde "vektör uzayı" 18 ders saatinde (6 hafta), "LDS" 9 ders saatinde (3 hafta) ve "lineer dönüşüm" 9 ders saatinde (3 hafta) gerçekleştirilmiştir. Uygulama sırasında daha fazla kavram içerdiğinden vektör uzayı konusunun tamamlanması diğer konulara göre daha uzun sürmüştür.

Uygulamaya başlamadan önce öğretmen adaylarının LCPT'den aldıkları puanlara bakılarak PDÖ grubu 6 kişiden oluşan dört, 7 kişiden oluşan iki heterojen gruba ayrılmıştır ve modüllerin tamamının aynı gruplarla yürütülmesi kararlaştırılmıştır. PDÖ'nün uygulanacağı çalışma grubuna; bu yöntemin ne olduğu, oturumların işleyiş biçimi, oturumlardan beklenenler, modüllerin sonunda yapılacak değerlendirme türü ile ilgili bilgi verilmek amacıyla bir sunum hazırlanarak öğretmen adaylarına gösterilmiştir. Uygulamaya başlamadan önce PDÖ'nün uygulama sürecine örnek olması açısından olasılık konusuyla ilgili örnek bir çalışma yapılmıştır. PDÖ uygulama sürecinde iletişimin olumlu olması ve uygulamanın verimli bir şekilde yürütülmesi için öğretmen adayları ile birlikte kurallar belirlenmiştir.

GeoGebra Destekli ÇTTÖ'nün uygulanacağı çalışma grubuna ise bu yöntemin ne olduğu ve GeoGebra yazılımından yararlanarak gerçekleştirilecek olan dersler ile ilgili bilgi verilmiştir. Öğretmen adayları lisans öğrenimleri içinde daha önce farklı bir derste GeoGebra yazılımının kullanımını öğrendiklerinden bununla ilgili herhangi bir çalışma yapılmamıştır. Ancak örnek uygulamalar gösterilmiştir ve bir tane uygulama örnek olması açısından uygulamaya başlamadan önce öğretmen adaylarına yaptırılmıştır.

3.3.1 PDÖ'nün uygulandığı deneysel süreç

Öğretmen adaylarının her birine senaryoları içeren modüller dağıtılmış ve oturumlara başlamadan önce ders dışındaki gerçek olaylardan bahsederek öğretmen adaylarının ortama ısınmaları sağlanmıştır. Öğretmen adaylarının tamamının sürece katılması ve yaratıcı fikirler sunması açısından grupla çalışmadan önce, her birinden senaryodaki soruna çözüm araması istenmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarından elde ettikleri bilgileri paylaşmaları için grup arkadaşlarıyla etkileşim süreci başlatılmıştır. Bu süreçte, eğitim yönlendiricisi tarafından gözlemlenen öğretmen adaylarının her birinin uygulama sürecine katılmaları ve grup arkadaşlarıyla işbirliği içinde çalışmaları beklenmiştir. Bu süreçte, gruptaki bireylerin tamamının sürece ilişkin katkısını içeren; fikirler, ön bilgiler ve araştırmaları gereken bilgiler, sorunlar ve gerçekleştirilmesi hedeflenen eylem planını bir kağıda yazmaları istenmiştir. Grupların tamamından geliştirdikleri eylem planını eğitim yönlendiricisine sunmaları istenmiş ve grupların herbirinin hazırladığı eylem planı incelenerek nerden başlamaları, nasıl bir yol izlemeleri gerektiği hususunda önerilerde bulunulmuştur. Süreç içerisinde bilmedikleri kavramları çeşitli kaynaklardan araştırmaları istenmiştir. Eğitim yönlendiricisi süreçte grupların her birini gözlemleyerek öğretmen adaylarının eksik bilgilerini tamamlamak yerine, yönlendirerek öğretmen adaylarının bilgiye ulaşmasını sağlamıştır. Birbirinden bağımsız bir şekilde gerçekleştirdikleri çalışmanın tamamlanmasının ardından grupların her birinden çalışmalarında nasıl bir yol izlediklerini, hangi kaynaklardan yaralandıklarını ve nasıl bir çözüm elde ettiklerini hususunda raporlarını sunmaları istenmiş ve bilgilerini paylaşmaları açısından gruplar arası tartışma başlatılmıştır. Tartışma sürecinde eğitim yönlendiricisi ifade edilen yanlışları belirterek eksiklerin düzeltilmesi hususunda yönlendirme yapmıştır. Grupların birbirini değerlendirerek doğru çözüm yollarını belirlemelerinin ardından öğretmen adaylarının ulaştığı bilgiler toparlanarak özetlenmiştir. Modüllerin tamamının uygulanması sürecinde aşağıdaki işlem basamakları dikkate alınmıştır.

1)Problemi tanımlama

2) Hipotezleri oluşturma

3) İhtiyaç duyulan bilgileri elde etme

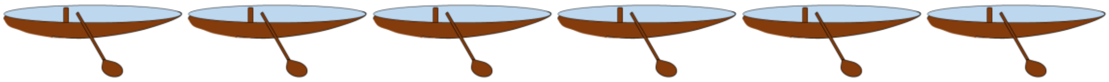
4)Bilinen gerçekleri bir araya getirme

5) Hipotezleri tekrar inceleme

6) Çözümleri ve yorumları savunma

Çalışma yapraklarıyla öğretmen adaylarının öğrenmelerine destek olunmuştur ve öğretmen adaylarından çalışma yapraklarını grupça yapmaları istenmiştir. Modüllerin her birinin sonunda öğretmen adaylarına kendilerini ve eğitim yönlendiricisini değerlendirmeleri için değerlendirme formları verilmiştir. Eğitim yönlendiricisi de süreç içinde gözlemlediği öğretmen adaylarını değerlendirmiştir. PDÖ sürecinde aşağıdaki senaryoda belirtilen problemlere lineer bağımlılık/bağımsızlık ve germe kavramlarından yararlanarak çözüm bulunması ve dolayısıyla kavramların yapılandırılması sürecine ilişkin 1. ve 2. oturumdan birer bölümü içeren uygulama süreci örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

Acemi Mühendis Ne Yapacak kiiii!!!!!



1. Oturum

Bir süre sonra kasabada fırtına çıktığından dolayı elektrikler kesildiği haberini alan Ali CANKURTARAN babasıyla birlikte kayıklarını kontrol etmek için iskeleye vardığında fırtına sonucunda tüm kayıkların direksiyonlarının zarar gördüğünü tespit etmiştir. Bu durum ise kayıkların tek bir doğrultuda sabit hızla hareket etmelerine neden olmuştur. Ancak maddi hasardan çok daha önemli bir sıkıntı vardır. Kasabalı fırtına sırasında ayağına demir düşen bir balıkçının getirildiği hastanede tedavi gördüğü esnada acil olarak X ilacına ihtiyaç olduğu halde ilacın bittiği haberini almıştır. Vakit kaybetmeden en kısa sürede helikopter ile ilacı temin etmek için en yakın şehirden yardım istenmiştir. Ancak başka bir sorun vardır. İskele ve çevresinde hortum olduğu için iskeleye yaklaşamayan helikopter ilacı adaya bırakmak zorunda kalmıştır. Zamanla yarışıldığı düşünülürse en kısa sürede adaya ulaşmak gerekmektedir. Kayıkların birbirine bağlanarak taşınabilmesini sağlamak üzere ip bulunduğundan, gerekirse birden fazla kayıkta seçilebilmektedir. Yeter ki bir an önce harekete geçilsin. İskeledeki hareket noktası O başlangıç noktası olarak alınırsa adaya ilacın bırakıldığı nokta başlangıç noktasına en kısa mesafede olan (40,64) noktasıdır. İlaçların suya değmemesi gerektiğinden yüzme ihtimali kafadan çıkarılmalıdır. Bu durumda tatil için kasabaya gelen Ali'nin bir insanın hayatını kurtarmak için lineer cebir bilgilerini kullanma zamanı gelmiştir. İskelede bulunan 6 kayık O başlangıç noktasından bir dakika sonunda sırasıyla (5,8), (2,3), (2,4), (4,6), (1,3) ve (2,6) konumlarına ulaşabilmektedir ve bu kayıklardan her biri kendi doğrultularında, sabit hızla hareket edebilmektir. Adada ilacın bulunduğu noktaya ulaşmak için nasıl bir çözüm yolu bulunabilir?

Yukarıdaki senaryo, öğretmen adaylarına dağıtılmış ve senaryoda bahsedilen probleme çözüm arayışına başlanmıştır. Gruplar tarafından

"*Acil durumda denizdeki verilen herhangi bir noktaya ulaşabilmek için çözüm yolu nasıl olabilir?*"

biçiminde problem tanımlanmıştır. Daha sonra, öğretmen adaylarından bu problemin çözülmesi için kayıkların sağlaması gereken özellikleri belirlemeleri (kayık sayısı,…) ve buna bağlı olarak hipotez oluşturmaları istenmiştir. Gruplardan hipotezlerini

> "*tek noktaya tek kayıkla ulaşılır*"

> "*tek kayık almaktansa 2 kayık vasıtasıyla denizdeki herhangi bir noktaya ulaşmak daha garanti bir çözüm yoludur*"

> "*kayık sayısı arttıkça, istenilen noktaya ulaşma ihtimali artacağından çok sayıda kayık alınması gerekir*"

> …

biçiminde oluşturmalarının ardından ihtiyaç duyulan bilgileri elde etmeleri beklenmiştir. Bu süreçte senaryodaki

> "*Adada ilacın bulunduğu noktaya ulaşmak için seçilebilecek kayıklar hangi doğrultuda giden kayıklar olabilir?*"

sorusuna karşılık bazı grupların

> "*herhangi doğrultuda giden kayıkların seçilebileceğini*"

ifade etmesi üzerine senaryodaki aşağıdaki soru ile probleme çözüm arayışı devam ettirilmiştir.

> "*(1,3) ve (2,6) doğrultusunda giden kayıkları seçerseniz adanın (40,64) noktasına direk ulaşıp ilaçları alabilir misiniz?*"

sorusuna cevap arayan gruplardan bazıları;

> "*(1,3) ve (2,6) doğrultusunda giden 2 kayık seçiminin sorunu çözmediğini*"

> "*(2,3) ve (4,6) biçiminde 2 kayık seçiminin de sorunu çözmediğini ve bu kayıklarla bir doğru üzerindeki noktalara ulaşılabildiği*"

çıkarımında bulunmuş bunun üzerine herhangi iki kayıkla istenilen noktaya ulaşmanın bir yolunun olup olmadığı sorulmuştur. Daha sonra gruplar

"*(2,3) ve (2,4) kayıklarıyla istenilen noktaya ulaşılabildiği*"

"*(1,3) ve (2,4) kayıklarıyla istenilen noktaya ulaşılabildiği*"

"*(1,3) ve (4,6) kayıklarıyla istenilen noktaya ulaşılabildiği*"

"*(2,3) ve (2,6) kayıklarıyla istenilen noktaya ulaşılabildiği*"

….

bilgilerine ulaşmıştır. Bunun üzerine gruplardan senaryodaki,

"*Adanın (40,64) noktasına ulaşmak için birden fazla kayık kullanma zorunluluğu var mıdır? Tek kayıkla da ulaşılabilir mi?*"

sorusuna cevap bulmaları istenmiştir. Gruplardan bazılarının

"*(2,3) kayığının seçiminin sorunu çözmediğini*"

"*(2,4) kayığının seçiminin sorunu çözmediğini*"

"*(4,6) kayığının seçiminin sorunu çözmediğini*"

…

belirtmesi üzerine

"*bu kayıklarla hangi noktalara ulaşılabileceği sorulmuş*" ve

"*alınan vektörlerin skaler katı olan noktalara ulaşılabileceği*"

cevabı alınmıştır. Bunun ardından gruplardan birinin

"*(5,8) doğrultusunda giden kayıkla (40,64) noktasına ulaşılabileceğini*"

ifade etmesi üzerine

"*diğer kayıklar arasından neden (5,8) doğrultusunda giden kayıkla adada varılmak istenilen noktaya ulaşılabildiği*"

sorulmuş ve grup tarafından

"*(40,64) noktasının (5,8)'in skaler katı olması*"

bu durumun nedeni olarak gösterilmiştir. Hedefe ulaşmada etkili olduğu bilinen gerçekleri;

"*tek kayık ve 2 kayıkla deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşılamadığı durumlar olduğu*",

"*tek başına kayık sayısına odaklanarak sorunun çözülemeyeceği*",

"*bazı kayık çiftlerinin ((2,3), (4,6) doğrultusunda giden kayıkların) tek kayık (yalnızca (2,3) ya da (4,6) doğrultusunda giden kayığın) işlevini gördüğü*"

bir araya getirmeleri beklenmiştir. Daha önce kurulan hipotezlerin sınanması sonucunda elde edilen gerçekler dikkate alınarak hipotezler tekrar incelenmiştir. Bu durumda gruplar senaryodaki probleme karşılık

"*(5,8) doğrultusunda giden kayıkla istenilen noktaya ((40,64) noktasına) ulaşılabileceğini ancak bu kayık haricindeki seçimlerin sorunu çözemeyeceği*"

"*(2,3) ve (4,6) kayıklarından ya da bunlardan yalnızca birinden yararlanarak ulaşılabilecek noktaların birbirinin aynısı olduğu*"

"*(2,3) ve (2,4) kayıklarıyla istenilen noktaya ulaşılabildiği*"

"*(2,3) ve (4,6) vb. gibi bazı durumlarda 2 kayık seçiminin sorunu çözmediği*"

çözümlerini savunmuştur. Çözümlerini yorumlamaları ve genellemeleri istenen gruplar;

"*fazla sayıda kayık seçiminin sorunu çözme noktasında işe yaramadığı*"

"*ulaşılmak istenilen nokta ile kayığın doğrultusu birbirinin skaler katı olduğu durumda tek kayığın sorunu çözebileceği*"

"*doğrultuları birbirinin skaler katı olmayan 2 kayık seçiminin sorunu çözebileceği*"

açıklamalarında bulunmuştur. Eksik bilgilerini tamamlamaları için gruplara

"*2 den fazla sayıda kayıkla istenilen noktaya ulaşılıp ulaşılamayacağının*" sorulması üzerine

“*(2,3), (2,4) ve (4,6) kayıklarıyla istenilen noktaya ulaşılabildiği*”

“*(1,3), (2,4) ve (4,6) kayıklarıyla istenilen noktaya ulaşılabildiği*”

“*(1,3), (2,6), (2,3) ve (4,6) kayıklarıyla istenilen noktaya ulaşılabildiği*”

…

cevapları alınmıştır. Çözümlerini yorumlamaları istenen gruplar;

“*aynı doğrultuda olmayan 2 kayık içeren seçimlerin tamamının sorunu çözebileceği*”

cevabı alınmıştır. Son olarak senaryodaki

“*İlacı hastaneye en kısa sürede yetiştirmek için en doğru tercih hangi kayıkla ve ya kayıklarla yola çıkmak olmalıdır?*”

sorusu sorularak gruplar; istenilen noktaya ((40,64) noktasına) ulaşmak için buldukları çözüm yollarının tamamını birlikte değerlendirmeleri hususunda yönlendirilmiştir. Gruplar;

“$16(2,3) + 4(2,4) = (40,64)$ *dolayısıyla* $16 + 4 = 20$ *dakikada* $(40,64)$ *noktasına ulaştığı*”

“$8(5,8) = (40,64)$ *dolayısıyla* 8 *dakikada* $(40,64)$ *noktasına ulaştığı*”

“$8(4,6) + 4(2,4) = (40,64)$ *dolayısıyla* $8 + 4 = 12$ *dakikada* $(40,64)$ *noktasına ulaştığı*”

“$\frac{28}{3}(4,6) + \frac{4}{3}(2,6) = (40,64)$ *dolayısıyla* $\frac{28}{3} + \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$ *dakikada* $(40,64)$ *noktasına ulaştığı*”

elde ettiği bilgileri toparlayarak en kısa sürede hastaneye ulaşmak için (5,8) doğrultusunda giden kayığın seçilmesinin en doğru tercih olduğunu belirtmiştir. Böylece bir vektörün gerilmesine ilişkin (bir vektörün veya birden çok sayıda vektörün lineer birleşimi olarak yazılabilmesine) ilk oturum tamamlanmış ve bu oturumda incelenen

"*denizdeki belirli bir noktaya ulaşmanın*"

yanı sıra

"*deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşmak gerekse nasıl bir yol izlerdiniz?*"

sorusu sorularak sonraki oturum için merak uyandırılmıştır.

2. Oturum-1. Bölüm

Mühendislik okuyan Ali, lineer birleşim kavramına ilişkin bilgilerinden yararlanarak (5,8) vektörü doğrultusunda hareket eden kayık vasıtasıyla (40,64) noktasındaki ilacı alıp en kısa sürede ilacı hastaneye yetiştirmiştir. Ancak Ali sürekli kasabada kalamayacağından bir daha acil bir durumla karşılaşılırsa sorunun nasıl halledileceğiyle ilgili tereddütleri bulunmaktadır. Dolayısıyla, Ali helikopterin bıraktığı ilaç her zaman aynı noktaya konumlanamayacağından ihtiyaç halinde denizdeki tüm noktalara ulaşabilecek şekilde sorunun nasıl halledileceğiyle ilgili bir çözüm yolu aramaktadır. Sizce tüm noktalara ulaşmak için nasıl bir çözüm yolu bulunabilir

Yukarıdaki senaryo, öğretmen adaylarına dağıtılmış ve senaryoda bahsedilen probleme çözüm arayışına başlanmıştır. Bu süreçte senaryodaki

"*Probleme ilişkin yeni bilgiler nelerdir? Ali'nin yerinde siz olsaydınız nasıl bir çözüm yolu bulurdunuz?*"

sorusuna gruplardan gelen görüşlerin toparlanmasıyla önceki oturumdaki tek noktaya ulaşabilme hedefinden farklı olarak burada hedefin noktaların tamamına ulaşabilmek olduğunu ifade eden gruplar tarafından problem;

"*Acil durumlarda deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşabilmek için çözüm yolu nasıl olabilir?*"

biçiminde tanımlanmıştır. Daha sonra, öğretmen adaylarından bu problemin çözülmesi için kayıkların sağlaması gereken özellikleri belirlemeleri (kayık sayısı doğrultu,…) istenmiştir. Bu durumda gruplardan birinin

> "*Çözüm yolu basit neden bu kadar uğraşıyoruz? Kayıklardan birinin direksiyonunun yapımı sağlanabilir*"

biçiminde verdiği cevaba bunun bir çözüm yolu olabileceği belirtilmiş, bununla birlikte acil durumlarda tamirat işlemi gerçekleşene kadar net bir çözüm yolu bulmanın önemi vurgulanarak gruplar arası bilgi paylaşımı sürdürülmeye çalışılmıştır. Daha sonra gruplardan senaryoda geçen;

> "*Ali, kasabada bulunmadığı zamanlarda sorun yaşanmasını önlemek için noktaların tamamına ulaşımı sağlayacak kayıklar bir arada demir atacak şekilde iskeleyi bölmelere ayırarak düzenlemeyi düşünmektedir. Bu düzenleme; hem zaman kaybını azaltacak hem de Ali kasabada bulunmadığında da kasabalının işini kolaylaştıracaktır. Bu durumda, bölmelere yerleştirilmek üzere deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşabilecek hangi kayıklardan kaç tane seçilebilir?*"

ek bilgisi dikkate alınarak probleme çözüm arayışının devam ettirilmesi istenmiştir. Gruplardan bu probleme ilişkin bölmelere yerleştirilmek üzere

{(1,3), (2,3)},

{(1,3), (5,8)},

{(5,8), (2,3)},

{(5,8), (4,6)},

{(1,3), (4,6)},

{(1,3), (2,4) vb…

kayıklarının seçilebileceği bilgisi alınmıştır. Bu duruma ilişkin "2 kayık seçiminin", genellenip genellenemeyeceğinin sorulması üzerine "*bazı vektör kümelerinin tek vektörün işlevini gördüğünü dolayısıyla 2 kayık seçiminin genellenemeyeceği*"

cevabı alınmıştır. Bunun üzerine senaryodaki;

"*Her bölmede 2 kayık olacak şekilde bir düzenleme yapılırsa, noktaların tamamına ulaşabilmek için hangi kayıklar bir arada bulunmamalıdır*?"

sorusuna gruplar "birbirinin skaler katı olan kayıklar" cevabını vermiştir. Bunun üzerine senaryodaki;

"*Düzenleme yapılırken seçilecek kayıkların sağlaması gereken özellikler neler olabilir?*"

sorusuna

"*2 kayıkla deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşılabilir*"

ve

"*doğrultuları aynı olmayan vektörlerle deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşılabilir*"

cevabını veren gruplara senaryodaki sorulardan bir diğerinin;

(*sizce tüm noktalara ulaşımı sağlamak için bölmelere tek kayık yerleştirilerek düzenleme yapılabilir mi?)*

sorulması üzerine grupların tamamının tek kayıkla bir doğru boyunca noktalara ulaşılabileceği ve dolayısıyla tek vektörle sorunun çözülemeyeceği cevabı alınmıştır. Bunun üzerine gruplardan kayık sayısının 2 olmasının ve farklı doğrultuda vektörler alınmasının gerekli ya da yeterli şartlardan biri olup olmadığını değerlendirmeleri ve problemin çözümüne ilişkin hipotez kurmaları istenmiştir. Gruplar, senaryoda geçen kayıkları deneyerek (rank, determinant ve LDS'den yararlanarak) üç kayıktan (örneğin {(1,3), (2,3), (5,8)}; {(1,3), (2,3), (2,4)} vb,..), dört kayıktan (örneğin {(1,3), (2,3), (2,4), (5,8) … }; {((2,3), (2,4), (4,6), (5,8)}) veya daha fazla sayıda kayıktan yararlanarak deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşılabileceği sonucuna varmıştır. Grupların tamamının;

"*birden fazla kayıkla noktaların tamamına ulaşılabilir*",

"aynı doğrultuda olmayan kayıklarla noktaların tamamına ulaşılabilir",

"aynı doğrultuda olmayan 2 kayıkla noktaların tamamına ulaşılabilir"

"aynı doğrultuda olmayan 3 kayıkla noktaların tamamına ulaşılabilir"

"aynı doğrultuda olmayan 2 den fazla kayıkla noktaların tamamına ulaşılabilir"

"aynı doğrultuda olmayan herhangi sayıda kayıkla noktaların tamamına ulaşılabilir"

biçiminde hipotez oluşturmaları sağlanmış ve gruplardan hipotezlerini sınamak için ihtiyaç duyulan bilgileri elde etmeleri beklenmiştir. Gruplardan elde ettiği bilgileri gözden geçirmesi ve

"*Deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşmada tek başına kayık sayısı dikkate alınarak (tamamı aynı doğrultuda 2 ya da daha fazla sayıda kayıkla noktaların tamamına ulaşılamaz) vektör seçiminin yeterli olmadığı ve problemin çözümü için tamamı farklı doğrultuda vektörlerin (tamamı farklı doğrultuda olmasa da {(1,3), (2,3), (2,6)} vektörleriyle noktaların tamamına ulaşılabilir) seçiminin gerekli olmadığı*"

biçiminde gerçekleri bir araya getirmesi beklenmiştir. Daha sonra gruplardan hipotezleri tekrar incelemeleri ve problemin çözümünün eksiksiz olması için çözüm arayışına devam etmeleri sağlanmıştır. Aynı doğrultuda (birbirinin skaler katı olan) 2 kayıktan herhangi biriyle ya da ikisiyle hareket edildiğinde ulaşılan noktaların değişmeyeceği, dolayısıyla bu vektörlerin doğrultu yani doğrusallık (lineerlik) anlamında aynı işleve sahip olduğu düşünüldüğünde birbirine bağlı olduğu ve yalnızca bir doğru boyunca hareket edilebileceği (gerilen uzayın doğru olduğu) çıkarımlarında bulunmaları beklenmiştir. Çözüm arayışı içinde

"*aynı doğrultuda olmayan 2 kayığı içeren kayık (vektör) grupları (cümleleri)*" noktasında yoğunlaşan gruplara senaryodaki

"*Vektörlerde toplama ve skalerle çarpma işlemlerini kullanarak tüm noktalara ulaşmada aynı doğrultuda olmayan 2 kayığı nasıl ifade edersiniz?*"

sorusu sorulmuştur. Bu soruya cevap arayan gruplardan aynı doğrultuda (birbirinin skaler katı) olmayan vektörleri,

"$u \neq kv, k \neq 0$ *ve* $k = \frac{t}{a}, a \neq 0,\ t \neq 0$ *(birbirinin skaler katı olmayan vektörler),* $u \neq kv \rightarrow u \neq \frac{t}{a} v \rightarrow au \neq tv, a \neq 0, t \neq 0$"

olarak ifade etmesi ve dolayısıyla bilinen gerçekleri bir araya getirerek $au - tv \neq 0$ eşitsizliğini elde etmesi beklenmiştir. Böylece öğretmen adaylarının daha önceden (deneysel uygulama süreci başlamadan önce) bildikleri lineer bağımsızlık kavramı yapılandırılmıştır. Bununla birlikte, vektörlerin katsayılarının mutlak değerlerinin birim uzunluk olduğu düşünüldüğünde sürekli bir değişken olan uzunluğu ifade eden a, t sayılarının tam sayı olmasının yanı sıra reel sayı olabileceğinin keşfedilmesi beklenir. Böylece öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin;

"$a, t \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $au - tv \neq 0, a \neq 0, t \neq 0 \rightarrow a = 0$ *ve* $t = 0$ *için* $au - tv = 0$ *ise* u *ve* v *vektörleri birbirinin skaler katı değildir, bu vektörlerle deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşılabilir*"

çıkarımında bulunmaları beklenmiştir. Bununla birlikte, $au - tv = 0$ eşitliğindeki $t \in \mathbb{R}$ olduğundan $-t = b$ alınabileceği belirtilerek lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramının tanımının özel bir hali olan $\mathbb{R}^2$ uzayından alınan 2 vektöre ilişkin;

"$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir vektör uzayı ve bu uzayın* u, v *vektörleri verilsin* $a, b \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $au + bv = 0$ *iken* a *ve* b *den en az biri sıfırdan farklı ise* u *ve* v *vektörleri lineer bağımlıdır.* $a = 0$ *ve* $b = 0$ *ise* u *ve* v *vektörleri lineer bağımsızdır*"

eğitim yönlendiricisi tarafından ifade edilmiştir. Daha sonra iki vektörün lineer bağımlılığı için doğrultunun gerekli şartlardan biri olup olmadığı sorularak öğretmen adaylarının;

"*iki vektörün lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart biri diğerinin skaler katı olmasıdır.*"

teoremini ifade etmeleri beklenmiştir. Bunun yanısıra gruplardan lineer bağımsızlığın ifadesinde geçen $au + bv = 0$ eşitliğini incelemeleri istenmiş ve bu eşitlikten yararlanarak herhangi 2 vektörün lineer bağımsızlığını değerlendirmede a ve b

değerlerinin nasıl bulunabileceği sorulmuştur. Cevap veremeyen öğretmen adayları vektörlerin yerine bileşenlerinin yazılması önerisinde bulunularak yönlendirilmiştir. Bunun üzerine gruplardan yalnızca biri,

$$a(u_1\,, u_2\,) + b(v_1\,, v_2\,) = 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} au_1\ + bv_1\ &= 0 \\ au_2\ + bv_2\ &= 0 \end{aligned}\right\}$$

biçiminde elde edilen LDS'nin çözümüyle a ve b değerlerinin bulunacağını ifade etmiştir. Daha sonra, öğretmen adaylarından senaryodaki

> "*LDS'nin çözümü, rank ve determinant ile lineer bağımsızlık arasında nasıl bir ilişki vardır?*"

sorusuna cevap bulmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarından; LDS'nin çözümü 0 olduğunda alınan vektörlerin lineer bağımsız olduğunu, rankın lineer bağımsız vektör sayısını belirttiğini ve satır vektörleri lineer bağımlı vektörlerden oluşan matrisin determinantının 0 olduğunu keşfetmeleri beklenmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarından, belirli birim uzunlukta yararlanılan kayıkların (u doğrultusunda a birim giden kayık; v doğrultusunda b birim giden kayık) kayıklarla yer değiştirmenin (gerilen vektörün) nasıl ifade edilebileceği ($au + bv$ (lineer birleşim)) ve bu kayıklardan yararlanılarak ulaşılabilecek noktaların tamamını gösteren bir eşitliğin nasıl olabileceğini sorgulamaları istenmiştir.

> "*herhangi a, b için $au + bv = w$ eşitliğini sağlayan w vektörlerinin tamamı*"

cevabının alınmasının ardından germe kavramının özel bir hali olan $\mathbb{R}^2$ uzayından alınan herhangi 2 vektöre ilişkin tanım;

> "*a, b; nin farklı reel sayı değerlerine karşılık oluşturulan u, v vektörlerinin bütün lineer birleşimlerinden oluşan vektörler kümesine bu vektörlerin gerdiği uzay denir*"

olarak eğitim yönlendiricisi tarafından ifade edilmiştir.

> "*Deniz yüzeyinin tamamının gerilmesi için kaç lineer bağımsız vektör alınmalıdır?*"

sorusuna öğretmen adaylarından lineer bağımsız 2 vektörle deniz yüzeyinin tamamının ($\mathbb{R}^2$) gerilebileceği cevabı alınmış ve bu ifadenin genellenmesi istenerek

"*$\mathbb{R}^2$'nin gerilmesi için lineer bağımsız 2 vektör ve $\mathbb{R}^n$'nin gerilmesi için lineer bağımsız n vektör gereklidir*"

teoremini ifade etmeleri beklenmiştir. Geçirdikleri deneyimlere ve bu oturumda öğrendikleri bilgilere dayanarak kurdukları hipotezleri tekrar inceleyen gruplardan senaryodaki;

"*Düzenleme yapılırken deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşılabilecek kayıkların yerleştirileceği bölmelerde kaç kayığın yer alması gerekir?*"

sorusuna çözüm bulmaları istenmiş ve öğretmen adayları

"*lineer bağımsız 2 kayık*"

ya da

"*2 tane aynı doğrultuda olmayan kayık içeren kayık gruplarıyla (2 ya da 2'den fazla sayıda kayıktan oluşan) deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşılabileceği (tamamının gerilebileceği)*"

biçiminde buldukları çözümü savunmuştur. Bunun üzerine 2 tane aynı doğrultuda olmayan kayık içeren (2 ya da 2'den fazla) kayık gruplarının lineer bağımlı olup olmadığı sorulan gruplardan bazıları "lineer bağımlı" bazıları ise "lineer bağımsız" cevabını vermiştir. Eğitim yönlendiricisinin {((2,3), (2,4), (4,6), (5,8)} vektör kümesindeki vektörlerin lineerlik anlamında bağımsız olup olmadığını sorması üzerine gruplar (2,3) ve (4,6) vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu ifade etmiştir. 4 vektörden oluşan kümenin lineer bağımsız olup olmadığının sorulması üzerine gruplar bu kümenin tamamen lineer bağımsız olarak değerlendirilemeyeceği ve dolayısıyla lineer bağımlı olduğu çıkarımında bulunmuştur. Bunun üzerine senaryodaki probleme buldukları çözümü toparlamaları istenmiş ve gruplar;

"*lineer bağımsız 2 kayık*"

ya da

"*2 tane aynı doğrultuda olmayan kayık içeren (2 den fazla) lineer bağımlı kayık gruplarıyla deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşılabileceği (tamamının gerilebileceği)*"

biçiminde çözümü yorumlamıştır. Son olarak senaryodaki

"*Düzenleme yapılırken kayık yerleştirilen bölmelerde en az kaç kayığın yer alması gerekir?*"

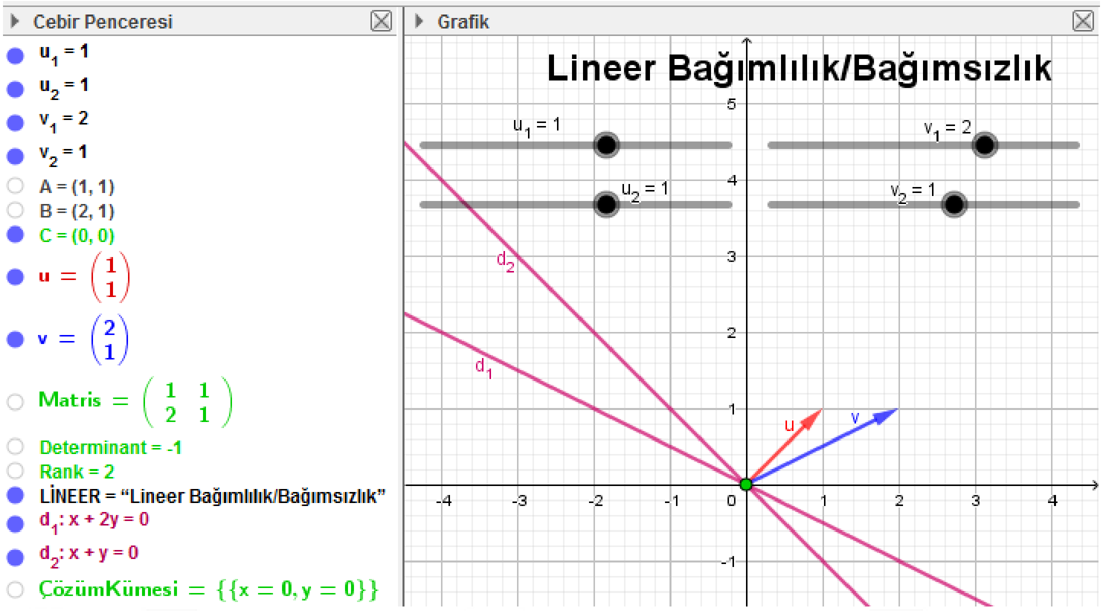
sorusuna ilişkin çözüm yollarının araştırılması istenerek bir sonraki oturum konusu olan "baz (baz)" kavramına ilişkin merak uyandırılmış ve oturum sonlandırılmıştır.

3.3.2 Çoklu temsil temelli GeoGebra destekli öğretimin uygulandığı deneysel süreç

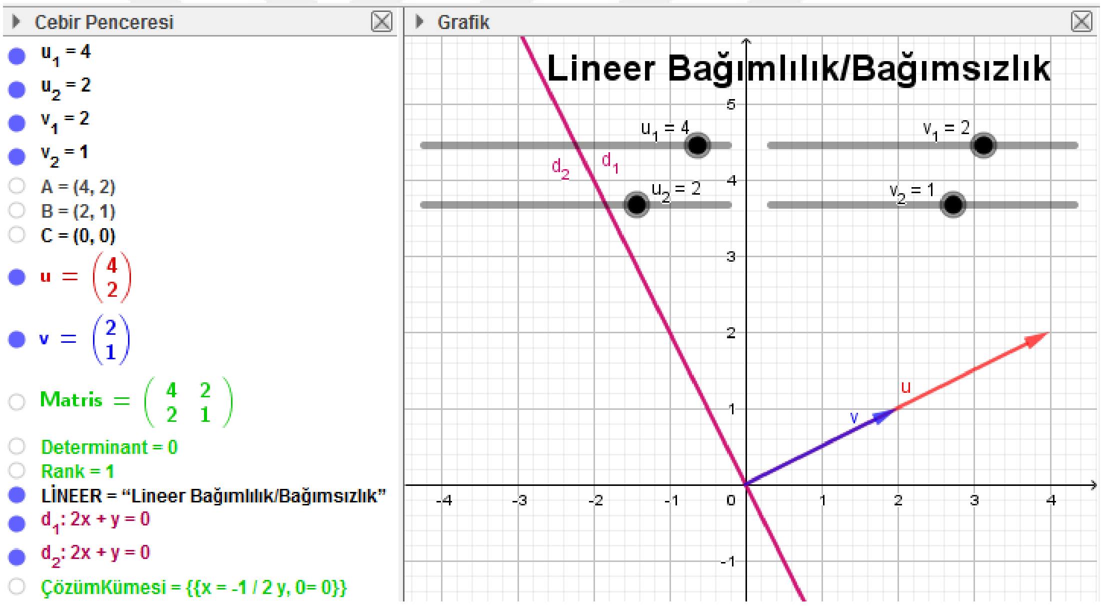
ÇTTÖ uygulanan çalışma grubunda; lineer cebir kavramlarının çoklu temsillerinin (cebirsel, geometrik ve matris temsili) aynı ara yüzde sunulmasına ilişkin avantaj sağlayan GeoGebra yazılımı ile araştırmacılar tarafından geliştirilen materyallerden yararlanılmıştır. Bilgisayar laboratuarında gerçekleştirilen derslerde öğretmen adaylarının tamamına bireysel olarak bu materyalleri deneyimleme imkanı sağlanmıştır. Böylece öğretmen adaylarının her biri; lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, koordinat, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramlarının cebirsel, geometrik ve matris temsillerini inceleme ve tanımdan ve yazılımın sunduğu olanaklaradan yararlanarak genelleme yapma imkanı elde etmiştir. Öğretmen adaylarının bir kavrama ilişkin; karşılaştırma yapmaları, keşfederek öğrenmeleri ve çıkarımda bulunabilmeleri için vektör sayısı ve çalışılan uzay baz alınarak birçok materyal geliştirilmiştir. Araştırmacılar tarafından GeoGebra yazılımından yararlanarak; lineer birleşim kavramı ile ilgili 2 ($\mathbb{R}^2$), germe kavramı ile ilgili 6 ($\mathbb{R}^2$'de 3, $\mathbb{R}^3$'te 3), lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı ile ilgili 4 ($\mathbb{R}^2$'de 2, $\mathbb{R}^3$'te 2), baz kavramı ile ilgili 4 ($\mathbb{R}^2$'de 2, $\mathbb{R}^3$'te 2), baz/koordinat kavramı ile ilgili 1, LDS (homojen ve homojen olmayan) kavramı ile ilgili 2 ($\mathbb{R}^2$'de 1, $\mathbb{R}^3$'te 1), lineer dönüşüm kavramı ile ilgili 1 tane olmak üzere toplam 20 tane materyal hazırlanmıştır.

GeoGebra yazılımı, kavramların farklı temsillerini bir arada sunmanın yanı sıra vektörlerin lineer birleşimini, lineer bağımsızlığını, gerdiği uzayı ve LDS'nin çözümü olup olmadığını değerlendirmek için yararlanılan işlemsel algoritmaların (vektörler toplamı, vektörlerin skalerle çarpımı, matris tersi, rank, determinant ve LDS'nin çözümü) sonucunu cebir penceresinde hazır bir şekilde sunmaktadır ve böylece öğretmen adaylarının işlemlerle vakit harcamak yerine, istenilen amaçlar için uğraşmasına daha çok imkan tanımaktadır (Aktümen, Yıldız, Horzum ve Ceylan, 2011). Böylece, LDS'lerin çözümleriyle ortaya çıkan birçok kavramı konu alan lineer cebirin (Konyalıoğlu ve ark., 2003) öğrenim ve öğretim sürecinde öğretmen adaylarına kavramların temsillerini ilişkilendirmeleri (cebirsel, geometrik ve matris temsili) ve formal yapısı üzerinde düşünmeleri için daha fazla zaman kalabileceği düşünülmektedir. Dolayısıyla, çalışma gruplarından birinin (ÇTTÖ grubunda) uygulama sürecinde, GeoGebra yazılımından yararlanarak oluşturulan materyallerden yararlanılmıştır. Bu materyallerin cebir penceresinde; vektörlerin lineer birleşimini, lineer bağımsızlığını, gerdiği uzayı, baz olup olmadığını incelemede yararlanılan satırları veya sütunları bu vektörlerden oluşan matrislerin rank ve determinant değeri ve LDS'lerin çözüm kümesi hazır bir şekilde sunulmaktadır. Ayrıca bu pencereden, herhangi bir LDS'nin çözümünün olup olmadığını incelemede yararlanılan katsayılar ve ilaveli matrisin rankı, katsayılar matrisinin determinantı; LDS'nin çözümünü bulmada yararlanılan katsayılar matrisinin tersi ve matrisler çarpımı hazır bir şekilde elde edilmektedir.

Vektörlerin lineer bağımlılık/bağımsızlık bağlamında çıkarımda bulunabilmeleri için farklı uzaylarda ($\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$) farklı sayıda vektörler (2 ve 3 vektör) için hazırlanan materyallerden birine ($\mathbb{R}^2$ de 2 vektöre ilişkin materyal) ilişkin görseller aşağıdaki Şekil 3.4 ve Şekil 3.5'te sunulmaktadır. Bu materyal ile; bileşenleri sürgülerden oluşan vektörler (u ve v) birbirinin skaler katı olacak (lineer bağımlı) ve birbirinin skaler katı olmayacak (lineer bağımsız) biçimde seçilerek değerlendirme yapılabilmektedir. Birbirinin skaler katı olmayan 2 vektörün (lineer bağımsız 2 vektör) seçildiği duruma ilişkin cebir ve grafik penceresi Şekil 3.4'te ve birbirinin skaler katı olan 2 vektörün (lineer bağımlı 2 vektör) seçildiği duruma ilişkin cebir ve grafik penceresi Şekil 3.5'te verilmektedir.



Şekil 3.4 GeoGebra yazılımından yararlanarak hazırlanan materyaldeki birbirinin skaler katı olmayan 2 vektöre ilişkin durum



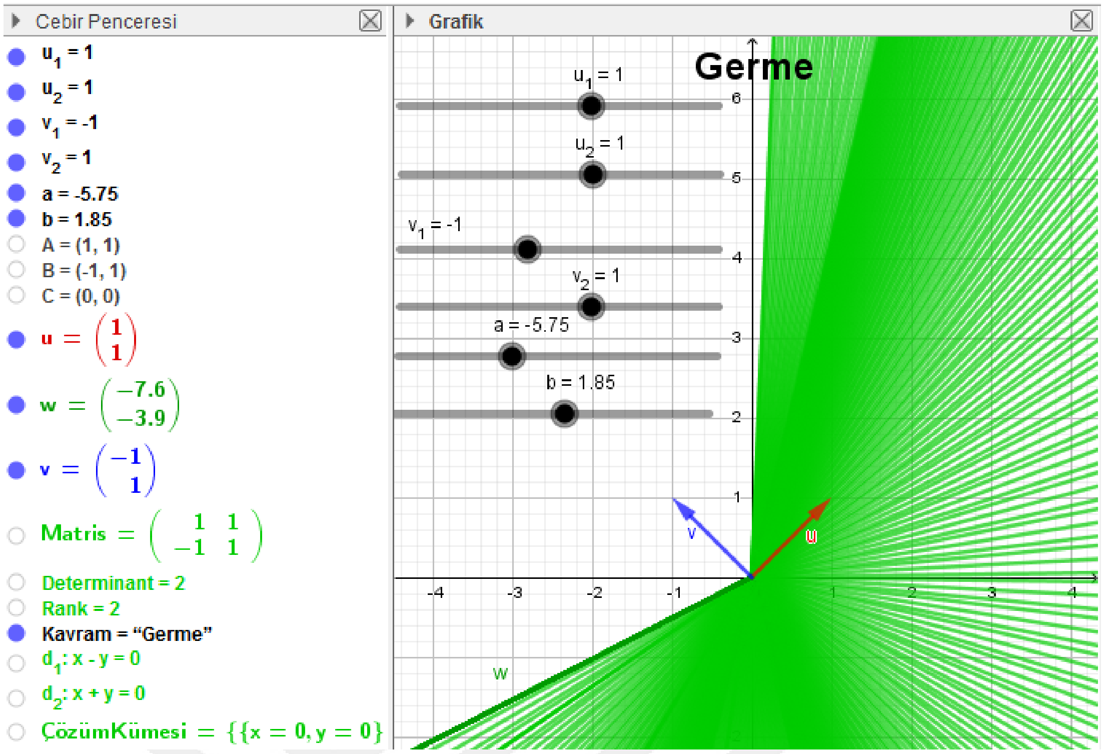
Şekil 3.5 GeoGebra yazılımından yararlanarak hazırlanan materyaldeki birbirinin skaler katı olan 2 vektöre ilişkin durum

Öğretim sürecinin başında; lineer birleşim (a, b; $\mathbb{R}$ cisminin elemanları olmak üzere $u = au_1 + b\,u_2$ toplamı da $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir elemanıdır ve bu u vektörüne, u_1, u_2 vektörlerinin lineer birleşimi denir) ve lineer bağımlılık/bağımsızlık ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve bu uzayın u, v vektörleri verilsin $a, b \epsilon \mathbb{R}$ olmak üzere $au + bv = 0$ iken a ve b den en az biri sıfırdan farklı ise u ve v vektörleri lineer bağımlıdır. $a = 0$ ve $b = 0$ ise u ve v vektörleri lineer bağımsızdır.) kavramlarının özel bir hali olan $\mathbb{R}^2$ uzayından alınan 2 vektöre ilişkin tanımları araştırmacı tarafından ifade edilmiştir. Öğretmen adaylarından çalışma kâğıdındaki soruları cevaplandırarak öncelikle lineer bağımsızlığın formal tanımında geçen $au + b\,v = 0$ eşitliğini yorumlamaları ve bu eşitlikten elde edilen 2 bilinmeyenli LDS'yi;

$$\text{“}a(u_1, u_2\ ) + b(v_1, v_2\ ) = 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} au_1\ + bv_1\ = 0 \\ au_2\ + bv_2\ = 0 \end{matrix}\right\}\text{”}$$

olarak ifade etmeleri ve lineer bağımsızlık için bilinmeyenleri a ve b olan bu LDS'nin sıfır $\{(0,0)\}$ çözümünün bir gereklilik olduğunu keşfetmeleri beklenmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarından birbirinin skaler katı olacak ve birbirinin skaler katı olmayacak biçimde farklı seçimler yapmaları ve seçilen vektörler için; bu LDS'nin çözümüyle birlikte satır vektörleri u ve v vektörlerinden oluşan matrisin rankı ve determinantı arasındaki ilişkiyi GeoGebra yazılımının cebir penceresinde incelemeleri istenmiştir. Böylece bir takım bilgileri keşfetmeleri beklenmiştir(1. $\mathbb{R}^2$ de lineer bağımsız 2 vektör için rank 2'dir. 2. LDS'nin çözümü sıfır vektörü ise alınan vektörler lineer bağımsızdır. 3. Satır vektörleri lineer bağımlı vektörlerden oluşan matrisin determinantı 0'dır.). Bütün bu çalışmalar sonucunda çıkarımda bulunmaları ve dolayısıyla determinant ile lineer bağımlılık (determinatın sıfır olması) ve lineer bağımsızlık (determinatın sıfırdan farklı olması) arasındaki ilişkiyi keşfetmeleri beklenmiştir (Teorem: Elemanları $\mathbb{R}$ cisminden alınan bir 2×2 kare matrisin satır vektörlerinin lineer bağımlı olması için $\Leftrightarrow$ A matrisinin determinantının 0 olmasıdır). Benzer şekilde $\mathbb{R}^2$ de vektör sayısının üç olduğu durumda lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramını değerlendirmeleri için hazırlanan materyalden yararlanarak ve çalışma kâğıdındaki soruları cevaplayarak "$\mathbb{R}^2$'deki herhangi 3 vektörden oluşan bir cümlenin lineer bağımlı" olduğunu kendi deneyimleriyle keşfetmeleri beklenmiştir. Böylece öğretmen adayları Şekil 3.4 ve Şekil 3.5'de iki farklı görseli sunulan materyalden ve 3 vektöre ilişkin hazırlanan materyalden yararlanarak; $\mathbb{R}^2$ de alınan aynı doğrultudaki iki vektörün (lineer bağımlı), aynı doğrultuda olmayan (lineer bağımsız) iki vektörün, tamamı birbirinden farklı doğrultuda üç vektörün (lineer bağımlı) lineer bağımlılığını/bağımsızlığını değerlendirmeleri ve dolayısıyla bu kavram ile vektör sayısı, determinant, rank, LDS'nin çözüm kümesi arasındaki ilişkiyi keşfetmeleri beklenmiştir. Benzer şekilde $\mathbb{R}^3$ te 3 ve 4 vektöre ilişkin hazırlanan materyaller sunulmuş ve öğretmen adaylarından farklı uzaylarda hazırlanan bu materyallerden elde ettikleri bilgiler doğrultusunda öncelikle $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzaylarına ilişkin çıkarımda (1. $\mathbb{R}^2$ de 3 vektör lineer bağımlıdır, 2. $\mathbb{R}^3$ te 4 vektör lineer bağımlıdır., 3. Herhangi iki vektörün lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart biri diğerinin skaler katı olmasıdır) bulunmaları istenmiştir. Elde edilen sonuçların tamamı değerlendirilerek $\mathbb{R}^n$'de (n+1) vektörden oluşan bir cümlenin lineer bağımlı" olduğu genellemesine gidilmiştir. Herhangi bir K cismi üzerinde vektör uzayı olan V'den alınan $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörlerinin lineer bağımsızlığına ilişkin genel tanım araştırmacı tarafından ifade edilmiştir. Lineer cebir alanında kavramın yapılandırılmasına başlandığı süreçte geometrik temsilinin kullanılmasının doğru olmadığına ilişkin alanyazında vurgulanan yaklaşım (Harel, 2000) dikkate alınarak genelleme tamamlanana kadar anlatılan bu süreç yalnızca cebir penceresinden yararlanarak yürütülmüştür. Genellenmenin tamamlanmasının ardından, yazılımın grafik ara yüzünü açarak incelemeleri için öğretmen adaylarına izin verilmiştir. Öğretmen adaylarının materyallerin grafik penceresini incelemelerinin ardından, $\mathbb{R}^2$ de alınan aynı doğrultudaki iki vektörün lineer bağımlı, aynı doğrultuda olmayan iki vektörün lineer bağımsız, $\mathbb{R}^2$ de alınan herhangi üç vektörün lineer bağımlı olduğu çıkarımında bulunmaları beklenmiştir. Benzer şekilde; $\mathbb{R}^3$ te hazırlanan materyalden yararlanan öğretmen adayları, ikisi aynı biri bunlardan farklı doğrultuda olan 3 vektörün lineer bağımlı, tamamı birbirinden farklı doğrultuda aynı düzlemdeki 3 vektörün lineer bağımlı tamamı birbirinden farklı doğrultudaki aynı düzlemde olmayan 3 vektörün lineer bağımsız olduğu çıkarımında bulunmuş ve lineer bağımlılık/bağımsızlığın geometrik yorumunu keşfetmiştir. Böylece, farklı uzaylarda ($\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ te) hazırlanan bütün bu materyallerin, lineer bağımlılık/bağımsızlığa ilişkin cebirsel (birbirinin skaler katı olup olmama) ve geometrik yorumunun (aynı doğrultuda olup olmama ve aynı düzlemde olup olmama); cebir ve grafik penceresinde aynı ara yüzde görülebilmesinin bu kavramı anlamlandırmada etkili olabileceği düşünülmektedir.

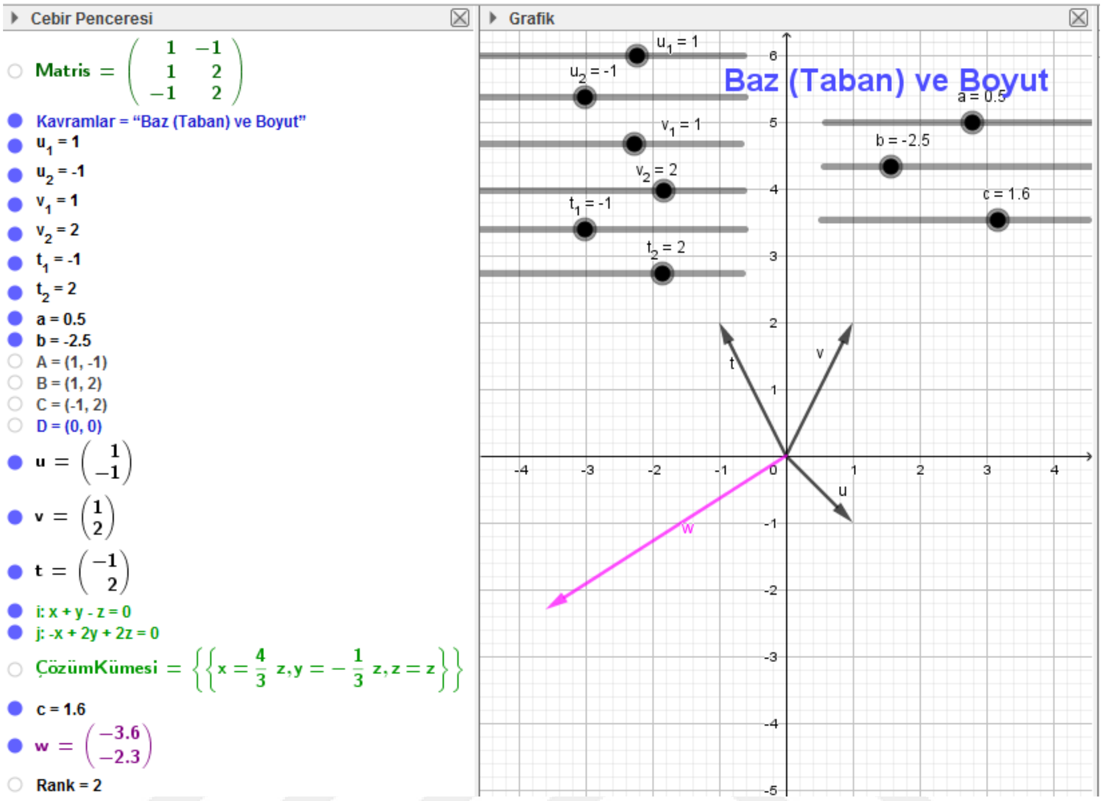
Vektörlerin sayısına göre gerilen uzayın değişimi bağlamında çıkarımda bulunabilmeleri için farklı uzaylarda ($\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$) hazırlanan materyallerden birinin ($\mathbb{R}^2$ de 2 vektöre ilişkin materyal), 2 vektörün birbirinden farklı doğrultuda (lineer bağımsız 2 vektör) seçildiği duruma ilişkin cebir ve grafik penceresi Şekil 3.6'da verilmektedir.



Şekil 3.6 İki lineer bağımsız vektörün gerdiği uzaya ilişkin materyal

Öğretim sürecinin başında; germe kavramının özel bir hali olan $\mathbb{R}^2$ uzayından alınan herhangi 2 vektöre ilişkin tanımı (a, b; nin farklı reel sayı değerlerine karşılık oluşturulan u, v vektörlerinin bütün lineer birleşimlerinden oluşan vektörler kümesine u, v vektörlerin gerdiği uzay denir.) araştırmacı tarafından ifade edilmiştir. Daha sonra, öğretmen adaylarından germe kavramının öğretimi sürecinde öncelikle vektör sayısının iki olduğu duruma ilişkin lineer birleşim kavramının formal tanımında geçen $w = au + b\,v$ eşitliğini sorgulamaları istenmiştir. Bunun ardından öğretmen adaylarından değişen a, b skalerleri için GeoGebra yazılımının cebir penceresinde hazırca sunduğu w vektörünü incelemeleri istenmiştir ve a, b ikilisinin tüm kombinasyonları için $w = au + bv$ eşitliğinden farklı bir w vektörü elde edileceğinin farkına varmaları beklenmiştir. Öncelikle birbirinin skaler katı olan (lineer bağımlı) 2 vektör alındığı durumda; a, b ikilisinin tüm kombinasyonlarına için oluşan w vektörlerine (yalnızca u, v vektörlerinin skaler katı olan vektörler), ilişkin çıkarımda bulunmaları beklenmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarından benzer şekilde birbirinin skaler katı olmayan 2 vektör (lineer bağımsız) alındığı durumda; a, b ikilisinin tüm kombinasyonları için oluşan w vektörlerine (u ve v vektörlerinin skaler katı olan ve u ve v vektörlerinin skaler katı olmayan vektörler), ilişkin çıkarımda bulunmaları beklenmiştir. Benzer şekilde $\mathbb{R}^3$ te hazırlanan materyal sunulmuş ve öğretmen adaylarından elde ettikleri bilgiler doğrultusunda $\mathbb{R}^3$ uzayına ilişkin çıkarımda bulunmaları beklenmiştir. Bu sürecin ardından, herhangi bir K cismi üzerinde vektör uzayı olan V'den alınan $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörlerinin gerdiği uzaya ilişkin genel tanım araştırmacı tarafından ifade edilmiştir. Lineer cebir alanında kavramın yapılandırılmasına başlandığı süreçte geometrik temsilinin kullanılmasının doğru olmadığına ilişkin alanyazında vurgulanan yaklaşım (Harel, 2000) dikkate alınarak genelleme tamamlanana kadar anlatılan süreç yalnızca cebir penceresinden yararlanarak yürütülmüştür. Genellenmenin tamamlanmasının ardından, öğretmen adaylarının grafik ara yüzünü incelemelerine izin verilmiştir. Grafik penceresini inceleyen öğretmen adaylarından, sürgüleri canlandırma ve izi aç özelliklerinden yararlanarak u, v vektörlerinin lineer birleşimlerinin tamamının oluşturduğu vektörler (sonsuz sayıda) cümlesini (u, v vektörlerinin gerdiği uzayı) grafik ara yüzünde somut bir şekilde anında görme dolayısıyla vektörlerin lineer birleşimini (yeşil renkteki vektörlerin her biri) ve vektörlerin gerdiği uzayı (yeşil renkteki vektörlerin tamamını kapsayan uzay) (Şekil 3.6'daki yeşil vektörlerin tamamını da içeren $\mathbb{R}^2$ deki tüm vektörler) incelemeleri beklenmiştir. Öğretmen adaylarından Şekil 3.6'da sunulan materyalden yararlanarak; $\mathbb{R}^2$ de alınan aynı doğrultudaki (lineer bağımlı) iki vektörün (doğru), aynı doğrultuda olmayan (lineer bağımsız) iki vektörün (düzlem, $\mathbb{R}^2$) ve $\mathbb{R}^3$ te hazırlanan materyalden yararlanarak ikisi aynı biri bunlardan farklı doğrultuda olan 3 vektörün (düzlem), tamamı birbirinden farklı doğrultudaki 3 vektörün (düzlem ya da $\mathbb{R}^3$) gerdiği uzayın belirttiği geometrik şekli tespit etmeleri beklenmiştir. Bu materyal ve $\mathbb{R}^3$ te hazırlanan materyallerle alınan farklı özelliklere sahip (lineer bağımlı/bağımsız) vektörlerin doğruyu, düzlemi, 2 boyutlu ve 3 boyutlu uzayı ($\mathbb{R}^3$) nasıl ürettiği somut bir şekilde animasyon olarak görülmektedir. Böylece, farklı uzaylarda ($\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ te) hazırlanan bütün bu materyallerin, vektörlerin gerdiği uzaya ilişkin cebirsel ve geometrik yorumunun (doğru, düzlem, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$); cebir ve grafik penceresinde aynı ara yüzde görülebilmesinin bu kavramı anlamlandırmada etkili olabileceği düşünülmektedir.

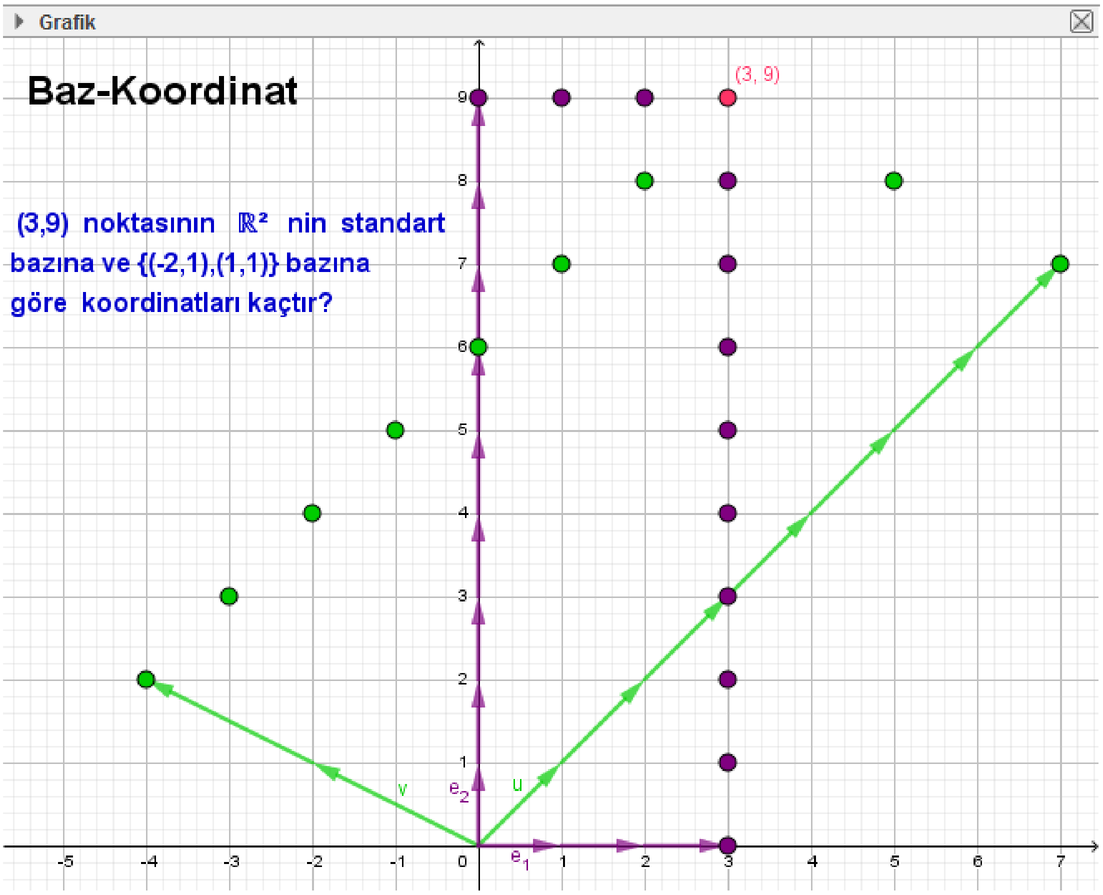
Öğretmen adaylarının vektörler kümesinin taşıdığı özellikleri (vektör sayısı, vektörlerin doğrultusu, lineer bağımlılık/bağımsızlık) inceleyerek, bu kümenin baz (bazı) olup olmadığı ve eğer bazsa hangi uzayın bazı olduğu hususunda çıkarımda bulunabilmeleri için farklı uzaylarda ($\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$) hazırlanan materyallerden birinin ($\mathbb{R}^2$ de 3 vektöre ilişkin materyal), tamamı birbirinden farklı doğrultuda 3 vektörün (lineer bağımlı vektörler cümlesi) seçildiği duruma ilişkin cebir ve grafik penceresi Şekil 3.7'de verilmektedir.



Şekil 3.7 GeoGebra yazılımından yararlanarak baz kavramına ilişkin hazırlanan materyal

Öğretmen adaylarına, baz kavramına ilişkin tanım; "Tanım: u ve v vektörlerinden oluşan V kümesinin bir U vektör uzayının bazı olması için 1)V kümesinin elemanları lineer bağımsız, 2)V kümesi, U uzayını germeli, şartlarının sağlanması gerekir" araştırmacı tarafından hazır olarak verilmiştir.

Burada Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 da verilen lineer bağımsızlık ve germeye ilişkin materyallerle birlikte Şekil 3.7'de yukarıda verilen materyalden elde ettikleri sonuçları birlikte değerlendirerek alınan vektörlerin $\mathbb{R}^2$için baz olup olmadığını sorgulamaları istenmiştir. $\mathbb{R}^2$'de alınan herhangi üç vektörün lineer bağımsız olamayacağı ve dolayısıyla bu üç vektörün $\mathbb{R}^2$ için baz oluşturmayacağı, $\mathbb{R}^2$ nin lineer bağımsız 2 vektörle gerilebileceği ve dolayısıyla bu uzay için baz olma şartlarının yalnızca 2 vektör için sağlanabileceği çıkarımında bulunmaları beklenmiştir. Benzer şekilde $\mathbb{R}^3$ te hazırlanan materyalden yararlanarak $\mathbb{R}^3$'ün lineer bağımsız 3 vektörle gerilebileceği ve dolayısıyla bu uzay için baz olma şartlarının (lineer bağımsızlık ve germe) yalnızca 3 vektör için sağlanabileceğini keşfetmeleri beklenmiştir. Bunun ardından, $\mathbb{R}^n$'in lineer bağımsız n vektörle gerilebileceği, n boyutlu bir vektör uzayının hiçbirisinde n'den fazla lineer bağımsız vektör bulunamayacağı, n-boyutlu bir vektör uzayının her bir bazının n tane vektörden meydana geldiği genellemeleri yapılmıştır. Ayrıca, $\mathbb{R}^2$ de alınan herhangi bir vektörün koordinatlarının bazlara göre değişimi Şekil 3.8'de gösterilmektedir.

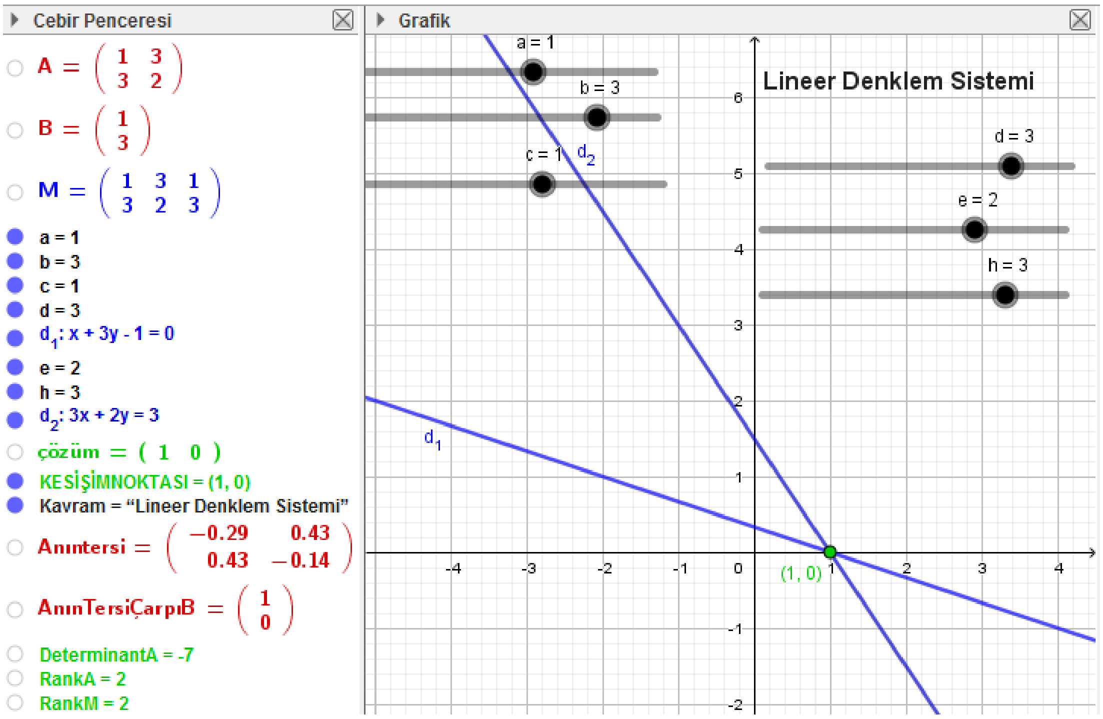


Şekil 3.8 $\mathbb{R}^2$ de alınan farklı bazların herhangi bir vektörün koordinatlarına yansımasını gösteren materyal

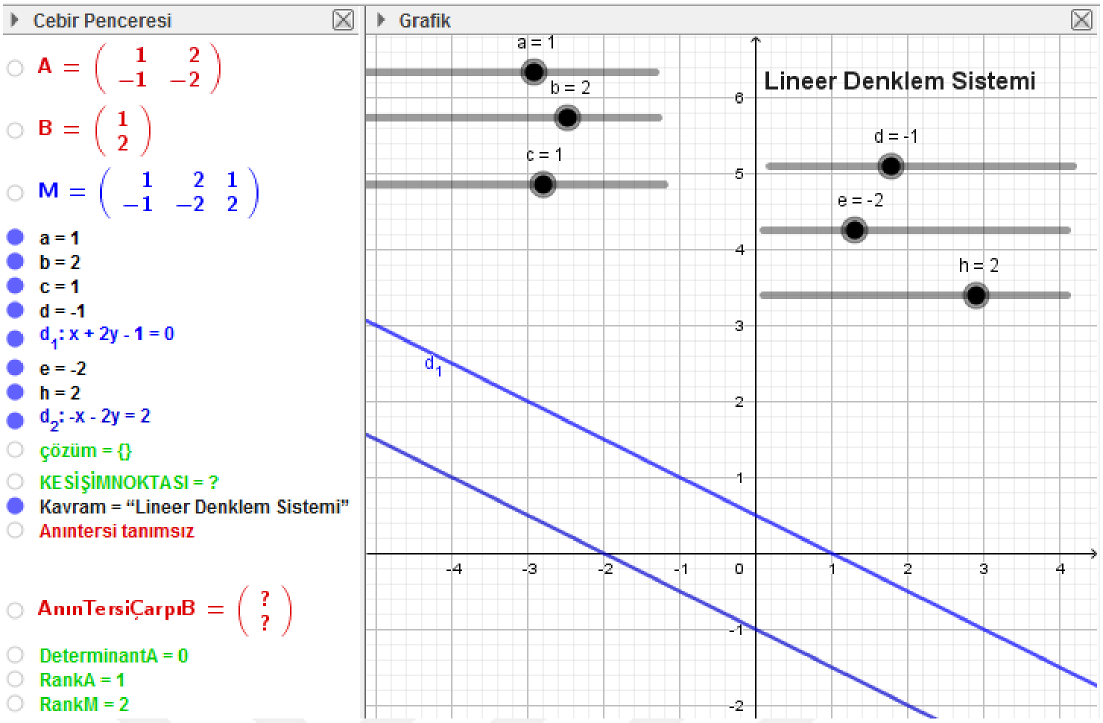
Herhangi bir uzayda alınan bir vektörün, bu uzayın sonsuz sayıdaki bazında bulunan vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabildiği bilinmektedir. $\mathbb{R}^2$ de hazırlanan Şekil 3.8'deki materyalden yararlanarak, herhangi bir vektörün baz vektörlerinin lineer birleşimi olarak tek türlü yazılabileceği $\big((3,9) = 3(1,0) + 9(0,1)$ ve $(3,9) = 7(1,1) + 2(-2,1)\big)$ ve bu yazılımın koordinatları ifade ettiği dolayısıyla yer vektörü değişmese de değişen baz vektörlerine karşılık her bir vektörün koordinatlarının değişeceği çıkarımında bulunmaları beklenmiştir.

Öğretmen adaylarının LDS'ye ilişkin rankı (katsayılar matrisinin ve ilaveli matrisin rankı), determinantı (katsayılar matrisinin determinantı) ve çözüm kümesini inceleyerek, bu kavramlara ilişkin çıkarımda bulunabilmeleri için HLDS ve

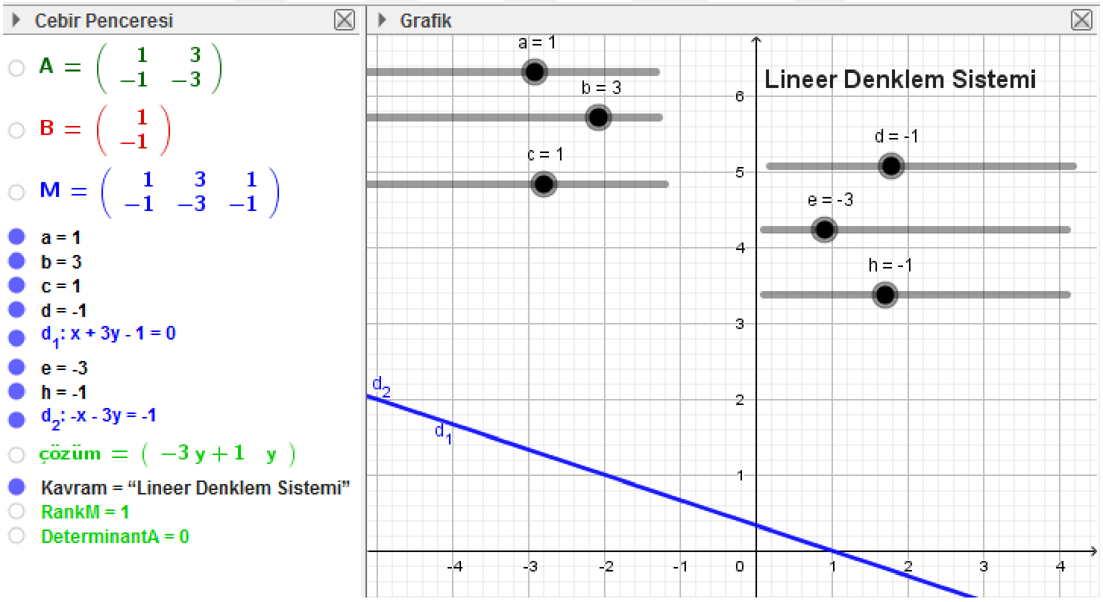
HOLDS'leri için farklı uzaylarda ($\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$) hazırlanan materyallerden birine ($\mathbb{R}^2$ de 2 denklemden oluşan LDS'ye) ilişkin cebir ve grafik penceresi aşağıda Şekil 3.9-3.11'de verilmektedir. Bu materyal sürgülerle oluşturulan katsayıları, $c = h = 0$ alınarak homojen, $c \neq 0$ veya $h \neq 0$ alınarak HOLDS'leri elde edilebilmektedir. Ayrıca sürgülerle oluşturulan katsayıları değiştirerek; doğruların birbirine göre farklı durumlarını (paralellik, çakışıklık, kesişme) inceleyebilme imkanı veren bu materyale ilişkin; kesişen doğruları yansıtan durum Şekil 3.9'de, paralel doğruları yansıtan durum Şekil 3.10'da ve çakışık doğruları yansıtan durum Şekil 3.11'de sunulmaktadır.



Şekil 3.9 GeoGebra yazılımından yararlanarak LDS kavramına ilişkin hazırlanan materyalde kesişen doğruların seçildiği durum



Şekil 3.10 GeoGebra yazılımından yararlanarak LDS kavramına ilişkin hazırlanan materyalde paralel doğruların seçildiği durum



Şekil 3.11 GeoGebra yazılımından yararlanarak LDS kavramına ilişkin hazırlanan materyalde çakışık doğruların seçildiği durum

Öğretim sürecinin başında; LDS kavramının özel bir hali olan katsayıları $\mathbb{R}$ cisminin elemanlarından alınan 2 bilinmeyenli LDS kavramı tanımı, $\left(\begin{matrix} ax+by=c \\ dx+ey=h \end{matrix}\right\}$ gösterimine 2 bilinmeyenli 2 denklemden oluşan bir LDS denir. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$, 2×2 katsayılar matrisi ve $b=(c,h)^T$ sütun vektörü olmak üzere

LDS'lerin matrislerle gösterimi $Ax = b$ dir. b sütun vektörü sıfır ise sisteme HLDS, sıfırdan farklı ise sisteme HOLDS denir. Burada, $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & h \end{pmatrix}$ matrisine arttırılmış matris denir.) araştırmacı tarafından ifade edilmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarından cebir penceresini incelemeleri istenmiştir. Öğretmen adayları Şekil 3.9-3.11'de görüldüğü gibi GeoGebra yazılımının sürgü özelliğinden yararlanarak değiştirilebilen a, b, c, d, e, h reel sayı değerlerine karşılık 2 denklemden oluşan LDS'nin belirttiği doğruların birbirine göre durumlarının tamamına ilişkin birçok sayıda LDS'yi deneyimleyebilmektedir. Dolayısıyla, bu LDS'nin katsayılar matrisinin ve arttırılmış matrisin rankını, LDS'nin çözümünü bu yazılımının işlemsel algoritmaları hesaplama özelliğinden yararlanarak hazır bir şekilde elde etmeleri, çalışma yaprağındaki soruları cevaplayarak bu kavramlar arasındaki ilişkiyi incelemeleri istenmiştir. Daha sonra öğretmen adayları bu materyalde yürütülen sürece benzer şekilde $\mathbb{R}^3$'te lineer denklem sistemlerine ilişkin hazırlanan materyalden yararlanması ve elde ettikleri sonuçları birlikte değerlendirmeleri hususunda yönlendirilmiştir. Elde ettikleri sonuçları birlikte değerlendirerek HOLDS'leri için arttırılmış matrisin rankının katsayılar matrisinin rankından büyük olduğu durumda denklem sistemin çözümünün olmadığını, arttırılmış matrisin rankının katsayılar matrisinin rankına eşit olduğu durumda denklem sisteminin çözümünün tek elemanlı ve arttırılmış matrisin rankının katsayılar matrisinin rankına eşit ve bunların denklem sayısından küçük olduğu durumda denklem sisteminin çözümünün sonsuz elemanlı olduğu çıkarımında bulunmaları beklenmiştir. Bununla birlikte öğretmen adaylarına, HLDS'leri için katsayılar matrisinin rankının denklem sayısına eşit olduğu durumda denklem sisteminin çözümünün tek elemanlı (aşikar çözüm) ve katsayılar matrisinin rankının denklem sayısından küçük olduğu durumda denklem sisteminin çözümünün sonsuz elemanlı olduğunu keşfetmeleri için zaman verilmiştir. Ayrıca katsayılar matrisinin determinantı 0 olduğunda; HLDS'nin çözüm kümesinin sonsuz elemanlı, HOLDS'nin çözüm kümesinin ise sonsuz elemanlı ya da boş küme, katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğunda; HLDS'nin $(Ç = \{0\})$ ve HOLDS'nin çözüm kümesinin tek elemanlı olduğunu keşfetmeleri beklenmiştir. Ayrıca, HOLDS'lerin çözüm metodlarından biri olan "ters matris metodu" bir teorem ifadesi ($A, n \times n$ matris olmak üzere $Ax = b$ sistemi verilsin. Sistemin katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise sistemin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm $x = A^{-1}b$ şeklindedir.) ile araştırmacı tarafından açıklanarak ($Ax = b \rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \rightarrow x = A^{-1}b$) hazır olarak verilmiştir. Lineer cebir alanında kavramın yapılandırılmasına başlandığı süreçte geometrik temsilinin kullanılmasının doğru olmadığına ilişkin alanyazında vurgulanan yaklaşım (Harel, 2000) dikkate alınarak buraya kadar anlatılan süreç yalnızca cebir penceresinden yararlanarak yürütülmüştür. Daha sonra öğretmen adaylarından, materyallerin grafik penceresini açmaları ve iki doğrunun paralellik (çözüm yok), çakışıklık (çözüm sonsuz) ve kesişme (tek çözüm) durumuna göre çözüm kümesinin farklılaşma durumunu belirlemeleri istenmiştir. Benzer şekilde $\mathbb{R}^3$'te hazırlanan materyalin grafik penceresinden yararlanarak LDS'lerin çözümü ile doğru ve düzlemlerin birbirine göre durumlarını ilişkilendirmeleri beklenmiştir.

Uygulama sırasında kullanmak üzere; vektör uzayı ünitesindeki kavramlarla ilgili 4, LDS kavramı ile ilgili 2 ve lineer dönüşüm kavramı ile ilgili 1 olmak üzere 7 çalışma yaprağı hazırlanmıştır. Bu çalışma yapraklarıyla öğretmen adaylarının bilgiyi keşfetmelerine ve çıkarımda bulunmalarına destek olunmuştur. Öğretmen adaylarından çalışma yapraklarındaki soruları öncelikle tek başına cevaplamaları daha sonra birlikte tartışmaları istenmiştir.

3.3.3 Geleneksel uygulama

GÖ'nin uygulandığı karşılaştırma grubunda lineer cebir kavramlarının öğretimi doğrudan anlatım, soru cevap teknikleri kullanılarak öğretim üyesi tarafından gerçekleştirilmiştir. Karşılaştırma grubunda öğretmen adaylarına düz anlatımla öğretilmiştir. Öğretim üyesi kavramları diğer iki çalışma grubu ile paralel olarak anlatmıştır ve ünite sonunda öğretmen adaylarına kavramları pekiştirmeleri için soru çözümü yapmıştır.

3.4 Veri Toplama Araçları

Bu araştırmada verilerin toplanması sürecinde kullanılan veri toplama teknikleri; test, ölçek ve görüşmedir. Bu veri toplama teknikleri dikkate alınarak; araştırmanın nicel kısmı için LCPT, MKÖAÖ, MSA, KDF, EYDF ve ÖADF ve nitel kısmı için (yarı yapılandırılmış görüşmede kullanılmak üzere) İlişkilendirme Görüşme Formu (İGF) veri toplama araçlarından yararlanılarak aşağıda Tablo 3.7'de sunulan problem durumlarına cevap aranmıştır.

Tablo 3.7 Problem durumları ve veri toplama araçları

Problem Durumu	Veri toplama aracı
Vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramlarına ilişkin performansların ve bu kavramlarla ilgili soruları çözüm süreçlerinin belirlenmesi	LCPT
Vektör, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramlarına ilişkin anlama boyutlarının belirlenmesi	LCPT
Özyeterlik algı düzeylerinin ölçülmesi	MKÖAÖ
Matematiksel düşünme yapılarının belirlenmesi	MSA
Lineer birleşim, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz-boyut, LDS ve lineer dönüşüm kavramlarıyla ilgili kavramsal anlama ve kavramlar arası ilişkilendirme becerilerinin belirlenmesi	İGF
PDÖ sürecinde modüllerin ardından; Öğretmen adaylarına göre kendi becerilerinin gelişip gelişmediğine ilişkin görüşlerinin belirlenmesi (KDF), Öğretmen adaylarına göre eğitim yönlendiricisinin öğrenme süreçlerine katkısının olup olmadığının belirlenmesi (EYDF) Eğitim yönlendiricisine göre öğretmen adaylarının bazı becerilerinin gelişip gelişmediğine ilişkin görüşlerinin belirlenmesi (ÖADF)	Değerlendirme formları: KDF, EYDF ve ÖADF

Araştırmada kullanılan veri toplama araçlarından LCPT; hem vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramlarına ilişkin performansların, hem de bu kavramlardan bazılarına (vektör, vektör uzayı ve baz-boyut haricindeki kavramlar) ilişkin anlama boyutlarının belirlenmesi; MKÖAÖ, özyeterlik algı düzeylerinin ölçülmesi; MSA, matematiksel düşünme yapılarının belirlenmesi amacıyla kullanılmıştır. Araştırmada yararlanılan veri toplama araçlarından İGF; lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, germe, baz, boyut, LDS ve lineer dönüşüm kavramları arası ilişkilendirme becerilerini belirlemek için araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir. Öğretmen adayları ile gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmelerde açık uçlu sorulardan oluşan bu görüşme formundan yararlanılmıştır. Araştırmada kullanılan veri toplama araçlarının geliştirilme ya da Türkçeye adaptasyonu, deneme ve geçerlik-güvenirlik çalışmalarına aşağıda yer verilmiştir.

3.4.1 Matematik süreç aracı

Presmeg (1985) tarafından lise ve lisans öğrencilerinin rutin olmayan matematik problemlerinin çözümünde görsel ve görsel olmayan yöntem tercihini tespit etmek amacıyla geliştirilmiştir. Araç, A, B ve C bölümleri olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerden B ve C üniversite öğrencileri için hazırlanmıştır. Rutin olmayan 18 matematik probleminin 12 si Bölüm B'de, 6 sı Bölüm C'de yer almaktadır. Bölüm B ve Bölüm C'nin Türkçeye adaptasyonu Taşova (2011) tarafından yapılmıştır. İki uzman yardımıyla Türkçeye çevrilen problemler 24 kişilik bir gruba uygulamıştır. Bu uygulama sonucunda MSA'nın testi yarılama yöntemi ile ölçülen güvenirlik katsayısı, 0.89 olarak bulunmuştur.

Presmeg'e (1985) göre bu araç; öğrencileri düşünme yapılarına göre analitik, geometrik ve harmonik olarak sınıflama yeterliğine sahiptir. Presmeg (1985) çalışmasında, bağıl değerlendirmeden yararlanarak sınıflama yapmış ve matematiksel süreç aracından alınan puanlara göre; puanı en düşük olan grubun analitik, en yüksek olan grubun geometrik, puanı orta düzeyde olan grubun ise harmonik düşünme yapısında olduğunu belirtmiştir. Bu araştırmada bağıl değerlendirme yapılarak üç grubun alt ve üst sınırları belirlenip analitik, harmonik ve geometrik olarak sınıflama yapılmıştır.

3.4.2 Matematiğe karşı özyeterlik algısı ölçeği

Bu ölçek, İlköğretim Matematik Öğretmenliği öğrencilerinin matematik özyeterlik algılarını ölçmek amacıyla Umay (2001) tarafından geliştirilmiştir. Matematik benlik algısı, matematik konularına ilişkin davranışlarda farkındalık ve matematiği yaşam becerilerine dönüştürebilme olarak üç alt boyuttan oluşan ölçeğin Cronbach alfa güvenilirlik katsayısı 0.88, ölçek maddelerinin geçerlik katsayılarının ortancası 0.64 olarak elde edilmiş ve bunun ölçeğin tümünün geçerliği konusunda bir ölçüt olarak kabul edilebileceği belirtilmiştir (Umay, 2001).

Ölçek 14 maddeden oluşan 5'li likert tipi bir ölçektir. Ölçek,"hiçbir zaman"(1), "ender olarak"(2), "bazen"(3), "çoğu zaman"(4) ve "her zaman"(5) şeklinde puanlanmaktadır. Ölçekten alınabilecek en düşük puan 14, en yüksek puan ise 70 olarak hesaplanmıştır. MKÖAÖ Ek 2'de sunulmuştur.

3.4.3 Lineer cebir performans testi

LCPT'nin geliştirilmesine başlamadan önce araştırmanın konusu ile ilgili alanyazın incelenmiştir. Kavram bazında soru dağılımını belirlemek için lineer cebir dersinin kazanımlarının bilinmesinin önemi dikkate alınarak YÖK tarafından hazırlanan 2018-2019 eğitim-öğretim yılı lisans programları incelendiğinde alanda temel derslerden biri olan lineer cebir dersinin içeriğinin belirlendiği ancak kazanımlarının belirlenmediği görülmüştür. Bu lisans programında belirtilen içerik ve alanında uzman öğretim üyelerinden alınan görüş doğrultusunda LCPT'nin kavram bazında soru dağılımı belirlenmiştir. Ayrıca alanında uzman eğitimcilerle görüşülerek test ve soru türü, kavramların ağırlıklı dağılımı ile ilgili görüş alınmıştır. Lineer cebir kavramlarından vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramlarının yoklanmasına, her kavramla ilgili en az 3 soru hazırlanmasına ve performansın yanında çözüm sürecininde ölçülmesi hedeflendiğinden açık uçlu soruların tercih edilmesine karar verilmiştir.

Alınan kararlar doğrultusunda ve araştırmanın amacına uygun olarak lineer cebir kitapları, lineer cebir dersi veren öğretim üyelerinden alınan ders notları, öğretmenlik alan bilgisi sınav soruları ve alanyazındaki tez, makale gibi çalışmalarda kullanılan çeşitli veri toplama araçları (Fischer, 2005; Kar, 2010; Kardeş-Birinci, 2016; Turğut, 2010) kullanılarak sorular hazırlanmıştır. Bunlar arasından çeşitli anlama boyutlarının sergilenebileceği sorular ve araştırmaya konu olan kavramlar dikkate alınarak seçim yapılmış ve bu seçim sonucunda LCPT'nin taslak hali oluşturulmuştur. Taslak halindeki LCPT, toplam 25 sorudan oluşmaktadır.

3.4.3.1 Lineer Cebir Performans Testi deneme aşaması

Öğretmen adayları, germe ve baz kavramları hariç diğer kavramları lisede Fizik ve Matematik derslerinde görmüş olsa da araştırmaya konu olan kavramların tamamını üniversite 2. sınıfta daha geniş kapsamlı olarak lineer cebir dersinde öğrenmektedir. Bu yüzden 1. sınıfta öğrenim görmekte olan öğretmen adayları örnekleme dâhil edilmemiş ve deneme grubu lineer cebir dersini daha önceki yıllarda almış 3. ve 4. sınıfta kayıtlı öğretmen adaylarından oluşturulmuştur. Bu durum gerçek uygulamalara yönelik fikir edinilmesi ve güvenirlik çalışmalarının daha doğru sonuçlar vermesi açısından önemlidir. Üniversitelerde anlatılan lineer cebir dersinden beklenen kazanımlar doğrultusunda hazırlanan LCPT deneme çalışması yapılmak üzere 78 kişiden oluşan 3. ve 4. sınıf İlköğretim Matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerine uygulanmıştır.

3.4.3.2 Lineer Cebir Performans Testi geçerlilik çalışmaları

LCPT geçerlilik çalışmaları kapsam geçerliliği açısından değerlendirilmiştir. LCPT'deki taslak sorular alanda yapılan çalışmalar, ders kitapları, sınav soruları dikkate alınarak oluşturulmuştur. Lineer cebir kavramlarının tamamı için en az üçer soru sorularak hazırlanan LCPT'ye ilişkin, lineer cebir alanında uzman 3, eğitim alanında uzman 2 öğretim üyesinden görüş alınmıştır. Alanında uzman öğretim üyelerinden alınan görüşler doğrultusunda taslak olarak oluşturulan testten kapsam geçerliliğini sağlayacak biçimde öncelikle 25 madde seçilmiştir. LCPT'de ki soruların alt boyutları da dikkate alınırsa; vektör kavramıyla ilgili 5 soru, vektör uzayı kavramıyla ilgili 4 soru, lineer birleşim kavramıyla ilgili 3 soru, germe kavramıyla ilgili 4 soru, lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramıyla ilgili 5 soru, baz-boyut kavramıyla ilgili 7 soru, lineer denklem-LDS kavramıyla ilgili 7 soru, lineer dönüşüm kavramıyla ilgili 4 soru bulunmaktadır. Bu testte, öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarıyla ilgili bilgilerini kullanmasının yanı sıra geometrik yorumlama ve modelleme becerilerini belirlemek için grafik temsili ile ifade edilen ve rutin olmayan problemleri yansıtan sorular içermektedir. Araştırmaya konu olan lineer cebir kavramlarından neredeyse tamamı ile ilgili grafik temsil ile ifade edilen 1 soru ve rutin olmayan 1 problem hazırlanmasının bir başka nedeni de farklı yöntemlerle öğrenim gören gruplardaki öğretmen adaylarının grafik temsil ile ifade edilen ve rutin olmayan problemlere ilişkin performanslarını karşılaştırmaktır.

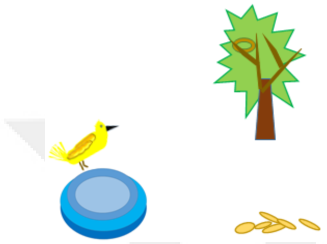
Ancak LCPT'nin deneme çalışmasından sonra bir soruyu doğru cevaplayan öğretmen adayı olmadığı ve $\mathbb{R}^3$'te öğretmen adaylarının kavramların geometrik temsil performanslarını belirlemede, kavramları yorumlamada sorun yaşadıkları tespit edildiğinden aşağıdaki maddenin testten çıkarılmasına karar verilmiştir.

"Soru 25) $K = \{(x_1, 0, x_3): x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ ve $K = \{(y_1, y_2, 0): y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$ olsun.

a) $\mathbb{R}^3$ uzayının $K \cap M$ alt kümesinin ifade ettiği cebirsel yapı hakkında ne düşünüyorsunuz?
b) Bu küme geometrik olarak hangi kavramı temsil eder?"

Deneme çalışması sonucunda; öğretmen adaylarının soruyu görselden dolayı yanlış anladıkları gözlendiğinden, LCPT'nin 4. maddesinde şekil üzerinde değişiklik yapılması uygun görülmüştür. Bu maddenin ilk ve son hali aşağıda Tablo 3.8'de sunulmaktadır.

Tablo 3.8 LCPT ’deki maddelerden birine ilişkin yapılan düzenlemeler

Maddenin ilk hali	
	Şekildeki kuş doğrusal hareketle havuzun $(1,1,3)$ noktasındaki suyu içtikten sonra evin bahçesindeki $(1,5,0)$ noktasındaki yemi alıp ağaçtaki $(1,8,4)$ noktasındaki yavrusuna götürmüştür. Buna göre kuşun, a) aldığı yol kaç birimdir? b) yer değiştirmesi kaç birimdir?
Maddenin son hali	
	Şekildeki kuş doğrusal hareketle havuzun $(1,1,3)$ noktasındaki suyu içtikten sonra yerde bulunan $(1,5,0)$ noktasındaki yemi alıp ağaçtaki $(1,8,4)$ noktasındaki yavrusuna götürmüştür. Buna göre kuşun, a) aldığı yol kaç birimdir? b) yer değiştirmesi kaç birimdir

Deneme çalışmalarında LCPT’nin 50 dakikada tamamlandığı gözlendiğinden bu testin uygulama süresi 60 dakika olarak belirlenmiştir. LCPT deneme uygulaması sonrasında soruların sıralamasında öncelik kavram bilgisinin yeterli olduğu sorulara verilmiş olup yorum bilgisi gerektiren sorulara testte daha sonraki maddelerde yer verilmiştir. Ayrıca, yüksek lisans yapmakta olan 5 ve doktora öğrenimi görmekte olan 1 matematik öğretmeninden LCPT ile ilgili görüş alınmıştır. Yapılan çalışmalar testin ortalama uygulama süresinin belirlenmesi, ifade ve grafik ya da şekillerle ilgili karşılaşılan anlam hatalarının ve teste yer alan imla ve yazım hatalarının belirlenerek düzeltilmesi açısından önemlidir. Ayrıca alanında uzman eğitimcilerden alınan görüş doğrultusunda öğretmen adaylarının kararlı bir biçimde testteki soruların tamamını cevaplaması için testin ilk sorularının ilköğretimden beri gördükleri sorulardan oluşmasına ve aynı kavramla ilgili soruların tamamının bir arada olmamasına karar verilmiştir. LCPT’nin son hali ile ilgili kavram bazında soru dağılımı aşağıda Tablo 3.9’da gösterilmektedir.

Tablo 3.9 LCPT lineer cebir kavramlarına göre dağılımı

Lineer cebir kavramları	Sorular
Vektör	1, 2, 3, 4
Vektör uzayı	5a, 6b, 21
Lineer birleşim	20a, 24c, 24d
Germe	18, 19, 20b, 24e
Lineer bağımlılık/bağımsızlık	15, 16,17, 24a, 24b
Baz	20c, 22, 23, 24f, 24g
Lineer denklem-LDS	5b, 6a, 7, 8, 9, 10
Lineer dönüşüm	11, 12, 13, 14

Lineer cebir performanslarının yeterli olup olmadığını ve sergiledikleri anlama boyutları dağılımını tespit etmek için çalışma grubuna dahil olan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına, araştırmacılar tarafından geliştirilen açık uçlu 24 sorudan, alt sorularıyla birlikte toplam 37 sorudan oluşan LCPT uygulanmak üzere hazırlanmıştır. Bu test; vektör (5), vektör uzayı (3), lineer birleşim (3), germe (4), lineer bağımlılık/bağımsızlık (5), baz (7), lineer denklem-LDS (6), lineer dönüşüm (4) kavramlarıyla ilgili işleme ve yoruma dayalı sorulardan oluşmaktadır. Bu sorulardan 9'u geometrik temsiline, 11'i rutin olmayan problemlere ilişkin performansı ölçmek amacıyla testte yer almaktadır.

3.4.3.3 Lineer Cebir Performans Testi güvenirlik çalışmaları

Yapılan bir ölçmede aranacak en önemli özelliklerden biri olan LCPT'nin güvenirlik çalışması için iç tutarlılık analizleri gerçekleştirilmiştir. İç tutarlılık, bir niteliğin birden fazla ölçümünden birbirine yakın değerler elde edilmesidir. İç tutarlılık, Pearson, Spearman Brown, Guttman, Kuder Richardson ve Cronbach alpha yöntemleri ile hesaplanmaktadır. Bu araştırmada, LCPT'nin iç tutarlılığı için Cronbach alpha ve Spearman Brown yöntemleri ile hesaplanan güvenirlik katsayıları aşağıda Tablo 3.10'de verilmiştir.

Tablo 3.10 LCPT güvenirlik analizi değerleri

Analiz türleri	**Madde sayısı**	**R**
Cronbach α	24	0.91
Spearman Brown	24	0.70

Birden fazla uygulamaya gerek kalmadan, ölçme aracıyla yapılan tek ölçümün iç tutarlılığını gösteren ve soruların dereceleme yöntemiyle puanlandığı Cronbach α güvenirlik katsayısı .91 olarak hesaplanmıştır. Bununla birlikte testi yarılama yöntemine dayalı olarak elde edilen Spearman Brown değeri .70 olarak bulunmuştur. Hesaplanan güvenirlik katsayıları LCPT'nin maksimum düzeyde %91 ve minimum düzeyde %70 düzeyinde güvenilir olduğunu göstermektedir.

Ölçmenin güvenirlik analizinde tercih edilebilecek yöntemlerden biri de bağımsız gözlemciler arası korelasyonu incelemektir. Bu analiz yönteminde birden çok gözlemcinin öğretmen adaylarının test puanlarına ilişkin yaptıkları ölçümlerin ortalamalarının birbirine yakın olması ve dolayısıyla korelasyonun yüksek düzeyde olması testin güvenirliğinin yüksek olması şeklinde yorumlanmaktadır. Bu araştırmada LCPT'nin güvenirlik analizinde kullanılan yöntemlerden birisi de gözlemciler arası uyum olmuştur. LCPT'nin puanlanmasında dereceli puanlama anahtarı kullanıldığından puanlayıcılar arası güvenirlik hesaplaması yoluna gidilmiştir. Bunun için araştırmaya katılan 90 öğretmen adayının cevap kağıtlarından %10'u (9 cevap kâğıdı) rastgele seçilmiş ve bu cevap kâğıtlarını lineer cebir alanında uzman iki akademisyenin, araştırmacılar tarafından hazırlanan LCPT rubriğinden yararlanarak değerlendirmesi istenmiştir. Akademisyenlerin ve araştırmacının verdiği puanlara ilişkin Kendall'ın uyum katsayısı .88 olarak hesaplanmış, puanlayıcılar arasında anlamlı derecede uyum olduğuna karar verilmiştir. LCPT Ek 1'de sunulmuştur.

3.4.4 Görüşme

Nitel araştırmalarda yaygın olarak kullanılan veri toplama araçlarından biri görüşmedir. Görüşme belli bir konu hakkında bilgi toplamak amacıyla en az iki kişi arasında sözlü olarak kontrollü bir biçimde yürütülen etkileşimli bir iletişim sürecidir. Araştırmalarda konu ile ilgili geniş kapsamlı, derinlemesine veri toplamak amacıyla görüşme tekniği tercih edilebilmektedir. Görüşme tekniği; araştırma ile ilgili temel bilgileri ortaya koymak, araştırmanın değişkenleri ve bu değişkenler arasındaki ilişkileri ortaya koymak, diğer veri toplama araçlarıyla toplanan verileri karşılaştırmak veya desteklemek ve bireylerin neyi neden düşündüklerini, duygu tutum ve davranışlarını ortaya çıkaran faktörleri belirlemek (Ekiz, 2003) amacıyla kullanılmaktadır. Görüşme tekniği esnek bir araç olarak araştırmalarda farklı amaçlarla kullanılabildiği gibi araştırma sürecinin farklı aşamalarında tercih edilebilmektedir. Bu araştırmada, öğretmen adaylarının PDÖ ve ÇTTÖ ile gerçekleştirilen derslerin sonunda kavramlar arası ilişkilendirme becerilerinin belirlenmesi ve dolayısıyla nicel kısımdan elde edilen verilerin desteklenmesi amacıyla görüşme tekniği tercih edilmiştir. Patton (1990) görüşmelerde; bilgi, deneyim, duygu, davranış, duyusal ve demografik özelliklerle ilgili altı farklı soru çeşidinin kullanılabileceğini belirtmektedir. Alanında uzman bazı yazarlar farklı sınıflandırmalar yapmış olsa da görüşme formundaki bu soruların serbest ya da sabit olmasına, değişip değişmemesine bağlı olarak görüşmelerin türleri genelde yapılandırılmamış, yapılandırılmış ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden oluşmaktadır. Bu araştırmada, bir plan dahilinde görüşme öncesi hazırlanmış sorulardan yararlanılan yapılandırılmış görüşmenin ve görüşme sürecinde gerek görüldüğü durumlarda serbest soru sorma imkanı veren yapılandırılmamış görüşmenin avantajlarını sağlayan yarı yapılandırılmış görüşme tercih edilmiştir.

3.4.4.1. İlişkilendirme Görüşme Formu

Ma’ya (1999) göre ilişkilendime, alanda odak sayılabilecek önemli kavramlar ile matematiksel ifadeler ve gösterimler arasında bağ kuran matematiksel bağlantılardır. NCTM (2000); akıl yürütme, problem çözme, iletişim, temsil etme ile birlikte ilişkilendirmeyi alana ait temel beceriler olarak belirtmektedir. Ayrıca MEB (2013), hazırladığı öğretim programının genel amaçlar kısmında öğrenciler “matematiksel kavramları anlayabilecek, bunlar arasında ilişkiler kurabilecektir” ifadesine yer vermektedir. Bu öğretim programında öğrencilerin ilişkilendirme becerilerinin geliştirilmesi için dikkat edilecek davranışlar; kavramlar ve işlemler arasında ilişki kurma, matematiksel kavram ve kuralları farklı temsil biçimleriyle gösterme, matematiksel kavram ve kuralların farklı temsil biçimlerini birbiriyle ilişkilendirme ve birbirine dönüştürme, farklı matematik kavramlarını birbiriyle ilişkilendirme, matematiği diğer derslerde ve günlük yaşamda karşılaşılan konu ve durumlarla ilişkilendirme olarak gösterilmektedir. Bu araştırmada, bahsedilen ilişkilendirme becerilerinden kavramlar arası ilişkilendirme baz alınmıştır. Bu ilişkilendirme becerisi dikkate alınarak oluşturulan ilişkilendime görüşme formuyla öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme becerilerinin derinlemesine incelenmesi amaçlanmaktadır.

Araştırmanın amacına uygun olarak lineer cebir kitapları, lineer cebir dersi veren öğretim üyelerinden alınan ders notları, öğretmenlik alan bilgisi sınav soruları kullanılarak İlişkilendirme Görüşme Formu’nun taslak hali oluşturulmuştur. Ayrıca lineer cebir eğitimi alanında çalışmaları olan alanında uzman bir öğretim üyesinden ve eğitim alanında uzman iki öğretim üyesinden görüş alınarak bazı sorular çıkarılmış, bazı soruların ifadesinde değişiklikler yapılarak görüşme formu uygulamaya hazır hale getirilmiştir. İGF; lineer birleşim-germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık-germe, baz-germe, baz/boyut- lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer bağımlılık/bağımsızlık -LDS, baz- lineer dönüşüm kavramları arası ilişkilendirme biçimlerinin ölçülmesi için hazırlanan toplam 6 açık uçlu sorudan oluşmaktadır. İGF'deki 1. soru lineer birleşim-germe 2. ve 3. soru lineer bağımlılık/bağımsızlık-germe, 4. soru baz-germe ve baz/boyut- lineer bağımlılık/bağımsızlık, 5. soru lineer bağımlılık/bağımsızlık-LDS, 6. soru baz-lineer dönüşüm kavramları arası ilişkilendirmeyi ölçmek için hazırlanmıştır. 6 sorudan oluşan İGF, EK 9'da ve öğretmen adaylarından birinin (ÇÖ2[1]) görüşme sürecine ilişkin transkript EK 10'da sunulmuştur.

İGF, görüşme tekniklerinden yarı yapılandırılmış görüşme ile uygulanmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmelerde, görüşme sürecinde öğretmen adaylarının verdiği cevaplara bağlı olarak alt sorular sorulabilir ya da öğretmen adaylarının soruların cevaplarını başka sorularda cevaplaması durumunda bu sorular tekrarlanmayabilir. Bu durumda yarı yapılandırılmış görüşmelerin, yapılandırılmış görüşmelere göre esnek bir teknik olması açısından bu araştırmada kullanılmasının diğer görüşme türlerine göre daha uygun olduğu düşünülmektedir.

Yarı yapılandırılmış görüşmeler, araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Öncelikle kendini tanıtan araştırmacı; görüşmenin amacını, bilgilerin nerede ve nasıl kullanılacağını açıkladıktan sonra, görüşmeye başlamadan önce öğretmen adaylarından görüşme ve ses kaydı almak için izin almıştır. Görüşmeyle ilgili bilgi verilmesi öğretmen adaylarının güvenini kazanmak ve görüşme sürecinden doğru veriler elde etmek açısından önemlidir. İGF'nin uygulama sürecinde veriler ses kaydı ile toplanmıştır. Öğretmen adaylarının sıkılmadan görüşmeyi sürdürmesi ve bu süreçte bilgilerini ortaya koyması için zaman zaman ara vererek görüşmeler yürütülmüştür. Görüşmeler, yaklaşık olarak 40 dakika sürmüştür.

3.4.5 Değerlendirme formlarının hazırlanması

Değerlendirmenin objektif ve düzenli olarak yapılması PDÖ sürecinde oturumların verimli bir biçimde gerçekleştirilmesi açısından önemlidir. Bunun için

[1] ÇÖ2: ÇTTÖ grubundan LCPT'ye ilişkin orta düzeyde performans sergileyen öğretmen adayları arasından görüşme yapmak üzere seçilen öğretmen adayı

öncelikle alanyazındaki PDÖ ile ilgili çalışmalar (Cantürk-Günhan, 2006; Dağyar, 2014; Duch ve ark., 2001; Ersoy, 2012; Kaptan ve Korkmaz, 2001; Saban, 2004; Savin-Baden ve Major, 2004; Sifoğlu, 2007; Uden, 2006) dikkate alınarak bu öğretim yönteminin kazandırabileceği beceriler doğrultusunda (iletişim, grupla uyum sağlama, motivasyon, kaymaklardan araştırma yapma, bilgilerini ilişkilendirme, sorgulama…) değerlendirme formlarında yer alan maddeler belirlenmiştir. Bu bağlamda objektif değerlendirme yapabilmek için öğretmen adaylarına uygulamak üzere KDF ve EYDF, eğitim yönlendiricisinin öğretmen adaylarını değerlendirmeleri için ÖADF hazırlanmıştır. Bu değerlendirme formlarından öğretmen adaylarının kendi davranışlarını değerlendirmeleri için hazırlanan KDF ve eğitim yönlendiricisinin öğretmen adaylarını değerlendirmeleri için hazırlanan ÖADF; "bilginin araştırılması ve kullanılması", "bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi", "kişiler arası iletişim ve sürece katkı sağlanması" alt başlıklarına ilişkin hazırlanan aynı maddelerden oluşmaktadır. Ancak bu formlardan KDF; öğretmen adayları tarafından ÖADF, eğitim yönlendiricisi tarafından doldurulmak üzere hazırlanmıştır. 16 maddeden oluşan bu formlardaki 1, 4, 5, 16 nolu maddeler "bilginin araştırılması ve kullanılması"; 2, 3, 6, 7, 8 nolu maddeler "bilgilerin sorgulanmasına ve ilişkilendirilmesine rehberlik etme"; 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 nolu maddeler "kişiler arası iletişim ve sürece katkı sağlanması" alt başlıklarına ilişkin değerlendirme yapılması için hazırlanmıştır. Öğretmen adaylarının eğitim yönlendiricisinin davranışlarını değerlendirmeleri için hazırlanan EYDF; "bilginin araştırılmasına ve kullanılmasına rehberlik etme", "bilgilerin sorgulanmasına ve ilişkilendirilmesine rehberlik etme", "iletişim kurulmasına ve ortamın düzenlenmesine rehberlik etme" alt başlıklarından oluşmaktadır. 14 maddeden oluşan bu formdaki 1, 2, 5, 7, 8, 14 nolu maddeler "bilginin araştırılmasına ve kullanılmasına rehberlik etme"; 3, 4, 6 nolu maddeler "sorgulanma ve ilişkilendirmeye rehberlik etme"; 9, 10, 11, 12, 13 nolu maddeler "iletişim kurulmasına ve ortamın düzenlenmesine rehberlik etme" alt başlıklarına ilişkin değerlendirme yapılması için hazırlanmıştır Modüllerin her birinin uygulama sürecinin tamamlanmasının ardından öğretmen adayları KDF'yi ve EYDF'yi, eğitim yönlendiricisi, ÖADF'yi süreçte yaptığı gözlemlere dayanarak doldurmuştur. KDF ve ÖADF, 16; EYDF, 14 maddeden oluşan 5'li likert tipi formlardır. Formlar,"yeterli değil"(1), "az yeterli"(2), "orta düzeyde yeterli"(3), "yeterli"(4) ve "oldukça yeterli"(5) şeklinde puanlanmaktadır. KDF ve ÖADF formlarından alınabilecek en yüksek puan 80; EYDF formundan alınabilecek en yüksek puan ise 70’dir. KDF, EYDF ve ÖADF sırasıyla EK 3, EK 4 ve EK 5’te sunulmuştur.

3.4.6 Senaryolar ve modüllerin hazırlanması

Senaryoları ve modülleri hazırlamadan önce alanyazın taraması yapılmıştır. PDÖ ile ilgili genel anlamda matematik alanında senaryo örnekleri bulunmasına rağmen özelde lineer cebir alanıyla ilgili senaryoların daha az sayıda olduğu belirlenmiştir. Alanyazındaki lineer cebir alanıyla ilgili bu senaryolar örnek olarak incelenmiştir (Kar, 2010).

PDÖ’nün uygulama sürecinde önemli bir yeri olan senaryoları içeren modülleri oluşturmadan önce “vektör uzayı”, “LDS” ve “lineer dönüşüm” ünitelerinin hedef davranışları; alanında uzman öğretim üyelerinden bilgi alınarak belirlenmiştir. Modüller kazanımlara ve öğrencilerin düzeyine göre birbiriyle ilişkili olan senaryoların yer aldığı bir ya da birkaç oturumdan oluşan merak uyandıran öğrenme araçlarıdır. Dolayısıyla yukarıda bahsi geçen üniteler içindeki bütünlüğün bozulmaması için her bir üniteye yönelik bir modül hazırlanmasına karar verilmiştir. Lineer cebir dersinde anlatılan vektör uzayı”, “LDS” ve “lineer dönüşüm” üniteleriyle ilgili üç modül hazırlanmıştır. Bu modüllerden ilki “vektör uzayı” ünitesindeki lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, germe, baz, boyut, koordinat kavramlarına yönelik, ikincisi “LDS” ünitesindeki genel çözüme ve parametreye bağlı çözüme yönelik, sonuncusu ise “lineer dönüşüm” ünitesine yönelik oluşturulmuştur. Modüller PDÖ ilkelerine uygun rutin olmayan problem durumlarından oluşan senaryolar temel alınarak programdaki hedef davranışları kapsayacak biçimde geliştirilmiştir. Bu araştırmada 1. modül 3 oturumdan, 2. modül 2 oturumdan, 3. modül tek oturumdan oluşmaktadır.

Modüllerin içeriği, öğretmen adaylarının bilgi edinebilmeleri için kaynaklara ulaşabileceği gerçek hayat durumlarından (Ersoy, 2012) esinlenerek geliştirilen senaryolardan oluşmaktadır. Bu araştırmada senaryolar, öğretmen adaylarının derse ilgisini çekecek, merakını uyandıracak ve onları araştırmaya sevk edecek biçimde hazırlanmıştır. Ayrıca, öğrenme hedefleri dikkate alınarak hazırlanan senaryolara ilişkin oturumlar çok fazla sayıda hedefi içermeyecek biçimde düzenlenmeli ve böylece öğretmen adaylarının uygulama sürecinde öğrenme hedeflerine ulaşabilmesi için zamanın verimli kullanılması sağlanmalıdır (Ersoy, 2012). Bu araştırmada senaryolar, öğretmen adaylarının ulaşması beklenen öğrenme hedefleri dikkate alınarak hazırlanmış ve modüllerin uygulama sürecinde öğretmen adaylarının çıkarması beklenen öğrenme hedefleri aşağıda Tablo 3.11'de verilmiştir.

Tablo 3.11 Öğretmen adaylarının ulaşması beklenen öğrenme hedefleri

Modül Adı	Konu	Oturumlar	Hedefler
Acemi Mühendis Ne Yapacak kiiii	vektör uzayı	1. oturum	lineer birleşim-germe
		2. oturum	lineer bağımsızlık-germe-baz
		3. oturum	baz-koordinat
Şimdi Düzen Değişecek mi?	LDS	1. oturum	LDS
		2. oturum	
Şifreler Nasıl Çözülebilir kiii	lineer dönüşüm	1. oturum	lineer dönüşüm

Tablo 3.11'de belirtilen hedeflere uygun olarak hazırlanan modüller lineer cebir alanında uzman 2 ve eğitim alanında uzman bir öğretim üyesi tarafından incelenmiştir. Ayrıca modüller yüksek lisans öğrenimi görmekte olan bir ve doktora öğrenimi görmekte olan 1 matematik öğretmeni ve yüksek lisans mezunu bir fizik öğretmeni tarafından incelenmiş ve alınan görüşler doğrultusunda gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Ayrıca birinci modülde düzeltilmiş hali verilen aşağıdaki ifade fizik alanında uzman bir öğretim üyesi tarafından görüş alınarak düzeltilmiştir. Birinci modülde geçen,

> "İskelede bulunan 6 kayık dakikada (5,8), (2,3), (2,4), (4,6), (1,3) ve (2,6) doğrultularında hareket edebilmektedir."

ifadesi;

> "İskelede bulunan 6 kayık O başlangıç noktasından bir dakika sonunda sırasıyla (5,8), (2,3), (2,4), (4,6), (1,3) ve (2,6) konumlarına ulaşabilmektedir ve bu kayıklardan her biri aynı doğrultularda, sabit hızla hareket edebilmektir. "

olarak düzeltilmiştir. Lineer cebir bilgisine ek olarak kombinasyon bilgisi gerektirdiğinden birinci modülde geçen

> "Sizce bu 6 kayıktan noktaların tamamına ulaşımı sağlayacak şekilde kaç farklı seçim yapılabilir?"

ve

“Ali’nin yerinde siz olsaydınız elinizdeki 6 kayığı iskelede hazırlanan bölmelere nasıl konumlandırırdınız?”

soruları yerine;

“Her bölmede 2 kayık olacak şekilde düzenleme yapılırsa, noktaların tamamına ulaşabilmek için hangi kayıklar birarada bulunmamalıdır? (modül 1-oturum 2-bölüm 1’de yer alan 1. soru)”,

“Düzenleme yapılırken seçilecek kayıkların sağlaması gereken şartlar nelerdir? (modül 1-oturum 2-bölüm 1’de yer alan 2. soru)”,

“Sizce tüm noktalara ulaşımı sağlamak için bölmelere tek kayık yerleştirilerek düzenleme yapılabilir mi? (modül 1-oturum 2-bölüm 1’de yer alan 3. soru)”

ve

“Düzenleme yapılırken kayık yerleştirilen bölmelerde en az kaç kayığın yer alması gerekir? (modül 1-oturum 2-bölüm 1’de yer alan 7. soru) ”

soruları kullanılmıştır.

Uygulamaya başlamadan önce LDS kavramıyla ilgili hazırlanan 2. modül bir devlet okulunda deneme çalışması olarak uygulanmıştır. Araştırmacı, deneme çalışmasını, eğitim yönlendiricisi olarak gerçekleştirmiştir. Deneme sürecinde yaşanan sorunlar dikkate alınarak gerekli düzeltmeler yapılmış ve uygulama süreci planlanmıştır. Modüllerin tamamının kapağı ve içeriği dikkat çekici, senaryoların içeriğine uygun resimlerle desteklenmiştir. Senaryoları içeren modüller EK 6’da sunulmuştur.

3.4.7 Çalışma yapraklarının hazırlanması

Mortensen ve Smartt (2007)’a göre çalışma yaprakları; öğrencilerin verilen görevleri nasıl ve nerede uygulayacaklarına karar vermelerine imkan sağlayan, kendi öğrenmelerini kontrol etmelerine izin veren bir materyaldir. Modüllerin uygulanması sürecinde kullanılmak üzere 7 çalışma yaprağı hazırlanmıştır. Vektör uzayı ünitesindeki kavramlarla ilgili 4 çalışma yaprağı, LDS kavramıyla ilgili 2 çalışma yaprağı ve lineer dönüşüm kavramıyla ilgili 1 çalışma yaprağı hazırlanmıştır. Bu çalışma yaprakları;

öğretmen adaylarına kavramları oluşturmada ve pekiştirmede yardımcı olması açısından hazırlanmıştır. Çalışma gruplarına uygulamak üzere hazırlanan çalışma yapraklarının içerdiği davranışlar birbirine paralel olmakla birlikte; PDÖ grubuna uygulanmak üzere hazırlanan çalışma yaprakları rutin olmayan problemlere çözüm bulmaya yönelik hazırlanmıştır. Bunun yanı sıra, ÇTTÖ grubuna uygulanmak üzere hazırlanan çalışma yaprakları kavramları anlamlandırmada yardımcı olması açısından GeoGebrada geliştirilen materyalleri deneyimlemede rehberlik edecek biçimde oluşturulmuştur. Çalışma gruplarına uygulanan çalışma yapraklarından birer tanesi örnek olarak Ek 7 ve Ek 8'de sunulmuştur.

3.5 Verilerin Toplanması

Deneysel uygulamaya başlamadan önce üç grubun tamamına; öğrencilerin düşünme yapılarını belirlemek için Presmeg tarafından hazırlanmış bir test (MSA), öz yeterlik algı düzeylerini belirlemek için Umay (2001) tarafından hazırlanmış bir ölçek (MKÖAÖ) ve lineer cebir genel performansını, kavram bazında performans ve anlama boyutlarını belirlemek için araştırmacı tarafından geliştirilen açık uçlu sorulardan oluşan LCPT ön test olarak uygulanmıştır.

Deneysel süreçte, her bir modülün tamamlanmasının ardından eğitim yönlendiricisinin sürece katkılarını ve öğretmen adaylarının süreç boyunca becerilerindeki anlamlı değişimi değerlendirmek için KDF, EYDF ve ÖADF, PDÖ grubuna uygulanmıştır.

On iki hafta süren deneysel çalışmanın tamamlanmasının ardından MSA, LCPT ve MKÖAÖ; gruplar arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için son test olarak tekrar uygulanmıştır. Son test olarak uygulanan LCPT'ye ilişkin verilerin analiz edilmesinin ardından (öğretimin tamamlanmasından 2 hafta sonra); iki çalışma grubundan yüksek, orta ve düşük düzeyde performans sergileyen birer öğretmen adayı seçilerek yarı yapılandırılmış görüşmelerle nitel kısma ilişkin veriler ses kaydı alınarak toplanmıştır.

3.6 Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarının, genel anlamda lineer cebir performanslarını, özelde vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramları ile ilgili performanslarını ve deneysel uygulamanın tamamlanmasının ardından deney ve karşılaştırma gruplarının performansları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla nicel veri analizi tekniklerinden yararlanılmıştır. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının bahsi geçen kavramlardan lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm bazında sergiledikleri anlama boyutlarının ve grup bazında ön test-son test arasında bu anlama boyutlarına ilişkin anlamlı fark olup olmadığının belirlenmesi nicel veri analizi yöntemleri (McNamer Bowker testi) ile gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın nitel kısmında; lineer birleşim, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz-boyut, LDS ve lineer dönüşüm kavramları ile ilgili kavramlar arası ilişkilendirme becerilerini belirlemek için sürekli karşılaştırmalı analiz yönteminden yararlanılmıştır.

3.6.1 Nicel veri analizi

LCPT'nin değerlendirilmesinde öğretmen adaylarının, genel anlamda lineer cebir performanslarını, özelde vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramları ile ilgili performanslarını belirlemek için LCPT rubriği kullanılmıştır. Bununla birlikte, bahsi geçen kavramlar bazında sergiledikleri anlama boyutlarını belirlemek için aynı testin (LCPT'nin) değerlendirilmesinde LCPT Anlama Boyutları Rubriği'nden yararlanılmıştır. LCPT rubriğine ilişkin ölçütler Tablo 3.12'de sunulmaktadır.

Tablo 3.12 Lineer cebir performans testi rubriği

Cevap Türü	Ölçütler	Puan	Açıklama
Doğru cevap	İşlem basamaklarının doğru uygulanması, sonucun doğru bulunması, grafikte sonucun doğru gösterilmesi, grafikte işlemin doğru yapılması, problemde modellemenin doğru yapılması gibi durumları kapsamaktadır.	3	yeterli/başarılı
Kısmi cevap	İşlem basamaklarının doğru uygulanması ve sonucun yanlış bulunması, işlem basamaklarının doğru uygulanması fakat sonucun bulunamaması, problem modelleme ve grafik yorumlamada doğru kısımların bulunması ancak cevabın eksik kalması gibi durumları içermektedir.	2	yeterli/başarılı
Yanlış cevap	İşlem basamaklarının yanlış uygulanması ve sonucun bulunamaması, işlem basamaklarının yanlış uygulanması ve sonucun yanlış bulunması, grafikte sonucun yanlış gösterilmesi, grafikte işlemin yanlış yapılması, problemde modellemenin yanlış yapılması gibi durumları kapsamaktadır.	1	yetersiz/başarısız
Cevap yok	Sorunun cevap olarak yazılması ile boş bırakılması gibi durumları kapsamaktadır.	0	yetersiz/başarısız

Öğretmen adaylarının vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramları ile ilgili performanslarını ölçen soru sayıları farklı olduğundan karşılaştırma yapabilmek amacıyla öncelikle mutlak değerlendirme yapılarak kavram bazında her bir performansa göre puanlar ve genel performans puanları hesaplanmıştır. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının özyeterlik algılarının değerlendirilmesinde MKÖYAÖ'den aldıkları puanlar hesaplanmıştır. Elde edilen verilerin normal dağılım gösterip göstermediğini tespit etmek için örneklem sayısının 30 ve 30 dan fazla olduğu gruplarda Kolmogrov Smirnov ve 30 dan az olduğu gruplarda Shapiro Wilk testlerinden yararlanılmıştır. LCPT'den elde edilen genel performans puanlarıyla ilgili normallik analizleri aşağıda Tablo 3.13'te ve aynı testin ön test ve son test olarak uygulanmasıyla elde edilen kavram bazında performans puanlarıyla ilgili normallik analizleri Tablo 3.14'te sunulmuştur.

Tablo 3.13 Çalışma ve karşılaştırma gruplarına uygulanan test ve ölçeklere ilişkin normallik analizi sonuçları

Ölçüm	Grup	N	$\bar{x}$	S_x	İstatistik	p
	PDÖ	38	44.57	7.05	0.122	.161
LCPT-Ön test	ÇTTÖ	31	45.04	6.88	0.098	.200
	GÖ	21	41.97	5.30	0.976	.851
	PDÖ	38	69.39	11.82	0.932	.103
LCPT-Son test	ÇTTÖ	31	65.11	9.84	0.975	.200
	GÖ	21	55.26	8.45	0.948	.317
	PDÖ	35	41.31	3.58	0.193	.040
MKÖYAÖ - Ön test	ÇTTÖ	31	39.12	5.34	0.154	.200
	GÖ	21	39.52	3.18	0.181	.065
	PDÖ	35	45.77	6.40	0.204	.022
MKÖYAÖ - Son test	ÇTTÖ	31	43.70	3.56	0.210	.016
	GÖ	21	40.95	5.33	0.238	.001

Tablo 3.13'e göre ön test ve son test olarak uygulanan LCPT verilerinin grupların tamamında normal dağılım gösterdiği görülmektedir. Böylece lineer cebir performansına ilişkin çalışma ve karşılaştırma grupları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek için tek yönlü varyans analizinden ve grupların ön test – son test verileri arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek için bağımlı gruplar t testinden yararlanılmıştır. Tablo 3.13'e göre ön test ve son test olarak uygulanan MKÖYAÖ verilerinin grupların bazılarında normal dağılım göstermediği görülmektedir. Böylece özyeterlik algısına ilişkin çalışma ve karşılaştırma grupları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek için Kruskal Wallis Testi'nden ve grupların ön test–son test verileri arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek için Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi'nden yararlanılmıştır. Ayrıca Umay (2001) tarafından geliştirilen MKÖYAÖ'nden yararlanılarak özyeterlik algı düzeyleri belirlenirken verilerden elde edilen sonuçlar 14-24 arası düşük, 25-45 arası orta, 46-70 arası ise yüksek özyeterlik algısı olarak değerlendirilmiştir. LCPT'ye ilişkin kavram bazında yapılan ön test ölçümlerinin normallik analizleri aşağıda Tablo 3.14'te sunulmuştur.

Tablo 3.14 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının kavram bazında ön test ölçümlerinin normallik analizleri

Ölçüm	Grup	N	$\overline{x}$	S_x	İstatistik	p
Vektör	PDÖ	38	81.93	17.59	0.215	.000
	ÇTTÖ	31	81.51	14.77	0.217	.001
	GÖ	21	92.06	13.27	0.667	.000
Lineer birleşim	PDÖ	38	41.52	19.10	0.192	.001
	ÇTTÖ	31	47.67	16.27	0.198	.003
	GÖ	21	30.69	14.01	0.922	.093
Germe	PDÖ	38	44.08	17.64	0.150	.031
	ÇTTÖ	31	53.49	16.49	0.183	.010
	GÖ	21	32.14	12.98	0.907	.048
Lineer bağımlılık/bağımsızlık	PDÖ	38	64.91	14.51	0.159	.017
	ÇTTÖ	31	67.10	15.95	0.102	.200
	GÖ	21	73.65	10.21	0.950	.346
Lineer denklem-LDS	PDÖ	38	57.02	16.88	0.126	.133
	ÇTTÖ	31	54.84	13.30	0.150	.074
	GÖ	21	51.43	8.72	0.944	.259
Lineer dönüşüm	PDÖ	38	51.75	21.22	0.226	.000
	ÇTTÖ	31	44.95	12.52	0.155	.056
	GÖ	21	39.37	19.76	0.967	.666
Geometrik temsil soruları	PDÖ	38	52.77	9.29	0.079	.200
	ÇTTÖ	31	54.65	10.32	0.126	.200
	GÖ	21	51.19	8.49	0.940	.220
Rutin olmayan Problemler	PDÖ	38	39.32	11.63	0.173	.006
	ÇTTÖ	31	40.23	10.58	0.106	.200
	GÖ	21	36.50	6.76	0.958	.478

Tablo 3.14'e göre ölçümlerin normallik analizi sonucunda; lineer denklem-LDS ve geometrik temsil haricinde kavramların her biri için elde edilen puanların en az bir grupta normal dağılım göstermediği gözlenmiştir. Normal dağılım gösteren çalışma ve karşılaştırma gruplarının geometrik temsil performansına ilişkin varyansların eşitliği ön koşulu sağlandığından verilerin karşılaştırılmasında tek yönlü varyans analizinden yararlanılmıştır. Bununla birlikte, lineer denklem-LDS kavramına ilişkin puanların, grupların tamamında normal dağılım gösterdiği ancak bu kavrama ilişkin elde edilen verilerin analizinde tek yönlü varyans analizinin kullanılması için varyansların eşitliği ön koşulunun sağlanmadığı tespit edilmiştir. Bu durumda lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-LDS, lineer dönüşüm kavramları bazında ve

rutin olmayan problemlere ilişkin çalışma ve karşılaştırma gruplarının ön test puanları, parametrik olmayan Kruskal Wallis testi ile karşılaştırılmıştır.

Çalışma ve karşılaştırma gruplarının son test puanları arasında anlamlı fark olup olmadığı incelemek için yararlanılacak istatistiksel analizi belirlemek üzere LCPT'ye ilişkin kavram bazında yapılan son test ölçümlerinin normallik analizleri aşağıda Tablo 3.15'te sunulmuştur.

Tablo 3.15 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının kavram bazında son test ölçümlerinin normallik analizleri

Ölçüm	Grup	N	$\bar{x}$	S_x	İstatistik	p
Lineer birleşim	PDÖ	38	64.61	20.31	0.136	.073
	ÇTTÖ	31	49.10	17.63	0.164	.034
	GÖ	21	42,32	18.79	0.902	.038
Germe	PDÖ	38	67.98	19.71	0.165	.010
	ÇTTÖ	31	55.10	14.22	0.221	.000
	GÖ	21	46.42	22.75	0.949	.330
Lineer bağımlılık/bağımsızlık	PDÖ	38	82.28	10.88	0.180	.003
	ÇTTÖ	31	75.05	14.08	0.226	.000
	GÖ	21	74.60	9.80	0.927	.121
Lineer denklem-LDS	PDÖ	38	68.77	20.15	0.147	.036
	ÇTTÖ	31	84.30	17.00	0.178	.014
	GÖ	21	63.17	15.14	0.938	.196
Lineer dönüşüm	PDÖ	38	45.43	22.18	0.139	.062
	ÇTTÖ	31	52.25	23.35	0.204	.002
	GÖ	21	44.44	18.65	0.914	.066
Geometrik temsil soruları	PDÖ	38	64.18	13.27	0.137	.071
	ÇTTÖ	31	67.65	14.39	0.088	.200
	GÖ	21	54.49	12.37	0.949	.331
Rutin olmayan problemler	PDÖ	38	71.92	16.78	0.146	.039
	ÇTTÖ	31	48.38	14.46	0.131	.185
	GÖ	21	43.51	10.65	0.957	.457

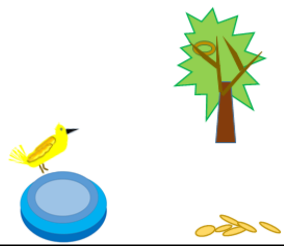
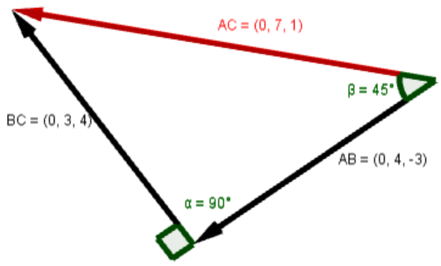
Tablo 3.15'e göre; çalışma ve karşılaştırma grupları normal dağılım gösterdiğinden kavram bazında son test ölçümlerinde geometrik temsil puanına ilişkin verilerin analizinde tek yönlü varyans analizinden yararlanılmıştır. Tablo 3.15'e göre; lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-LDS, lineer dönüşüm kavramları bazında ve rutin olmayan problemlere ilişkin ölçümlerde çalışma ve karşılaştırma gruplarından en az birinin normal dağılım göstermediği görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer denklem-LDS, lineer dönüşüm kavramları

bazında ve rutin olmayan problemlere ilişkin son test puan ortalamaları parametrik olmayan Kruskal Wallis testi ile karşılaştırılmıştır. Lineer birleşim ve lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarına ilişkin çalışma grupları (PDÖ ve ÇTTÖ) ile lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin çalışma gruplarından biri (ÇTTÖ) ile karşılaştırma grubunun son test puanları Mann Whitney U testi ile incelenmiştir.

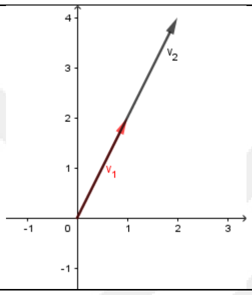
Öğretmen adaylarının vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm performanslarını ortaya koymak için betimsel istatistiklerden bununla birlikte bu kavramlar arasındaki korelasyonu incelemek için Spearman Rho korelasyon katsayısı tekniğinden yararlanılmıştır.

Diğer taraftan, uygulama öncesinde ve sonrasında uygulanan LCPT'deki sorulara öğretmen adaylarının verdiği cevapların tamamı, Usiskin'in (2012) yaklaşımı dikkate alınarak hazırlanan anlama boyutları rubriği baz alınarak değerlendirilmiştir. Bu testteki lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, boyut, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramlarına ilişkin soruların her birine verilen cevapların çözüm sürecinde BA, Öİ, TM ve KM boyutlarından hangisinin sergilendiği belirlenerek kavram bazında ön test ve son test için anlama boyutları arasındaki geçişleri gösteren frekanslar elde edilmiştir. Ayrıca, bu araştırmada dikkate alınan anlama modelini oluşturan Usiskin (2012) tarafından; tamamen anlamaya sahip bir bireyin hata yapabileceği ve yapılan hataların "anlamanın gerçekleşmediği" biçiminde yorumlanamayacağı ve dolayısıyla bir kavram üzerinde çözüme ilişkin cevaptan daha fazlasına yani sürece bakılması gerektiği vurgulanmaktadır (akt. Kardeş-Birinci, 2016, s.140). Bununla birlikte çözüm sürecinde anlamanın bir boyutu tamamen sergilenirken bir diğer boyutu ise bu boyutu destekler nitelikte olabilir (akt. Kardeş-Birinci, 2016, s.140). Anlama boyutlarına ilişkin alanyazın (Plooy ve Long, 2014, s.6-7; Thompson ve ark., 2010, s.4) ve Usiskin (2012)'in çözüm sürecinde sergilenen anlam boyutlarına ilişkin görüşleri ışığında LCPT'de cevaplanan soruların tamamı için; BA, Öİ, TM, KM ve bununla birlikte; anlama boyutlarının sergilenmediği yani herhangi bir çözüm süreci gerçekleştirmeden direk cevabın verildiği ve sorunun cevapsız bırakıldığı durumlar "diğer" boyutu olarak değerlendirilmiştir. Vektör ve germe kavramı ile ilgili bir soruya ilişkin sergilenen farklı anlama boyutlarına örnek teşkil eden çözüm süreçleri Tablo 3.16'da ve Tablo 3.17'de sunulmuştur.

Tablo 3.16 Vektör kavramıyla ilgili bir sorunun çözüm sürecinde sergilenen anlama boyutlarına ilişkin örnekler

<table>
<tr>
<td>LCPT'nin 4. Sorusu</td>
<td>
Şekildeki kuş havuzun $(1,1,3)$ noktasındaki suyu içtikten sonra doğrusal hareketle yerde bulunan $(1,5,0)$ noktasındaki yemi alıp ağaçtaki $(1,8,4)$ noktasındaki yavrusuna götürmüştür. Buna göre kuşun,
a)aldığı yol kaç birimdir?
b) yer değiştirmesi kaç birimdir?</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="4">Sergilenen anlama boyutlarına örnek çözüm süreçleri</td>
<td>Beceri- algoritma: $A=(1,1,3)$ $B=(1,5,0)$ $C=(1,8,4)$ $\overrightarrow{AB}=(0,4,-3), \overrightarrow{BC}=(0,3,4), \overrightarrow{AC}=(0,7,1)$ ise $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5, |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3^2+4^2}=5, |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$
a) $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|=5+5=10$ b) $|\overrightarrow{AC}|=5\sqrt{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Temsil-metafor:

</td>
</tr>
<tr>
<td>Özellik-ispat:$\overrightarrow{AB}=(0,4,-3), \overrightarrow{BC}=(0,3,4), \overrightarrow{AC}=(0,7,1)$
$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{BC}\|\cos\alpha$ formülünden $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=0$ olduğundan $\alpha=90^{\circ}$ bulunur.
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5, |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3^2+4^2}=5, |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Kullanım modelleme: Kuş suyu içtikten sonra doğrusal hareketle yerde bulunan $(1,5,0)$ noktasındaki yemi aldığında 5, yemi alıp ağaçtaki $(1,8,4)$ noktasındaki yavrusuna götürürken 5 birim yol almaktadır. Aldığı yol 10 birim, yer değiştirmesini verecek olan suyu içtiği konum ile yavrusunun bulunduğu konum arasındaki uzaklık $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$</td>
</tr>
</table>

Tablo 3.17 Germe kavramıyla ilgili bir sorunun çözüm sürecinde sergilenen anlama boyutlarına ilişkin örnekler

LCPT'nin 18. Sorusu	$V = \{(1,2),(2,a)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$'yi geriyorsa a hangi değeri (değerleri) alamaz? Açıklayınız.
Sergilenen anlama boyutlarına örnek çözüm süreçleri	**Beceri-algoritma:** $V = \{(1,2),(2,a)\}$ nin $\mathbb{R}^2$'yi germesi için vektörlerin lineer bağımsız olması gerekir. $V = \{(1,2),(2,a)\}$ kümesi $a = 4$ için birbirinin skaler katı olduğundan lineer bağımlıdır ve $\mathbb{R}^2$'yi geremez.
	Özellik-ispat: $\mathbb{R}^2$'de $v_1 = (1,2)$ ve $v_2 = (2,a)$ vektörlerinin lineer bağımsız olması için $\det(v_1, v_2) \neq 0$ olmalıdır. $\det(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a.1 - 2.2 = a - 4 \neq 0$ olduğunda $a \neq 4$ v_1 ve v_2 lineer bağımsızdır ve $V = \{(1,2),(2,a)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$'yi gerer
	 **Temsil-metafor:** $\mathbb{R}^2$'de $v_1 = (1,2)$ ve $v_2 = (2,a)$ vektörleri şekildeki gibi aynı doğrultuda olduğunda lineer bağımlıdır ve bu durumda $\mathbb{R}^2$'yi geremez. v_2'nin $v_1 = (1,2)$ ile aynı doğrultuda olması için $a = 4$ olması gerekir. $a \neq 4$ olduğu durumlarda v_1 ve v_2 lineer bağımsızdır.

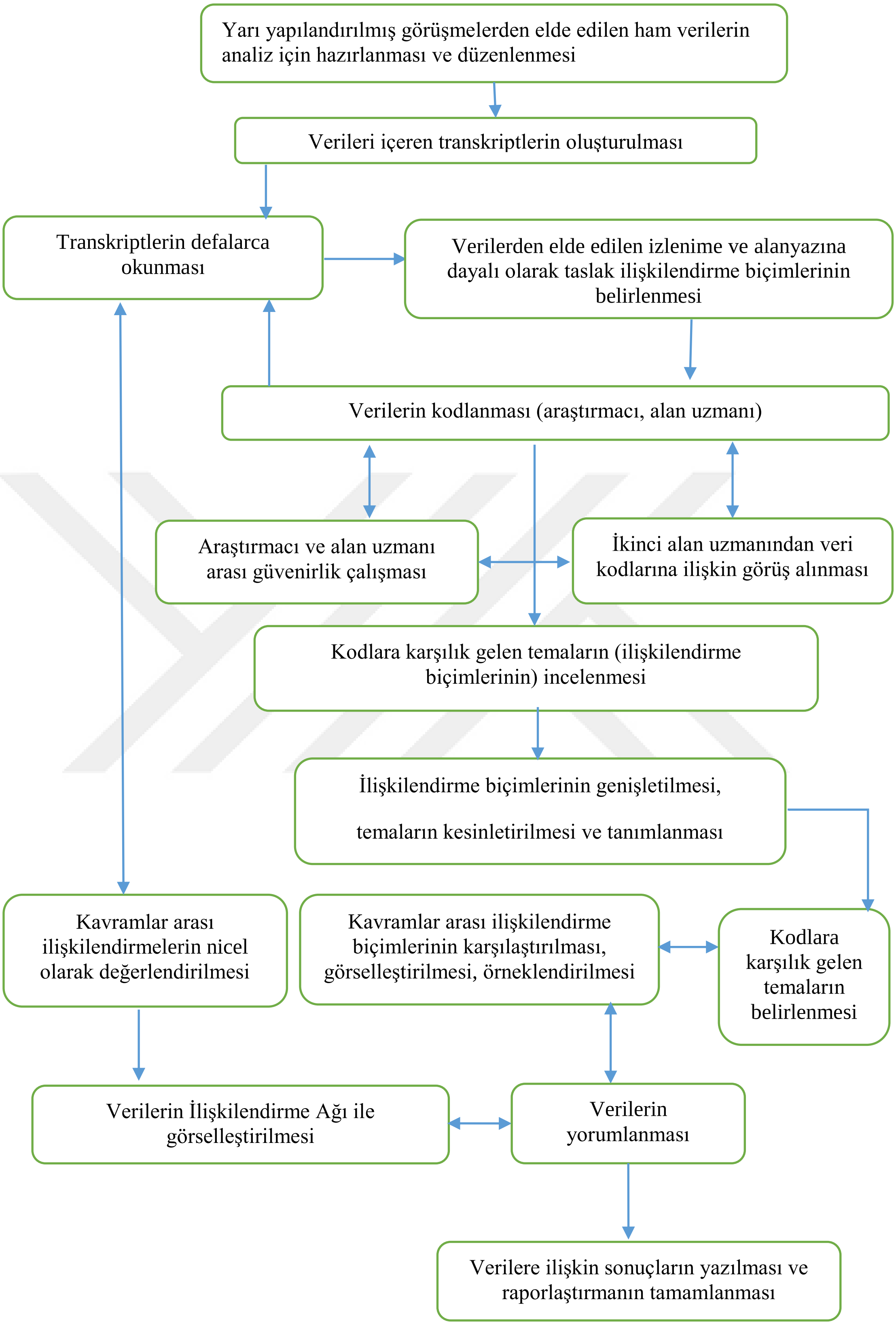
Bu durumda anlama boyutları sınıflamalı (kategorik) değişken olduğundan ön test-son test verilerine ilişkin bağımlı gruplarda anlama boyutları arasındaki farklılaşmaların anlamlı olup olmadığını tespit etmek için McNamer Testi'nden yararlanılmıştır. Ancak bağımlı gruplarda 2×2 ki kare testi olarakta bilinen McNamer Testi (Leon, 1998; s.243) 2 kategorili değişkenlerde kullanılmakla birlikte (Kılıç, 2016b) bu araştırmada incelenen anlama boyutları BA, Öİ, TM ve KM olmak üzere 4 kategoriden oluşmaktadır. Bu durumda 2 den fazla kategorili değişkenlerde McNamer Testinin genişletilmiş hali olan McNamer Bowker testi kullanılmaktadır (Leder, Forgasz ve Jackson, 2014). McNamer Bowker testinden yararlanarak yapılan analizlerde bağımlı gruplarda (ön test ve son test) veri sayısının eşit olması varsayımının sağlanması için "diğer" boyutu da dikkate alınmıştır. Bu araştırmada PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ yaklaşımının; BA, Öİ, TM ve KM olmak üzere dört kategoriden oluşan anlama boyutları üzerinde anlamlı bir farklılaşmaya neden olup olmadığını analiz etmek için ikiden fazla kategoriden oluşan değişkenlerde kullanılan McNamer Bowker testinden yararlanılmıştır (Leder ve ark., 2014). Bu test, değişkenlerde sınıflamanın (kategorik) ikiden fazla olduğu durumlarda değişkenler arasında anlamlı bir ilişki olup olmadığını analiz etmektedir (Leder ve ark., 2014). Öğretmen adaylarının vektör uzayı ve baz kavramını bu araştırmanın uygulama sürecinden önce görmediklerinden ve ön testte bu iki kavramla ilgili soruları daha çok cevapsız bırakmalarından dolayı araştırmanın konusu olan bu iki kavrama ilişkin sorularda sergilenen anlama boyutlarında değişim olup olmadığı incelenmemiştir. Ayrıca, LCPT'de lineer birleşim kavramıyla ilgili 3 soru olmasına rağmen bunlardan bir tanesine (24 (d)) öğretman adayları tarafından kısa cevap ("Ayşe", "Ali ve Ayşe") verildiğinden ve çözüm sürecinde herhangi bir anlama boyutu sergilenmediğinden dolayı bu soruya verilen cevaplar değerlendirmeye alınmamış ve kalan 2 sorudan elde edilen veriler analiz edilmiştir. Bu araştırmanın uygulama süreci başlamadan önce disiplin içi ve disiplinler arası alanda; lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, germe, LDS ve lineer dönüşüm kavramlarının öğretiminin gerçekleştiği bilinmektedir. Dolayısıyla, ön ve son test olarak uygulanan LCPT ile öğretmen adaylarının bu kavramlara ilişkin bilgileri ölçülmüştür. Bununla birlikte ön testteki soruların tamamı son testte yer aldığından, bu kavramlara ilişkin sergilenen anlama boyutlarında farklılaşma olup olmadığı değerlendirilmiştir.

Presmeg (1985) tarafından geliştirilen MSA'ndan yararlanılarak analitik, harmonik ve geometrik düşünme yapılarının belirlendiği bu araştırmada sabit sınırlar belirleyerek mutlak değerlendirme yapmak yerine bağıl değerlendirmenin yapılması uygun görülmüştür. Öğretmen adaylarının MSA'dan aldıkları en yüksek puan 26, en düşük puan ise 4'tür. Bu durumda çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarından MSA'dan aldıkları puanlar; 4-10 aralığında yer alanlar analitik; 11-17 aralığında yer alanlar harmonik ve 18-26 aralığında yer alanlar ise görsel düşünme yapısında olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarına uygulanan öğretim yöntemi ya da yaklaşımı ile düşünme yapıları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için iki nitel değişkenin kategorileri arasındaki ilişkiyi incelemede kullanılan iki yönlü kay kare testinden yararlanılmıştır. İlgili analize ilişkin serbestlik derecesinin 1 den büyük (dört) olduğu ve bununla birlikte beklenen değer 5'in altında olan hücre sayısının 1 olduğu ve bu değerin çapraz tablodaki toplam hücre sayısının $(3 \times 3 = 9)$ %20 sini aşmadığı tespit edilmiştir. Böylece, gereken varsayımlar sağlandığından iki yönlü kay kare testi'nden yararlanılmıştır.

PDÖ sürecinde; modüllerin her birinin sonunda kendilerini değerlendiren (KDF ile) öğretmen adayları tarafından eğitim yönlendiricisi (EYDF ile) ve eğitim yönlendiricisi tarafından öğretmen adayları (ÖADF ile) araştırmacı tarafından hazırlanan değerlendirme formları ile değerlendirilmiştir. Bu araştırmada; “Değerlendirme 1” ile birinci modül sonunda uygulanan değerlendirme formundan toplanan veriler, “Değerlendirme 2” ile ikinci modül sonunda uygulanan değerlendirme formundan toplanan veriler, “Değerlendirme 3” ile üçüncü modül sonunda uygulanan değerlendirme formundan toplanan veriler kastedilmektedir. PDÖ sürecinde her bir değerlendirme formuna ilişkin üç olmak üzere toplam 9 ölçüm yapılmıştır. Bu ölçümlerin analizinde formların her birine ilişkin üç ölçüm sonucunda elde edilen veriler arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını incelemek için tek gruba ilişkin ikiden fazla ölçüm ortalamalarını karşılaştırmada yararlanılan tekrarlı ölçümler tek yönlü varyans analizinden ve Friedman testinden yararlanılmıştır. Bu testlerden normal dağılım gösterme ve fark dizilerinin varyanslarının eşitliği (Sphericity testi ile incelenen) ön koşulları sağlandığında tekrarlı ölçümler tek yönlü varyans analizinden, bu ön koşullar sağlanmadığı durumlarda Friedman testinden yararlanılmıştır. Verilerin analizine ilişkin testlerin seçiminde dikkate alınan koşullara ilişkin yukarıda bahsi geçen ölçümlerin normallik analizleri bulgular kısmında ilgili alt problem başlığı altında sunulmuştur.

3.6.2 Nitel veri analizi

İGF; lineer cebirde anlatılan kavramlardan lineer birleşim-germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık-germe, baz-germe, baz/boyut-lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer bağımlılık/bağımsızlık-LDS, baz-lineer dönüşüm kavramları arası ilişkilendirme biçimlerini incelemek, eksik ve yanlış ilişkilendirmelerin hangi ilişkilendirme biçimlerinden kaynaklandığını tespit etmek, bununla birlikte öğretmen adaylarının tamamının kavramlar arası ilişkilendirme becerilerini değerlendirmek amacıyla uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının tamamının ilişkilendirme becerilerini doğru, kısmen doğru ve yanlış olarak değerlendirmek için İGF’den elde edilen veriler nicel olarak analiz edilmiştir. Ayrıca, bu görüşme formundan elde edilen verilerin analizinde nicel analizlerin yanı sıra nitel analiz yöntemlerinden yararlanılarak kavramlar arası ilişkilendirme biçimleri derinlemesine incelenmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmelerle ses kaydı alınarak toplanan veriler; ortak noktaların yanı sıra çeşitliliklerin ve özgünlüklerin dikkate alındığı nitel analiz metodlarından sürekli karşılaştırmalı analiz metodu (Patton, 2018; s.492.) ile analiz edilmiştir. Veri analizinden önce alanyazın incelenerek araştırmacılar tarafından öğretmen adaylarının gerçekleştirebileceği kavramlar arası ilişkilendirme biçimlerine ilişkin farkındalık oluşturulmuştur. Daha sonra sürekli karşılaştırmalı analiz metodundan yararlanarak veri analiz sürecinde elde edilen bilgiler ile analiz süreci öncesi oluşturulan varsayımların uyumlu olup olmadığının incelendiği, temaların veriyi ne derece karşıladığının tespit edildiği ve gerek görülmesi üzerine yeni temaların oluşturulduğu bir yaklaşım benimsenmiştir. Nitel analizler sonucunda öğretmen adaylarının yararlandığı kavramlar arası ilişkilendirme biçimleriyle birlikte eksik ve yanlış ilişkilendirmelerin hangi ilişkilendirme biçimlerinden kaynaklandığı belirlenmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen verilerin nitel ve nicel analizi sürecinde izlenen aşamalar aşağıda Şekil 3.12'de sunulmaktadır.



Şekil 3.12 Yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde izlenen aşamalar

"Verinin düzenlenmesi" ile başlayan analiz süreci, nicel ve nitel analizlerin yorumlanması ve bunun ardından "verilere ilişkin sonuçların yazılması ve raporlaştırmanın tamamlanması" aşaması ile son bulmuştur. Analiz sürecine başlamadan önce; araştırma problemine göre öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arasında ilişkilendirme yaparken yararlandığı bilgilerin nasıl belirleneceği ve bu bilgilerden anlamlı bütünlerin nasıl oluşturulacağı, bu anlamlı bütünlere nasıl bir kod verileceği ve kodlar ile daha önceden belirlenen temalar (ilişkilendirme biçimleri) arası eşleştirmelerin nasıl yapılabileceği hususunda alan uzmanından görüş alarak araştırmacı tarafından bir planlama yapılmıştır. Bunun ardından, verilerin düzenlenmesi sürecinde araştırmacı tarafından öncelikle ses kayıtları ayrıntılı olarak baştan sona defalarca dinlenmiştir ve daha sonra hiçbir düzeltme yapmadan ham veriler transkriptlere aktarılmıştır. Ham verileri içeren transkriptlerin oluşturulmasının ardından lineer cebir alanında (Kardeş-Birinci, 2016) ve diğer alanlarda kavramlar arası ilişkilendirme üzerine yapılan çalışmalar (Coxford 1995; Eli, 2009; Eli ve ark., 2013; Leikin ve Levav-Waynberg 2007; Lockwood 2011; Özgen, 2013) incelenerek lineer cebir alan uzmanından alınan görüş doğrultusunda öğretmen adayları tarafından sergilenebileceği düşünülen 3 farklı matematiksel ilişkilendirme biçimi (formal/işlemsel, teorik/özellik, geometrik) belirlenmiştir. Bu ilişkilendirme biçimleri araştırmacı tarafından "öğretmen adaylarının kavramları ilişkilendirmek için neleri bilmesi gerekir veya öğretmen adayları kavramları ilişkilendirmede hangi bilgilerinden yararlanmaktadır?" sorusuna cevap aranarak transkriptlerden edinilen izlenimler doğrultusunda alanyazın incelenerek türetilmiştir.

Transkriptlerdeki veriler, açıklayıcı bir kodla kategorize edilebilmesi için kelime kelime, cümle cümle incelenerek parçalara ayrılmıştır. Bu süreçte, sürekli karşılaştırılan verilerin benzerliğine olduğu kadar farklılıklarına da odaklanılmış ilişkilendirme biçimlerinde ayırt edici olanı belirlemek üzere karşılaşılan durumların tamamı kodlanmıştır. Verilerin analizi sürecinde; temaların üretilmesinde açık kodlama, temalar arasında bağlantı kurmada eksensel kodlama ve temalar arasındaki bağlantılardan hareketle çözümlemenin bütünleştirilmesinde ve soyutlamanın yapılmasında seçici kodlamadan (Strauss ve Corbin, 1990) yararlanılmıştır. Kodlama sürecinde, her yeni veri parçası, önceden oluşturulan kodlarla karşılaştırılmış, benzer parçalar aynı kodla etiketlenmiştir. Böylece ilişkilendirme biçimlerini ortaya çıkaran birimler ortaya konmuştur.

Transkriptlerden elde edilen veriler, araştırmacının yanı sıra lineer cebir eğitimi alanında çalışmaları olan bir uzman tarafından araştırmacıdan bağımsız olarak kodlanmıştır. Araştırmacı ve lineer cebir alan uzmanı arasındaki güvenirliğin araştırılmasında güvenirlik=görüş birliği/(görüş birliği+görüş ayrılığı) formülü kullanılmış (Miles ve Huberman, 1994) ve güvenirlik katsayısı %91.3 olarak hesaplanmıştır. Araştırmacı ve alan uzmanının farklı kodladığı veriler alanında uzman farklı bir öğretim üyesi ile tekrar incelenmiştir. Farklı kodlara ilişkin benzerlik ve farklılıklar dikkate alınarak aynı anlama gelen kodlar bir kodda birleştirilmiştir. Uzmanlarla yapılan incelemeler sonunda bazı kodların isimleri değiştirilmiş olup bununla birlikte yeni kodlar eklenmiştir. Böylece, görüş birliğine varılarak kodlar revize edilmiştir. Verilerdeki tüm öğeler kodlandıktan sonra, temayı yani kavramlar arası ilişkilendirme biçimini temsil eden benzer kodlar gruplandırılmıştır. Kodlara karşılık gelen ilişkilendirme biçimleri alan uzmanıyla birlikte belirlenmiştir. Bu süreçte ihtiyaç duyulması üzerine; alan uzmanı ile birlikte formal/işlemsel, teorik/özellik, geometrik olarak belirlenen ilişkilendirme biçimlerine çıkarımsal/nedensel ve uzaysal ilişkilendirme eklenerek 5 farklı matematiksel ilişkilendirme biçiminin dikkate alınması kararlaştırılmıştır. Bu ilişkilendirme biçimlerinden;

formal/işlemsel ilişkilendirme, “formal tanım ve işlemsel süreçler temelinde lineer cebir kavramları arasında kurulan doğru ya da yanlış ilişkilendirmeler”;

teorik/özellik ilişkilendirmesi, “teoremler ve kavramlara ilişkin karakteristik özelliklerden yararlanarak lineer cebir kavramları arasında kurulan doğru ya da yanlış ilişkilendirmeler”;

geometrik ilişkilendirme, “geometrik kavramlardan yararlanarak lineer cebir kavramları arasında kurulan doğru ya da yanlış ilişkilendirmeler”,

çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme, “öğretmen adaylarının kavram bilgilerini somut nesnelere veya diğer matematiksel kavramlara yansıtarak oluşturduğu kendine özgü doğru ya da yanlış çıkarımlar ”;

uzaysal ilişkilendirme, “birden fazla sayıda uzayı (1, 2, 3 veya n boyutlu uzay) , birlikte değerlendirerek kurulan doğru ya da yanlış ilişkilendirmeler”;

olarak tanımlanmıştır.

Yukarıda ifade edilen ilişkilendirme biçimlerinin tamamı; verilerden elde edilen kodlara karşılık gelen temaları oluşturmaktadır. Diğer temalarda olduğu gibi çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme; öğretmen adaylarının doğru ilişkilendirmeleriyle birlikte yanlış ilişkilendirmelerini içermektedir. Bunlar arasından doğru çıkarımda bulunan öğretmen adayları, kurduğu kavramlar arası ilişkilendirmeyi lineer cebirin formal yapısına ve lineer cebir kavramlarına ilişkin tanım ve teoremlere dayandıramamaktadır. Bununla birlikte, çıkarımlarını lineer cebir dersini almadan önce öğrendiği matematiksel bilgilerine, analoji ve metaforlara dayalı olarak açıklayabilmektedir. Veri setindeki anlamlı veri birimlerine karşılık gelen kodlarla birlikte bu kodlara ilişkin temaları yansıtan öğretmen adaylarından biri ile yapılan görüşme sürecinden bir bölüm aşağıda Tablo 3.18'de örnek olarak sunulmuştur. Bu örnek, germe ve lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramları arasında kurulan ilişkilendirme biçimlerini incelemek için hazırlanan İGF'nin 2. sorusuna ilişkin görüşme sürecini yansıtmaktadır. Bu süreç, yüksek düzeyde lineer cebir performansına sahip ÇÖ1[2] kodlu öğretmen adayı ile yapılan görüşme üzerinden örneklendirilmektedir.

[2] ÇÖ1: ÇTTÖ grubundan LCPT'ye ilişkin yüksek düzeyde performans sergileyen öğretmen adayları arasından görüşme yapmak üzere seçilen öğretmen adayı

Tablo 3.18 Öğretmen adaylarından bir tanesi (ÇÖ1) ile yapılan görüşmeye ilişkin verilerden oluşan transkriptten bir bölüm

Araştırmacı: *$\mathbb{R}^2$'de 0 vektöründen farklı tek vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?*	Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
ÇÖ1: *Nokta olur çünkü hımm* (bir süre bekledi) *tek vektör var ama* (tereddütle cevap verir) *$\mathbb{R}^2$'de deyince doğru da olabilir.*	
Araştırmacı: *Bundan biraz bahsedebilir misiniz?*	İstenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme (formal/işlemsel)
ÇÖ1: *Örneğin $\{(1,2)\}$ doğru olur bu doğruyu (vektörü) katsayılarla çarparsam doğru olur.*	
Araştırmacı: *Yani nokta ve doğru olma durumlarından biraz bahsedebilir misin?*	
ÇÖ1: *Genelde doğru olur. Nokta olmaz.*	Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
Araştırmacı: *$\mathbb{R}^2$'de 0 vektöründen farklı lineer bağımlı 2 vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?*	
ÇÖ1: *Lineer bağımlı 2 vektör aslında tek vektör gibi düşünebiliriz, ama katsayılar farkı vardır. Örneğin, $\{(1,2),(2,4)\}$ gibi alırsak yine gereceği uzay bir doğru olur.*	İstenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme (Formal/İşlemsel)
Araştırmacı: *Nasıl bir katsayılar farkı vardır?*	Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
ÇÖ1: *Lineer bağımlı olup olmadığına bakarken katsayı yerine bilinmeyen ifade yazarak bilinmeyeni (bilinmeyenin değerini) bulduğumuzda katsayılar sıfırdan farklı olur, bundan bahsediyorum.* (eline bir kalem alarak bahsettiği durumu yazarak örneklendirir) $(-2)(1,2)+1(2,4)=0$ eşitliğinde -2 ve 1 sayılarının sıfırdan farklı oluşu gibi…	İstenilen durumu karşılayan örnek
Araştırmacı: *Peki farklı uzaylarda ($\mathbb{R}^2$'de ya da $\mathbb{R}^3$'te) 2 lineer bağımlı vektörün gerdiği uzaylar arasında farklılıklar nasıldır?*	LDS bağlamında ilişkilendirme (Formal/İşlemsel)
ÇÖ1: $\mathbb{R}^2$'de doğru olur. 3. bileşen 0 olduğundan $\mathbb{R}^3$'te ise nokta olur. Ama bir saniye (süre isteyerek kararsız bir süre sessiz kaldı) *(x,y,z) bileşenlerini alabilirim değil mi?* (sorusuna cevap aldıktan sonra) *Aaaaa o zaman oda doğru olur.*	Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
Araştırmacı: *Farklı vektör sayıları için germe kavramından biraz bahseder misin?*	$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots \mathbb{R}^n$'den birkaçını ele alma (Uzaysal)
ÇÖ1: *Mesela $\mathbb{R}^2$'de 2 vektör (lineer bağımsız) alırsak gerer. $\mathbb{R}^2$'de 3 vektör alırsak bunlardan 1 tanesi lineer bağımlı olacağından yine ($\mathbb{R}^2$'yi germek için) 2 tane (lineer bağımsız) gereklidir. $\mathbb{R}^3$'te alırsak 3 tane (vektör) gereklidir. Burada germe sayısını (vektör sayısını) uzayın boyutuna göre değiştiririm.*	$\mathbb{R}^n$'i germek için n lineer bağımsız vektör gereklidir (Teorem 5). (Teorik/Özellik)
Araştırmacı: *$\mathbb{R}^2$'yi 2 vektör ile $\mathbb{R}^3$'ü 3 vektör ile gerebiliriz dedin. Bana biraz bundan bahsedebilir misin?*	İstenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme (Formal/İşlemsel)
ÇÖ1: *Mesela $\mathbb{R}^2$'de 3 vektör alalım, (1,2), (2,4) ve (3,5) vektörlerini aldığımızda* ($\{(1,2),(2,4),(3,5)\}$) *bunlardan (1,2) ve (2,4)'ü aldığımızda gerilen uzay yalnızca birinin gerdiği uzaya eşittir. Dolayısıyla (1,2) ve (3,5) i almış olurum ki kendi arasında 2 lineer bağımsız vektör uzayı ($\mathbb{R}^2$'yi) gerer. Eğer 3 vektörden 2 si lineer bağımlı ve $\mathbb{R}^3$'te ise germez yani belli bir yeri ($\mathbb{R}^3$'ün alt uzayını) gerer ama ($\mathbb{R}^3$'ün) tamamını germez, germesi için 3 vektörün hepsinin birbirine bağımsız olması gerekir. Vektör sayısı ve germe arasındaki ilişki böyledir.*	$\mathbb{R}^n$'i germek için n lineer bağımsız vektör gereklidir (Teorem 5). (Teorik/Özellik) Uzayın alt kümesi bağlamında ilişkilendirme (Geometrik) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots \mathbb{R}^n$'den birkaçını ele alma (Uzaysal)
Araştırmacı: *$\mathbb{R}^2$'yi 3 vektör alırsak bunlardan 1 tanesi lineer bağımlı olursa 2 tane gerektiğini söyledin. Bu durumdan gerilen uzaydan bahsedebilir misin?*	
ÇÖ1: *Mesela $\mathbb{R}^2$'de 3 tane vektörden1'i diğeri ile bağımlıysa geriye yine 2 lineer bağımsız vektör kalır, gerebilir.*	$\mathbb{R}^n$'i germek için n lineer bağımsız vektör gereklidir (Teorem 5). (Teorik/Özellik)
Araştırmacı: *$\mathbb{R}^2$'de 3 lineer bağımlı vektörün gerdiği uzaydan biraz bahsedebilir misin?*	
ÇÖ1: *Doğru olur. Zaten birbirinin katlarıdırlar.*	Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
Araştırmacı: *$\mathbb{R}^2$'de 5 lineer bağımlı vektörün gerdiği uzayı sorsam ya da daha fazla sayıda lineer bağımlı vektör alsam gerdikleri uzaylar arasında nasıl farklılıklar olur?*	
ÇÖ1: *Hiçbir şey değişmez* (kendinden emin bir şekilde gülerek cevap verdi) *bunları sonsuza kadar götürebilirim* (sonsuz sayıda vektör alsam da) *doğru oluşur, doğru üzerinde gidip gelirler.*	Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
Araştırmacı: *$\mathbb{R}^2$'de 0 vektöründen farklı lineer bağımsız 2 vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?*	$\mathbb{R}^n$'i germek için n lineer bağımsız vektör gereklidir (Teorem 5). (Teorik/Özellik)
ÇÖ1: *Lineer bağımsız 2 vektörü $\mathbb{R}^2$'de aldığımızdan bütün uzayı gerebilir*, bağımsız olduğundan *her yeri tarar.*	Uzayın alt kümesi bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
Araştırmacı: *Tüm uzayı germediği durumlar var mıdır?*	
ÇÖ1: *Hayır, yoktur. Lineer bağımsızsa gerer*	Uzayın alt kümesi bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
Araştırmacı: *Lineer bağımsız 2 vektörün taradığı uzayı nasıl ifade edersin?*	
ÇÖ1: *$\mathbb{R}^2$'yi taradığı için yani tamamını boyar ve düzlem oluşturur*	Uzayın alt kümesi bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
Araştırmacı: *$\mathbb{R}^3$'te 2 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzaydan biraz bahsedebilir misin?*	
ÇÖ1: *$\mathbb{R}^3$'ün tamamını geremez çünkü belli bir kısmını gerer.*	Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
Araştırmacı: *Peki bu bir belli kısımı nasıl ifade edersin?*	
ÇÖ1: *Nokta değil, doğru da değil çünkü 2 lineer bağımsız vektör var* (tereddütle kararsız bir şekilde) *küre olabilir miii, yok küre demeyeyim de düzlem olabilir.*	Uzayın alt kümesi bağlamında ilişkilendirme (Geometrik)
Araştırmacı: *$\mathbb{R}^3$'te 3 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzaydan biraz bahsedebilir misin?*	
ÇÖ1: *Tüm uzayı gerer*	

Ayrıca, altı öğretmen adayı ile yapılan görüşmelerden elde edilen verilerin analizi sürecinde temaları (ilişkilendirme biçimlerini) temsil eden kodların bazılarına ilişkin kesitler aşağıda ifade edilmektedir. İlk olarak, lineer birleşim ve germe kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin formal/işlemsel ilişkilendirme temasına atılan kodlardan birine (tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme) karşılık gelen PÖ2[3]'nin görüşme sürecinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmaktadır.

Araştırmacı: *Lineer birleşim ile germe kavramları arasında nasıl bir ilişki vardır?*

PÖ2: *Lineer birleşim kümeleri toplamı germeyi verir* (tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme).

PÖ2'nin "*lineer birleşim kümeleri toplamı*" ifadesinin germe kavramının tanımında geçmesinden dolayı formal/işlemsel ilişkilendirme temasına atılmıştır. Temalardan bir başkasına teorik/özellik ilişkilendirme biçimine karşılık gelen ifadelerden biri aşağıdaki gibidir. Baz ve lineer bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin teorik/özellik ilişkilendirme temasına atılan kodlardan birine ("$\mathbb{R}^n$ de alınan lineer bağımsız vektör kümesinin hiçbirisinde n den fazla vektör bulunmaz (Teorem 3)" teoreminden yararlanarak ilişkilendirme) karşılık gelen ÇÖ3[4]'ün görüşme sürecinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmaktadır.

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$*'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz?*

PÖ3[5]: $\mathbb{R}^2$ *'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı 2 dir*

PÖ3'ün "$\mathbb{R}^2$ *'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı 2* " ifadesi "$\mathbb{R}^n$ de alınan lineer bağımsız vektör kümesinin hiçbirisinde n den fazla vektör bulunmaz" teoreminden dolayı teorik/özellik ilişkilendirme temasına atılmıştır. Temalardan bir başkasına geometrik ilişkilendirme biçimine karşılık gelen ifadelerden biri aşağıdaki

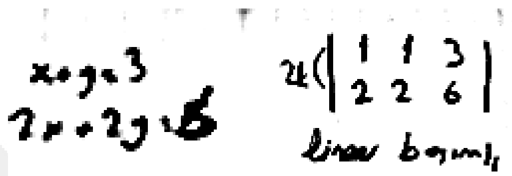
[3] PÖ2: PDÖ grubundan LCPT'ye ilişkin orta düzeyde performans sergileyen öğretmen adayları arasından görüşme yapmak üzere seçilen öğretmen adayı
[4] ÇÖ3: ÇTTÖ grubundan LCPT'ye ilişkin düşük düzeyde performans sergileyen öğretmen adayları arasından görüşme yapmak üzere seçilen öğretmen adayı
[5] PÖ3: PDÖ grubundan LCPT'ye ilişkin düşük düzeyde performans sergileyen öğretmen adayları arasından görüşme yapmak üzere seçilen öğretmen adayı

gibidir. Lineer bağımlılık/bağımsızlık ve HOLDS kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin geometrik ilişkilendirme temasına atılan kodlardan birine (geometrik temsil bağlamında ilişkilendirme) karşılık gelen ÇÖ3'ün görüşme sürecinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmaktadır.

Araştırmacı: *HOLDS'leri (Homojen olmayan lineer denklem sistemleri) için ne söylersin?*

ÇÖ3: *Aslında 3 ihtimal vardır (tek, sonsuz, boş küme).*

Öğretmen adayı eline bir kalem alarak 2 denklemden oluşan LDS'yi yazar ve 2. denklemin 1. denklemin 2 katı olduğunu dolayısıyla lineer bağımlı olduğunu ifade eder.



Şekil 3.13 ÇÖ3'ün görüşme sürecindeki denemeleri

ÇÖ3: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right\}$ *burada katsayılar matrisini* (ilaveli matrisi düşünerek) *lineer bağımlı aldım, vektörler* (ilaveli matrisin satır vektörleri) *birbirinin katı olsun*

Araştırmacı: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right\}$ *denklem sisteminde katsayılar matrisini söyleyebilir misin?*

ÇÖ3: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Araştırmacı: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right\}$ *denklem sisteminin çözüm kümesinden biraz bahsedebilir misin?*

ÇÖ3: *Çözüm kümesi (x, 3-x) bu çözüm kümesi oluyor mu? Verdiğim 2 örnek doğrunun eğimleri aynı çıkar dolayısıyla paraleldir bunların paralelse çözümü var mıdır? Ayy bir dakika kafam karıştı, ne yapabilirim kiiii, çözümü yok ki çözemem kiii. Bence yoktur.*

Araştırmacı: *Biraz daha kafanı toparlayıp bu denklem sisteminin çözüm kümesini söyleyebilir misin?*

ÇÖ3: *Hayır hocaam gidiyor gidiyor x ler bu denklem sisteminin çözümü yok, <u>paralel</u>* (geometrik temsil bağlamında ilişkilendirme) *zaten olmaz. Boş küme.*

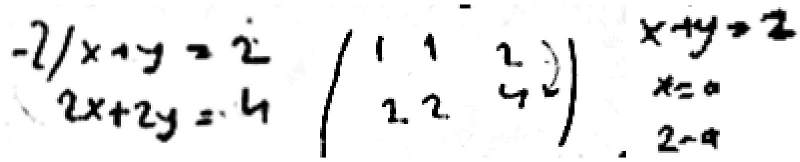
ÇÖ3'ün katsayılar matrisi lineer bağımlı olan HOLDS için verdiği örneğin çözüm kümesine ilişkin

"*Verdiğim 2 örnek doğrunun eğimleri aynı çıkar dolayısıyla paraleldir bunların paralelse çözümü var mıdır? Çözümü yok*"

ifadesi, LDS'yi oluşturan doğruların birbirine göre durumuna bağlı olarak çözüm kümesini elde etmesinden dolayı geometrik ilişkilendirme temasına atılmıştır. Temalardan bir başkasına çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçimine karşılık gelen ifadelerden biri aşağıdaki gibidir. Lineer bağımsızlık ve LDS kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme temasına atılan kodlardan ikisine ("LDS'nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre ilişkilendirme" ve "ilaveli matrisin rankına göre ilişkilendirme") karşılık gelen PÖ1[6]'in görüşme sürecinden kesitler aşağıda örnek olarak sunulmaktadır.

Araştırmacı: *HOLDS'nin katsayılar matrisinin lineer bağımlı olduğu durumla ilgili ne söylersin?*

Öğretmen adayı eline kalem alarak katsayıları birbirinin katı olan 2 denklemden oluşan bir denklem sistemi alır, bu denklem sistemini matris formunda yazdıktan sonra 2. satırın 1. satırın katı olduğunu ifade eder. 2 denklemin tek denkleme indirgenebileceğini ifade ederek hesaplama işlemlerini tamamladıktan sonra yorumlar. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 3.14'te sunulmuştur.



Şekil 3.14 PÖ1'in görüşme sürecindeki açıklamaları

[6] PÖ1: PDÖ grubundan LCPT'ye ilişkin yüksek düzeyde performans sergileyen öğretmen adayları arasından görüşme yapmak üzere seçilen öğretmen adayı

PÖ1: $\left.\begin{aligned} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{aligned}\right\}$ *ve* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$*, burada (satır vektörleri) skaler katı olduğundan tek bir denklem (ilaveli matrisin rankına göre ilişkilendirme) gibi düşünebiliriz. Çözersek (*$x+y=2$ *denklemini)* $x=a, y=2-a$ *gelir.*

Araştırmacı: *Bu LDS'nin çözüm kümesinden bahsedebilir misin?*

PÖ1: *Sonsuz çözümü olur. Lineer bağımlı HOLDS'lerin sonsuz çözümü var. Lineer bağımsız HOLDS'lerin tek çözümü var.*

Araştırmacı: *Peki LDS'lerin hangi durum ya da durumlarda çözüm yoktur?*

Öğretmen adayı eline kalem alarak katsayılar matrisi birbirinin katı olan 2 denklemden oluşan denklem sistemi yazıp hesaplama işlemlerini tamamladıktan sonra yorumlar.

PÖ1: $\left.\begin{aligned} x+y=2 \\ 2x+2y=0 \end{aligned}\right\}$ *çözüm yoktur. Burada* $2x+2y=4$ *olmadığı için çelişki olur* (LDS'nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre ilişkilendirme), *çözüm yok.*

Araştırmacı: *HLDS'leri için çözüm olmama durumu nasıldır?*

Eline kalem alarak örnek bulmaya çalışırken *x+y=0* yazdıktan sonra duraksar ve kendinden emin bir şekilde cevap verir.

PÖ1: *Burada HLDS'leri için böyle bir durum (çözüm olmama durumu) olmaz. İlk denklemi hangi skalerle çarparsam çarpayım 0 elde edeceğimden çelişkili bir durum oluşmaz(çözüm vardır).* (LDS'nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre ilişkilendirme)

PÖ1'in katsayılar matrisinin lineer bağımlı olduğu durumda HOLDS'nin çözümüne ilişkin "*tek bir denklem gibi düşünebiliriz*", "*çelişki olur*" ve "*çelişkili bir durum oluşmaz*" ifadelerinin kendine özgü olmasından ve öğretmen adayının bu çıkarımlarını lineer cebir kavramlarına ilişkin tanım ve teoremlere dayandıramamasından dolayı çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme temasına atılmıştır. Temalardan bir başkasına uzaysal ilişkilendirme biçimine karşılık gelen ifadelerden biri aşağıdaki gibidir. Lineer bağımlılık/bağımsızlık ve germe kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin uzaysal ilişkilendirme temasına atılan koda ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots \mathbb{R}^n$'den birkaçını birlikte ele alma) karşılık gelen PÖ3'ün görüşme sürecinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmaktadır.

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'de 0 vektöründen farklı tek vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?*

PÖ3: *$\mathbb{R}^2$ 'de en fazla 2 vektör alabiliriz, $\mathbb{R}^3$ 'te en fazla 3 vektör alabiliriz, yani uzayımızdan (uzayın boyutundan) fazla vektör alamıyoruz. $\mathbb{R}^4$ 'te çalışıyorsak 5 vektör alamayız, alırsak germez* ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ 'den birkaçını ele alma). *Örneğin $(1,1,1)$ vektörünü alırsak bir kere germesi için lineer bağımsız olması gerekiyordu. $(1,1,1)$ lineer bağımsız ve $\mathbb{R}^3$ 'ü germez. $(1,1,1)$ tek vektör olduğundan $\mathbb{R}$ 'yi gerer. Eğer $(1,1,1)$ ile birlikte bir tane daha lineer bağımsız vektör olsaydı $\mathbb{R}^2$ 'yi gererdi. 3 tane lineer bağımsız vektör olursa $\mathbb{R}^3$ 'ü gerer.*

PÖ3'ün "$(1,1,1)$ *lineer bağımsız ve $\mathbb{R}^3$ 'ü germez. $(1,1,1)$ tek vektör olduğundan $\mathbb{R}$ 'yi gerer. Eğer $(1,1,1)$ ile birlikte bir tane daha lineer bağımsız vektör olsaydı $\mathbb{R}^2$ 'yi gererdi. 3 tane lineer bağımsız vektör olursa $\mathbb{R}^3$ 'ü gerer*" ifadesi, iki kavramı (lineer bağımlılık/bağımsızlık ve germe) farklı uzaylarda ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$) aldığı vektörü karşılaştırarak ilişkilendirdiğinden dolayı uzaysal ilişkilendirme temasına atılmıştır.

Öğretmen adaylarının ifadelerinden alıntılarla örnek gösterildiği gibi veriler analiz edilmiş ve bu süreçte öncelikle, doğru ve yanlış olduğuna bakılmaksızın verilerin tamamı incelenerek sergilenen ilişkilendirme biçimleri tespit edilmiştir. Daha sonra transkriptler tek tek incelenerek öğretmen adaylarının görüşme esnasında sergiledikleri kavramlar arası ilişkilendirme becerileri; doğru, kısmen doğru ve yanlış olarak değerlendirilmiştir. Böylece, öğretmen adaylarının ilişkilendirme biçimlerini nasıl (doğru, kısmen doğru ve yanlış) sergilediği ve yanılgılarının (eksik ve yanlış ilişkilendirme biçimlerinin) hangi ilişkilendirme biçimlerinden kaynaklandığı yorumlanmıştır. Verilere ilişkin analizin son aşamasına gelindiğinde ortaya çıkan kodlar ve temalar (kurulan ilişkilendirme biçimleri) yorumlanmış, karşılaştırılmış ve verilerden elde edilen sonuçlar raporlaştırılmıştır. Verilerin analizi sonucunda elde edilen yorumlar, bulgular kısmında doğrudan alıntılar ile desteklenerek ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

3.5.2.1 Nitel Verilerin Geçerliliği ve Güvenirliği

Nitel araştırma yöntemlerinde araştırmanın güvenirliğini ve geçerliğini sağlamak için *inandırıcılık*, *aktarılabilirlik*, *güvenirlik* ve *onaylanabilirlik* bileşenlerinin dikkate alınması gerektiği vurgulanmaktadır (Lincoln ve Guba, 1985). Bu araştırmada bahsi geçen bileşenler temelinde geçerliği ve güvenirliği sağlamak için aşağıdaki hususlar dikkate alınmıştır:

- Yarı yapılandırılmış görüşme süreci sorularının ve veri analizine ilişkin izlenecek aşamaların planlanmasında alan uzmanlarının görüşleri alınmıştır.

- Araştırmanın amaçları doğrultusunda, öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme biçimlerini ortaya çıkaracak nitelikte veriler toplanmıştır. Görüşme sürecinin tamamı ses kayıtları ile kaydedilmiştir.

- Araştırmada inanılır ve güvenilir veriler toplamak amacı ile belli zaman aralıklarıyla görüşmelere ara verilmiştir. Bununla birlikte araştırmacı, verilerin analizinden elde ettiği sonuçları ek görüşmelerle öğretmen adaylarına teyit ettirmiş ve böylece araştırmanın inandırıcılığı sağlanmaya çalışılmıştır.

- Görüşmeye katılan bireyler farklı özelliklere sahip (düşük, orta ve yüksek düzeylerde lineer cebir performansı sergileyen) öğretmen adayları arasından iki araştırma grubundan amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilmiş ve böylece veri kaynağı çeşitlendirilmiş ve verilerin aktarılabilirliği sağlanmaya çalışılmıştır.

- Araştırma sürecinde toplanan verilerin güvenirlik çalışmalarında bir alan uzmanı ve araştırmacı birbirinden bağımsız bir biçimde kodlama yapmıştır. Araştırmacı ve alan uzmanının verilere ilişkin kodlamalarında oluşan farklılıklar başka bir alan uzmanından görüş alınarak çözümlenmiştir. Böylece, araştırmanın geçerliliği ve tutarlılığı sağlanmaya çalışılmıştır.

- Araştırmada katılımcılar, veri toplama araçları ve görüşme süreci ayrıntılı bir biçimde ortaya konmuştur.

- Araştırmada, verilerin analizi kısmında verilerin kodlaması ayrıntılı bir şekilde sunulmuş ve belirlenen kodlar ve ilişkilendirme biçimleri doğrudan alıntılar ile desteklenerek ortaya konmuştur.

- Araştırma sürecinde elde edilen bulgular, lineer cebir ve eğitim alanında uzman öğretim üyelerinden görüş alınarak yorumlanmıştır.

- Bulguların raporlaştırılmasında elde edilen bilgiler açık, net ve ayrıntılı bir biçimde açıklanmıştır. Verilerin yorumlanmasında transkriptlerden doğrudan alıntılar yapılmıştır.

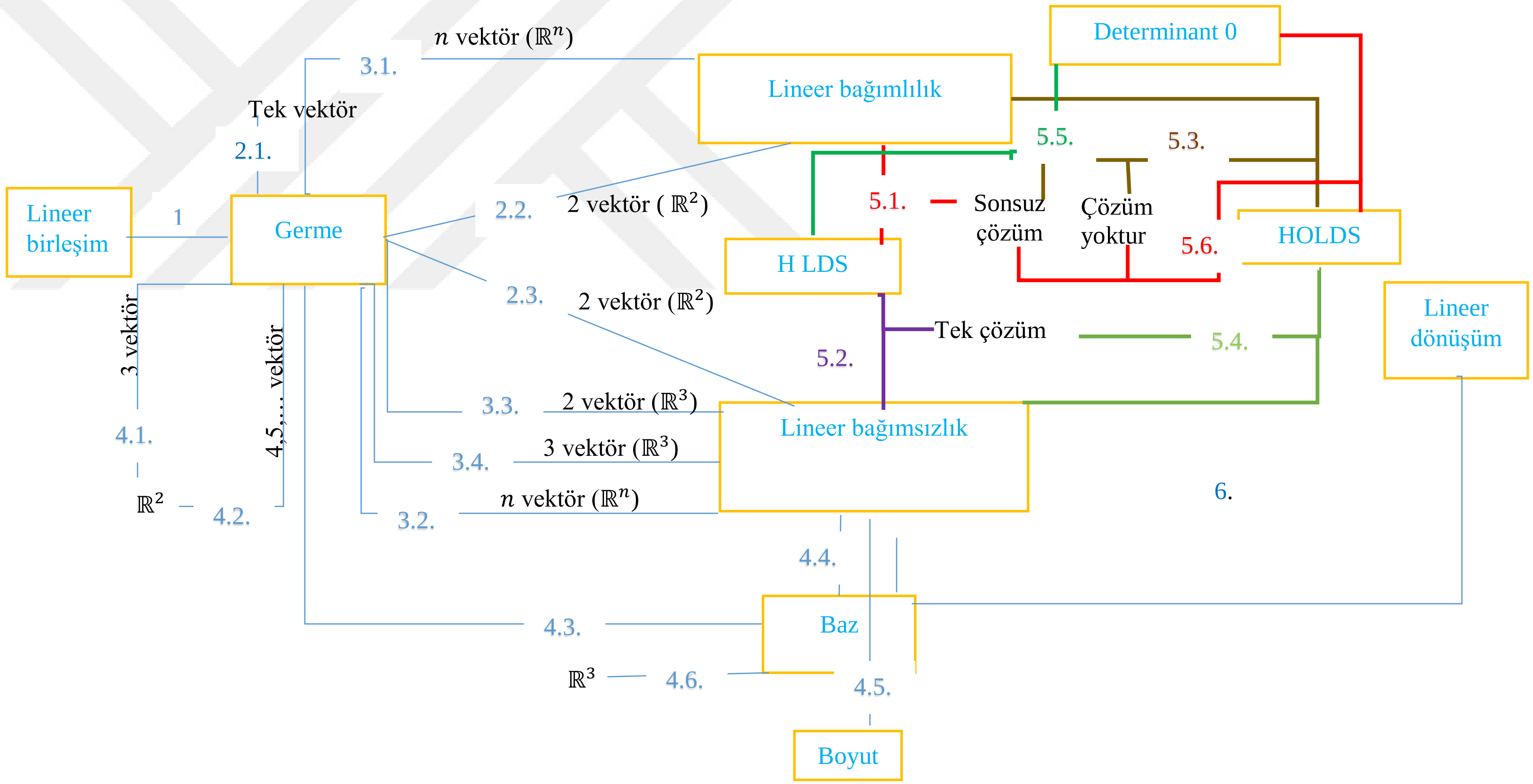
3.6.3 Nitel toplanan verilerin nicel analizi

Nitel analizlerin tamamlanmasının ardından transkriptlerin analiz sürecinde belirlenen doğru, kısmen doğru ve yanlış ilişkilendirmeler dikkate alınarak görüşme yapılan 6 öğretmen adayının her birine ilişkin kavramlar arası ilişkilendirme puanları hesaplanmıştır. Kavramlar arası ilişkilendirme puanı; araştırmaya konu olan lineer cebir kavramları arası ilişkilendirme performansını yansıtmaktadır. Yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen transkriptlerin nicel analizi sonucunda kavramlar arası ilişkilendirme puanlarının hesaplanmasında aşağıda Tablo 3.19'daki İGF Rubriği dikkate alınmıştır.

Tablo 3.19 İlişkilendirme görüşme formu rubriği

Cevap Türü	Ölçütler	Puan	İGF'deki Gösterim Şekli
Doğru ilişkilendirme	kavramlar arası ilişkilendirmenin, doğru yapılması	2	
Kısmi ilişkilendirme	kavramlar arası ilişkilendirmenin, kısmen doğru yapılması (ilişkilendirmede eksik veya yanlışların olması)	1	
Yanlış ilişkilendirme ya da İlişkilendirememe	kavramlar arası ilişkilendirmenin, yanlış yapılması ya da yapılamaması	0	

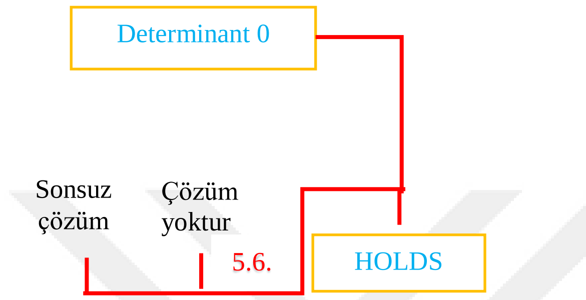
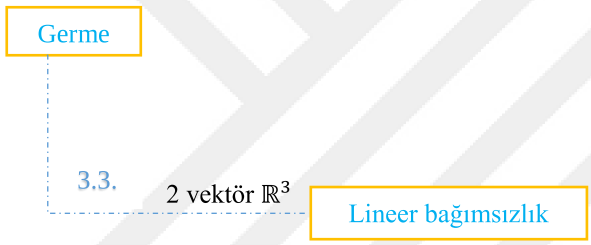
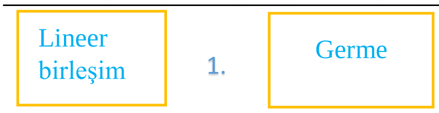
İGF Rubriği dikkate alınarak yapılan değerlendirmenin ardından lineer cebir kavramları arası kurulan ilişkilendirmelerin doğru, kısmen doğru ya da yanlış olması durumları öğretmen adaylarından her birine ilişkin oluşturulan İlişkilendirme Ağı ile görselleştirilmiştir. İGF'deki sorularla ölçülmesi hedeflenen kavramlar arası ilişkiyi gösteren İlişkilendirme Ağı aşağıda Şekil 3.15'te sunulmaktadır.



Şekil 3.15 İGF'deki sorular ve bu sorularla ölçülmesi hedeflenen kavramlar arası ilişki

Görselleştirmenin yapıldığı İlişkilendirme Ağlarındaki “sürekli çizgi” ile “doğru ilişkilendirme”; “noktalı kesik çizgi” ile “kısmi ilişkilendirme”; çizgiler üzerindeki açıklamalar ile “alınan vektör sayısı” ve “çalışılan uzay”; çizgiler üzerindeki sayılar ile İGF’deki “soru numaraları” ifade edilmektedir. İlişkilendirme Ağları ile yapılan görselleştirmelerin temsil ettiği durumlar aşağıda Tablo 3.20’de örneklendirilmiştir.

Tablo 3.20 İlişkilendirme ağından örnek gösterimler ve temsil ettiği durum

İlişkilendirme ağından örnek gösterimler	**Gösterimlerin temsil ettiği durum**
	İGF’deki 5.6. sorusuna (Katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda HOLDS’lerin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?) karşılık HOLDS nin katsayılar matrisinin determinantının 0 olduğu durumla HOLDS’nin çözüm kümesini doğru ilişkilendirebilme
	İGF’deki 5.6. sorusuna ($\mathbb{R}^3$’te 2 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzay ile ilgili ne söyleyebilirsin?) karşılık lineer bağımsızlık ve germe kavramını $\mathbb{R}^3$ uzayından alınan 2 lineer bağımsız vektöre ilişkin kısmen ilişkilendirebilme
	İGF’deki 1. sorusuna (lineer birleşim ile germe kavramları arasında nasıl bir ilişki vardır?) karşılık lineer bağımsızlık ve germe kavramını yanlış ilişkilendirme ya da ilişkilendirememe

İGF’den alınabilecek en yüksek puan 42’dir. Öğretmen adaylarının bu görüşme formundan aldığı puanların yüzlük sistemde karşılığı hesaplanarak elde edilen ilişkilendirme puanları ile lineer cebir performans puanları bulgular kısmında karşılaştırılmıştır. İGF’ye ilişkin güvenirlik analizinde gözlemciler arası uyum dikkate alınmıştır. Bunun için çalışma gruplarından seçilen 6 öğretmen adayının verdiği cevapları; lineer cebir alanında uzman bir akademisyenin ve matematik alanında uzman bir kişinin, araştırmacılar tarafından hazırlanan İGF Rubriği’nden yararlanarak değerlendirmesi sağlanmıştır. Öğretim üyesi, uzman ve araştırmacının verdiği puanlara ilişkin Kendall’ın uyum katsayısı 0.916 olarak hesaplanmış, puanlayıcılar arasında anlamlı derecede uyum olduğuna ve İGF’nin güvenilir olduğuna karar verilmiştir.

BÖLÜM 4

4 BULGULAR VE YORUMLAR

Araştırmanın bu bölümünde, belirlenen her bir alt probleme ilişkin yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgular ve bu bulgularla ilgili yorumlara yer verilmiştir.

4.1 Araştırmanın Birinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın birinci alt problemi "PDÖ yapılan çalışma grubundaki öğretmen adaylarının; LCPT'den ve MKÖAÖ'den aldıkları ön test-son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için bağımlı gruplar t-testinden ve Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinden yararlanılmıştır. Öğretmen adaylarının LCPT'nden aldıkları ön test-son test puan ortalamalarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile bağımlı gruplar t-testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.1'de sunulmuştur.

Tablo 4.1 PDÖ grubundaki öğretmen adaylarının LCPT ön test-son test puanlarına ilişkin bağımlı gruplar t-testi sonuçları

Ölçüm	**N**	$\bar{x}$	S_x	**t**	**p**
Öntest	38	44.57	7.05	-14.62	.00
Sontest	38	68.92	11.82		

Tablo 4.1'e göre öğretmen adaylarının lineer cebir performansları karşılaştırıldığında sergilenen performansın ön testten son teste anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir ($t=-14.62$; $p<.05$). Bu bulgu, PDÖ ile gerçekleştirilen lineer cebir derslerinin öğretmen adaylarının başarısını olumlu yönde etkilediğini göstermektedir. Bağımlı gruplar t testi, karşılaştırılan iki ortalama arasında anlamlı bir fark olup olmadığını ortaya koyarken bu farkın büyüklüğü ile ilgili bilgi vermek için etki büyüklüğünün hesaplanması gerekmektedir (Can, 2016). Bağımlı gruplar t-testi sonucunda hesaplanan etki büyüklüğü ($d=2.37$) bu farkın çok yüksek düzeyde olduğunu göstermektedir. Bu durum her iki test arasındaki ortalama farkının oldukça yüksek olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adaylarının MKÖYAÖ'nden aldıkları ön test-son test puan ortalamalarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile verilerin analizinde Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi'nden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.2'de sunulmuştur.

Tablo 4.2 PDÖ grubundaki öğretmen adaylarının MKÖAÖ ön test-son test puanlarına ilişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonuçları

Sontest-Öntest Ölçümü	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p
Negatif Sıralar	4	13,13	52,50	-3,87	0,00
Pozitif Sıralar	28	16,98	475,50		
Fark Olmayan	3				

Tablo 4.2'ye göre öğretmen adaylarının matematiğe karşı özyeterlik algılarının ön testten son teste anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir (Z=-3.87; p<.05). Bu durum, PDÖ ile gerçekleştirilen lineer cebir derslerinin öğretmen adaylarının özyeterlik algısını olumlu yönde etkilediğini göstermektedir.

4.2 Araştırmanın İkinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın ikinci alt problemi "ÇTTÖ yapılan çalışma grubundaki öğretmen adaylarının; LCPT'den ve MKÖAÖ'den aldıkları ön test-son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için bağımlı gruplar t-testinden yararlanılmıştır. Öğretmen adaylarının LCPT'nden aldıkları ön test-son test puan ortalamalarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile bağımlı gruplar t-testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.3'te sunulmuştur.

Tablo 4.3 ÇTTÖ grubundaki öğretmen adaylarının LCPT ön test-son test puanlarına ilişkin bağımlı gruplar t-testi sonuçları

Ölçüm	N	$\overline{x}$	S_x	t	p
Öntest	31	45.04	6.88	-12.16	.00
Sontest	31	65.11	9.84		

Tablo 4.3'e göre öğretmen adaylarının lineer cebir performansları karşılaştırıldığında sergilenen performansın ön testten son teste anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir (t=-12.16; p<.05). Bu bulgu, ÇTTÖ ile gerçekleştirilen lineer cebir derslerinin öğretmen adaylarının başarısını olumlu yönde etkilediğini göstermektedir. Bağımlı gruplar t-testinden elde edilen değerler dikkate alınarak hesaplanan etki büyüklüğü (d=2.18) bu farkın çok yüksek düzeyde olduğunu göstermektedir. Bu durum her iki test arasındaki ortalama farkının oldukça yüksek olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adaylarının MKÖYAÖ'nden aldıkları ön test-son test puan ortalamalarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile normal dağılım gösterdiğinden bu çalışma grubuna ilişkin MKÖYAÖ'nden elde edilen ön test ve son test verilerinin analizinde parametrik testlerden bağımlı gruplar t-testinden yararlanılmıştır. Aşağıda Tablo 4.4'te ÇTTÖ'nün yapıldığı çalışma grubundaki öğretmen adaylarının MKÖYAÖ'nden aldıkları ön test-son test puanlarının bağımlı gruplar t-testi ile yapılan analizleri sunulmuştur.

Tablo 4.4 ÇTTÖ grubundaki öğretmen adaylarının MKÖAÖ ön test-son test puanlarına ilişkin bağımlı gruplar t- testi sonuçları

Ölçüm	**N**	$\bar{x}$	S_x	t	**p**
Öntest	31	40.03	5.34	-3.60	.001
Sontest	31	43.70	3.56		

Tablo 4.4'e göre öğretmen adaylarının matematiğe karşı özyeterlik algılarının ön testten son teste anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir (t=-3.60; p<.05). Bununla birlikte bağımlı gruplar t-testinden elde edilen değerler dikkate alınarak hesaplanan etki büyüklüğü (d=0.64) bu farkın orta düzeyde olduğunu göstermektedir. Bu durum, ÇTTÖ ile gerçekleştirilen lineer cebir derslerinin öğretmen adaylarının özyeterlik algısını olumlu yönde etkilediği şeklinde yorumlanabilir.

4.3 Araştırmanın Üçüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın üçüncü alt problemi "GÖ yapılan karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının; LCPT'den ve MKÖAÖ'den aldıkları ön test-son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için bağımlı gruplar t- testinden ve Wilcoxon İşaretli Sıralar Testinden yararlanılmıştır. Öğretmen adaylarının LCPT'nden aldıkları ön test-son test puan ortalamalarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile bağımlı gruplar t-testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.5'te sunulmuştur.

Tablo 4.5 Karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının LCPT ön test-son test puanlarına ilişkin bağımlı gruplar t-testi sonuçları

Ölçüm	**N**	$\bar{x}$	S_x	t	**p**
Öntest	21	41.97	5.30	-7.62	.00
Sontest	21	55.26	8.45		

Tablo 4.5'e göre öğretmen adaylarının lineer cebir performansları karşılaştırıldığında sergilenen performansın ön testten son teste anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir (t=-7.62; p<.05). Bu bulgu, GÖ ile gerçekleştirilen lineer

cebir derslerinin öğretmen adaylarının başarısını olumlu yönde etkilediğini göstermektedir. Bağımlı gruplar t-testinden elde edilen değerler dikkate alınarak hesaplanan etki büyüklüğü (d=1.66) bu farkın çok yüksek düzeyde olduğunu göstermektedir. Bu durum her iki test arasındaki ortalama farkının oldukça yüksek olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adaylarının MKÖYAÖ'nden aldıkları ön test-son test puan ortalamalarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile verilerin analizinde Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi'nden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.6'da sunulmuştur.

Tablo 4.6 Karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının MKÖAÖ ön test-son test puanlarına ilişkin wilcoxon işaretli sıralar testi sonuçları

Sontest-Öntest Ölçümü	**N**	**Sıra Ortalaması**	**Sıra Toplamı**	**Z**	**p**
Negatif Sıralar	7	10.43	73	-1.48	.137
Pozitif Sıralar	14	11.29	158		
Fark Olmayan	0				

Tablo 4.6'ya göre öğretmen adaylarının matematiğe karşı özyeterlik algılarının ön test-son test puanları arasında anlamlı bir fark olmadığı görülmüştür ($Z=-1.48$; $p>.05$). Bu durum GÖ'nün, öğretmen adaylarının özyeterlik algısını etkilemediğini göstermektedir.

4.4 Araştırmanın Dördüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın dördüncü alt problemi "ÇTTÖ, PDÖ ve GÖ'nün uygulandığı çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının; LCPT'den, MKÖAÖ'den ve MSA'dan aldıkları son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için ANOVA'dan ve Kruskal Wallis testinden yararlanılmıştır. Öğretmen adaylarının LCPT'nden aldıkları ön test-son test puan ortalamalarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile tek yönlü ANOVA'dan yararlanılmış, ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.7'de sunulmuştur.

Tablo 4.7 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen LCPT son test puanlarına ilişkin tek yönlü varyans analizi sonuçları

Varyansın Kaynağı	Kareler Toplamı	Sd	Kareler Ortalaması	F	p	Anlamlı Fark
Gruplar arası	2548.122	2	1274.061	11.648	.00	PDÖ-GÖ ÇTTÖ-GÖ
Gruplar içi	9515.761	87	109.377			
Toplam	12063.883	89				

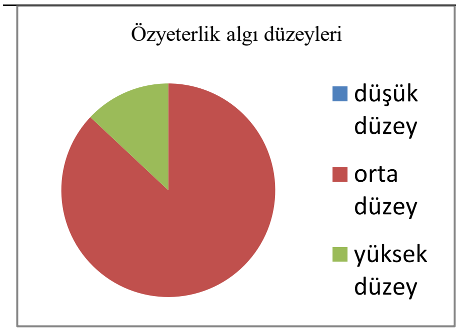
Tablo 4.7'ye göre çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının LCPT son test puan ortalamalarından en az ikisi arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu görülmektedir ($F=11.648$; $p<.05$). Yapılan Scheffe karşılaştırma testi sonucunda anlamlı farkın PDÖ'nün uygulandığı çalışma grubu ve karşılaştırma grubu ile ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma grubu ve karşılaştırma grubu arasında olduğunu göstermektedir. Tek faktörlü varyans analizi sonucu elde edilen değerler dikkate alınarak hesaplanan etki büyüklüğü ($\eta^2 = 0.21$), bu farkın yüksek düzeyde olduğunu göstermektedir. Bu durum çalışma grupları ve karşılaştırma grubu arasındaki ortalama farkının yüksek olduğu şeklinde yorumlanabilir.

MKÖYAÖ'nden aldıkları en yüksek puan 68, en düşük puan 32 olan çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının özyeterlik algı düzeyleri dağılımına ilişkin frekans ve yüzdeler aşağıda Tablo 4.8'de sunulmuştur.

Tablo 4.8 Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının özyeterlik algı düzeylerine göre dağılımı

Gruplar	İşlem	Düşük		Orta		Yüksek	
		f	%	*f*	%	*f*	%
PDÖ	Uygulama öncesi	0	0	29	83	6	17
	Uygulama sonrası	0	0	21	60	14	40
ÇTTÖ	Uygulama öncesi	0	0	27	87	4	13
	Uygulama sonrası	0	0	21	68	10	32
GÖ	Uygulama öncesi	0	0	20	95	1	5
	Uygulama sonrası	0	0	18	86	3	14
Genel	Uygulama öncesi	0	0	76	87	11	13
	Uygulama sonrası	0	0	60	69	27	31

Öğretmen adaylarının özyeterlik algı düzeylerine ilişkin genel dağılım aşağıdaki Şekil 4.1'de sunulmaktadır.

Uygulama öncesi	Uygulama sonrası
	

Şekil 4.1 Öğretmen adaylarının özyeterlik algı düzeylerine göre dağılım tablosu

Tablo 4.8'e göre deneysel uygulamalar öncesinde öğretmen adaylarının %87'sinin orta düzeyde ve %13'ünün yüksek düzeyde, deneysel uygulamalar sonucunda öğretmen adaylarının %69'unun orta düzeyde ve %31'inin yüksek düzeyde özyeterlik algısına sahip olduğu ve deneysel uygulamalar öncesinde ve sonrasında özyeterlik algısı düşük düzeyde olan öğretmen adayının olmadığı görülmektedir. Deneysel uygulamaların tamamlanmasının ardından öğretmen adaylarının özyeterlik algı düzeylerinde orta düzeyden yüksek düzeye doğru bir farklılaşma eğilimi olduğu görülmüştür. Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının özyeterlik algısı düzeyinde oluşan bu farklılıkların anlamlı olup olmadığını belirlemek için Kruskal Wallis testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.9'da sunulmuştur.

Tablo 4.9 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının MKÖAÖ son test puanlarına ilişkin Kruskal Wallis testi analizi sonuçları

Gruplar	N	Sıra Ortalaması	Sd	χ^2	p	Anlamlı Fark
PDÖ	35	51.64	2	12.713	.002	PDÖ-GÖ
ÇTTÖ	31	46.63				ÇTTÖ-GÖ
GÖ	21	27.38				

Tablo 4.9'a göre çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının MKÖYAÖ son test puan ortalamalarından en az ikisi arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu görülmektedir ($\chi^2 = 12.71$; p<.05). Kruskal Wallis testi sonucu elde edilen değerler dikkate alınarak hesaplanan etki büyüklüğü ($\eta^2 = 0.14$), bu farkın yüksek düzeyde olduğunu göstermektedir. Kruskal Wallis testinin çoklu karşılaştırma seçeneği olmadığından iki çalışma ve bir karşılaştırma grubunu ikişer ikişer gruplar halinde karşılaştırmak için Mann Whitney U testinden yararlanılmış ve elde edilen değerler, PDÖ'nün uygulandığı çalışma grubu ve karşılaştırma grubu ile ÇTTÖ'nün

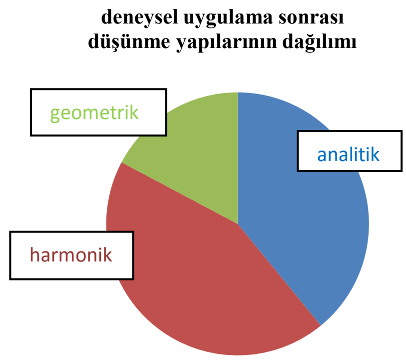
uygulandığı çalışma grubu ve karşılaştırma grubu arasında anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının matematiksel düşünme yapıları dağılımına ilişkin frekans ve yüzdeler aşağıda Tablo 4.10'da sunulmuştur.

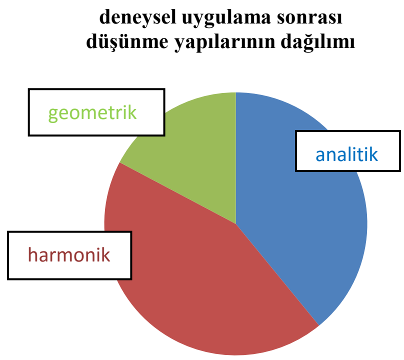
Tablo 4.10 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının düşünme yapılarına göre dağılımı

Gruplar	İşlem	Analitik		Harmonik		Geometrik	
PDÖ	Uygulama öncesi	16	%46	17	%48	2	%6
	Uygulama sonrası	18	%51	11	%32	6	%17
ÇTTÖ	Uygulama öncesi	11	%36	15	%48	5	%16
	Uygulama sonrası	9	%29	16	%52	6	%19
GÖ	Uygulama öncesi	9	%43	7	%33	5	%24
	Uygulama sonrası	7	%33	11	%53	3	%14
Genel	Uygulama öncesi	36	%41	39	%45	12	%14
	Uygulama sonrası	34	%39	38	%44	15	%17

Öğretmen adaylarının düşünme yapılarına ilişkin genel dağılım aşağıdaki Şekil 4.2'de sunulmaktadır.

Uygulama öncesi	Uygulama sonrası





Şekil 4.2 Öğretmen adaylarının düşünme yapılarına göre dağılım tablosu

Tablo 4.10'a göre deneysel uygulamalar öncesinde öğretmen adaylarının %41'inin analitik, %45'inin harmonik ve %25'inin geometrik; deneysel uygulamalar sonucunda ise %39'unun analitik, %44'ünün harmonik ve %17'sinin geometrik düşünme yapısında olduğu ve düşünme yapılarında az da olsa farklılık olmakla birlikte geometrik düşünme yapısında oluşan farklılığın diğer düşünme yapılarına göre daha fazla olduğu görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının düşünme yapısında oluşan bu farklılıkların anlamlı olup olmadığını belirlemek için iki yönlü kay kare testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.11'de sunulmuştur.

Tablo 4.11 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının düşünme yapılarına ilişkin iki yönlü kay kare testi analizi sonuçları

Gruplar	N	Analitik	Harmonik	Geometrik	χ^2	p
PDÖ	35	18	11	6	4.54	.33
ÇTT	31	9	16	6		
GÖ	21	7	11	3		
Toplam	87					

Tablo 4.11'e göre; PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün gerçekleştirildiği iki çalışma ve GÖ yapılan bir karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarına uygulanan öğretim yöntemi ve yaklaşımı ile düşünme yapıları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için iki nitel (sınıflamalı) değişken için yapılan iki yönlü kay kare testi sonucuna göre, farklı öğretim yöntemlerinin ve yaklaşımının uygulandığı öğretmen adaylarının düşünme yapıları arasında anlamlı bir farklılık olmadığı görülmektedir ($\chi^2 = 4.54$; p>.05).

4.5 Araştırmanın Beşinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın beşinci alt problemi "ÇTTÖ, PDÖ ve GÖ'nün uygulandığı çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının; LCPT'deki belirlenen (vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineerdenklem-LDS ve lineer dönüşüm) kavramlara ilişkin sorularda sergiledikleri performansları ne düzeydedir ve bu kavramlar bazında çalışma ve karşılaştırma gruplarının performansları arasında anlamlı farklılık var mıdır? " şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için öğretmen adaylarına son test olarak uygulanan LCPT'ye ilişkin betimsel istatistikler aşağıda Tablo 4.12'de sunulmuştur.

Tablo 4.12 Lineer cebir kavramları bazında puan ortalamaları ve standart sapmaları

Kavramlar	Gruplar	N	$\bar{x}$	S_x
Vektör	Genel	90	89.77	12.99
	PDÖ	38	89.64	14.59
	ÇTTÖ	31	91.18	11.59
	GÖ	21	87.93	12.22
Vektör Uzayı	Genel	90	27.50	21.21
	PDÖ	38	53.94	23.86
	ÇTTÖ	31	42.74	20.60
	GÖ	21	23.41	16.79
Lineer birleşim	Genel	90	54.07	21.08
	PDÖ	38	64.61	20.31
	ÇTTÖ	31	49.10	17.63
	GÖ	21	42.32	18.79
Germe	Genel	90	58.51	20.56
	PDÖ	38	67.98	19.71
	ÇTTÖ	31	55.10	14.22
	GÖ	21	46.42	9.80
Lineer bağımlılık/bağımsızlık	Genel	90	78.00	12.29
	PDÖ	38	82.28	10.88
	ÇTTÖ	31	75.05	14.08
	GÖ	21	74.60	9.80
Baz	Genel	90	62.75	18.66
	PDÖ	38	72.43	18.82
	ÇTTÖ	31	60.21	14.83
	GÖ	21	48.97	13.31
Lineer denklem-LDS	Genel	90	72.81	23.58
	PDÖ	38	68.77	20.15
	ÇTTÖ	31	84.30	17.00
	GÖ	21	63.17	15.14
Lineer dönüşüm	Genel	90	47.55	21.87
	PDÖ	38	45.43	22.18
	ÇTTÖ	31	52.25	23.35
	GÖ	21	44.44	18.65
Geometrik temsil	Genel	90	63.11	14.23
	PDÖ	38	64.18	13.27
	ÇTTÖ	31	67.65	14.39
	GÖ	21	54.49	14.46
Rutin olmayan problemler	Genel	90	57.19	19.40
	PDÖ	38	71.92	16.78
	ÇTTÖ	31	48.38	14.46
	GÖ	21	43.51	10.55

Tablo 4.12; öğretmen adaylarının ortaokuldan üniversiteye kadar öğrenim hayatlarında sık sık karşı karşıya kaldıkları vektör kavramına ilişkin performansının en yüksek düzeyde olduğunu göstermektedir. Araştırmaya konu olan kavramlar içinde öğretmen adaylarının lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık performanslarının en yüksek olduğu; bunu sırasıyla lineer denklem-LDS, baz, germe, lineer birleşim, lineer dönüşüm ve vektör uzayı kavramlarına ilişkin performansların takip ettiği görülmektedir. Bu durum ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ağırlıklı olarak işlemsel algoritmaları uygulamalarının yeterli olduğu, diğer kavramlara (vektör uzayı, lineer birleşim, germe) göre daha somut yapıda olan lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem gibi kavramlarda, işlemsel algoritmaları uygulamalarının yeterli olmadığı germe, lineer dönüşüm ve vektör uzayı gibi daha soyut olan kavramlara göre daha başarılı olduklarını göstermektedir. Ayrıca karşılaştırma grubunun kavramların tamamında sergiledikleri performansın çalışma gruplarından daha düşük olduğu belirlenmiştir. Kavram bazında ayrı ayrı gruplar incelendiğinde vektör uzayı, lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, germe, baz kavramlarında PDÖ yapılan grubun diğer çalışma grubuna göre ve lineer denklem-LDS, lineer dönüşüm kavramlarında ise ÇTTÖ yapılan çalışma grubunun diğer çalışma grubuna göre daha başarılı olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte, elde edilen sonuçlar; kavramların tamamıyla ilgili rutin olmayan problemleri cevaplamada PDÖ yapılan çalışma grubunun diğer çalışma grubuna göre ve kavramların tamamıyla ilgili grafikle verilen soruları cevaplamada ÇTTÖ yapılan çalışma grubunun diğer çalışma grubuna göre daha başarılı oldukları görülmektedir.

Çalışma ve karşılaştırma gruplarının; araştırmaya konu olan kavramlar (lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-LDS, lineer dönüşüm) bazında ve rutin olmayan problemlere ilişkin ön test puan ortalamalarının karşılaştırıldığı Kruskal Wallis testi aşağıda Tablo 4.13'te sunulmuştur.

Tablo 4.13 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının kavram bazında ön test puanlarına ilişkin Kruskal Wallis testi analizi sonuçları

Ölçüm	Gruplar	N	Sıra Ortalaması	Sd	x^2	P	Anlamlı Fark
Lineer birleşim	PDÖ	38	46.20	2	12.46	.002	PDÖ-GÖ, ÇT- GÖ
	ÇTTÖ	31	55.21				
	GÖ	21	29.90				
Germe	PDÖ	38	44.45	2	16.50	.000	PDÖ-GÖ, ÇT- GÖ, PDÖ-ÇT
	ÇTTÖ	31	58.19				
	GÖ	21	28.67				
Lineer bağımlılık/bağımsızlık	PDÖ	38	40.18	2	6.05	.048	PDÖ- GÖ
	ÇTTÖ	31	44.05				
	GÖ	21	57.26				
Lineer denklem-LDS	PDÖ	38	48.18	2	1.44	.485	-
	ÇTTÖ	31	46.06				
	GÖ	21	39.81				
Lineer dönüşüm	PDÖ	38	50.30	2	3.57	.168	-
	ÇTTÖ	31	45.37				
	GÖ	21	37.00				
Rutin olmayan problemler	PDÖ	38	45.28	2	2.12	.345	-
	ÇTTÖ	31	49.98				
	GÖ	21	39.39				

Tablo 4.13'e göre lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramlarına ilişkin çalışma ve karşılaştırma gruplarının; lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarına ilişkin çalışma gruplarının ön test puanları arasında anlamlı fark olmadığı germe kavramına ilişkin çalışma ve karşılaştırma gruplarının ön test puanları arasında ise anlamlı fark olduğu görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarının geometrik temsil performansına ilişkin ön test puan ortalamalarının karşılaştırıldığı tek yönlü varyans analizi aşağıda Tablo 4.14'te sunulmuştur.

Tablo 4.14 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının geometrik temsil ön test puanlarına ilişkin tek yönlü varyans analizi sonuçları

Varyansın Kaynağı	Kareler Toplamı	Sd	Kareler Ortalaması	F	P	Anlamlı Fark
Gruplar arası	155,35	2	67.86	.864	.425	-
Gruplar içi	7838,86	87	90.10			
Toplam	7994,59	89				

Tablo 4.14’e göre çalışma ve karşılaştırma gruplarının geometrik temsil ön test puanları arasında anlamlı fark olmadığı görülmektedir ($F=0.864; p>.05$). Ön test puanları arasında anlamlı fark olmayan çalışma ve karşılaştırma gruplarının son test puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını incelemiştir. Dolayısıyla, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramları bazında ve geometrik temsil sorularına ve rutin olmayan problemlere ilişkin çalışma ve karşılaştırma gruplarının son test puan ortalamaları karşılaştırılmıştır. Yanı sıra; lineer birleşim ve lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarına ilişkin çalışma grupları, lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarına ilişkin çalışma gruplarından biri (ÇTTÖ) ile karşılaştırma grubunun (ön test puanları arasında anlamlı bir farklılık olmadığından) son test puanları arasında anlamlı fark olup olmadığı incelenmiştir.

Tablo 3.15 ve Tablo 4.13’ten elde edilen sonuçlar dikkate alınarak; lineer birleşim (Tablo 4.15) ve lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarına ilişkin çalışma gruplarının ve lineer bağımlılık/bağımsızlık (Tablo 4.16) kavramlarına ilişkin çalışma gruplarından biri (ÇTTÖ) ile karşılaştırma grubunun son test puan ortalamalarının karşılaştırılmasında Mann Whitney U testinden yararlanılmıştır. Tablo 3.15’e göre; geometrik temsil puan ortalamaları haricinde kavramların son test puan ortalamalarının en az bir grupta normal dağılım göstermediği gözlendiğinden öğretmen adaylarının lineer denklem-LDS (Tablo 4.17), lineer dönüşüm (Tablo 4.18) kavramları bazında ve rutin olmayan problemlere (Tablo 4.21) ilişkin son test puan ortalamalarının karşılaştırılmasında Kruskal Wallis testi testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler Tablo 4.17, Tablo 4.18 ve Tablo 4.21’de sunulmuştur. Yanı sıra, Tablo 3.15’e göre; çalışma ve karşılaştırma gruplarının normal dağılım gösteren geometrik temsil son test puan ortalamaları tek yönlü varyans analizi ile karşılaştırılmış ve ilgili istatistikler Tablo 4.20’de sunulmuştur.

4.5.1 Çalışma gruplarının lineer birleşim kavramına ilişkin performansları

Araştırmanın lineer birleşim kavramına ilişkin alt problemi “Çalışma gruplarının LCPT’nin lineer birleşim kavramı ile ilgili maddelerinden aldıkları puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?” şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için çalışma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer birleşim kavramıyla ilgili son test puanlarına ilişkin sonuçlara yer verilecektir. Çalışma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer birleşim kavramına ilişkin performanslarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile Mann Whitney U testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.15'te sunulmuştur.

Tablo 4.15 Çalışma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer birleşim kavramı son test puanlarına ilişkin Mann Whitney U testi sonuçları

Ölçümler	Grup	N	Sıra Toplamı	Sıra Ortalaması	U	p
Lineer birleşim kavramına ilişkin	PDÖ	38	1584	41.70	334	.002
Performans	ÇTTÖ	31	830	26.79		

Tablo 4.15'e göre; lineer birleşim kavramına ilişkin son test puanları karşılaştırıldığında PDÖ ve ÇTTÖ gruplarındaki öğretmen adaylarının performansları arasında PDÖ grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu görülmektedir. Bu durum PDÖ grubundaki öğretmen adaylarının lineer birleşim kavramıyla ilgili sorularda, ÇTTÖ grubuna göre daha başarılı oldukları şeklinde yorumlanabilir.

4.5.2 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin performansları

Araştırmanın lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin alt problemi "Çalışma gruplarının ve ÇTTÖ çalışma grubu ile karşılaştırma grubunun LCPT'nin lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı ile ilgili maddelerinden aldıkları puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için çalışma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramıyla ilgili son test puanlarına ilişkin sonuçlara yer verilecektir. Çalışma gruplarındaki ve ÇTTÖ çalışma grubu ile karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin performanslarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile Mann Whitney U testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.16'da sunulmuştur.

Tablo 4.16 Çalışma ve ÇTTÖ ile karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı son test puanlarına ilişkin Mann Whitney U testi sonuçları

Ölçümler	Grup	N	Sıra Toplamı	Sıra Ortalaması	U	p
Lineer bağımlılık/bağımsızlık performansı	PDÖ	38	1530	40.28	388	.01
	ÇTTÖ	31	884	28.53		
	ÇTTÖ	31	827	26.68	320	.91
	GÖ	21	551	26.24		

Tablo 4.16'ya göre; lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı son test puanları karşılaştırıldığında PDÖ ve ÇTTÖ grupları arasında PDÖ grubu lehine istatistiksel

olarak anlamlı bir fark olduğu ancak ÇTTÖ ve GÖ gruplarındaki performanslar arasında anlamlı bir fark olmadığı görülmektedir. Bu durum, PDÖ grubundaki öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramıyla ilgili sorularda, ÇTTÖ ve GÖ gruplarına göre daha başarılı oldukları şeklinde yorumlanabilir.

4.5.3 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer denklem-LDS kavramına ilişkin performansları

Araştırmanın lineer denklem-LDS kavramına ilişkin alt problemi "Çalışma ve karşılaştırma gruplarının LCPT'nin lineer denklem-LDS kavramı ile ilgili maddelerinden aldıkları puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer denklem-LDS kavramıyla ilgili son test puanlarına ilişkin sonuçlara yer verilecektir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer denklem-LDS kavramına ilişkin performanslarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile Kruskal Wallis testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.17'de sunulmuştur.

Tablo 4.17 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer denklem-LDS kavramı son test puanlarına ilişkin Kruskal Wallis testi analizi sonuçları

Gruplar	N	Sıra Ortalaması	Sd	χ^2	P	Anlamlı Fark
PDÖ Grubu	38	40,08	2	19,84	.00	ÇTTÖ-PDÖ
ÇTTÖ Grubu	31	61,66				ÇTTÖ-GÖ
GÖ Grubu	21	31,45				

Tablo 4.17'ye göre; Kruskal Wallis testi sonucunda çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer denklem-LDS kavramı ile ilgili maddelerinden aldıkları puan ortalamalarından en az ikisi arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu görülmektedir ($\chi^2 = 19.84$; p<.05). Kruskal Wallis testi sonucu elde edilen değerler dikkate alınarak hesaplanan etki büyüklüğü ($\eta^2 = 0.23$), bu farkın yüksek düzeyde olduğunu göstermektedir. Kruskal Wallis testinin çoklu karşılaştırma seçeneği olmadığından iki çalışma grubu ve bir karşılaştırma grubuna ikişer ikişer Mann–Whitney U testi yapılmıştır. Yapılan analizler sonucunda anlamlı farkın ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma grubu ile PDÖ'nün uygulandığı çalışma grubu ve ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma grubu ile karşılaştırma grubu arasında olduğunu göstermektedir. Bu durum, ÇTTÖ grubundaki öğretmen adaylarının lineer denklem-

LDS kavramıyla ilgili sorularda, PDÖ ve GÖ gruplarına göre daha başarılı oldukları şeklinde yorumlanabilir.

4.5.4 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer dönüşüm kavramına ilişkin performansları

Araştırmanın lineer dönüşüm kavramına ilişkin alt problemi "Çalışma ve karşılaştırma gruplarının LCPT'nin lineer dönüşüm kavramı ile ilgili maddelerinden aldıkları puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer dönüşüm kavramıyla ilgili son test puanlarına ilişkin sonuçlara yer verilecektir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer dönüşüm kavramına ilişkin performanslarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile Kruskal Wallis testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.18'de sunulmuştur.

Tablo 4.18 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer dönüşüm kavramı puanlarına ilişkin Kruskal Wallis testi Sonuçları

Gruplar	N	Sıra Ortalaması	Sd	χ^2	P	Anlamlı Fark
PDÖ Grubu	38	43,18	2	1.99	0.369	-
ÇTTÖ Grubu	31	50,77				
GÖ Grubu	21	41,90				

Tablo 4.18'e göre; Kruskal Wallis testi sonucunda çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının LCPT'nin lineer dönüşüm kavramı ile ilgili maddelerinden aldıkları puan ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı görülmüştür ($\chi^2 = 1.99$; p<.05).

PDÖ'nün, ÇTTÖ'nün ve GÖ'nün kavram bazında performansa etkisi aşağıda Tablo 4.19'da sunulmuştur.

Tablo 4.19 Çalışma ve karşılaştırma grupları LCPT kavram bazında performansa ilişkin anlamlı değişim tablosu

Değişimler	Gruplar	Kavramlar				
		Lineer birleşim	Germe	Lineer bağımlılık bağımsızlık	Lineer denklem-LDS	Lineer Dönüşüm
Kavram bazında performanslardaki anlamlı değişimler	PDÖ	✓	*7	✓	-	-
	ÇTTÖ	-	*	-	✓	-
	GÖ	*	*	-	-	-

Not: Çalışma ve karşılaştırma grupları arasında kavram bazında performansa ilişkin lehine anlamlı değişim olduğu tespit edilen gruplar "✓" ile anlamlı değişim olmadığı tespit edilen gruplar "-" ile gösterilmiştir.

Bu çalışmada Tablo 4.19'a göre lineer cebir dersinde uygulanan GÖ yönteminin performansı; PDÖ ve ÇTTÖ yaklaşımına göre daha az etkilediği, kavram bazında anlamlı bir farklılık oluşturmadığı görülmektedir.

4.5.5 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının geometrik temsile ilişkin performansları

Araştırmanın geometrik temsil performansına ilişkin alt problemi "Çalışma ve karşılaştırma gruplarının LCPT'nin geometrik temsil ile ilgili maddelerinden aldıkları puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının geometrik temsil performansı ile ilgili son test puanlarına ilişkin bulgulara yer verilecektir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının geometrik temsile ilişkin performanslarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile tek yönlü varyans analizinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.20'de sunulmuştur.

[7]*: Uygulama sürecine başlamadan önce ön test olarak uygulanan LCPT sonuçlarına göre; çalışma ve karşılaştırma gruplarının tamamının germe kavramına ilişkin puan ortalamaları arasında ve bunun yanı sıra çalışma grupları ile karşılaştırma grubunun lineer birleşim kavramına ilişkin puan ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı fark olduğu tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu iki kavrama ilişkin puan ortalamaları arasında anlamlı farklılık tespit edilen grupların LCPT son test puan ortalamaları arasında farklılık olup olmadığı incelenmemiştir.

Tablo 4.20 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının geometrik temsil puanlarına ilişkin tek yönlü varyans analizi sonuçları

Varyansın Kaynağı	Kareler Toplamı	Sd	Kareler Ortalaması	F	p	Anlamlı Fark
Gruplar arası	2240.953	2	1120476	6.17	.003	PDÖ-GÖ
Gruplar İçi	15799.600	87	181.605			ÇTTÖ- GÖ
Toplam	18040.552	89				

Tablo 4.20'ye göre bağımsız gruplar için tek yönlü varyans analizi sonucunda çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının LCPT'nin geometrik temsil ile ilgili maddelerinden aldıkları puan ortalamalarından en az ikisi arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu görülmektedir (F=6.17; p<.05). Bağımsız gruplar için tek yönlü varyans analizi sonucu elde edilen değerler dikkate alınarak hesaplanan etki büyüklüğü ($\eta^2 = 0.12$) , bu farkın yüksek düzeyde olduğunu göstermektedir. Yapılan Scheffe karşılaştırma testi sonucunda anlamlı farkın PDÖ'nün uygulandığı çalışma grubu ve karşılaştırma grubu ile ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma grubu ve karşılaştırma grubu arasında olduğunu göstermektedir. Bu durum, PDÖ ve ÇTTÖ grubundaki öğretmen adaylarının geometrik temsil ile ilgili sorularda GÖ grubuna göre daha başarılı oldukları şeklinde yorumlanabilir.

4.5.6 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının rutin olmayan problemlere ilişkin performansları

Araştırmanın rutin olmayan problemlere ilişkin alt problemi "Çalışma ve karşılaştırma gruplarının LCPT'nin rutin olmayan problemlerinden aldıkları puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının rutin olmayan problemler ile ilgili son test puanlarına ilişkin sonuçlara yer verilecektir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının rutin olmayan problemlere ilişkin performanslarının istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile Kruskal Wallis testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.21'de sunulmuştur.

Tablo 4.21 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının rutin olmayan problemler ile ilgili aldıkları puanlara ilişkin Kruskal Wallis testi sonuçları

Gruplar	N	Sıra Ortalaması	Sd	χ^2	p	Anlamlı Fark
PDÖ	38	64.99	2	37.37	.00	PDÖ-GÖ
ÇTTÖ	31	33.73				PDÖ-ÇTTÖ
GÖ	21	27.62				

Tablo 4.21'e göre; bağımsız gruplar için parametrik olmayan Kruskal Wallis testi sonucunda çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının LCPT'deki; rutin olmayan problemler ile ilgili maddelerden aldıkları puan ortalamalarından en az ikisi arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu görülmektedir ($\chi^2 = 37.37$;p<.05). Kruskal Wallis testi sonucu elde edilen değerler dikkate alınarak hesaplanan etki büyüklüğü ($\eta^2 = 0.43$)), bu farkın yüksek düzeyde olduğunu göstermektedir. Bağımsız gruplar için Kruskal Wallis testinin çoklu karşılaştırma seçeneği olmadığından iki çalışma ve bir karşılaştırma grubuna ikişer ikişer Mann–Whitney U testi yapılmıştır. Yapılan analizler sonucunda anlamlı farkın PDÖ ve GÖ grubu ile PDÖ ve ÇTTÖ grubu arasında olduğunu göstermektedir. Bu durum, PDÖ grubundaki öğretmen adaylarının rutin olmayan problemlerin çözümünde ÇTTÖ ve GÖ gruplarına göre daha başarılı oldukları şeklinde yorumlanabilir.

4.6 Araştırmanın Altıncı Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın diğer bir alt problemi "Öğretmen adaylarının vektör, vektör uzay, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz-boyut, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramları ile ilgili sergiledikleri performansları arasında anlamlı bir ilişki var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için veriler normal dağılım göstermediğinden parametrik olmayan bir test olan Spearman's rho Korelasyon katsayısı Tekniğinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.22'de sunulmuştur.

Tablo 4.22 LCPT kavram bazında puanlara ilişkin Spearman's rho korelasyon katsayıları

Kavramlar	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.Vektör	---									
2.Vektör Uzayı	0.374	---								
3. Lineer birleşim	-	0.335	---							
4.Germe	0.230	0.584	0.486	---						
5.Lineer bağımlılık/bağımsızlık	0.289	0.477	0.662	0.448	---					
6.Baz	0.266	0.598	0.364	0.563	0.285	---				
7.Lineer denklem -LDS	0.258	0.455	-	0.245	0.259	0.270	---			
8.Lineer dönüşüm	-	-	-	-	-	-	-	---		
9.Geometrik temsil Soruları	0.494	0.590	0.533	0.496	0.619	0.461	0.597	0.350	---	
10. Rutin olmayan problemler	0.383	0.679	0.673	0.590	0.689	0.607	-	-	0.481	---
N=90 -; p≥.05										

Tablo 4.22'ye göre; öğretmen adaylarının vektör uzayı kavramı ile ilgili performansları ile vektör, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, lineer denklem-LDS kavramları ile ilgili performansları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı ilişki olduğu görülmektedir (r=0.374; r=0.335; r=0.584; r=0.477; r=0.598; r=0.455; p<.05). Bu durum ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının vektör uzayı kavramı ile ilgili performansları arttıkça lineer dönüşüm dışındaki kavramların tamamıyla ilgili performanslarının da artacağı şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adaylarının lineer birleşim kavramı ile ilgili performansları ile vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz kavramları ile ilgili performansları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı ilişki olduğu görülmektedir (r=0.335; r=0.486; r=0.662; r=0.364; p<.05). Bu durum öğretmen adaylarının lineer birleşim kavramı ile ilgili performansları arttıkça lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm dışındaki kavramların tamamıyla ilgili performanslarının da artacağı şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adaylarının germe kavramı ile ilgili performansları ile vektör, lineer denklem-LDS kavramları ile ilgili performansları arasında düşük düzeyde (r=0.230; r=0.245; p<.05); vektör uzayı, lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz kavramları ile ilgili performansları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı ilişki olduğu görülmektedir (r=0.584; r=0.486; r=0.448; r=0.563; p<.05). Bu durum ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının germe kavramı ile ilgili performansları arttıkça; vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, lineer denklem-LDS kavramlarının tamamıyla ilgili performanslarının da artacağı şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı ile ilgili performansları ile vektör, baz, lineer denklem-LDS kavramları ile ilgili performansları arasında düşük düzeyde (r=0.289; r=0.285; r=0.259; p<.05); vektör uzayı, lineer birleşim, baz kavramları ile ilgili performansları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı ilişki olduğu görülmektedir (r=0.477; r=0.662; r=0.448; p<.05). Bu durum ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı ile ilgili performansları arttıkça vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, baz, lineer denklem-LDS kavramlarının tamamıyla ilgili performanslarının da artacağı şeklinde yorumlanabilir.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının baz kavramı ile ilgili performansları ile vektör, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-LDS kavramları ile ilgili performansları arasında düşük düzeyde (r=0.266; r=0.285; r=0.270; p<.05); vektör uzayı, lineer birleşim, germe kavramları ile ilgili performansları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı ilişki olduğu görülmektedir (r=0.598; r=0.364; r=0.563; p<.05). Bu durum ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının baz kavramı ile ilgili performansları arttıkça vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-LDS kavramlarının tamamıyla ilgili performanslarının da artacağı şeklinde yorumlanabilir.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının lineer denklem-LDS kavramı ile ilgili performansları ile vektör, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz kavramları ile ilgili performansları arasında düşük düzeyde (r=0.258; r=0.245; r=0.259; r=0.270; p<.05); vektör uzayı kavramı ile ilgili performansları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı ilişki olduğu görülmektedir (r=0.455; p<.05). Bu durum ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının lineer denklem-LDS kavramı ile ilgili performansları arttıkça lineer birleşim, lineer dönüşüm kavramları haricindeki kavramların tamamıyla ilgili performanslarının da artacağı şeklinde yorumlanabilir.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının lineer dönüşüm kavramı ile ilgili performansları ve diğer kavramların tamamıyla ilgili performansları arasında anlamlı bir ilişki olmadığı görülmüştür. Bu durumda öğretmen adaylarının vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, lineer denklem-LDS kavramları ile ilgili performanslarının, lineer dönüşüm ile ilgili performanslarını etkilemediği söylenebilir.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının performansların tamamı dikkate alındığında lineer birleşim ile lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramları arasındaki korelasyonun en yüksek (r=0.662; p<.01, orta düzeyde anlamlı ilişki), vektör ile germe kavramları arasındaki korelasyonun ise en düşük (r=0.230; p<.05) düşük düzeyde anlamlı ilişki) olduğu görülmektedir.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kavramların tamamını kapsayan geometrik temsil soruları ile ilgili performansları ile araştırmaya konu olan tüm kavramlar ile ilgili performansları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı ilişki olduğu görülmektedir (r=0.494; r=0.590; r=0.533; r=0.496;r=0.619; r=0.461; r=0.597; r=0.350; p<.05). Bu durum, geometrik temsil ile ifade edilen sorularını cevaplamada başarılı olan öğretmen adaylarının vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, lineer denklem-LDS, lineer dönüşüm kavramlarıyla ilgili sorularda da başarılı oldukları şeklinde yorumlanabilir.

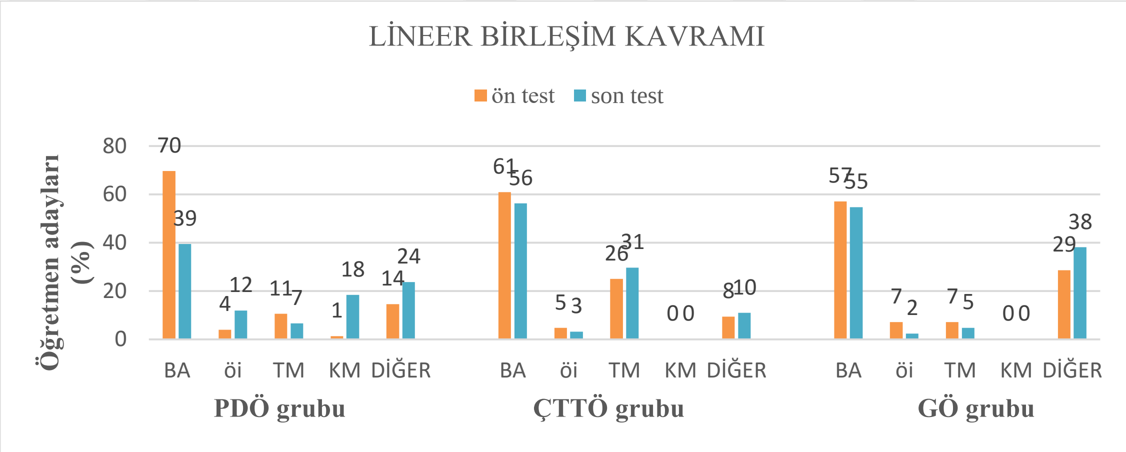
İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının rutin olmayan problemlere ilişkin performansları ile vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer dönüşüm kavramları ile ilgili performansları arasında orta düzeyde, pozitif ve anlamlı ilişki olduğu görülmektedir (r=0.383; r=0.679; r=0.673; r=0.590; r=0.689; r=0.607; r=0.481; p<.05). Bu durum, rutin olmayan problemleri cevaplamada başarılı olan öğretmen adaylarının vektör, vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer dönüşüm kavramlarıyla ilgili sorularda da başarılı oldukları şeklinde yorumlanabilir.

4.7 Araştırmanın Yedinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın bir diğer problemi "ÇTTÖ, PDÖ ve GÖ'nün uygulandığı çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının; LCPT'deki lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm kavramlarına ilişkin sorularda sergiledikleri ön test-son test anlama boyutları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için uygulama öncesinde ve sonrasında öğretmen adaylarına uygulanan LCPT'den elde edilen verileri analiz etmek için McNemar Bowker testinden yararlanılmıştır.

4.7.1 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Lineer Birleşim Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi

PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma ve GÖ'nün uygulandığı karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının tamamının, LCPT'deki lineer birleşim kavramına ilişkin sorularda sergiledikleri anlama boyutları incelendiğinde elde edilen ön test-son test anlama boyutları dağılımı aşağıdaki Şekil 4.3'te sunulmuştur.



Şekil 4.3 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer birleşim kavramına ilişkin sergiledikleri anlama boyutlarının karşılaştırılması

Şekil 4.3'e göre; lineer birleşim kavramında grupların tamamında anlama boyutlarının dört boyutta dengeli dağılmadığı ve boyutlar arasındaki yüzde farklarının oldukça yüksek (%0-69) olduğu görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarının tamamında ön ve son testlerde anlama boyutları arasında BA'nın en yüksek düzeyde sergilendiği grupların tamamında ön testlerde ve ÇTTÖ ve karşılaştırma gruplarında son testlerde KM anlama boyutunun en düşük seviyede sergilendiği görülmektedir. Bunun yanısıra, PDÖ grubunda lineer birleşim kavramına ilişkin KM boyutunun ön testten son teste büyük bir artış gözlenerek BA boyutundan sonra en yüksek düzeyde sergilenen boyut olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, ön testten son teste PDÖ grubunda BA anlama boyutu ile Öİ, TM ve KM boyutları arasındaki yüzde farkının azaldığı görülmektedir. ÇTTÖ grubunda BA anlama boyutu ile TM boyutları arasındaki yüzde farkının azaldığı diğer boyutlar arasındaki yüzde farklarındaki değişimin çok fazla olmadığı tespit edilmiştir. Elde edilen bulgular, PDÖ ve ÇTTÖ'nün öğretmen adaylarının sergilediği anlama boyutlarını dengeleme yönünde etkilediği şeklinde yorumlanabilir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının ön ve son testte lineer birleşim kavramı ile ilgili sorularda sergiledikleri Şekil 4.3'te belirtilen anlama boyutu dağılımlarındaki farklılaşmaların hangi boyutlar arasındaki geçişlerden kaynaklandığını belirlemek amacı ile bu anlama boyutlarına ilişkin frekans ve yüzdeler Tablo 4.23'te sunulmuştur.

Tablo 4.23 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer birleşim kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin ön test-son test değişim tablosu, frekans ve yüzdeleri

Lineer birleşim kavramı			**Son test Anlama Boyutları**										
			BA		Öİ		TM		KM		Diğer		Toplam
			N	(%)	N	(%)	N	(%)	N	(%)	N	(%)	n
Ön Test Anlama Boyutları	PDÖ Grubu	BA	24	45.3	8	15.1	4	7.5	7	13.2	10	18.9	53
		Öİ	0	0	0	0	0	0	2	66.7	1	33.3	3
		TM	2	25	0	0	0	0	3	37.5	3	37.5	8
		KM	1	100	0	0	0	0	0	0	0	0	1
		Diğer	3	27.3	1	9.1	1	9.1	2	18.2	4	36.4	11
		Toplam	30	39.5	9	11.8	5	6.6	14	18.4	18	23.7	76
	ÇTTÖ Grubu	BA	25	65.7	1	2.6	8	21	0	0	4	10.5	38
		Öİ	3	100	0	0	0	0	0	0	0	0	3
		TM	5	31.2	1	6.2	10	62.5	0	0	0	0	16
		KM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Diğer	2	40	0	0	1	20	0	0	2	40	5
		Toplam	35	56.4	2	3.2	19	30.6	0	0	6	9.6	62
	GÖ Grubu	BA	14	58.3	0	0	0	0	0	0	10	41.7	24
		Öİ	0	0	1	33.3	1	33.3	0	0	1	33.3	3
		TM	2	66.7	0	0	1	33.3	0	0	0	0	3
		KM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Diğer	7	58.3	0	0	0	0	0	0	5	41.7	12
		Toplam	23	54.8	1	2.4	2	4.8	0	0	16	38.1	42

Tablo 4.23'te; lineer birleşim kavramına ilişkin ön ve son testten elde edilen verilerde çalışma gruplarından PDÖ'de anlama boyutları arasındaki geçişin daha çok Öİ ve KM anlama boyutlarına olduğunu ÇTTÖ'de anlama boyutları arasındaki geçişin daha çok BA ve TM boyutuna olduğu görülmektedir. BA (10 tane) ve TM boyutuna (9 tane) geçişin en çok ÇTTÖ grubunda, Öİ (9 tane), KM (14 tane) ve "diğer" (14 tane) boyutuna geçişin en çok PDÖ grubunda olduğu, karşılaştırma grubunda anlama boyutları arasında çok fazla geçiş olmasa da en çok "diğer" (11 tane) ve BA (9 tane)

boyutuna geçiş olduğu görülmektedir. Bu durum, PDÖ ve ÇTTÖ'nün soruların çözüm sürecine ilişkin sergilenen anlama boyutlarında daha çok farklılaşma sağladığı şeklinde yorumlanabilir. Genel anlamda en çok sergilenen BA anlama boyutundan PDÖ grubunda Öİ boyutuna (yaklaşık %15), ÇTTÖ grubunda TM boyutuna (yaklaşık %21) ve karşılaştırma grubunda diğer boyutuna (yaklaşık %38) en çok geçişin sergilendiği görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının lineer birleşim kavramıyla ilgili sorularda sergiledikleri anlama boyutlarına ilişkin Tablo 4.23'te belirtilen değişimlerin ayrıca istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip göstermediğini belirlemek amacı ile McNemar Bowker testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.24'te sunulmuştur.

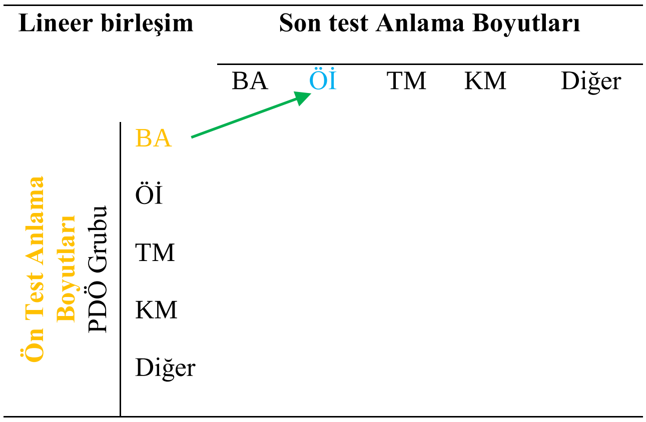
Tablo 4.24 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer birleşim kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin McNamer Bowker değerleri tablosu

Kavram	**Gruplar**	χ^2	**p**
Lineer birleşim	PDÖ	24.93	.003
	ÇTTÖ	4.359	.499
	GÖ	4.529	.339

Tablo 4.24; öğretmen adaylarının lineer birleşim kavramına ilişkin ön test ve son testte sergiledikleri anlama boyutları karşılaştırıldığında PDÖ grubunda sergilenen anlama boyutlarının anlamlı bir şekilde farklılaştığını ($\chi^2 = 24{,}9$, p=<.05) ancak ÇTTÖ ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının sergiledikleri anlama boyutlarındaki değişimin anlamlı olmadığını ($\chi^2 = 4{,}35;\ \chi^2 = 4{,}52,$ p>.05) göstermektedir. Bu durum, lineer birleşim kavramına ilişkin sergilenen boyutların değişimi üzerinde PDÖ'nün anlamlı bir etkisinin olduğu şeklinde yorumlanabilir. Sergilenen boyutlardaki anlamlı farklılaşmanın hangi yönde olduğunu ve bu farklılaşmanın anlama boyutları arasındaki geçişlerden kaynaklanıp kaynaklanmadığını belirlemek için anlama boyutlarına ikişer ikişer McNemar testi uygulanmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.25 ve Şekil 4.4'te sunulmuştur.

Tablo 4.25 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer birleşim kavramı ile ilgili ön test-son test anlama boyutları arasındaki değişime ilişkin McNamer değerleri

Kavram	**Grup**	**Anlama Boyutları**	χ^2	**p**
Lineer birleşim	PDÖ grubu	BA-Öİ	6.12	.008

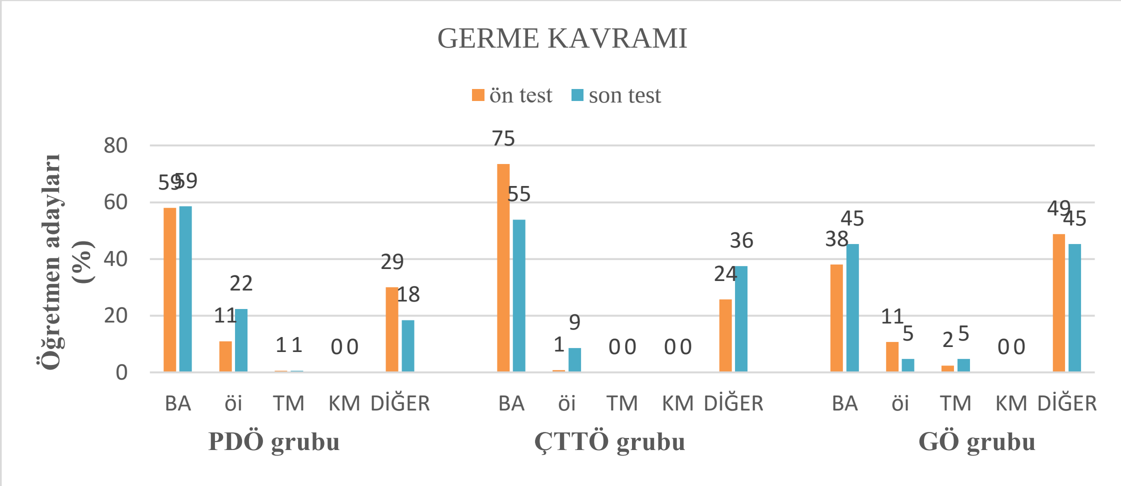


Şekil 4.4 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer birleşim kavramıyla ilgili sergiledikleri anlama boyutları arasındaki değişimin yönüne ilişkin matris

Tablo 4.25 ve Şekil 4.4'e göre; PDÖ grubunda deneysel uygulamadan önce en çok sergilenen BA anlama boyutundan Öİ anlama boyutuna geçişin anlamlı olduğu görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının sergiledikleri anlama boyutlarına ek olarak başka bir anlama boyutuna ilişkin anlamasını geliştirdiği ve dolayısıyla PDÖ'nün sergilenen anlama boyutlarını çeşitlendirdiği (zenginleştirdiği) şeklinde yorumlanabilir. Lineer birleşim kavramıyla ilgili sergilenen anlama boyutlarına ilişkin dağılım, matris ve analizlerin tamamı; öğretim sürecinde yararlanılan senaryoların, anlamanın eksik boyutlarını tamamlama yönünde etkili olduğunu göstermektedir.

4.7.2 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Germe Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi

PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma ve GÖ'nün uygulandığı karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının tamamının, LCPT'deki germe kavramına ilişkin sorularda sergiledikleri anlama boyutları incelendiğinde elde edilen grupların genel ön test-son test anlama boyutları dağılımı aşağıdaki Şekil 4.5'te sunulmuştur.



Şekil 4.5 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının germe kavramına ilişkin sergiledikleri anlama boyutlarının karşılaştırılması

Şekil 4.5; germe kavramında grupların tamamında anlama boyutlarının dört boyutta dengeli dağılmadığı ve boyutlar arasındaki yüzde farklarının oldukça yüksek olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte, ön ve son testlerin büyük çoğunluğunda (karşılaştırma grubuna ilişkin ön test haricinde) anlama boyutları arasında BA'nın en yüksek düzeyde sergilendiği, ön ve son testlerin tamamında KM anlama boyutunun sergilenmediği görülmektedir. Şekil 4.5; TM anlama boyutunun diğer boyutlardan oldukça düşük seviyede sergilendiğini, ön ve son testler arasında nispeten tutarlı olduğunu göstermektedir. Ayrıca, ön testten son teste çalışma gruplarında BA ve Öİ anlama boyutları arasındaki yüzde farkının azaldığı, karşılaştırma grubunda ise arttığı belirlenmiştir. Bu durum, çalışma gruplarında germe kavramına ilişkin sergilenen üç anlama boyutunun tamamında olmasa da BA ve Öİ boyutlarının nispeten dengelenme eğiliminde olduğu ve karşılaştırma grubunda ise germe kavramında boyutlar arasındaki dengesiz dağılımın daha çok belirginleştiği şeklinde yorumlanabilir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının ön ve son testte germe kavramıyla ilgili sorularda sergiledikleri Şekil 4.5'te belirtilen anlama boyutu dağılımlarındaki farklılaşmaların hangi boyutlar arasındaki geçişlerden kaynaklandığını belirlemek amacı ile bu anlama boyutlarına ilişkin frekans ve yüzdeler Tablo 4.26'da sunulmuştur.

Tablo 4.26 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının germe kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin ön test-son test değişim tablosu, frekans ve yüzdeleri

Germe kavramı			**Son test Anlama Boyutları**										
			BA		Öİ		TM		KM		Diğer		Toplam
			n	(%)	N	(%)	n	(%)	n	(%)	N	(%)	n
Ön Test Anlama Boyutları	PDÖ Grubu	BA	66	74.2	14	15.7	1	1.1	0	0	8	9	89
		Öİ	9	52.9	6	35.3	0	0	0	0	2	11.8	17
		TM	0	0	1	100	0	0	0	0	0	0	1
		KM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
		Diğer	14	31.1	13	28.9	0	0	0	0	18	40	45
		Toplam	89	58.6	34	22.4	1	0.7	0	0	28	18.4	152
	ÇTTÖ Grubu	BA	61	65.5	8	8.6	0	0	0	0	24	25.8	93
		Öİ	1	100	0	0	0	0	0	0	0	0	1
		TM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		KM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Diğer	6	20	3	10	0	0	0	0	21	70	30
		Toplam	68	54.8	11	8.8	0	0	0	0	45	36.2	124
	GÖ Grubu	BA	27	84.4	1	3.1	1	3.1	0	0	3	9.4	32
		Öİ	3	33.3	3	33.3	0	0	0	0	3	33.3	9
		TM	0	0	0	0	2	100	0	0	0	0	2
		KM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Diğer	8	19.5	0	0	1	2.4	0	0	32	78	41
		Toplam	38	45.2	4	4.8	4	4.8	0	0	38	45.2	84

Tablo 4.26'da; çalışma ve karşılaştırma gruplarının tamamında germe kavramına ilişkin ön test ve son testten elde edilen verilerde, geçişlerin daha çok BA ve Öİ anlama boyutlarına olduğunu TM boyutuna geçişin yok denecek kadar az olduğu görülmektedir. BA (23 tane) ve Öİ boyutuna (28 tane) geçişin en çok PDÖ grubunda, "diğer" boyutuna geçişin en çok ÇTTÖ (24 tane) grubunda olduğu karşılaştırma grubunda anlama boyutları arasında çok fazla geçiş olmadığı görülmektedir. Bu durum, PDÖ ve ÇTTÖ'nün soruların çözüm sürecine ilişkin sergilenen anlama boyutlarında daha çok farklılaşma sağladığı şeklinde yorumlanabilir. Genel anlamda en çok sergilenen BA anlama boyutundan PDÖ grubunda Öİ boyutuna (yaklaşık %16), ÇTTÖ (yaklaşık %26) ve karşılaştırma grubunda diğer boyutuna (yaklaşık %10) en çok geçişin sergilendiği görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının germe kavramıyla ilgili sorularda sergiledikleri anlama boyutlarına ilişkin Tablo 4.26'da belirtilen değişimlerin ayrıca istatistiksel olarak anlamlı farklılık gösterip

göstermediğini belirlemek amacı ile McNemar Bowker testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.27'de sunulmuştur.

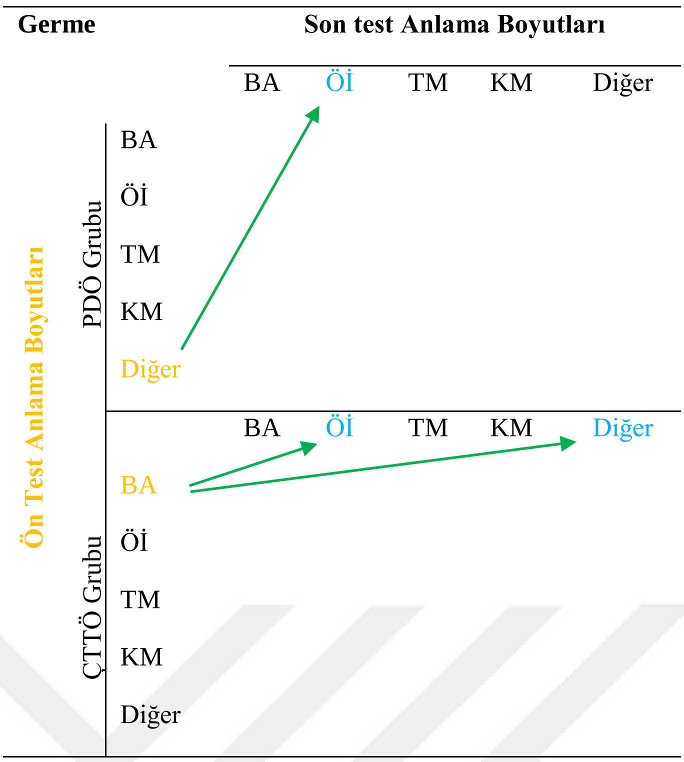
Tablo 4.27 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının germe kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin McNamer Bowker değerleri tablosu

Kavram	Gruplar	χ^2	p
Germe	PDÖ	12.79	.025
	ÇTTÖ	19.24	.000
	GÖ	8.27	.142

Tablo 4.27; PDÖ ve ÇTTÖ gruplarındaki öğretmen adaylarının germe kavramına ilişkin ön test ve son testte sergiledikleri boyutların anlamlı bir şekilde farklılaştığını ($\chi^2 = 12{,}79$; $\chi^2 = 19{,}24$, p=<.05) ancak karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının sergiledikleri boyutlardaki değişimin anlamlı olmadığını göstermektedir. Bu durum, germe kavramına ilişkin sergilenen boyutlarının değişimi üzerinde PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün anlamlı bir etkisinin olduğu şeklinde yorumlanabilir. Sergilenen boyutlardaki anlamlı farklılaşmanın hangi yönde olduğunu ve bu farklılaşmanın anlama boyutları arasındaki geçişlerden kaynaklanıp kaynaklanmadığını belirlemek için anlama boyutlarına ikişer ikişer McNemar testi uygulanmış ve sonuçlar aşağıda Tablo 4.28 ve Şekil 4.6'da sunulmuştur.

Tablo 4.28 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının germe kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin ön test-son test anlama boyutları arasındaki değişime ilişkin McNamer değerleri

Kavram	Gruplar	Anlama Boyutları	χ^2	p
Germe	PDÖ	Diğer- Öİ	6.67	.007
	ÇTTÖ	BA-Öİ	4.00	.039
		BA-Diğer	9.63	.002

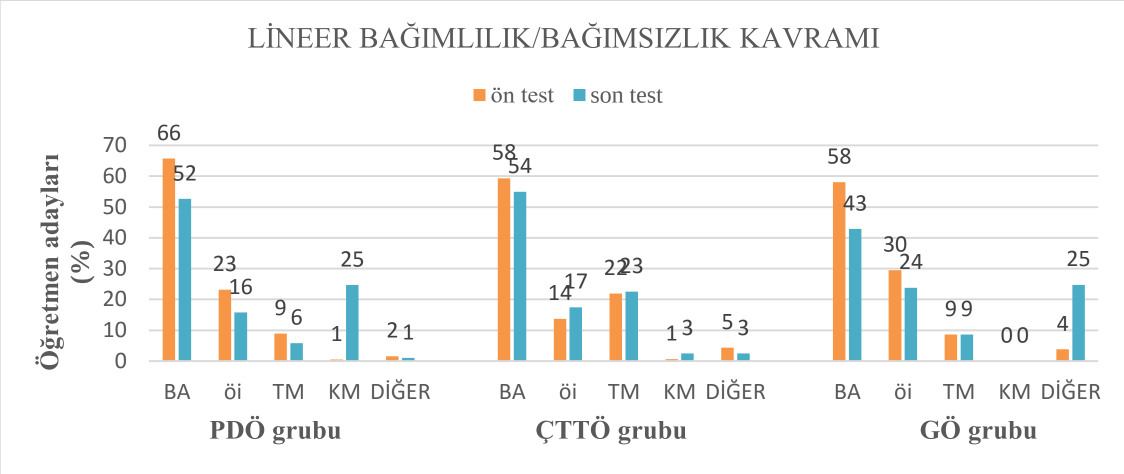


Şekil 4.6 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının germe kavramıyla ilgili sergiledikleri anlama boyutları arasındaki değişimin yönüne ilişkin matris

Tablo 4.28 ve Şekil 4.6'ya göre PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün germe kavramıyla ilgili sergilenen boyutlara farklı yansımaları olduğu ve ÇTTÖ grubunda deneysel uygulamadan önce en çok sergilenen BA anlama boyutundan Öİ ve "diğer" boyutlarına PDÖ grubunda ise "diğer" boyutundan Öİ anlama boyutuna anlamlı geçişler olduğu görülmektedir. Bu durum PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün germe kavramına ilişkin sergilenen anlama boyutlarını çeşitlendirdiği (zenginleştirdiği) şeklinde yorumlanabilir. Germe kavramıyla ilgili sergilenen anlama boyutlarına ilişkin dağılım, matris ve analizlerin tamamı; bu kavrama ilişkin öğretim sürecinde yararlanılan çoklu temsillerin (cebirsel, geometrik ve matris) ve senaryoların, öğretmen adaylarının sergiledikleri boyutlara ek olarak başka boyutlara ilişkin anlamasını geliştirdiğini dolayısıyla anlamanın eksik boyutlarını tamamlama yönünde etkili olduğunu göstermektedir.

4.7.3 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Lineer Bağımlılık/Bağımsızlık Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi

PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma ve GÖ'nün uygulandığı karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının tamamının, LCPT'deki lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin sorularda sergiledikleri anlama boyutları incelendiğinde elde edilen grupların genel ön ve son test anlama boyutları dağılımı aşağıdaki şekil 4.7'de sunulmuştur.



Şekil 4.7 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin sergiledikleri anlama boyutlarının karşılaştırılması

Şekil 4.7'ye göre; lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramında grupların tamamında anlama boyutlarının dört boyutta dengeli dağılmadığı ve boyutlar arasındaki yüzde farklarının oldukça yüksek (%8-%65) olduğu görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarının ön ve son testlerinin tamamında anlama boyutları arasında BA'nın en yüksek düzeyde sergilendiği, ön (grupların tamamında) ve son testlerde (PDÖ grubu haricinde) KM anlama boyutunun en düşük seviyede sergilendiği belirlenmiştir. TM ve KM anlama boyutlarının ön ve son testler arasında nispeten tutarlı olduğu görülmektedir. Bunun yanısıra, PDÖ grubunda lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin KM boyutunun ön testten son teste büyük bir artış gözlenerek BA boyutundan sonra en yüksek düzeyde sergilenen boyut olduğu gözlenmiştir. Bununla birlikte, BA anlama boyutu ile diğer boyutlar arasındaki yüzde farkının oldukça yüksek olduğu, bu anlama boyutu (BA) ile Öİ boyutu arasındaki farkın PDÖ ve karşılaştırma gruplarında nispeten daha az olduğu görülmektedir. PDÖ grubu haricinde lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı ile ilgili sergilenen boyutlarda sıralamanın değişmediği ancak grupların tamamında sergilenen anlama boyutlarının büyük çoğunluğu (PDÖ grubunda TM-KM; karşılaştırma grubunda TM-KM boyutları haricinde) arasında yüzde farkının azaldığı belirlenmiştir. Ancak bu kavram (lineer bağımlılık/bağımsızlık) için yalnızca karşılaştırma grubunda ön testten son teste sergilenen anlama boyutlarının hiçbirinde sergilenme yüzdesinin artmadığı ve buna karşılık anlama boyutlarının sergilenmediği durumu temsil eden "diğer" yüzdesinin arttığı görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının ön ve son testte lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramıyla ilgili sorularda sergiledikleri Şekil 4.7'de belirtilen anlama boyutu dağılımlarındaki farklılaşmaların hangi boyutlar arasındaki geçişlerden kaynaklandığını belirlemek amacı ile bu anlama boyutlarına ilişkin frekans ve yüzdeler Tablo 4.29'da sunulmuştur.

Tablo 4.29 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin ön test-son test değişim tablosu, frekans ve yüzdeleri

Lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı			**Son test Anlama Boyutları**										
			BA		Öİ		TM		KM		Diğer		Toplam
			N	(%)	N	(%)	n	(%)	N	(%)	n	(%)	N
Ön Test Anlama Boyutları	PDÖ Grubu	BA	65	52	13	10.4	8	6.4	38	30.4	1	0.8	125
		Öİ	26	59.1	16	36.4	2	4.5	0	0	0	0	44
		TM	8	47.1	1	5.9	1	5.9	7	41.20	0	0	17
		KM	0	0	0	0	0	0	1	100	0	0	1
		Diğer	1	33.3	0	0	0	0	1	33.3	1	33.3	3
		Toplam	100	52.6	30	15.8	11	5.8	47	24.7	2	1.1	190
	ÇTTÖ Grubu	BA	62	68	16	17.5	13	14.2	0	0	0	0	91
		Öİ	10	47.6	8	38	1	4.7	2	9.5	0	0	21
		TM	11	31.4	1	2.8	22	62.8	1	2.8	0	0	35
		KM	0	0	0	0	0	0	0	0	1	100	1
		Diğer	1	14.2	2	28.5	0	0	1	14.2	3	42.6	7
		Toplam	84	54.1	27	17.4	36	23.2	4	2.5	4	2.5	155
	GÖ Grubu	BA	31	50.8	12	19.7	4	6.6	0	0	14	23	61
		Öİ	12	38.7	11	35.5	0	0	0	0	8	25.8	31
		TM	1	11.1	2	22.2	5	55.6	0	0	1	11.1	9
		KM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Diğer	1	25	0	0	0	0	0	0	3	75	4
		Toplam	45	42.9	25	23.8	9	8.6	0	0	26	24.8	105

Tablo 4.29; çalışma gruplarında, BA, Öİ, TM ve KM anlama boyutlarının tamamına geçişler olduğunu ancak BA (35 tane) ve KM (46 tane) anlama boyutlarına geçişin daha çok PDÖ grubunda, Öİ ve TM anlama boyutuna geçişin daha çok ÇTTÖ grubunda "diğer" boyutuna geçişin daha çok karşılaştırma grubunda gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca, genel anlamda en çok sergilenen BA anlama boyutundan PDÖ grubunda KM boyutuna (yaklaşık %30), ÇTTÖ grubunda Öİ boyutuna (yaklaşık %17) ve karşılaştırma grubunda diğer boyutuna (%23) en çok geçişin sergilendiği görülmektedir. Elde edilen bulgular (Tablo 4.29'dan), lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin sergilenen anlama boyutlarının öğretim yöntem ve yaklaşımına göre

farklılaştığı şeklinde yorumlanabilir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramıyla ilgili sorularda sergiledikleri anlama boyutlarına ilişkin yukarıda Tablo 4.29'da belirtilen farklılaşmaların ayrıca istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemek amacı ile McNemar Bowker testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.30'da sunulmuştur.

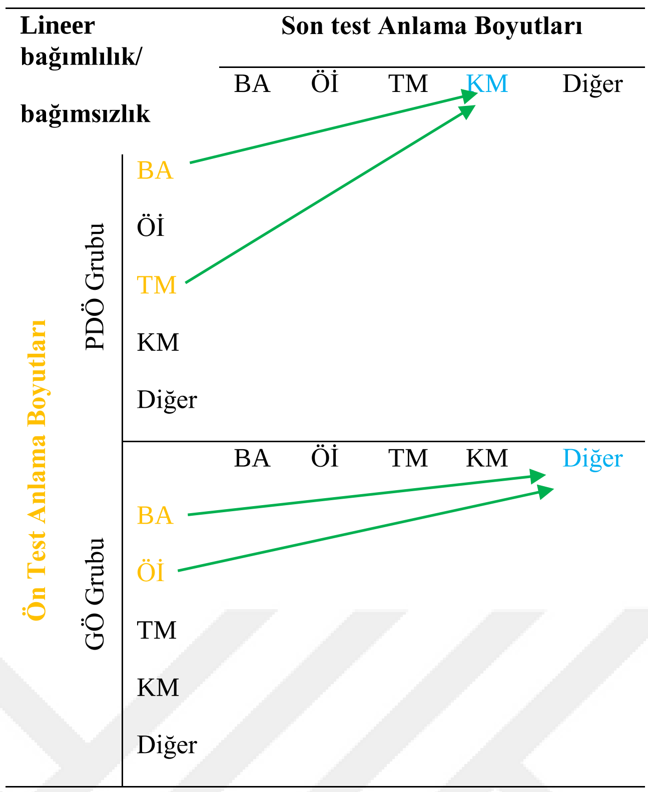
Tablo 4.30 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin McNamer Bowker değerleri tablosu

Kavram	**Gruplar**	χ^2	**p**
Lineer bağımlılık/bağımsızlık	PDÖ	50.667	.000
	ÇTTÖ	10.833	.211
	GÖ	24.067	.001

Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin ön test ve son testte sergiledikleri boyutlar karşılaştırıldığında PDÖ ve karşılaştırma gruplarında sergilenen boyutların anlamlı bir şekilde farklılaştığı ($\chi^2 = 50{,}66$, $\chi^2 = 24{,}06$, p=<.05**)** ancak ÇTTÖ grubunda sergilenen boyutlardaki farklılaşmanın anlamlı olmadığı görülmektedir. Bu durum, lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin sergilenen boyutların değişimi üzerinde PDÖ'nün ve GÖ'nün anlamlı bir etkisinin olduğu şeklinde yorumlanabilir. Sergilenen boyutlardaki anlamlı farklılaşmanın hangi yönde olduğunu ve bu farklılaşmanın anlama boyutları arasındaki geçişlerden kaynaklanıp kaynaklanmadığını belirlemek için anlama boyutlarına ikişer ikişer McNemar testi uygulanmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.31 ve Şekil 4.8'de sunulmuştur.

Tablo 4.31 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı ile ilgili ön test-son test anlama boyutları arasındaki değişime ilişkin McNamer değerleri

Kavram	**Gruplar**	**Anlama Boyutları**	χ^2	**P**
Lineer bağımlılık/ Bağımsızlık	PDÖ	BA-KM	36.02	.000
		TM-KM	5.14	.016
	GÖ	BA-Diğer	9.60	.001
		Öİ-Diğer	6.12	.008

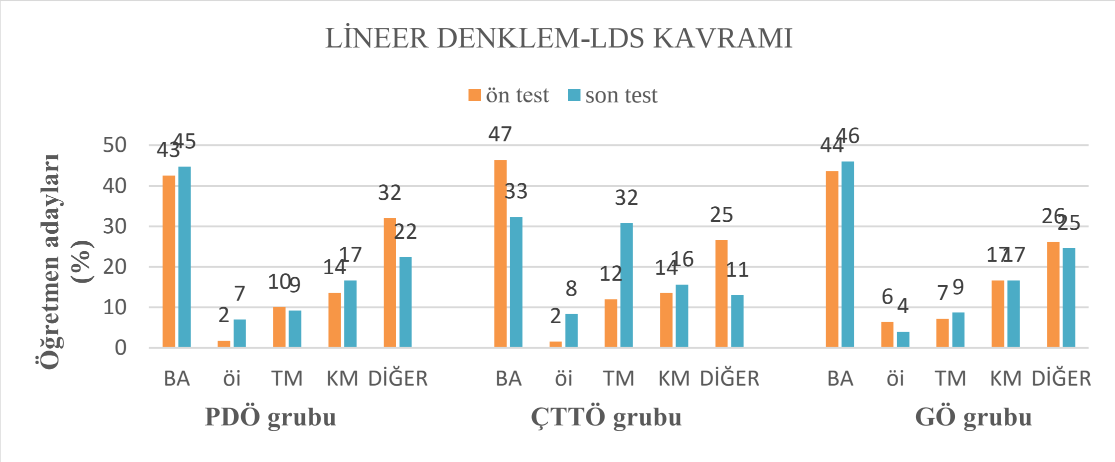


Şekil 4.8 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramıyla ilgili sergiledikleri anlama boyutları arasındaki değişimin yönüne ilişkin matris

Tablo 4.31 ve Şekil 4.8'e göre uygulanan PDÖ'nün ve GÖ'nün lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramıyla ilgili sergilenen boyutlara ilişkin farklı yansımaları olduğu, PDÖ grubunda BA ve TM anlama boyutlarından KM anlama boyutuna ve GÖ grubunda BA ve Öİ anlama boyutlarından "diğer" boyutuna geçişler olduğu görülmektedir. Bu durum PDÖ'nün sergilenen anlama boyutlarını çeşitlendirdiği (zenginleştirdiği) ancak GÖ'nün anlama boyutlarını çeşitlendirmede etkili olmadığı şeklinde yorumlanabilir. Lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramıyla ilgili sergilenen anlama boyutlarına ilişkin dağılım, matris ve analizlerin tamamı; bu kavrama ilişkin öğretim sürecinde yararlanılan senaryonun, öğretmen adaylarının sergiledikleri anlama boyutlarına ek olarak başka bir boyuta ilişkin anlamasını geliştirdiğinin dolayısıyla anlamanın eksik boyutlarını tamamlama yönünde etkili olduğunun göstergesidir.

4.7.4 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Lineer Denklem-LDS Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi

PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma ve GÖ'nün uygulandığı karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının tamamının, LCPT'deki lineer denklem-LDS kavramına ilişkin sorularda sergiledikleri anlama boyutları incelendiğinde elde edilen grupların genel ön test-son test anlama boyutları dağılımı aşağıdaki şekil 4.9'da sunulmuştur.



Şekil 4.9. Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer denklem-LDS kavramına ilişkin sergiledikleri anlama boyutlarının karşılaştırılması

Şekil 4.9'a göre; lineer denklem-LDS kavramında grupların tamamında anlama boyutlarının dört boyutta dengeli dağılmadığı ve bazı boyutlar arasındaki yüzde farklarının oldukça yüksek (% 1-% 44) olduğu görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarının ön ve son testlerin tamamında anlama boyutları arasında BA'nın en yüksek düzeyde sergilendiği, Öİ anlama boyutlarının diğer boyutlardan oldukça düşük seviyede sergilendiği ve KM anlama boyutunun testler arasında nispeten tutarlı olduğu görülmektedir. Bunun yanısıra, ÇTTÖ grubunda lineer denklem-LDS kavramına ilişkin TM boyutunun ön testten son teste büyük bir artış gözlenerek BA boyutundan sonra en yüksek düzeyde sergilenen boyut olduğu gözlenmiştir. ÇTTÖ grubu haricinde lineer denklem-LDS kavramı ile ilgili sergilenen boyutlarda sıralamanın değişmediği; sergilenen anlama boyutlarının büyük çoğunluğu (PDÖ grubunda BA-TM, TM-KM; ÇTTÖ grubunda Öİ-TM, TM-KM boyutları haricinde) arasında yüzde farkının çalışma gruplarında azaldığı karşılaştırma grubunda ise (BA-TM, TM-KM boyutları haricinde) arttığı belirlenmiştir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının ön test-son testte lineer denklem-LDS kavramıyla ilgili sorularda sergiledikleri Şekil 4.9'da belirtilen anlama boyutu dağılımlarındaki farklılaşmaların hangi boyutlar arasındaki geçişlerden kaynaklandığını belirlemek amacı ile bu anlama boyutlarına ilişkin frekans ve yüzdeler Tablo 4.32'de sunulmuştur.

Tablo 4.32 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer denklem-LDS kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin ön test-son test değişim tablosu, frekans ve yüzdeleri

Lineer denklem-LDS kavramı			**Son test Anlama Boyutları**										
			BA		Öİ		TM		KM		Diğer		Toplam
			N	(%)	N	(%)	N	(%)	N	(%)	N	(%)	N
Ön Test Anlama Boyutları	PDÖ Grubu	BA	67	69.1	7	7.2	3	3.1	4	4.1	16	16.5	97
		Öİ	1	25	3	75	0	0	0	0	0	0	4
		TM	8	34.8	1	4.3	9	39.1	0	0	5	21.7	23
		KM	1	3.2	0	0	0	0	29	93.5	1	3.2	31
		Diğer	25	34.2	5	6.8	9	12.3	5	6.8	29	39.7	73
		Toplam	102	44.7	16	7	21	9.2	38	16.7	51	22.4	228
	ÇTTÖ Grubu	BA	39	44.3	10	11.3	31	35.2	2	2.2	6	6.8	88
		Öİ	0	0	3	100	0	0	0	0	0	0	3
		TM	2	8.6	0	0	19	82.6	0	0	2	8.6	23
		KM	0	0	0	0	0	0	26	100	0	0	26
		Diğer	20	43.4	3	6.5	9	19.5	2	4.3	12	26	46
		Toplam	61	32.7	16	8.6	59	31.7	30	16.1	20	10.7	186
	GÖ Grubu	BA	45	81.8	2	3.6	1	1.8	0	0	7	12.7	55
		Öİ	6	75	2	25	0	0	0	0	0	0	8
		TM	0	0	0	0	8	88.9	0	0	1	11.1	9
		KM	0	0	0	0	0	0	21	100	0	0	21
		Diğer	7	21.2	1	3	2	6.1	0	0	23	69.7	33
		Toplam	58	46	5	4	11	8.7	21	16.7	31	24.6	126

Tablo 4.32; çalışma gruplarında, BA, Öİ, TM ve KM anlama boyutlarının tamamına geçişler olduğunu ancak BA (35 tane) ve KM (9 tane) anlama boyutlarına geçişin daha çok PDÖ grubunda, Öİ (13 tane) anlama boyutuna geçişin çalışma gruplarında eşit olduğu ve TM (40 tane) anlama boyutuna geçişin daha çok ÇTTÖ grubunda gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca, genel anlamda en çok sergilenen BA anlama boyutundan PDÖ grubunda sırasıyla "diğer" (%17) ve Öİ boyutuna (yaklaşık %7), ÇTTÖ grubunda TM boyutuna (yaklaşık %35) ve karşılaştırma grubunda "diğer" boyutuna (%13) en çok geçişin sergilendiği görülmektedir. Elde edilen bulgular lineer denklem-LDS kavramına ilişkin sergilenen anlama boyutlarının öğretim yöntem ve yaklaşımına göre farklılaştığı şeklinde yorumlanabilir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının lineer denklem-LDS kavramıyla ilgili sorularda sergiledikleri anlama boyutlarına ilişkin yukarıda belirtilen farklılaşmaların ayrıca istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemek amacı ile McNemar Bowker testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.33'te sunulmuştur.

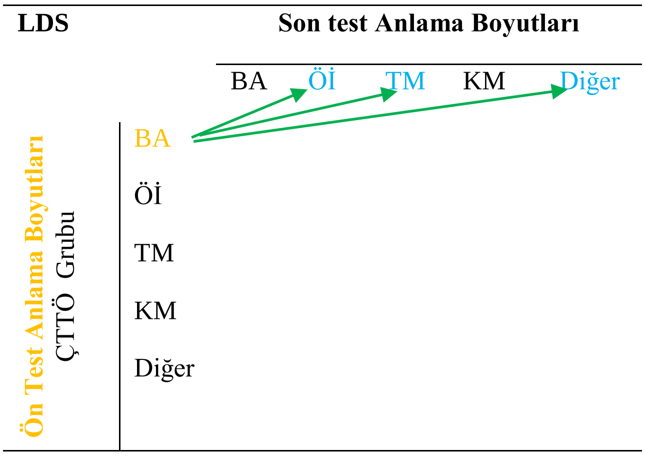
Tablo 4.33 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer denklem-LDS kavramı ile ilgili sergilenen anlama boyutlarına ilişkin McNamer Bowker değerleri tablosu

Kavram	**Gruplar**	χ^2	**p**
	PDÖ	20.358	.009
Lineer denklem-LDS	ÇTTÖ	54.478	.000
	GÖ	4.333	.502

Bununla birlikte öğretmen adaylarının lineer denklem-LDS kavramına ilişkin ön test ve son testte sergiledikleri boyutlar karşılaştırıldığında PDÖ ve ÇTTÖ gruplarında sergilenen boyutların anlamlı bir şekilde farklılaştığı ($\chi^2 = 20{,}35$; $\chi^2 = 54{,}47$, $p=<.05$**)** ancak karşılaştırma grubunda sergilenen boyutlardaki farklılaşmanın anlamlı olmadığı görülmektedir. Bu durum, lineer denklem-LDS kavramına ilişkin sergilenen boyutların değişimi üzerinde PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün anlamlı bir etkisinin olduğu şeklinde yorumlanabilir. Sergilenen boyutlardaki anlamlı farklılaşmanın hangi yönde olduğunu ve bu farklılaşmanın anlama boyutları arasındaki geçişlerden kaynaklanıp kaynaklanmadığını belirlemek için anlama boyutlarına ikişer ikişer McNemar testi uygulanmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.34 ve Şekil 4.10'da sunulmuştur.

Tablo 4.34 Çalışma ve karşılaştırma gruplarında lineer denklem-LDS kavramıyla ilgili ön test-son test anlama boyutları arasındaki değişime ilişkin McNamer değerleri

Kavram	**Gruplar**	**Anlama Boyutları**	χ^2	**P**
LDS	ÇTTÖ	BA-Öİ	8.1	.002
		BA-TM	23.75	.000
		BA-DİĞER	6.5	.01

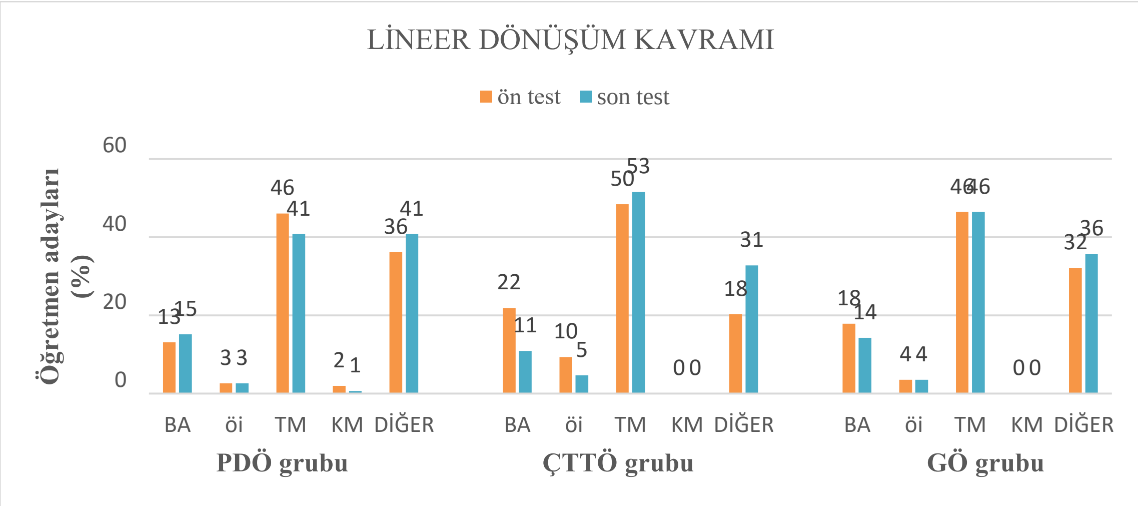


Şekil 4.10 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer denklem-LDS kavramıyla ilgili sergiledikleri anlama boyutları arasındaki değişimin yönüne ilişkin matris

Tablo 4.34 ve Şekil 4.10'a göre ÇTTÖ grubunda deneysel uygulamadan önce lineer denklem-LDS kavramına ilişkin en çok sergilenen BA anlama boyutundan Öİ, TM ve "diğer" boyutlarına geçişin anlamlı olduğu görülmektedir. Bu durum ÇTTÖ'nün sergilenen anlama boyutlarını çeşitlendirdiği (zenginleştirdiği) şeklinde yorumlanabilir. PDÖ grubunda boyutlar arasındaki geçişlerin anlamlı olmadığı ve dolayısıyla sergilenen anlama boyutlarını çeşitlendirme yönünde etkilemediği belirlenmiştir. Lineer denklem-LDS kavramı ile ilgili sergilenen anlama boyutlarına ilişkin dağılım, matris ve analizlerin tamamı; öğretim sürecinde kavramların çoklu temsillerinin (cebirsel, geometrik ve matris), öğretmen adaylarının sergiledikleri anlama boyutlarına ek olarak başka boyutlara ilişkin anlamasını geliştirdiğinin dolayısıyla anlamanın eksik boyutlarını tamamlama yönünde etkili olduğunun göstergesidir.

4.7.5 PDÖ, ÇTTÖ ve GÖ'nün Öğretmen Adaylarının Lineer Dönüşüm Kavramına İlişkin Sergiledikleri Anlama Boyutlarına Etkisi

PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma ve GÖ'nün uygulandığı karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının tamamının, LCPT'deki lineer dönüşüm kavramına ilişkin sorularda sergiledikleri anlama boyutları incelendiğinde elde edilen grupların genel ön ve son test anlama boyutları dağılımı aşağıdaki şekil 4.11'de sunulmuştur.



Şekil 4.11 Çalışma ve karşılaştırma gruplarındaki öğretmen adaylarının lineer dönüşüm kavramına ilişkin sergiledikleri anlama boyutlarının karşılaştırılması

Şekil 4.11'e göre; lineer dönüşüm kavramında grupların tamamında anlama boyutlarının dört boyutta dengeli dağılmadığı ve bazı boyutlar arasındaki yüzde farklarının oldukça yüksek (%1-%53) olduğu görülmektedir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarının ön ve son testlerin tamamında anlama boyutları arasında TM'nin en yüksek düzeyde sergilendiği, Öİ ve KM anlama boyutlarının diğer boyutlardan oldukça düşük seviyede sergilendiği ve BA haricinde diğer anlama boyutlarının testler arasında nispeten tutarlı olduğu görülmektedir. Bunun yanısıra, lineer dönüşüm kavramına ilişkin PDÖ grubunda BA ve ÇTTÖ grubunda TM boyutunun ön testten son teste azda olsa artış gösterdiği gözlenmiştir. Lineer dönüşüm kavramı ile ilgili sergilenen anlama boyutlarında sıralamanın (TM, BA, Öİ, KM) grupların tamamında korunduğu ve TM ile diğer anlama boyutları arasındaki yüzde farkının PDÖ grubunda azaldığı; ÇTTÖ grubunda ise arttığı belirlenmiştir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının ön ve son testte lineer dönüşüm kavramıyla ilgili sorularda sergiledikleri Şekil 4.11'de belirtilen anlama boyutu dağılımlarındaki farklılaşmaların hangi boyutlar arasındaki geçişlerden kaynaklandığını belirlemek amacı ile bu anlama boyutlarına ilişkin frekans ve yüzdeler Tablo 4.35'te sunulmuştur.

Tablo 4.35 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer dönüşüm kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin ön test-son test değişim tablosu, frekans ve yüzdeleri

Lineer dönüşüm Kavramı			**Son test Anlama Boyutları**										
			BA		Öİ		TM		KM		Diğer		Toplam
			N	(%)	N	(%)	N	(%)	N	(%)	N	(%)	N
Ön Test Anlama Boyutları	PDÖ Grubu	BA	11	55	0	0	1	5	0	0	8	40	20
		Öİ	2	50	1	25	0	0	0	0	1	25	4
		TM	7	10	1	1.4	47	67.1	0	0	15	21.4	70
		KM	0	0	0	0	1	33.3	0	0	2	66.7	3
		Diğer	3	5.5	2	3.6	13	23.6	1	1.8	36	65.5	55
		Toplam	23	15.1	4	2.6	62	40.8	1	0.7	62	40.8	152
	ÇTTÖ Grubu	BA	9	32.1	4	14.2	11	39.2	0	0	4	14.2	28
		Öİ	2	16.6	1	8.3	3	25	0	0	6	50	12
		TM	2	3.2	1	1.6	44	70.9	0	0	15	24.1	62
		KM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Diğer	1	4.5	0	0	8	36.3	0	0	13	59	22
		Toplam	14	11.2	6	4.8	66	53.2	0	0	38	33.8	124
	GÖ Grubu	BA	6	40	3	20	1	6.7	0	0	5	33.3	15
		Öİ	2	66.7	0	0	0	0	0	0	1	33.3	3
		TM	6	15.4	0	0	30	76.9	0	0	3	7.7	39
		KM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Diğer	1	3.7	0	0	8	29.6	0	0	18	66.7	27
		Toplam	15	17.9	3	3.6	39	46.4	0	0	27	32.1	84

Tablo 4.35; çalışma ve karşılaştırma gruplarının tamamında, BA, Öİ, TM anlama boyutlarının tamamına geçişler olduğunu ancak ve KM anlama boyutuna geçişin neredeyse olmadığını göstermektedir. BA (12 tane) anlama boyutuna geçişin daha çok PDÖ grubunda, Öİ (5 tane) ve TM (22 tane) anlama boyutuna geçişin daha çok ÇTTÖ grubunda gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca, genel anlamda en çok sergilenen TM anlama boyutundan PDÖ grubunda sırasıyla diğer" (yaklaşık %21) ve BA boyutuna (yaklaşık %10), ÇTTÖ grubunda "diğer" boyutuna (yaklaşık %24) ve karşılaştırma grubunda BA boyutuna (%15) en çok geçişin sergilendiği görülmektedir. Elde edilen bulgular lineer dönüşüm kavramına ilişkin sergilenen anlama boyutlarının öğretim yöntem ve yaklaşımına göre farklılaştığı şeklinde yorumlanabilir. Çalışma ve karşılaştırma grubundaki öğretmen adaylarının tamamının lineer dönüşüm kavramıyla ilgili sorularda sergiledikleri anlama boyutlarına ilişkin Tablo 4.35'te belirtilen farklılaşmaların ayrıca istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemek amacı ile McNemar Bowker testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.36'da sunulmuştur.

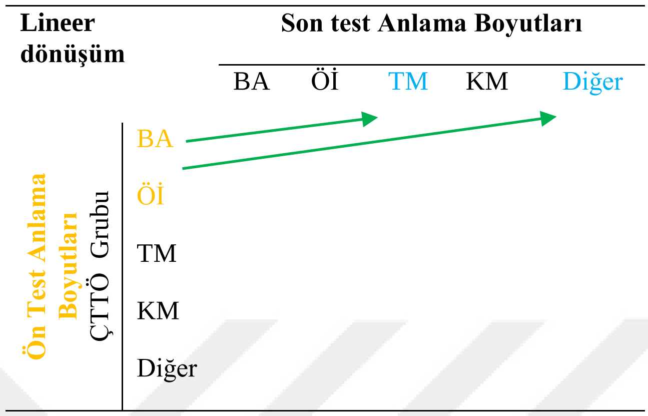
Tablo 4.36 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer dönüşüm kavramı ile ilgili anlama boyutlarına ilişkin McNamer Bowker değerleri tablosu

Kavram	**Gruplar**	χ^2	**p**
Lineer dönüşüm	PDÖ	11.582	.171
	ÇTTÖ	17.828	.007
	GÖ	9.711	.084

Bununla birlikte öğretmen adaylarının lineer dönüşüm kavramına ilişkin ön test ve son testte sergiledikleri boyutlar karşılaştırıldığında ÇTTÖ grubunda sergilenen boyutların anlamlı bir şekilde farklılaştığı ($\chi^2 = 17{,}82$, p=<.05) ancak PDÖ ve karşılaştırma grubunda sergilenen boyutlardaki farklılaşmanın anlamlı olmadığı görülmektedir. Bu durum, lineer dönüşüm kavramına ilişkin sergilenen anlama boyutlarının değişimi üzerinde ÇTTÖ'nün anlamlı bir etkisinin olduğu şeklinde yorumlanabilir. Sergilenen boyutlardaki anlamlı farklılaşmanın hangi yönde olduğunu ve bu farklılaşmanın anlama boyutları arasındaki geçişlerden kaynaklanıp kaynaklanmadığını belirlemek için anlama boyutlarına ikişer ikişer McNemar testi uygulanmış ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.37 ve Şekil 4.12'de sunulmuştur.

Tablo 4.37 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer dönüşüm kavramı ile ilgili ön test-son test anlama boyutları arasındaki değişime ilişkin McNamer değerleri

Kavram	Gruplar	Anlama Boyutları	χ^2	P
Lineer dönüşüm	ÇTTÖ	BA-TM	4.92	.022
		Öİ-DİĞER	4.16	.031



Şekil 4.12 Çalışma ve karşılaştırma gruplarının lineer dönüşüm kavramıyla ilgili sergiledikleri anlama boyutları arasındaki değişimin yönüne ilişkin matris

Tablo 4.37 ve Şekil 4.12'de göre; ÇTTÖ grubunda BA anlama boyutundan deneysel uygulamadan önce lineer dönüşüm kavramına ilişkin en çok sergilenen TM anlama boyutuna ve ayrıca Öİ anlama boyutundan "diğer" boyutuna geçişin anlamlı olduğu görülmektedir. Bu durum ÇTTÖ'nün sergilenen anlama boyutlarını çeşitlendirdiği (zenginleştirdiği) şeklinde yorumlanabilir. Lineer dönüşüm kavramıyla ilgili sergilenen anlama boyutlarına ilişkin dağılım, matris ve analizlerin tamamı; öğretim sürecinde kavramların çoklu temsillerinin (cebirsel, geometrik ve matris), öğretmen adaylarının sergiledikleri boyutlara ek olarak başka bir (TM) boyuta ilişkin anlamasını geliştirdiğinin dolayısıyla anlamanın eksik boyutlarını tamamlama yönünde etkili olduğunun göstergesidir.

PDÖ'nün, ÇTTÖ'nün ve GÖ'nün kavram bazında anlama boyutlarına etkisi aşağıda Tablo 4.38'de sunulmuştur.

Tablo 4.38 Çalışma ve karşılaştırma grupları kavram bazında sergilenen anlama boyutlarına ilişkin anlamlı değişim tablosu

Değişimler	**Gruplar**	**Kavramlar** Lineer birleşim	Germe	Lineer bağımlılık bağımsızlık	Baz	Lineer Denklem-LDS	Lineer Dönüşüm
Kavram bazında sergilenen anlama boyutlarındaki anlamlı değişimler	PDÖ	✓	✓	✓	°[8]	-	-
	ÇTTÖ	-	✓	-	°	✓	✓
	GÖ	-	-	-	°	-	

Not: Çalışma ve karşılaştırma gruplarından kavram bazında sergilenen anlama boyutları arasında ön testten son teste anlamlı değişim olduğu tespit edilen gruplar "✓" ile anlamlı değişim olmadığı tespit edilen gruplar "-" ile gösterilmiştir.

Bu araştırmada Tablo 4.38'e göre; GÖ'nün araştırmaya konu olan lineer cebir kavramları ile ilgili soruların çözüm sürecinde sergilenen anlama boyutlarını, çeşitlendirme yönünde etki etmediği sonucuna varılmıştır.

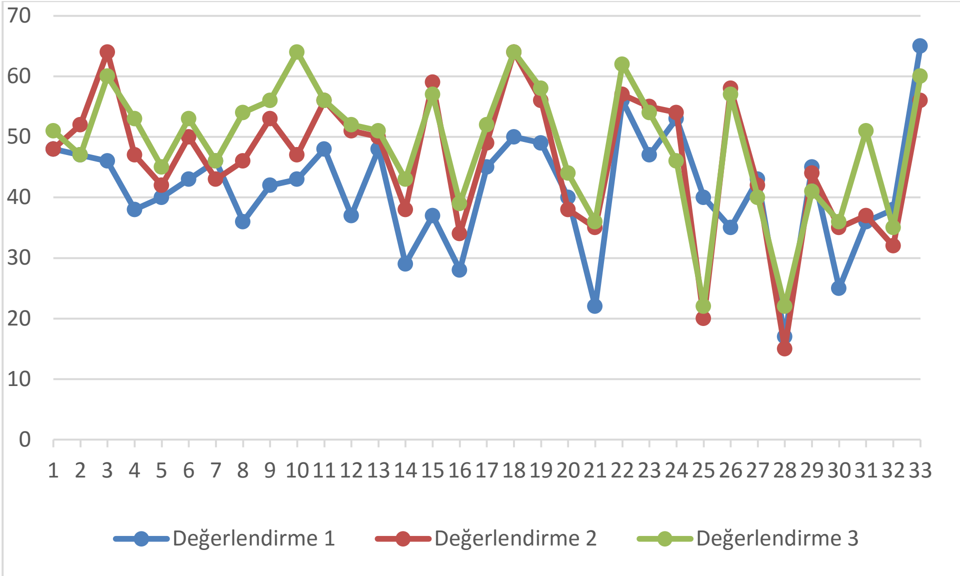
4.8 Araştırmanın Sekizinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın bir diğer problemi "PDÖ uygulanan gruptaki öğretmen adaylarının; modüllerin her birinin sonunda tekrarlı bir şekilde uygulanan KDF'den, EYDF'den ve ÖADF'den aldıkları puanlar arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için tek gruba ilişkin ikiden fazla tekrarlı ölçümün ortalamalarını karşılaştırmada kullanılan parametrik testlerden tekrarlı ölçümler için tek yönlü varyans analizinden (EYDF'ye ilişkin karşılaştırmalarda) ve bu analizin şartlarının (normallik ve varyansların eşitliği) sağlanmadığı durumlarda Friedman testinden (KDF ve ÖADF'ye ilişkin karşılaştırmalarda) yararlanılmıştır.

4.8.1 Öğretmen Adaylarının Kendini Değerlendirdiği KDF'den Elde Edilen Verilerin Analizine İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarının modüllerin her birinin sonunda kendilerini değerlendirdikleri KDF'den elde edilen puan dağılımı aşağıdaki Şekil 4.13'de bu forma ilişkin verilerin normallik analizleri aşağıdaki Şekil 4.13'de sunulmuştur.

[8]°: Uygulama sürecine başlamadan önce ön test olarak uygulanan LCPT sonuçlarına göre çalışma ve karşılaştırma gruplarının tamamında baz kavramıyla ilgili soruların cevapsız bırakıldığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu kavrama ilişkin anlama boyutlarında ön testten son teste anlamlı değişim olup olmadığı incelenmemiştir.



Şekil 4.13 PDÖ'de öğretmen adaylarının kendini değerlendirdiği KDF puan dağılımı

Şekil 4.13'e göre; PDÖ sürecinde öğretmen adaylarının kendini değerlendirdiği forma ilişkin verilerin büyük çoğunluğunun değerinin ilk değerlendirmeden son değerlendirmeye arttığı görülmektedir.

Tablo 4.39 PDÖ grubundaki öğretmen adaylarının kendini değerlendirdiği KDF'ye ilişkin verilerin normallik analizleri

Ölçüm	Grup	N	$\bar{x}$	S_x	İstatistik	P
Bilginin araştırılması ve kullanılması	Değerlendirme 1	33	10.39	3.31	0.148	.065
	Değerlendirme 2	33	11.06	3.63	0.160	.031
	Değerlendirme 3	33	12.18	3.27	0.175	012
Bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi	Değerlendirme 1	33	18.12	4.82	0.081	.200
	Değerlendirme 2	33	19.42	5.60	0.126	.200
	Değerlendirme 3	33	20.36	6.03	0.123	.200
Kişilerarası iletişim ve sürece katkı sağlanması	Değerlendirme 1	33	12.75	4.47	0.223	.000
	Değerlendirme 2	33	15.78	3.88	0.188	.004
	Değerlendirme 3	33	16.15	3.28	0.155	.043
Genel değerlendirme	Değerlendirme 1	33	41.27	9.75	0.113	.200
	Değerlendirme 2	33	46.27	11.39	0.101	.200
	Değerlendirme 3	33	48.69	10.62	0.162	.029

Tablo 4.39'a göre; öğretmen adaylarının kendileri ile ilgili görüşlerini toplamak için uygulanan KDF'nin "bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi" haricindeki alt boyutlarında değerlendirme puanlarından bazılarının normal dağılım göstermediği görülmektedir. Bununla birlikte, "bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi" alt boyutuna ilişkin yapılan değerlendirmelerin üçününde normal dağılım gösterdiği ancak

bu verilerin parametrik testler ile analizine ilişkin varyansların eşitliği ön koşulunun sağlanmadığı tespit edilmiştir. Şekil 4.13'de gözlenen değerlendirmelerdeki artışın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını ve değerlendirmeler arasında "bilginin araştırılması ve kullanılması", "bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi", "kişilerarası iletişim ve sürece katkı sağlanması" boyutlarında anlamlı farklar olup olmadığını incelemek için Friedman (tek gruba ilişkin normal dağılım göstermeyen veriler içeren ikiden fazla ölçüm ortalamalarını karşılaştırmada kullanılan) testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.40'da sunulmuştur.

Tablo 4.40 KDF boyutlar bazında Friedman testi sonuçları

Boyutlar	**Değerlendirmeler**	**N**	$\bar{x}$	**Ss**	**Sıra ortalaması**	χ^2	**p**
Bilginin araştırılması ve kullanılması	Değerlendirme 1	33	10.39	3.31	1.76	11.10	.004
	Değerlendirme 2	33	11.06	3.63	1.80		
	Değerlendirme 3	33	12.18	3.27	2.44		
Bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi	Değerlendirme 1	33	18.12	4.82	1.70	8.073	.018
	Değerlendirme 2	33	19.42	5.60	1.97		
	Değerlendirme 3	33	20.36	6.03	2.33		
Kişilerarası iletişim ve sürece katkı sağlanması	Değerlendirme 1	33	12.75	4.47	1.58	11.45	.003
	Değerlendirme 2	33	15.78	3.88	2.14		
	Değerlendirme 3	33	16.15	3.28	2.29		
Genel değerlendirme	Değerlendirme 1	33	41.27	9.75	1.47	18.75	.00
	Değerlendirme 2	33	46.27	11.39	2.02		
	Değerlendirme 3	33	48.69	10.62	2.52		

Tablo 4.40'tan anlaşıldığı üzere üç modül sonunda yapılan değerlendirmelerde; "bilginin araştırılması ve kullanılması" ($\chi^2 = 11.10$) , "bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi" ($\chi^2 = 8.07$), "kişilerarası iletişim ve sürece katkı sağlanması" ($\chi^2 = 11.45$) boyutlar bazında alınan puanlar ve değerlendirme formundan alınan toplam puanlar arasında ($\chi^2 = 18.75$) istatistiksel olarak anlamlı farklar olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, Friedman testi ile yapılan analizlerde çoklu karşılaştırma testi olmadığından değerlendirme formu toplam puanlarının ikili karşılaştırmalarında Wilcoxon İşaretli Sıralar testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.41'de sunulmuştur.

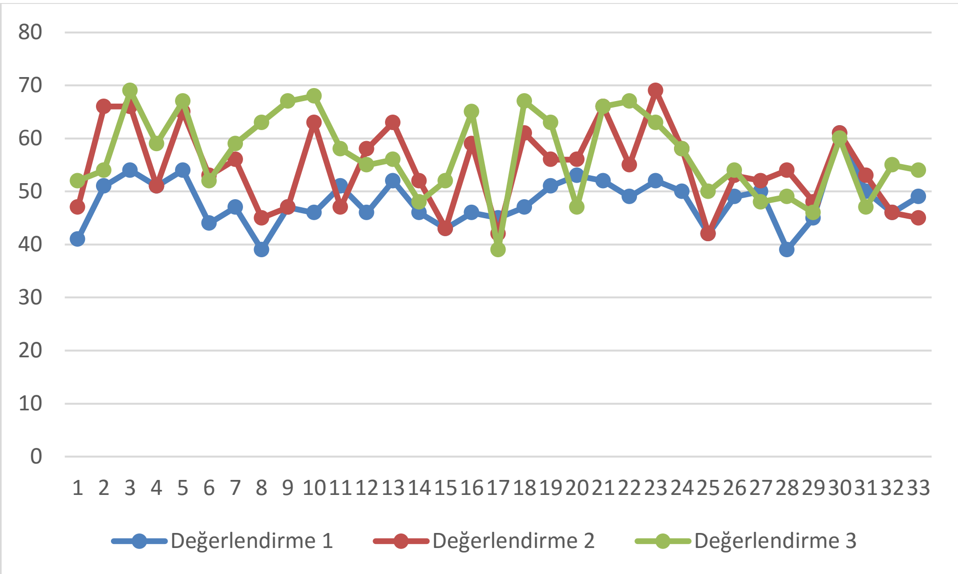
Tablo 4.41 PDÖ grubundaki öğretmen adaylarının KDF genel değerlendirme puanlarına ilişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonuçları

Değerlendirmeler		**N**	**Sıra ortalaması**	**Sıra toplamı**	**Z**	**p**
Değerlendirme 1	Negatif sıra	8	12.06	96.50	-3.13	.002
Değerlendirme 2	Pozitif sıra	24	17.98	431.50		
	Eşit	1				
Değerlendirme 1	Negatif sıra	6	9.67	58	-3.72	.000
Değerlendirme 3	Pozitif sıra	25	17.52	438		
	Eşit	2				
Değerlendirme 2	Negatif sıra	8	13.63	109	-2.73	.006
Değerlendirme 3	Pozitif sıra	23	16.83	387		
	Eşit	2				

Tablo 4.41'e göre; öğretmen adaylarının PDÖ süreci boyunca kendileri ile ilgili olumlu görüşlerine ilişkin her modülde anlamlı bir artış olduğu görülmektedir. Bu bulgu öğretmen adaylarının, PDÖ'nün bilgilerini kullanma, sorgulama, ilişkilendirme, kişiler arası iletişim kurma ve öğretim sürecine katkı sağlama becerilerini geliştirdiğine ilişkin görüşlerinde süreç boyunca olumlu artış olduğu şeklinde yorumlanabilir.

4.8.2 Öğretmen Adaylarının Eğitim Yönlendiricisini Değerlendirdiği EYDF'den Elde Edilen Verilerin Analizine İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarının modüllerin her birinin sonunda eğitim yönlendiricisini değerlendirdikleri EYDF'den elde edilen puan dağılımı aşağıdaki Şekil 4.14'de ve bu forma ilişkin verilerin normallik analizleri Tablo 4.42'de sunulmuştur.



Şekil 4.14 PDÖ Grubunun modüller sonunda uygulanan EYDF puan dağılımı

Şekil 4.14'e göre; PDÖ sürecinde öğretmen adaylarının eğitim yönlendiricisini değerlendirdiği forma ilişkin verilerin büyük çoğunluğunun değerinin ilk değerlendirmeden son değerlendirmeye arttığı görülmektedir.

Tablo 4.42 PDÖ grubundaki öğretmen adaylarına ilişkin EYDF ölçümlerinin normallik analizleri

Ölçüm	Grup	N	$\bar{x}$	S_x	İstatistik	P
Bilginin araştırılmasına ve kullanılmasına rehberlik etme	Değerlendirme 1	33	19.48	2.53	0.179	.009
	Değerlendirme 2	33	22.78	3.90	0.107	.200
	Değerlendirme 3	33	23.72	2.92	0.144	.082
Bilgilerin sorgulanmasına ve ilişkilendirilmesine rehberlik etme	Değerlendirme 1	33	10.24	2.37	0.195	.003
	Değerlendirme 2	33	11.93	2.13	0.148	.065
	Değerlendirme 3	33	12.30	2.11	0.114	.200
İletişim kurulmasına ve ortamın düzenlenmesine rehberlik etme	Değerlendirme 1	33	18.39	2.20	0.164	.024
	Değerlendirme 2	33	19.75	3.39	0.138	.112
	Değerlendirme 3	33	20.69	3.73	0.145	.076
Genel değerlendirme	Değerlendirme 1	33	55.33	5.52	0.139	.106
	Değerlendirme 2	33	62.57	8.65	0.098	.200
	Değerlendirme 3	33	66.00	8.32	0.133	.147

Tablo 4.42'ye göre; EYDF'den elde edilen öğretmen adaylarının eğitim yönlendiricisi ile ilgili görüşlerine ilişkin genel değerlendirme verilerinin normal dağılım gösterdiği ancak genel değerlendirmenin alt boyutları arasında normal dağılım göstermeyen veriler bulunduğu görülmektedir. Şekil 4.14'te değerlendirmelerde gözlenen artışın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını incelemek için normallik ve varyansların eşitliği ön koşulu sağlandığından genel değerlendirme verilerinin analizinde tekrarlı ölçümler tek yönlü varyans analizinden yararlanılmıştır. En az bir normal dağılım göstermeyen veri grubu içerdiğinden "bilginin araştırılmasına ve kullanılmasına rehberlike etme", "bilgilerin sorgulanmasına ve ilişkilendirilmesine rehberlik etme" ve "iletişim kurulmasına ve ortamın düzenlenmesine rehberlik etme" alt boyutlarına ilişkin değerlendirmeler arasında anlamlı bir fark olup olmadığını incelemek için Friedman testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.43 ve Tablo 4.44'te sunulmaktadır.

Tablo 4.43 EYDF boyutlar bazında Friedman testi sonuçları

Boyutlar	Değerlendirmeler	N	$\bar{x}$	Ss	Sıra ortalaması	χ^2	p
Bilginin araştırılmasına ve kullanılmasına rehberlike etme	Değerlendirme 1	33	19.48	2.53	1.32	27.17	.000
	Değerlendirme 2	33	22.78	3.90	2.26		
	Değerlendirme 3	33	23.72	2.92	2.42		
Bilgilerin sorgulanmasına ve ilişkilendirilmesine rehberlik etme	Değerlendirme 1	33	10.24	2.37	1.45	22.59	.000
	Değerlendirme 2	33	11.93	2.13	2.08		
	Değerlendirme 3	33	12.30	2.11	2.47		
İletişim kurulmasına ve ortamın düzenlenmesine rehberlik etme	Değerlendirme 1	33	18.39	2.20	1.64	9,41	.009
	Değerlendirme 2	33	19.75	3.39	2.03		
	Değerlendirme 3	33	20.69	3.73	2.33		

Tablo 4.44 EYDF tekrarlı ölçümler tek yönlü varyans analizi

Ölçüm	N	Kareler Toplamı	Sd	Kareler Ortalaması	F	P
Genel değerlendirme	33	1957.51	2	978.75	35.30	.00

Tablo 4.43 ve Tablo 4.44'e göre; üç modülden her birinin sonunda eğitim yönlendiricisinin öğretmen adayları tarafından değerlendirilmesiyle elde edilen puanlar arasında "bilginin araştırılmasına ve kullanılmasına rehberlike etme" ($\chi^2 = 27.17$), "bilgilerin sorgulanmasına ve ilişkilendirilmesine rehberlik etme" ($\chi^2 = 22.59$) ve "iletişim kurulmasına ve ortamın düzenlenmesine rehberlik etme" ($\chi^2 = 9.41$) boyutları bazında ve eğitim yönlendiricisini değerlendirme toplam puanlar arasında istatistiksel olarak anlamlı farklar olduğu ve puan ortalamalarının ilk değerlendirmeden (değerlendirme 1) son değerlendirmeye (değerlendirme 3) doğru arttığı görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının; araştırma yapma ve bilginin kullanılmasına, sorgulanmasına, ilişkilendirilmesine, iletişim kurulmasına ve ortamın düzenlenmesi hususunda eğitim yönlendiricisinin katkılarına ilişkin olumlu görüşlerinin PDÖ süreci boyunca arttığı şeklinde yorumlanabilir. Aralarındaki artışın anlamlı olup olmadığını incelemek için değerlendirmelerin ikili karşılaştırmalarında tekrarlı ölçümler tek yönlü varyans analizinden elde edilen istatistikler aşağıda Tablo 4.45'te sunulmaktadır.

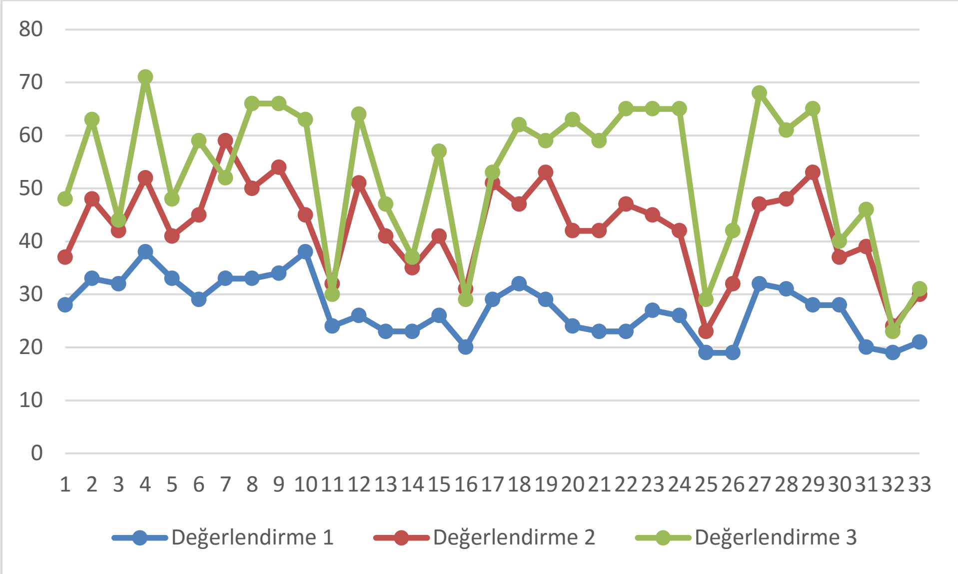
Tablo 4.45 Tekrarlı ölçümler tek yönlü varyans analizine ilişkin boyutlar bazında değerler

Ölçüm	N	$\bar{x}$	Ortalama fark	P
Değerlendirme 1	33	55.33	-7.24	.000
Değerlendirme 2	33	62.57		
Değerlendirme 1	33	55.33	-10.66	.000
Değerlendirme 3	33	66.00		
Değerlendirme 2	33	62.57	-3.42	.064
Değerlendirme 3	33	66.00		

Tablo 4.45'e göre; öğretmen adaylarının eğitim yönlendiricisi ile ilgili olumlu tutumlarında üçüncü modüle kadar her modülde artış olduğu ancak üçüncü modülde anlamlı bir değişim olmadığı görülmektedir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının eğitim yönlendiricisinin öğrenme sürecine katkısına (bilginin araştırılmasına, kullanılmasına, sorgulanmasına, ilişkilendirilmesine, iletişim kurulmasına ve öğrenme ortamının düzenlenmesine rehberlik etme) ilişkin görüşlerinde birinci modülden ikinci modülün tamamlanmasına kadar geçen süreçte olumlu bir artış olduğu ancak üçüncü modülün uygulandığı süreçte bir değişim olmadığı şeklinde yorumlanabilir.

4.8.3 Eğitim Yönlendiricisinin Öğretmen Adaylarını Değerlendirdiği ÖADF'den Elde Edilen Verilerin Analizine İlişkin Bulgular

Modüllerin her birinin sonunda eğitim yönlendiricisinin öğretmen adaylarını değerlendirdikleri ÖADF'den elde edilen puan dağılımı aşağıdaki Şekil 4.15'te, bu forma ilişkin verilerin normallik analizleri aşağıdaki Şekil 4.15'te sunulmuştur.



Şekil 4.15 PDÖ'de eğitim yönlendiricisinin öğretmen adaylarını değerlendirdiği ÖADF puan dağılımı

Şekil 4.15'e göre; PDÖ sürecinde eğitim yönlendiricisinin öğretmen adaylarını değerlendirdiği formun değerlendirilmesiyle elde edilen sonuçlar incelendiğinde öğretmen adaylarının çoğunun puanının ilk değerlendirmeden son değerlendirmeye arttığı görülmektedir.

Tablo 4.46 PDÖ grubundaki öğretmen adaylarına ilişkin ÖADF ölçümlerinin normallik analizleri

Ölçüm	Grup	N	$\bar{x}$	S_x	İstatistik	p
Bilginin araştırılması ve kullanılması	Değerlendirme 1	33	7.73	1.97	0.161	.030
	Değerlendirme 2	33	10.94	2.63	0.146	.074
	Değerlendirme 3	33	12.15	3.28	0.138	.115
Bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi	Değerlendirme 1	33	9.67	2.50	0.189	.004
	Değerlendirme 2	33	15.36	3.86	0.111	.200
	Değerlendirme 3	33	19.61	5.93	0.233	.000
Kişilerarası iletişim ve sürece katkı sağlanması	Değerlendirme 1	33	9.97	2.53	0.145	.074
	Değerlendirme 2	33	16.30	3.81	0.157	.038
	Değerlendirme 3	33	20.97	5.67	0.188	.004
Genel değerlendirme	Değerlendirme 1	33	27.36	5.44	0.106	.200
	Değerlendirme 2	33	42.61	8.70	0.124	.200
	Değerlendirme 3	33	52.73	13.66	0.192	.003

Tablo 4.46'ya göre ÖADF'den elde edilen eğitim yönlendiricisinin öğretmen adayları ile ilgili görüşlerine ilişkin ölçümlerde normal dağılım göstermeyen veriler olduğu görülmektedir. Şekil 4.15'te gözlenen değerlendirmelerdeki artışın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını ve değerlendirmeler arasında "bilginin araştırılması ve

kullanılması”, “bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi”, “kişilerarası iletişim ve sürece katkı sağlanması” boyutlarında anlamlı farklar olup olmadığını incelemek için Friedman (tek gruba ilişkin normal dağılım göstermeyen veriler içeren ikiden fazla ölçüm ortalamalarını karşılaştırmada kullanılan) testinden yararlanılmış ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.47’de sunulmaktadır.

Tablo 4.47 Öğretmen Adaylarını Değerlendirme Formu boyutlar bazında Friedman testi sonuçları

Boyutlar	Değerlendirmeler	N	x̄	Ss	Sıra ortalaması	χ^2	p
Bilginin araştırılması ve kullanılması	Değerlendirme 1	33	7.73	1.97	1.02	55.95	.00
	Değerlendirme 2	33	10.94	2.63	2.24		
	Değerlendirme 3	33	12.15	3.28	2.74		
Bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi	Değerlendirme 1	33	9.67	2.50	1.05	57.09	.00
	Değerlendirme 2	33	15.36	3.86	2.14		
	Değerlendirme 3	33	19.61	5.93	2.82		
Kişilerarası iletişim ve sürece katkı sağlanması	Değerlendirme 1	33	9.97	2.53	1.00	60.81	.00
	Değerlendirme 2	33	16.30	3.81	2.12		
	Değerlendirme 3	33	20.97	5.67	2.88		
Genel değerlendirme	Değerlendirme 1	33	27.36	5.44	1.00	58.97	.00
	Değerlendirme 2	33	42.61	8.70	2.12		
	Değerlendirme 3	33	52.73	13.66	2.88		

Tablo 4.47’ye göre; üç modül sonunda yapılan değerlendirmelerde öğretmen adaylarının aldıkları puanlar arasında “bilginin araştırılması ve kullanılması” ($\chi^2 = 55.95$), “bilgilerin sorgulanması ve ilişkilendirilmesi” ($\chi^2 = 57.09$), “kişilerarası iletişim ve sürece katkı sağlanması” ($\chi^2 = 60.81$) boyutlar bazında alınan puanlar ve değerlendirme formundan alınan toplam puanlar arasında ($\chi^2 = 58.97$) istatistiksel olarak anlamlı farklar olduğu ve puan ortalamalarının ilk değerlendirmeden (değerlendirme 1) son değerlendirmeye (değerlendirme 3) doğru arttığı görülmektedir. Bu durum, eğitim yönlendiricisinin öğretmen adaylarının; bilgilerini kullanma, sorgulama, ilişkilendirme, kişilerarası iletişim, grupla çalışma ve sürece katkı sağlama becerilerine ilişkin görüşlerinin değerlendirme süreci boyunca arttığı şeklinde yorumlanabilir. Aralarındaki artışın anlamlı olup olmadığını incelemek için değerlendirmelerin ikili karşılaştırmalarında Wilcoxon İşaretli Sıralar testinden yararlanılmıştır ve ilgili istatistikler aşağıda Tablo 4.48’de sunulmaktadır.

Tablo 4.48 ÖADF boyutlar bazında Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonuçları

Ölçüm		N	Sıra ortalaması	Sıra toplamı	Z	P
Değerlendirme 1	Negatif sıra	0	0	0	.-5.014	.00
Değerlendirme 2	Pozitif sıra	33	17	561		
	Eşit	0				
Değerlendirme 1	Negatif sıra	0	0	0	-5.015	.00
Değerlendirme 3	Pozitif sıra	33	17	561		
	Eşit	0				
Değerlendirme 2	Negatif sıra	4	6.13	24.50	-4.577	.00
Değerlendirme 3	Pozitif sıra	29	18.50	536.50		
	Eşit	0				

Tablo 4.48'e göre; eğitim yönlendiricisinin PDÖ sürecinde öğretmen adayları ile ilgili olumlu görüşlerine ilişkin modüllerin tamamında anlamlı bir artış olduğu görülmektedir. Bu bulgu, eğitim yönlendiricisinin öğretmen adaylarının; bilgilerini kullanma, sorgulama, ilişkilendirme ve kişilerarası iletişim kurma, grupla çalışma ve sürece katkı sağlama becerilerini geliştirmesine ilişkin görüşlerinde PDÖ süreci boyunca olumlu artış olduğu şeklinde yorumlanabilir.

4.9 Araştırmanın Dokuzuncu Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın bir diğer problemi "Öğretmen adayları; lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz-boyut, LDS ve lineer dönüşüm kavramlarını nasıl ilişkilendirmektedir?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için sürekli karşılaştırmalı analiz yönteminden yararlanılmıştır.

Araştırmanın nitel kısmının katılımcısı olan öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden elde edilen verilerin analizi sürecinde temaların özeti ve eksensel kodlaması Tablo 4.49-4.54 ve Şekil 4.16-18, Şekil 4.20 ve Şekil 4.21'de sunulmaktadır. Bunlardan Tablo 4.49 ve Şekil 4.16 formal/işlemsel, Tablo 4.51 ve Şekil 4.17 teorik/özellik, Tablo 4.52 ve Şekil 4.18 geometrik, Tablo 4.53 ve Şekil 4.20 çıkarımsal/nedensel ve Tablo 4.54 ve Şekil 4.21 uzaysal ilişkilendirme ile ilgili olmakla birlikte tablolar temaların özetini, şekiller bu temaların eksensel kodlamasını göstermektedir.

4.9.1 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "formal/işlemsel ilişkilendirme" temasının özeti

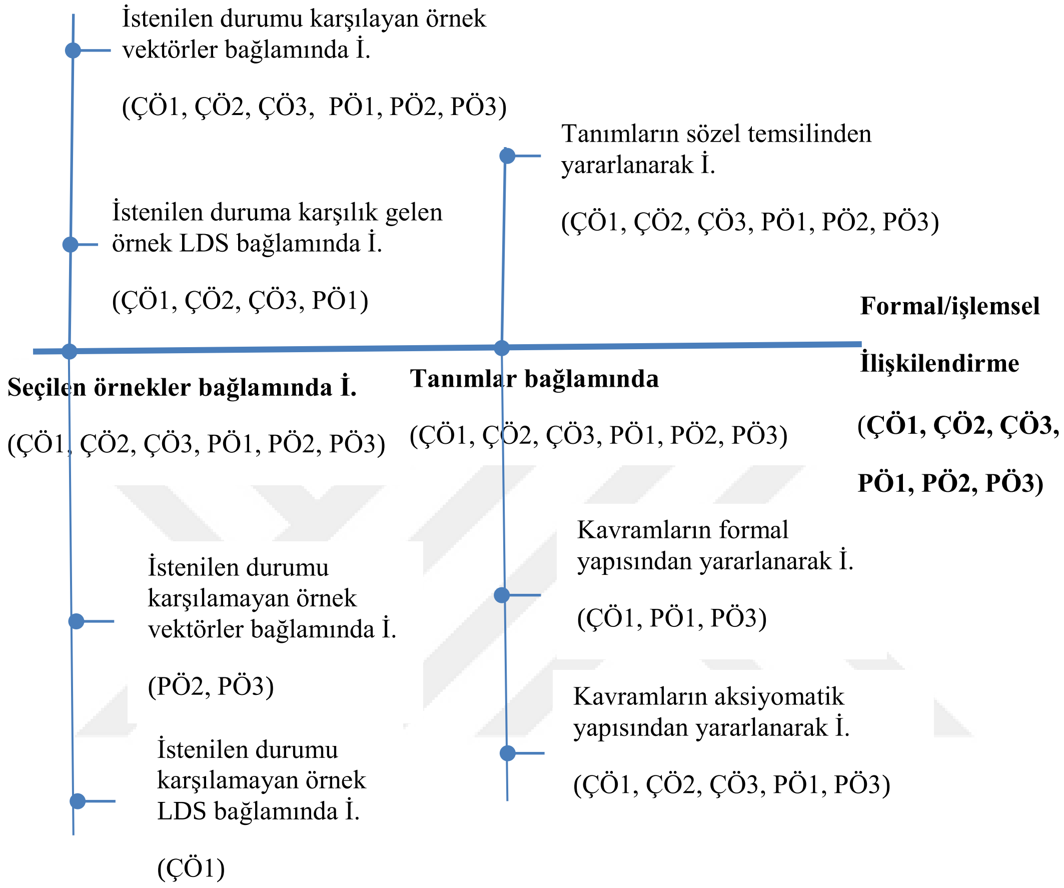
Bu tema, katılımcı öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarını, kavramların tanımlarından ve seçtikleri örnek vektörler ile gerçekleştirdikleri işlemsel süreçlerden yararlanarak ilişkilendirdiğini göstermektedir. Öğretmen adaylarının tamamında ortaya çıkan bu ilişkilendirme biçimi, seçilen örnekler bağlamında ve tanımlar bağlamında olmak üzere iki farklı durumda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla, yukarıda bahsi geçen tema; seçilen örnekler bağlamında ve tanımlar bağlamında olmak üzere iki boyutta ele alınmıştır. Bunlardan seçilen örnekler bağlamında (istenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme, istenilen durumu karşılık gelen örnek LDS bağlamında ilişkilendirme, istenilen durumu karşılamayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme ve istenilen durumu karşılamayan örnek LDS bağlamında ilişkilendirme) dört alt boyutta; tanımlar bağlamında (tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme, kavramların formal yapısından yararlanarak ilişkilendirme ve kavramların aksiyomatik yapısından yararlanarak ilişkilendirme) üç alt boyutta incelenmiştir. Katılımcı öğretmen adaylarından her birinin "formal/işlemsel ilişkilendirme" temasına ait sergilediği ilişkilendirmeler Tablo 4. 49'da özetlenmiştir.

Tablo 4.49 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "formal/işlemsel ilişkilendirme" temasının özeti

Tema	**Formal/işlemsel ilişkilendirme biçimi**	
Öğretmen adayı	Seçilen örnekler bağlamında ilişkilendirme	Tanımlar bağlamında ilişkilendirme
ÇÖ1	• *İstenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme* • *İstenilen duruma karşılık gelen LDS bağlamında ilişkilendirme* • *İstenilen duruma karşılamayan LDS bağlamında ilişkilendirme*	• *Tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme* • *Kavramların formal yapısından yararlanarak ilişkilendirme* • *Kavramların aksiyomatik yapısından yararlanarak ilişkilendirme*
ÇÖ2	• *İstenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme* • *İstenilen duruma karşılık gelen LDS bağlamında ilişkilendirme*	• *Tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme* • *Kavramların aksiyomatik yapısından yararlanarak ilişkilendirme*
ÇÖ3	• *İstenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme* • *İstenilen duruma karşılık gelen LDS bağlamında ilişkilendirme*	• *Tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme* • *Kavramların aksiyomatik yapısından yararlanarak ilişkilendirme*
PÖ1	• *İstenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme* • *İstenilen duruma karşılık gelen LDS bağlamında ilişkilendirme*	• *Tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme* • *Kavramların formal yapısından yararlanarak ilişkilendirme* • *Kavramların aksiyomatik yapısından yararlanarak ilişkilendirme*
PÖ2	• *İstenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme* • *İstenilen durumu karşılamayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme*	• *Tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme*
PÖ3	• *İstenilen durumu karşılayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme* • *İstenilen durumu karşılamayan örnek vektörler bağlamında ilişkilendirme*	• *Tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme* • *Kavramların formal yapısından yararlanarak ilişkilendirme* • *Kavramların aksiyomatik yapısından yararlanarak ilişkilendirme*

Tablo 4.49'a göre; öğretmen adaylarının tamamının formal/işlemsel ilişkilendirme biçimini sergiledikleri görülmüştür. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının neredeyse tamamının kavramlar arası ilişkilendirmede, kavram tanımlarının sözel temsilinden ve kavramların aksiyomatik yapısından yararlandığı ancak yarısının kavramlar arası ilişkilendirmede formal yapıyı kullanmadığı görülmektedir. Ayrıca, öğretmen adaylarının bazılarının (ÇÖ1, PÖ2 ve PÖ3) kavramlar arası ilişkilendirmede işlemsel süreçlerde çalışılan uzayın elemanı olmayan vektörlerden ve istenilen durumu karşılamayan LDS'den yararlandığını göstermektedir. Katılımcı öğretmen adaylarının

yarı yapılandırılmış görüşmelerde lineer cebir kavramlarını ilişkilendirme biçimlerine yönelik ortaya çıkan, "formal/işlemsel ilişkilendirme" temasına ilişkin eksensel kodlama Şekil 4.16'da sunulmuştur.



Şekil 4.16 Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme biçimlerinin eksensel kodlanması: formal/işlemsel ilişkilendirme

Lineer birleşim ve germe kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin formal/işlemsel ilişkilendirme temasına atılan Tablo 4.49'da yer alan kodlardan birine (tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme) karşılık gelen PÖ2'nin görüşme sürecinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmaktadır.

Araştırmacı: *Lineer birleşim ile germe kavramları arasında nasıl bir ilişki vardır?*

PÖ2: *Lineer birleşim kümeleri toplamı germeyi verir* (tanımların sözel temsilinden yararlanarak ilişkilendirme).

PÖ2'nin "*lineer birleşim kümeleri toplamı*" ifadesinin germe kavramının tanımında geçmesinden dolayı formal/işlemsel ilişkilendirme temasına atılmıştır. Temalardan bir başkasına teorik/özellik ilişkilendirme temasına ilişkin kodlar ve bu temanın özeti aşağıda Tablo 4.50 ve Tablo 4.51'de sunulmaktadır.

4.9.2 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "teorik/özellik ilişkilendirme biçimi" temasının özeti

Tablo 4.50 Teorik/özellik ilişkilendirme biçimine ilişkin kodlar

- $\mathbb{R}^2$ 'de birbirinin skaler katı olan 2 vektör lineer bağımlıdır (Teorem 1).
- $\mathbb{R}^n$ 'i germek için en az n vektör gereklidir (Teorem 2).
- $\mathbb{R}^n$ 'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı n'dir/$\mathbb{R}^n$ de alınan lineer bağımsız vektör kümesinin hiçbirisinde n den fazla vektör bulunmaz (Teorem 3).
- $\mathbb{R}^n$ 'de $n+1$ vektör lineer bağımlıdır (Teorem 4).
- $\mathbb{R}^n$ 'i germek için n lineer bağımsız vektör gereklidir (Teorem 5).
- $\mathbb{R}^n$ 'de; U ikiden fazla vektörden oluşuyorsa U'nun lineer bağımlı olması için $\Leftrightarrow$ U daki bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilmelidir (Teorem 6).
- $\mathbb{R}^n$ 'den alınan n lineer bağımsız vektör bu uzayın bazıdır (Teorem 7).
- $\mathbb{R}^n$ 'i geren n lineer bağımsız vektör bu uzayın bazıdır (Teorem 8).
- $\mathbb{R}^n$ 'ün bazı n vektörden oluşur (Teorem 9).
- Lineer bağımsız bir küme gerdiği uzayın bazıdır (Teorem 10).
- Lineer dönüşümler baz vektörlerini baz vektörlerine dönüştürür (Teorem 11).
- HLDS'de sistemin 0 çözümünden başka çözümü olması için $\Leftrightarrow$ katsayılar matrisinin determinantının 0 olmasıdır (Teorem 12).
- HOLDS'de katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise tek çözüm vardır (Teorem 13).
- $Ax = 0$ sisteminin aşikar çözümü varsa A katsayılar matrisinin satır vektörleri lineer bağımsız, aşikar olmayan çözümü varsa A katsayılar matrisinin satır vektörleri lineer bağımlıdır (Teorem 14).
- Bir matrisin (özelde katsayılar matrisinin) satır vektörleri lineer bağımlı ise determinantı sıfırdır (Teorem 15).
- $Ax = b$, m denklem ve n bilinmeyenden oluşan HOLDS olsun. $rank[A{:}b] > rank(A)$ ise denklem sistemi uyumsuzdur (Teorem 16).
- $\mathbb{R}^n$ 'den alınan n lineer bağımsız vektör (baz vektörleri) $\mathbb{R}^n$ 'i gerer (Teorem 17).
- Baz vektörlerinin lineer birleşimi ile $\mathbb{R}^n$ 'deki vektörlerin tamamı gerilir (Teorem 18).

Not: Aşağıda elde edilen bulguların sunumunda, Tablo 4.50'de yer alan teoremlerin ifadesi yerine kısaca parantez içindeki teorem numarası kullanılmıştır.

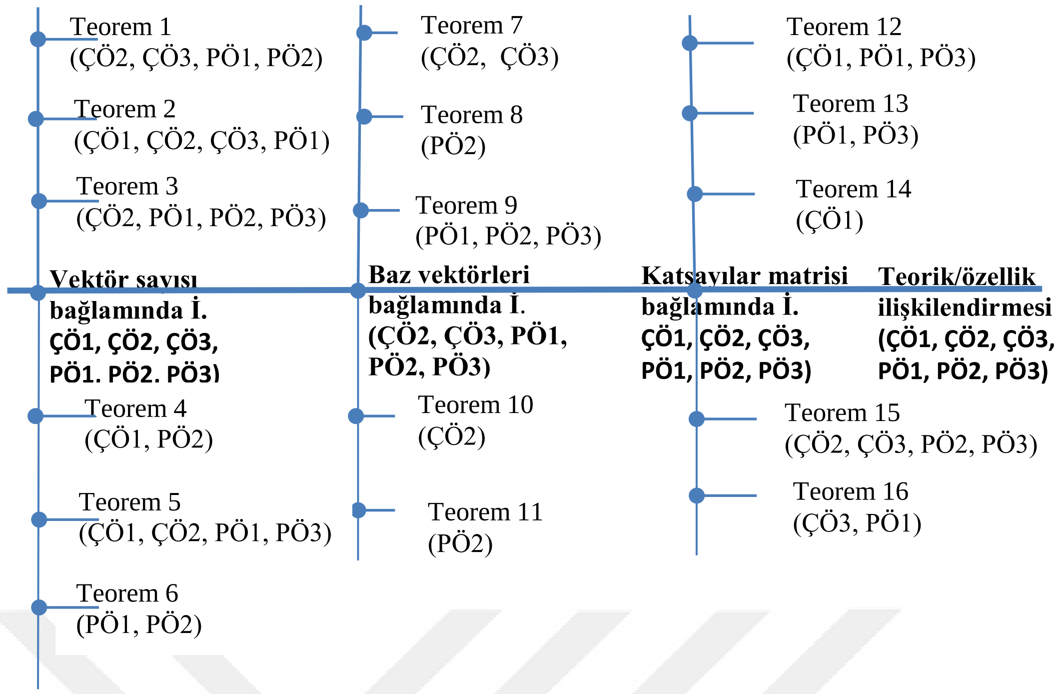
Bu tema, katılımcı öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarını, bu kavramlara ilişkin özelliklerden ve teoremlerden yararlanarak ilişkilendirdiğini göstermektedir. Öğretmen adaylarının tamamında ortaya çıkan bu ilişkilendirme; vektör sayısı bağlamında, baz vektörleri bağlamında ve katsayılar matrisi bağlamında olmak üzere üç farklı durumda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla yukarıda bahsi geçen tema; vektör sayısı bağlamında, baz vektörleri bağlamında ve katsayılar matrisi bağlamında olmak üzere üç boyutta ele alınmıştır. Bunlardan vektör sayısı bağlamında (Teoerem 1, Teoerem 2, Teoerem 3, Teoerem 4, Teoerem 5 ve Teoerem 6) altı alt boyutta; baz vektörleri bağlamında (Teoerem 7, Teoerem 8, Teoerem 9, Teoerem 10 ve Teoerem, 11) beş alt boyutta; katsayılar matrisi bağlamında (Teoerem 12, Teoerem 13, Teoerem 14, Teoerem 15 ve Teoerem 16) beş alt boyutta incelenmiştir.

Katılımcı öğretmen adaylarından her birinin "teorik/özellik ilişkilendirme" temasına ait sergilediği ilişkilendirme türleri Tablo 4. 51'de özetlenmiştir.

Tablo 4.51 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "Teorik/özellik ilişkilendirme" temasının özeti

Tema	**Teorik/özellik ilişkilendirme biçimi**		
Öğretmen adayı	Vektör sayısı bağlamında ilişkilendirme	Baz vektörleri bağlamında ilişkilendirme	Katsayılar matrisi bağlamında ilişkilendirme
ÇÖ1	Teorem2, Teorem 4, Teorem 5	Teorem 11	Teorem 12, Teorem 14,
ÇÖ2	Teorem 1, Teorem2, Teorem 3, Teorem 5	Teorem 7, Teorem 10,	Teorem 15,
ÇÖ3	Teorem 1, Teorem2,	Teorem 7,	Teorem 15, Teorem 16
PÖ1	Teorem 1, Teorem2, Teorem 3, Teorem 5, Teorem 6	Teorem 9,	Teorem 12, Teorem 13, Teorem 16
PÖ2	Teorem 1, Teorem 3, Teorem 6	Teorem 8, Teorem 9, Teorem 11	Teorem 15,
PÖ3	Teorem2, Teorem 3, Teorem 5	Teorem 9,	Teorem 12, Teorem 13, Teorem 15,

Tablo 4.51'e göre; öğretmen adaylarının tamamının kavramlar arası ilişkilendirmede, vektör sayısı, katsayılar matrisi ve baz vektörleri bağlamında teoremlerden yararlandığı görülmektedir. Katılımcı öğretmen adaylarının yarı yapılandırılmış görüşmelerde lineer cebir kavramlarını ilişkilendirme biçimlerine yönelik ortaya çıkan, "teorik/özellik ilişkilendirme" temasına ilişkin eksensel kodlama Şekil 4.17 'de sunulmuştur.



Şekil 4.17 Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme biçimlerinin eksensel kodlanması: teorik/özellik ilişkilendirme

Tablo 4.51'de baz ve lineer bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin teorik/özellik ilişkilendirme temasına atılan kodlardan birine ("$\mathbb{R}^n$'de alınan lineer bağımsız vektör kümesinin hiçbirisinde n den fazla vektör bulunmaz (Teorem 3)" teoreminden yararlanarak ilişkilendirme) karşılık gelen ÇÖ3'ün görüşme sürecinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmaktadır.

Araştırmacı: *$\mathbb{R}^2$'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz?*

PÖ3: *$\mathbb{R}^2$'de <u>en fazla lineer bağımsız vektör sayısı 2</u> dir.*

PÖ3'ün "*$\mathbb{R}^2$'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı 2*" ifadesi "$\mathbb{R}^n$'de alınan lineer bağımsız vektör kümesinin hiçbirisinde n den fazla vektör bulunmaz (Teorem 3)" teoreminden dolayı teorik/özellik ilişkilendirme temasına atılmıştır.

4.9.3 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "geometrik ilişkilendirme biçimi" temasının özeti

Bu tema, katılımcı öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarını, geometriden yararlanarak ilişkilendirdiğini göstermektedir. Öğretmen adaylarının tamamında ortaya çıkan bu ilişkilendirme; geometrik kavramlar ve uzay/uzayın alt kümesi bağlamında ilişkilendirme olmak üzere iki farklı durumda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla, bu tema;

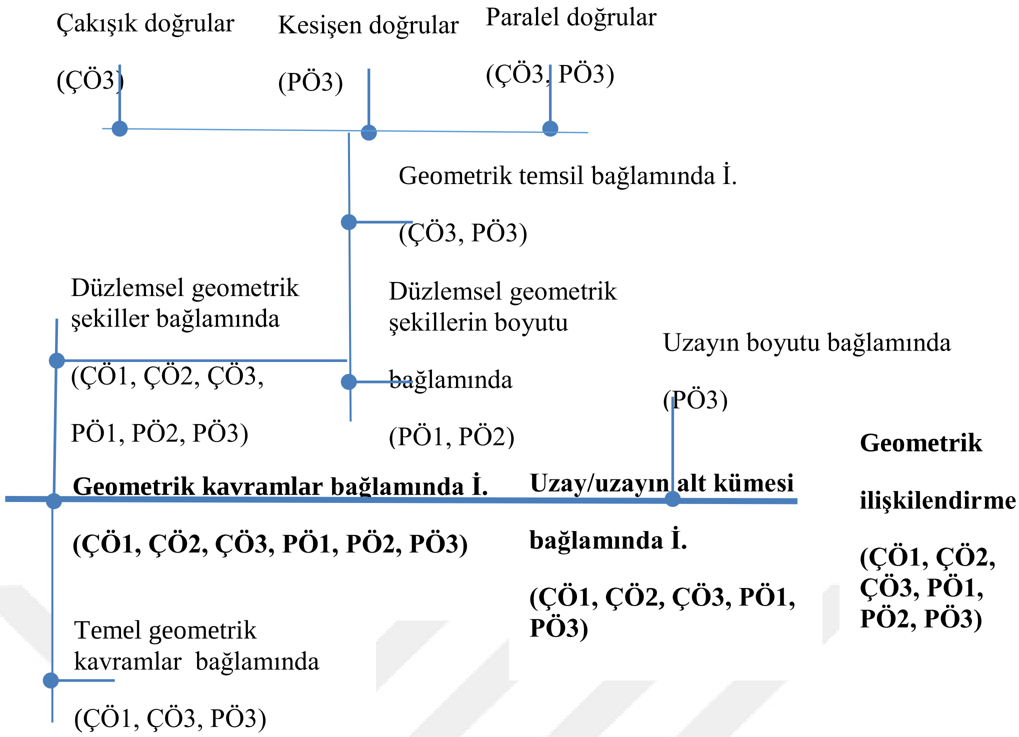
geometrik kavramlar ve uzay/uzayın alt kümesi bağlamında ilişkilendirme olmak üzere iki boyutta ele alınmıştır. Bunlardan geometrik kavramlar bağlamında ilişkilendirme (temel geometrik kavramlar bağlamında (nokta, doğrultu, eğim), düzlemsel geometrik şekiller bağlamında) iki alt boyutta ve uzay/uzayın alt kümesi bağlamında ilişkilendirme tek alt boyutta (uzayın boyutu) incelenmiştir. Bunlardan düzlemsel geometrik şekiller bağlamında ilişkilendirme; geometrik temsil bağlamında ilişkilendirme (çakışık doğrular, kesişen doğrular ve paralel doğrular) ve düzlemsel geometrik şekillerin boyutu bağlamında ortaya konmuştur. Katılımcı öğretmen adaylarından her birinin "geometrik ilişkilendirme" temasına ait sergilediği ilişkilendirme türleri Tablo 4.52'de özetlenmiştir.

Tablo 4.52 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "geometrik ilişkilendirme" temasının özeti

Tema	**Geometrik ilişkilendirme biçimi**	
Öğretmen adayı	**Geometrik kavramlar bağlamında ilişkilendirme**	**Uzay/uzayın alt kümesi bağlamında ilişkilendirme**
ÇÖ1	**Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında** **Temel geometrik kavramlar bağlamında**	✓
ÇÖ2	**Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında**	✓
ÇÖ3	**Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında** Geometrik temsil bağlamında İ. *Çakışık doğrular* *Paralel doğrular* **Temel geometrik kavramlar bağlamında**	✓
PÖ1	**Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında** Düzlemsel geometrik şekillerin boyutu bağlamında	✓
PÖ2	**Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında** Düzlemsel geometrik şekillerin boyutu bağlamında	
PÖ3	**Düzlemsel geometrik şekiller bağlamında** Geometrik temsil bağlamında İ. Paralel doğrular Kesişen doğrular **Temel geometrik kavramlar bağlamında**	✓ Uzayın boyutu bağlamında

Not: Gri dolgular, o alt temanın belirlenen öğretmen adayında görülmediğini göstermektedir.

Buradan Tablo 4.52; ÇÖ3'ün ve PÖ3'ün kavramları, doğruların geometrik temsilinden ve çalışılan uzayın boyutundan yararlanarak ilişkilendirdiğini göstermektedir. Ayrıca PÖ2'nin bu temaya ilişkin uzay/uzayın alt kümesi ilişkilendirme türünü sergilemedikleri görülmektedir. Katılımcı öğretmen adaylarının yarı yapılandırılmış görüşmelerde lineer cebir kavramlarını ilişkilendirme biçimlerine yönelik ortaya çıkan, "geometrik ilişkilendirme biçimi" temasına ilişkin eksensel kodlama Şekil 4.18'de sunulmuştur.



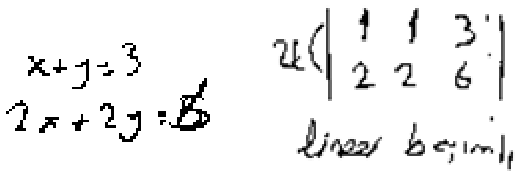
Şekil 4.18 Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme biçimlerinin eksensel kodlanması: geometrik ilişkilendirme

Tablo 4.52'de lineer bağımlılık/bağımsızlık ve HOLDS kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin geometrik ilişkilendirme temasına atılan kodlardan birine (geometrik temsil bağlamında ilişkilendirme) karşılık gelen ÇÖ3'ün görüşme sürecinden bir kesit aşağıda örnek olarak sunulmaktadır.

Araştırmacı: *HOLDS'leri için ne söylersin?*

ÇÖ3: *Aslında 3 ihtimal vardır (tek, sonsuz, boş küme).*

Öğretmen adayı eline bir kalem alarak 2 denklemden oluşan LDS'ni yazar ve 2. denklemin 1. denklemin 2 katı olduğunu dolayısıyla lineer bağımlı olduğunu ifade eder. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.19'da sunulmuştur.



Şekil 4.19 ÇÖ3'ün görüşme sürecindeki açıklamaları

ÇÖ3: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right\}$ *burada katsayılar matrisini* (ilaveli matrisi düşünerek) *lineer bağımlı aldım, vektörler* (ilaveli matrisin satır vektörleri) *birbirinin katı olsun.*

Araştırmacı: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right\}$ *denklem sisteminde katsayılar matrisini söyleyebilir misin?*

ÇÖ3: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Araştırmacı: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right\}$ *denklem sisteminin çözüm kümesinden biraz bahsedebilir misin?*

ÇÖ3: *Çözüm kümesi* $(x, 3-x)$ *bu çözüm kümesi oluyor mu? Verdiğim 2 örnek doğrunun eğimleri aynı çıkar dolayısıyla paraleldir bunların paralelse çözümü var mıdır? Ayy bir dakika kafam karıştı, ne yapabilirim kiiii, çözümü yok ki çözemem kiii. Bence yoktur.*

Araştırmacı: *Biraz daha kafanı toparlayıp bu denklem sisteminin çözüm kümesini söyleyebilir misin?*

ÇÖ3: *Hayır hocaam gidiyor gidiyor x'ler; bu denklem sisteminin çözümü yok, paralel* (geometrik temsil bağlamında ilişkilendirme) *zaten olmaz. Boş küme.*

Katsayılar matrisi lineer bağımlı olan HOLDS'leri için ÇÖ3'ün verdiği örneğin çözüm kümesine ilişkin "*Verdiğim 2 örnek doğrunun eğimleri aynı çıkar dolayısıyla paraleldir bunların paralelse çözümü var mıdır? Çözümü yok*" ifadesi, denklem sistemini oluşturan doğruların birbirine göre durumuna bağlı olarak çözüm kümesini elde etmesinden dolayı geometrik ilişkilendirme temasına atılmıştır.

4.9.4 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçimi" temasının özeti

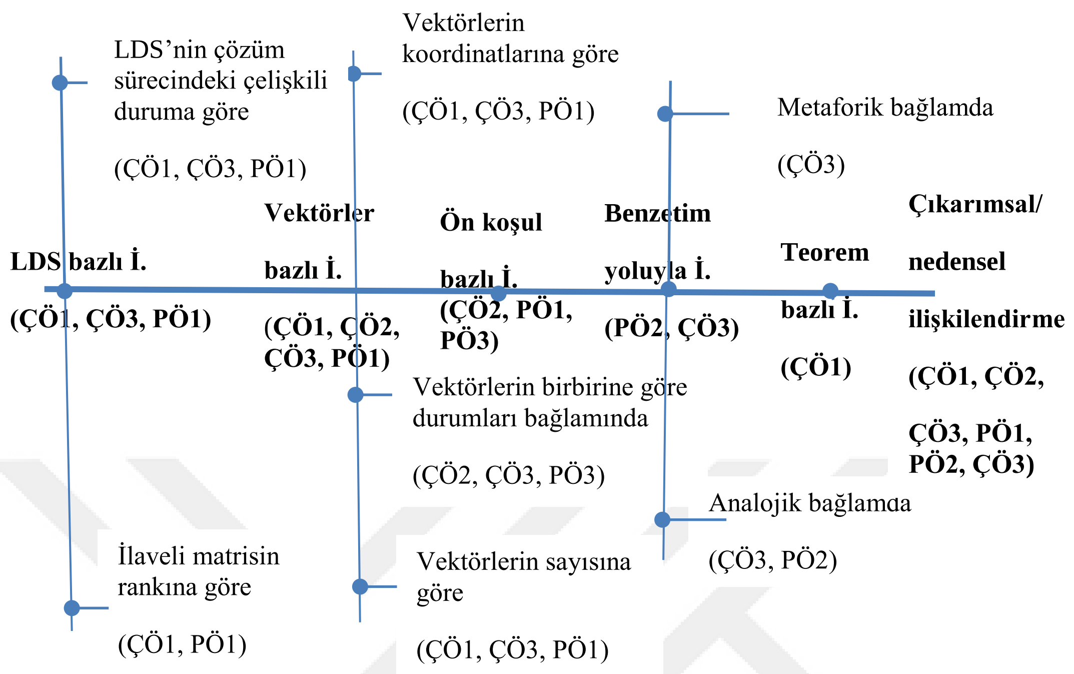
Bu tema, katılımcı öğretmen adaylarının, bir takım bilgilerini sentezlediğini ve dolayısıyla kendine özgü çıkarımda bulunarak lineer cebir kavramlarını ilişkilendirdiğini göstermektedir. Öğretmen adaylarının tamamında ortaya çıkan bu ilişkilendirme; LDS bazlı çıkarımda bulunma, vektörler bazında çıkarımda bulunma, ön koşul bazlı çıkarımda bulunma, benzetim yoluyla çıkarımda bulunma ve teorem bazlı çıkarımda bulunma olmak üzere beş farklı durumda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla bu tema; LDS bazlı çıkarımda bulunma, vektörler bazında çıkarımda bulunma, ön koşul bazlı çıkarımda bulunma, benzetim yoluyla çıkarımda bulunma ve teorem bazlı çıkarımda bulunma olmak üzere beş boyutta ele alınmıştır. Bunlardan teorem bazlı çıkarımda bulunma ve ön koşul bazlı çıkarımda bulunma tek alt boyutta; benzetim yoluyla çıkarımda bulunma (metaforik bağlamda ve analojik bağlamda) iki alt boyutta; vektörler bazında çıkarımda bulunma (vektörlerin koordinatlarına göre, vektörlerin birbirine göre durumları bağlamında ve vektörlerin sayısına göre) üç alt boyutta ve LDS bazlı çıkarımda bulunma (LDS'nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre ve ilaveli matrisin rankına göre) iki alt boyutta incelenmiştir. Burada bahsi geçen "teorem bazlı çıkarımda bulunma"; teoremlerden bazılarını birlikte değerlendirerek (Teorem 17 ve Teorem 18) bir çıkarımda (uzaydaki her vektör baz vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir) bulunan öğretmen adayının (ÇÖ1) yaptığı ilişkilendirmeyi ifade etmektedir. Katılımcı öğretmen adaylarından her birinin "çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme" temasına ait sergilediği ilişkilendirme biçimleri Tablo 4.53'te özetlenmiştir.

Tablo 4.53 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "Çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme" temasının özeti

Tema	**Çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçimi**				
Öğretmen adayı	LDS bazlı çıkarımda bulunma	vektörler bazında çıkarımda bulunma	ön koşul bazlı çıkarımda bulunma	benzetim yoluyla çıkarımda bulunma	teorem bazlı çıkarımda bulunma
ÇÖ1	*LDS'nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre* *İlaveli matrisin rankına göre*	*Vektörlerin koordinatlarına göre* *Vektörlerin sayısına göre*			✓
ÇÖ2		*Vektörlerin birbirine göre durumları bağlamında*	✓		
ÇÖ3	*LDS'nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre*	*Vektörlerin koordinatlarına göre* *Vektörlerin birbirine göre durumları bağlamında* *Vektörlerin sayısına göre*		*Metaforik bağlamda* *Analojik bağlamda*	
PÖ1	*LDS'nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre* *İlaveli matrisin rankına göre*	*Vektörlerin koordinatlarına göre* *Vektörlerin sayısına göre*	✓		
PÖ2				*Analojik bağlamda*	
PÖ3		*Vektörlerin birbirine göre durumları bağlamında*	✓		

Not: Gri dolgular, o alt temanın belirlenen öğretmen adayında görülmediğini göstermektedir.

Tablo 4.53'e göre öğretmen adaylarının neredeyse tamamının vektörler bazında; yarısının (ÇÖ1, ÇÖ3, PÖ1) LDS bazlı ve ön koşul bazlı (ÇÖ2, PÖ1, PÖ3), az sayıda öğretmen adayının benzetim yoluyla (ÇÖ3, PÖ2) ve teorem bazlı (ÇÖ1) çıkarımda bulunduğunu göstermektedir. Ayrıca, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2 ve PÖ3'ün bu temaya ilişkin teorem bazlı çıkarımda bulunmadıkları görülmektedir. Katılımcı öğretmen adaylarının yarı yapılandırılmış görüşmelerde lineer cebir kavramlarını ilişkilendirme biçimlerine yönelik ortaya çıkan, “çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçimi” temasına ilişkin eksensel kodlama Şekil 4.20’de sunulmuştur.



Şekil 4.20 Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme biçimlerinin eksensel kodlanması: çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme

Tablo 4.53’teki lineer bağımsızlık ve LDS kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme temasına atılan kodlardan ikisine (“LDS’nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre” ve “ilaveli matrisin rankına göre”) karşılık gelen PÖ1’in görüşme sürecinden kesitler aşağıda örnek olarak sunulmaktadır.

Araştırmacı: *HOLDS’nin katsayılar matrisinin lineer bağımlı olduğu durumla ilgili ne söylersin?*

Öğretmen adayı eline kalem alarak katsayıları birbirinin katı olan 2 denklemden oluşan bir denklem sistemi alır, bu denklem sistemini matris formunda yazdıktan sonra ok çizerek 2. satırın 1. satırın katı olduğunu ifade eder. 2 denklemin tek denkleme indirgenebileceğini ifade ederek hesaplama işlemlerini tamamladıktan sonra yorumlar.

PÖ1: $\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{matrix}\right\}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, burada (satır vektörleri) skaler katı olduğundan tek bir denklem (ilaveli matrisin rankına göre) gibi düşünebiliriz. Çözersek ($x+y=2$ denklemini) $x=a$, $y=2-a$ gelir.

Araştırmacı: *Bu LDS'nin çözüm kümesinden bahsedebilir misin?*

PÖ1: *Sonsuz çözümü olur. Lineer bağımlı HOLDS'lerin sonsuz çözümü var. Lineer bağımsız HOLDS'lerin tek çözümü var.*

Araştırmacı: *Peki LDS'lerin hangi durum ya da durumlarda çözüm yoktur?*

Öğretmen adayı eline kalem alarak katsayılar matrisi birbirinin katı olan 2 denklemden oluşan denklem sistemi yazıp hesaplama işlemlerini tamamladıktan sonra yorumlar.

PÖ1: $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 2x+2y=0 \end{array}\right\}$ *çözüm yoktur. Burada* $2x+2y=4$ *olmadığı için çelişki olur* (LDS'nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre)*, çözüm yok.*

Araştırmacı: *HLDS'leri için çözüm olmama durumu nasıldır?*

Eline kalem alarak örnek bulmaya çalışırken *x+y=0* yazdıktan sonra duraksar ve kendinden emin bir şekilde cevap verir.

PÖ1: *Burada HLDS'leri için böyle bir durum (çözüm olmama durumu) olmaz. İlk denklemi hangi skalerle çarparsam çarpayım 0 elde edeceğimden çelişkili bir durum oluşmaz (çözüm vardır).* (LDS'nin çözüm sürecindeki çelişkili duruma göre)

PÖ1'in katsayılar matrisinin lineer bağımlı olduğu durumda HOLDS'nin çözümüne ilişkin "*tek bir denklem gibi düşünebiliriz*", "*çelişki olur*" ve "*çelişkili bir durum oluşmaz*" ifadelerinin kendine özgü olmasından ve öğretmen adayının bu çıkarımlarını geometriye ve lineer cebir kavramlarına ilişkin tanım ve teoremlere dayandıramamasından dolayı çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme temasına atılmıştır. Temalardan bir başkasına uzaysal ilişkilendirme biçimine ilişkin kodlar aşağıda Tablo 4.54'te sunulmaktadır.

4.9.5 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik "uzaysal ilişkilendirme biçimi" temasının özeti

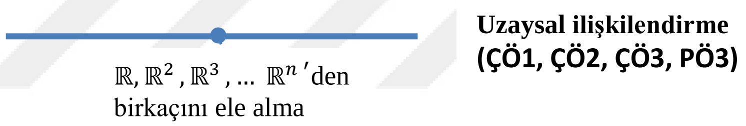
Bu tema, katılımcı öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarını, farklı uzayları birlikte ele alarak ilişkilendirdiğini göstermektedir. Öğretmen adaylarının neredeyse tamamında ortaya çıkan bu ilişkilendirme; "$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ 'den birkaçını ele alma" olmak üzere tek durumda ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla, bu tema; tek boyutta incelenmiştir. Katılımcı öğretmen adaylarının "uzaysal ilişkilendirme" temasına ait sergilediği ilişkilendirme Tablo 4.54'de özetlenmiştir.

Tablo 4.54 Öğretmen adaylarının lineer cebir kavramları arası ilişkilendirmelerine yönelik “uzaysal ilişkilendirme” temasının özeti

Tema	**Uzaysal ilişkilendirme biçimi**
Öğretmen adayı	$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ ’den birkaçını ele alma
ÇÖ1	✓
ÇÖ2	✓
ÇÖ3	✓
PÖ1	
PÖ2	
PÖ3	✓

Not: Gri dolgular, o alt temanın belirlenen öğretmen adayında görülmediğini göstermektedir.

Tablo 4.54’e göre; PÖ1 ve PÖ2’nin bu temayı sergilemediği görülmektedir. Katılımcı öğretmen adaylarının yarı yapılandırılmış görüşmelerde lineer cebir kavramlarını ilişkilendirme biçimlerine yönelik ortaya çıkan, “uzaysal ilişkilendirme” temasına ilişkin eksensel kodlama Şekil 4.21’de sunulmuştur.



Şekil 4.21 Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme biçimlerinin eksensel kodlanması: uzaysal ilişkilendirme

Yukarıdaki tablo ve şekillerle özeti ve eksensel kodlaması verilen temalara ilişkin dağılım aşağıda Tablo 4.55’te sunulmaktadır.

Tablo 4.55 Öğretmen adaylarının sergilediği temalara ilişkin frekans ve dağılım

İlişkilendirme türleri / Öğretmen adayları	**Formal /işlemsel**	**Teorik /özellik**	**Geometrik**	**Çıkarımsal /nedensel**	**Uzaysal**
ÇÖ1	24	18	23	10	7
ÇÖ2	16	12	10	10	2
ÇÖ3	21	15	13	9	3
PÖ1	26	15	6	11	0
PÖ2	14	9	14	3	0
PÖ3	9	11	1	8	1
Toplam	110 (%34,2)	80 (%24,8)	67 (%20,8)	51 (%15,8)	13 (%4)

Tablo 4.55 incelendiğinde; en çok sergilenen ilişkilendirme biçiminin formal/işlemsel ilişkilendirme olduğu ve bunu sırasıyla teorik/özellik, geometrik, çıkarımsal/nedensel ve uzaysal ilişkilendirme biçiminin takip ettiği görülmektedir. Bu durum; öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarını ilişkilendirmede daha çok tanımlardan, algoritmalardan ve teoremlerden yararlandıkları, bununla birlikte kendine özgü çıkarımlarda çok fazla bulunmadığı ve birkaç uzayın birlikte ele alındığı uzaysal ilişkilendirmeden çok fazla yararlanmadığı şeklinde yorumlanabilir.

4.10 Araştırmanın Onuncu Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın bir diğer problemi "Öğretmen adaylarının eksik ve yanlış ilişkilendirmeleri hangi ilişkilendirme biçimlerinden kaynaklanmaktadır?" şeklinde olup bu probleme cevap bulmak için sürekli karşılaştırmalı analiz yönteminden yararlanılmıştır.

4.10.1 Lineer birleşim-germe kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular

Yarı yapılandırılmış görüşmelerin tamamlanmasının ardından öğretmen adaylarına ait transkriptlerde yer alan lineer birleşim ve germe kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin kodlar tek tek incelenerek sergilenen ilişkilendirme biçimleri belirlenmiştir. Bu ilişkilendirme biçimlerine karşılık gelen örnek cevaplar aşağıda Tablo 4.56'da sunulmaktadır.

Tablo 4.56 Lineer birleşim-germe kavramları arası ilişkilendirme türlerine ilişkin örnek cevaplar ve frekans dağılımı

İlişkilendirme Türleri	**Öğretmen Adaylarının Örnek Cevapları**	**Öğretmen Adayları**	**f**
Formal/işlemsel	$a(1,-1)+b(1,0)=\cdots$ *Birbirinin katı olmadığı için lineer bağımsız hımm. Lineer birleşimini aldım. Germeyi bulurken 2 vektörün lineer birleşimini alıyoruz ve bu şekilde diğer vektörleri buluyoruz* (PÖ1).	PÖ1, PÖ2, PÖ3, ÇÖ1, ÇÖ2,ÇÖ3	6
Teorik/özellik	-	-	0
Geometrik	-	-	0
Çıkarımsal/Nedensel	*Bir şeyin germe olabilmesi için toplam 2 kural var, (vektörlerin) lineer bağımsız olması gerekiyordu ve bir kural daha vardı. İkincisi (vektörleri) katsayısıyla çarptığımızda (lineer birleşimini bulduğumuzda) uzayı kapsaması gerekiyordu (PÖ3).* *Farklı katsayılarla farklı vektörlerin lineer birleşimini aldığımızda eşitliğin sonucu aynı ana vektör (gerilen vektör) olabilir (ÇÖ1).* *Lineer birleşim vektörlerle ilgili uç uca ekleme ama tanımını hiç hatırlamıyorum. Germe bir şeyin üzerine eklemek, vektörü devam ettirme (ÇÖ3).*	PÖ2, PÖ3, ÇÖ1, ÇÖ3	4
Uzaysal	*Germe üretmek demektir, vektörlerin öncelikle lineer bağımsız olup olmadığına sonra hangi uzayda olduklarına bakarız. Örneğin $\mathbb{R}^2$ 'de 2 vektör alırsak lineer bağımsızsa uzayı ($\mathbb{R}^2$) gerer, $\mathbb{R}^3$ 'te ise uzayı (uzayın tamamını) germe ihtimali yoktur, çünkü bir alan kalır (germediği bir alan kalır) hımm nasıl desem* (bir süre bekledi) *tamamını geremez ama uzayın belli bir kısmını gerer.*	ÇÖ1	1

Tablo 4.56, lineer birleşim ve germe kavramları arası ilişkilendirmede formal/işlemsel ilişkilendirme biçiminin öğretmen adaylarının tamamı, çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçiminin öğretmen adaylarının çoğunluğu tarafından sergilendiğini; ancak teorik/özellik ve geometrik ilişkilendirme biçiminin sergilenmediğini göstermektedir. Yarı yapılandırılmış görüşme formundan elde edilen transkriptler incelendiğinde lineer birleşim ve germe kavramlarını; PÖ1'in yalnızca formal/işlemsel ilişkilendirme biçimini sergileyerek doğru, ÇÖ1'in ve PÖ2'nin formal/işlemsel ve çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçimlerinin sergileyerek kısmen doğru bir biçimde ilişkilendirdiği tespit edilmiştir. İlişkilendirme görüşme formundaki "*lineer birleşim ile germe kavramları arasında nasıl bir ilişki vardır?*" sorusuna bu (PÖ1, ÇÖ1 ve PÖ2) öğretmen adaylarının verdiği cevaplar;

"$a(1,-1)+b(1,0)=\cdots$ *(ifadesini yazarak (1,-1) ve (1,0) vektörlerini eliyle gösterip) Birbirinin katı olmadığı için lineer bağımsız, lineer birleşimini aldım, germeyi bulurken 2 vektörün lineer birleşimini alıyoruz ve bu şekilde diğer* *vektörleri buluyoruz. Burada skaler katı (vektörler birbirinin skaler katı) olmadığı için aslında bunlar bu şekilde $\mathbb{R}^2$'nin bütün noktaları (vektörleri) gerilir. Çünkü (1,-1) ve (1,0) vektörleri birbirinin skaler katı değildir* (söylediklerini tekrarladı). *Burada germeyi bulurken (vektörlerin gerdiği uzayı) 2 vektörün lineer birleşimini alıyoruz. Bu şekilde diğer vektörleri buluyoruz*" (PÖ1),

"*Lineer birleşim ile formülü yazdığımız zaman germesini onu üretmesini isteriz. Üretip üretmediğine cevaplara (LDS'nin çözümünden elde edilen değerlere) bakarak karar veririz* (formal/işlemsel)*, yani farklı katsayılarla farklı vektörlerin lineer birleşimini aldığımızda eşitliğin sonucu aynı ana vektör (gerilen vektör) olabilir* (çıkarımsal/nedensel). *Germe üretmek demektir, vektörlerin öncelikle lineer bağımsız olup olmadığına sonra hangi uzayda olduklarına bakarız*" (ÇÖ1)

ve

"*birkaç vektörün toplamıyla yer değiştirme olacak mesela toplayarak veya çıkararak yeni bir vektör buluyoruz oluşan vektöre yer değiştirme diyoruz ya işte bu oluşan kısım germeyi oluşturuyor. Bu kavramının (germe) lineer birleşimden farkı birçok vektörün bir araya gelip oluşturmasıdır*" (PÖ2)

biçimindedir. Transkriptler incelendiğinde; öğretmen adaylarının yarısının tamamen ya da kısmen doğru ilişkilendirmeler yapsa da diğer yarısının (ÇÖ2, ÇÖ3 ve PÖ3) yanlış ilişkilendirmeler yaptığı görülmektedir. Bu öğretmen adaylarından formal/işlemsel ilişkilendirme biçimini sergileyerek lineer birleşim ile germe kavramları arasında yanlış ilişkilendirme yapan ÇÖ2'nin cevabı;

"*Germe bir uzayda bir vektörü ele aldığımızda bu vektörden yola çıkarak oluşturabildiğimiz genel bir denklem, lineer birleşim vektörlerin toplamı, skaler katlarının toplamı herhangi vektörlerin toplamıdır*" (ÇÖ2),

biçimindedir. Lineer birleşim ve germe kavramlarının birbiriyle ilişkili olduğunu belirtse de ÇÖ3'ün

"*Lineer birleşim vektörlerle ilgili uç uca ekleme ama tanımını hiç hatırlamıyorum, ayy tıkandım hocam* (uzunca bir süre güler). *Lineer birleşim* *kavramı lineer kombinasyon, germe bir şeyin üzerine eklemek, vektörü devam ettirme. Dolayısıyla ikisi arasında ilişki vardır*" (ÇÖ3)

ifadesinden bu iki kavrama ilişkin düşüncelerinde çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçimini sergileyerek "*uç uca ekleme* " ve "*vektörü devam ettirme*" gibi benzer ifadeler kullandığı ancak doğru bir ilişkilendirme yapamadığı görülmektedir. Benzer şekilde PÖ3'ün;

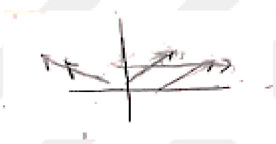
> "v_1 *ve* v_2 *vektörlerinin lineer birleşiminini* $a_1v_1 + a_2v_2$ *olarak yazabilirim* (formal/işlemsel). *Bunu çoğaltabilirim de burada 2 vektör aldığım için böyle. Bir şeyin germe olabilmesi için toplam 2 kural var, lineer bağımsız olması gerekiyordu ve bir kural daha vardı. İkincisi katsayısıyla çarptığımızda (lineer birleşimi bulduğumuzda) uzayı kapsaması gerekiyordu* (çıkarımsal/nedensel). *Derste önce lineer birleşimi daha sonra germeyi öğrendiğimizden lineer birleşim germe için ön koşuldur* (çıkarımsal/nedensel)" (PÖ3).

ifadesinde kavramlar arası ilişkilendirmede yanılgıları olduğu ve bu yanılgıların çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçimini doğru bir şekilde gerçekleştiremediğinden kaynaklandığı görülmektedir. Yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgular; lineer cebir performansı yüksek düzeyde olan öğretmen adaylarının (PÖ1 ve ÇÖ1) bu iki kavramı tamamen doğru bir şekilde ilişkilendirdiği ancak lineer cebir performansı düşük düzeyde olan öğretmen adaylarının (PÖ3 ve ÇÖ3) eksik ya da tamamen yanlış ilişkilendirmeler sergilediği şeklindedir.

4.10.2 Germe-lineer bağımsızlık kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular

Öğretmen adaylarına ait transkriptlerde yer alan germe ve lineer bağımsızlık kavramlarına ilişkin kodlar tek tek incelenerek sergilenen ilişkilendirme biçimleri belirlenmiştir. Bu ilişkilendirme biçimlerine karşılık gelen örnek cevaplar aşağıda Tablo 4.57'de sunulmaktadır.

Tablo 4.57 Germe- lineer bağımsızlık kavramları arası ilişkilendirme türlerine ilişkin örnek cevaplar ve frekans dağılımı

İlişkilendirme Türleri	**Öğretmen Adaylarının Örnek Cevapları**	**Öğretmen Adayları**	**f**
Formal/işlemsel	*Lineer bağımlı ise 2 vektör birbirinin katı (skaler katı) olduğu için yine aynı şekilde (tek vektörde olduğu gibi) bir doğru oluşturur. Örneğin,* $\{(1,2),(2,4),(4,8)\}$ *gibi alırsak sonsuza gider ve dolayısıyla doğru oluşturur* (ÇÖ3).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2, PÖ3	6
Teorik/özellik	*Lineer bağımsız 2 vektörü* $\mathbb{R}^2$ *de aldığımızdan bütün uzayı gerebilir, bağımsız olduğundan her yeri tarar* (ÇÖ1). *Lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerer, hatta lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerince baz oluşturur (Lineer bağımsız bir küme gerdiği uzayın bazıdır)* (ÇÖ2).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2, PÖ3	6
Geometrik	Öğretmen adayı, xy koordinat düzlemi üzerinde öncelikle $(-1,2)$ ve $(-2,4)$ vektörlerini ve daha sonra birbirine paralel herhangi vektörleri (koordinat düzleminin 1. bölgesindeki vektörleri) çizerek yorumlar. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.22'de sunulmuştur.  **Şekil 4.22** PÖ1'in görüşme sürecindeki açıklamaları $\{(-1,2),(-2,4)\}$ *(kümesindeki vektörlerin) gerdiği uzay doğruyu belirtir* (PÖ1).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2, PÖ3	6
Çıkarımsal/Nedensel	*Yaa bu 2 vektör (*$\{(1,2),(0,0)\}$*) bunlar lineer bağımlı dedik. Bunlar lineer bağımlı olduğu için tüm uzayı germiyor* (ÇÖ2)	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ3	5
Uzaysal	*Mesela* $\mathbb{R}^2$ *de 2 vektör alırsak gerer.* $\mathbb{R}^2$ *de 3 vektör alırsak bunlardan 1 tanesi lineer bağımlı olacağından yine (*$\mathbb{R}^2$*'yi germek için) 2 tane (lineer bağımsız) gereklidir.* $\mathbb{R}^3$ *te alırsak 3 tane (vektör) gereklidir. Burada germe sayısını (vektör sayısını) uzayın boyutuna göre değiştiririm* (ÇÖ1).	ÇÖ1, PÖ3	2

Tablo 4.57'ye göre ilişkilendirme biçimlerinin neredeyse tamamının öğretmen adaylarının çoğunluğu tarafından sergilendiği ancak uzaysal ilişkilendirme biçiminin az sayıda öğretmen adayı tarafından sergilendiği görülmektedir. Bununla birlikte germe ve lineer bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkilendirmeye ilişkin görüşme sürecinde ÇÖ1'in;

"*Mesela* $\mathbb{R}^2$ *de 2 vektör alırsak gerer.* $\mathbb{R}^2$ *de 3 vektör alırsak bunlardan 1 tanesi lineer bağımlı olacağından yine (*$\mathbb{R}^2$ *yi germek için) 2 tane (lineer bağımsız) gereklidir,* $\mathbb{R}^3$ *te alırsak 3 tane (vektör) gereklidir* (uzaysal). *Burada germe sayısını (vektör sayısını) uzayın boyutuna göre değiştiririm. Mesela* $\mathbb{R}^2$ *de 3* *vektör alalım, (1,2), (2,4) ve (3,5) vektörlerini aldığımızda* (formal/işlemsel) *bunlardan (1,2) ve (2,4); yalnızca birinin gerdiği uzaya eşittir* (çıkarımsal/nedensel). *Dolayısıyla (1,2) ve (3,5)'i almış olurum ki kendi arasında 2 lineer bağımsız vektör uzayı (*$\mathbb{R}^2$ *yi) gerer* (teorik/özellik). *Eğer 3 vektörden 2 si lineer bağımlı ve* $\mathbb{R}^3$ *te ise germez yani belli bir yeri (*$\mathbb{R}^3$ *ün alt uzayını)* (geometrik) *gerer ama (*$\mathbb{R}^3$ *ün) tamamını germez, germesi için 3 vektörün hepsinin birbirine bağımsız olması gerekir. Vektör sayısı ve germe arasındaki ilişki böyledir* (ÇÖ1)"

ifadesinden ilişkilendirme türlerinden tamamını (formal/işlemsel, çıkarımsal/nedensel, teorik/özellik, geometrik ve uzaysal) sergileyerek doğru cevap verdiği anlaşılmaktadır. Bununla birlikte;

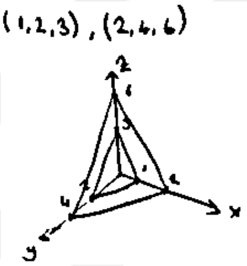
"*lineer bağımsız 2 vektör birbirinin skaler katı olmayacak, lineer bağımsız olduğundan bütün uzayı geriyordu yani* $\mathbb{R}^2$ *deki bütün noktaları (vektörleri) sağlıyordu* (teorik/özellik). *Mesela xy düzleminin tamamını* (geometrik) *ifade eder(gerer).*"

ifadesinde PÖ1'in teorik/özellik ve geometrik ilişkilendirme türlerini sergilediği ve iki kavram arasında doğru bir ilişkilendirme yaptığı görülmektedir. ÇÖ1 ve PÖ1 haricindeki öğretmen adaylarının doğru bir şekilde gerçekleştiremedikleri teorik/özellik veya çıkarımsal/ nedensel ilişkilendirmelerinden ve ön öğrenmelerdeki eksiklerinden dolayı bu 2 kavramı ilişkilendirmede yanılgıları olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının bu kavramlara ilişkin "$\mathbb{R}^n$ 'i germek için en az n vektör gereklidir", "$\mathbb{R}^n$ 'de $n+1$ vektör lineer bağımlıdır" teoremlerini öğrenmedeki eksikleri kavramlar arası ilişkilendirmede yanılgılara neden olmaktadır. Bu duruma ilişkin ÇÖ2 ve PÖ3'ün ifadeleri sırasıyla;

"*kendinden 1 fazla olan uzayı geriyordu* (teorik/özellik) *diye hatırlıyorum. Mesela 3 vektör* $\mathbb{R}^4$ *'ü geriyor* (ÇÖ2)."

"$\mathbb{R}^2$ *de en fazla 2 vektör alabiliriz,* $\mathbb{R}^3$ *de en fazla 3 vektör alabiliriz, yani uzayımızdan (uzayın boyutundan) fazla vektör alamıyoruz.* $\mathbb{R}^4$ *te çalışıyorsak 5 vektör alamayız, alırsak germez* (uzaysal). *Örneğin* $(1,1,1)$ *vektörünü alırsak bir kere germesi için lineer bağımsız olması gerekiyordu* (çıkarımsal/nedensel). $(1,1,1)$ *lineer bağımsız ve* $\mathbb{R}^3$ *'ü germez.* $(1,1,1)$ *tek vektör olduğundan* $\mathbb{R}$ *'yi gerer. Eğer* $(1,1,1)$ *ile birlikte bir tane daha lineer* *bağımsız vektör olsaydı* $\mathbb{R}^2$ *'yi gererdi. 3 tane lineer bağımsız vektör olursa* $\mathbb{R}^3$ *'ü gerer. Elimizdeki vektör sayısının aldığımız vektör uzayının boyutundan fazla olmaması gerektiğine ilişkin bir özellik* (teorik/özellik) *kalmış aklımda* (PÖ3). "

biçimindedir. Burada PÖ3 ifadesindeki uzaydan aldığı vektörlerin koordinat sayısını dikkate almadan yalnızca vektör sayısına odaklanarak $(1,1,1)$ vektörünün $\mathbb{R}$'yi gerebileceği hususunda yanılmaktadır. Benzer şekilde PÖ2'nin de vektörlerin koordinatlarına ilişkin yanılgısı aşağıdaki görüşme metninde sunulmaktadır. $\mathbb{R}^3$'te 2 lineer bağımlı vektörün gerdiği uzayı tespit etmek için öğretmen adayı (1, 2, 3) vektörünün konumunu belirlemek isterken (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3) noktalarını birleştirmekle birlikte (2, 4, 6) vektörünü de aynı şekilde yanlış çizmektedir. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.23'te sunulmuştur.



Şekil 4.23 PÖ2'nin görüşme sürecindeki açıklamaları

Bu öğretmen adayı $\mathbb{R}^3$'te 2 lineer bağımlı vektörün gerdiği uzaya ilişkin görüşlerini;

"*Duruma göre değişir, germe katlarıyla (vektörlerin skaler katlarını alarak) oluşturulduğu için ikisinin arasında oluyor ama bir düzlem de değil 3 boyutlu bir şekil elde ediliyor.*"

olarak ifade etmektedir. Ön öğrenmelerindeki eksiklerin yanı sıra öğretmen adaylarının yanlış çıkarımlarda bulunması da kavramlara arası yanlış ilişkilendirmelere neden olmaktadır. Nitekim hiçbir ilgisi olmamasına karşın bir uzayın gerilmesi için lineer bağımsızlığın gerek şart olduğunu düşünen öğretmen adayları bulunmaktadır (ÇÖ2 ve PÖ3). Bu öğretmen adaylarının yanlış çıkarımlarına ilişkin ifadeler;

"*Tek vektörün gerebileceği uzay, bir kere tek vektör lineer bağımsız olur. Lineer bağımsız olduğu içinde bir uzayı gerebilir* (ÇÖ2)."

"$\mathbb{R}^2$ *'de lineer bağımlı 2 vektör alsak lineer bağımsızlık şartını sağlamadığından hiçbir uzayı germez, lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerer, eğer uygun şartları sağlıyorsa yani vektör sayısı daha fazla değilse gerer. Mesela* $\mathbb{R}^3$ *için 2 lineer bağımsız vektör olursa gerer, ancak 4 lineer bağımsız olursa geremez. Bu şartın sağlanması gerekir* (PÖ3)."

biçimindedir. Bu öğretmen adaylarından ÇÖ2'nin;

"$(1,0)$ *ve* $(0,0)$ *lineer bağımlı vektörlerini aldığımızda bunlar bir noktada kesiştiği içinde tek bir doğruyu* (geometrik) *gerecektir* (çıkarımsal/nedensel) (ÇÖ2)"

ifadesinde aldığı vektörlerin lineer bağımlı olması ve bu vektörlerin bir doğruyu gereceği doğru bir düşünce olsa da bunun nedeni "bir noktada kesişme" değildir. Nitekim herhangi bir uzaydan alınan lineer bağımlı ya da lineer bağımsız vektörlerin tamamının yer vektörleri alındığında bu vektörler orijinde kesişmektedir. Dolayısıyla, "bir noktada kesişme" vektörleri birbirinden ayıran bir özellik değildir.

Lineer bağımsızlık ve germe kavramlarını ilişkilendirirken baz kavramından yararlanan öğretmen adaylarından biri (ÇÖ2) "$\mathbb{R}^n$'i germek için n lineer bağımsız vektör gereklidir" teoremini $n = 1$ için uygulamaya çalışırken kafası karıştığını ifade ederek öncelikle "vektörlerin koordinat sayısı" ile "uzayın boyutunu" yanlış bir biçimde ilişkilendirmiştir. Daha sonra bu öğretmen adayı "$\mathbb{R}^n$'den alınan n lineer bağımsız vektör bu uzayın bazıdır" teoremini yani baz vektörlerinin uzaydan ($\mathbb{R}$'den) alınması gerektiğini dikkate almadan değerlendirme yaparak, lineer bağımsız herhangi iki vektörün gerdiği uzayın $\mathbb{R}^2$ olduğu hususunda yanlış bir genellemede bulunmaktadır. Bu duruma ilişkin görüşme süreci aşağıda sunulmaktadır.

Araştırmacı: *Lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerebilir mi? Neden?*

ÇÖ2: *Lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerer. Hatta lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerince baz oluşturur* (teorik/özellik).

Araştırmacı: *Peki lineer bağımsız tek vektör baz olur mu?*

ÇÖ2: $(1,2)$ *alacak olursam tek vektör aldığım için ve 0 dışındaki tüm vektörler lineer bağımsız olduğu için germe işlemini uyguladığımızda gerdiğini* (çıkarımsal/nedensel) *görürüz (gerdiği uzayı buluruz).*

Araştırmacı: *Tek vektör nasıl bir uzayın bazıdır?*

ÇÖ2: *Mesela* $(1,2)$ *aldım* (formal/işlemsel) *tek boyut (tek vektör) olduğu için* $\mathbb{R}$*'nin bazıdır* (teorik//özellik).

Araştırmacı: *(1,2) vektörüne tek boyutlu olarak ifade ederken nasıl düşündüğünden bahsedebilir misin?*

ÇÖ2: *Yok 2 boyut (bileşen) aslında tek değil.*

Araştırmacı: $(1,2)$ *vektörünün* $\mathbb{R}$*'nin bazı olması durumundan biraz bahsedebilir misin?*

ÇÖ2: *Hımm, bunu bilemiyorum tarif edemem.*

Araştırmacı: $(1,2)$ *vektörüyle* $\mathbb{R}$*'nin nasıl üretilebileceğinden biraz bahsedebilir misin?*

ÇÖ2: *Kafam karıştı* (bir süre bekledi) $\mathbb{R}^2$ *'yi gerebilirim sanırım çünkü 2 bileşen var* (çıkarımsal/nedensel).

Araştırmacı: *Herhangi bir uzaydan alınan 2 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzay ile ilgili ne söyleyebilirsin?*

ÇÖ2: *Lineer bağımsız iki vektörün gerdiği uzay* $\mathbb{R}^2$ *'dir.* $\mathbb{R}^2$ *'yi tamamen tarar* (geometrik).

Burada öğretmen adayının aldığı tek vektör (1,2) bir boyutlu uzayın (y=2x doğrusunun) bazı olmakla birlikte $\mathbb{R}$'nin bazı değildir. Lineer bağımsız olan her tek vektör $\mathbb{R}$'nin bazı olmadığı gibi iki lineer bağımsız vektörün gerdiği uzay da $\mathbb{R}^2$ olmayabilir. Lineer bağımsız bir küme yalnızca gerdiği uzayın bazı olduğundan $(1,2,3)$ve $(1,2,1)$ lineer bağımsız vektörlerinin gerdiği uzay bir düzlemdir ama $\mathbb{R}^2$ ya da $\mathbb{R}^3$ değildir. Burada öğretmen adayının genelleme yaparak yanıldığı görülmektedir. Ayrıca genelleme yapmaktan kaçınsa da birçok yanılgıya sahip başka bir öğretmen adayına ilişkin görüşme süreci (ÇÖ3) aşağıda sunulmaktadır.

Araştırmacı: *3 lineer bağımsız vektörün gereceği uzay ile ilgili ne söylersin?*

ÇÖ3: *Parça parça gidiyor ya yine düzlem oluşturuyor. Çünkü (lineer bağımsız 3 vektör) birbirinin katı değil bir tek bunu biliyorum, farklı 3 vektör olmuş oluyor. Burada birbirinin katı olmadan parça parça mı gidiyor acaba göster deseniz gösteremem.*

Araştırmacı: Hangi uzaydan bahsediyorsun?

ÇÖ3: $\mathbb{R}^2$ *'de çalışıyorum, 3 boyutu pek düşünemiyorum.*

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'de 3 lineer bağımsız vektöre örnek verebilir misin?*

ÇÖ3: *(1,2), (1,3) ve (1,4) o şekilde düşündüm yani (1, 2, 3) gibi değil.*

Araştırmacı: *2 den fazla herhangi sayıda vektör sayısı için lineer bağımsız vektörler cümlesinin düzlem oluşturması durumunu genelleyebilir misin?*

ÇÖ3: *Bu biraz uç bir söylem olur.*

Araştırmacı: *Peki 3, 4 ya da 5 lineer bağımsız vektör ile ilgili ne söylersin?*

ÇÖ3: *Düzlem, düzlem, yine düzlem oluşturur* (geometrik).

Burada öğretmen adayı 3 boyutu düşünemediğini belirtmekte ve dolayısıyla uzaysal ilişkilendirme biçimini sergileyememektedir. Bununla birlikte "$\mathbb{R}^2$'de birbirinin skaler katı olan 2 vektör lineer bağımlıdır" teoreminin ifadesi yalnızca 2 vektör için geçerli olsa da öğretmen adayı bu durumu 3 vektöre genelleyerek yanılmaktadır. Ayrıca "$\mathbb{R}^n$'de $n+1$ vektör lineer bağımlıdır" teoremini ihmal ederek lineer bağımlılığı yalnızca "skaler kat" ile ilişkilendirmiş ve $\mathbb{R}^2$ den alınan 3 vektörün birbirinin skaler katı olmasa da lineer bağımlı olacağı çıkarımında bulunamamıştır. Nitekim, $\mathbb{R}^2$'de alınabilecek en fazla lineer bağımsız vektör sayısı 2 olduğundan 3 lineer bağımsız vektör elde edilemeyeceği açıktır. Ayrıca, bu öğretmen adayı yanılarak 3, 4 ya da 5 lineer bağımsız vektörler cümlesinin düzlem oluşturacağını belirtmektedir.

Yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgular; lineer cebir performansı yüksek düzeyde olan öğretmen adaylarının (ÇÖ1 ve PÖ1) lineer bağımsızlık ve germe kavramlarını tamamen doğru bir şekilde ilişkilendirdiği; ancak lineer cebir performansı orta (PÖ2 ve ÇÖ2) ve düşük düzeyde (PÖ3 ve ÇÖ3) olan öğretmen adaylarının teorik/özellik ve çıkarımsal/nedensel ilişkilendirmeyi doğru bir şekilde yapamadığından eksik ya da tamamen yanlış ilişkilendirmeler sergilediği şeklindedir.

4.10.3 Germe-baz kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular

Öğretmen adaylarına ait transkriptlerde yer alan germe ve baz kavramlarına ilişkin kodlar tek tek incelenerek sergilenen ilişkilendirme biçimleri belirlenmiştir. Bu ilişkilendirme biçimlerine karşılık gelen örnek cevaplar aşağıda Tablo 4.58'de sunulmaktadır.

Tablo 4.58 Germe-baz kavramları arası ilişkilendirme türlerine ilişkin örnek cevaplar ve frekans dağılımı

İlişkilendirme Türleri	**Öğretmen Adaylarının Örnek Cevapları**	**Öğretmen Adayları**	**f**
Formal/işlemsel	*Germe şartı sağlanmadığında baz olmaz. Bununla birlikte lineer bağımsızlıkta olması gerekiyor. Lineer bağımsız ve germe bazın oluşmasını sağlar* (ÇÖ2). *Germe ve lineer bağımsızlık farklı kavramlardır. Bazın iki şartı vardır. Geren küme içindeki vektörler lineer bağımsızsa ona göre (baz olup olmadığına) karar veririz* (ÇÖ1).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2, PÖ3	6
Teorik/özellik	$\mathbb{R}^2$ *'yi 3 vektör, 4 vektör, ... geremez. Çünkü uzayımızın şeyinden (boyutundan) küçük olması gerekir. Çalıştığımız uzayı (uzayın boyutunu) aldığımız vektör sayısının geçmemesi lazım* (PÖ3).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2, PÖ3	6
Geometrik	*Eğer 3 vektörde lineer bağımlıysa (birbirinin skaler katı ise) sadece doğrultu (doğru) elde ederiz* (ÇÖ1).	ÇÖ1	1
Çıkarımsal/Nedensel	*Eğer içinde 1 tane lineer bağımsız vektör varsa* $\mathbb{R}^2$ *'yi gerer, vektörler arasından biri (diğerleriyle ikişer ikişer değerlendirildiğinde) lineer bağımsız mesela 4 vektör içinden biri kalan vektörlerle hımm yani ikişer ikişer aldığımda lineer bağımsızsa gerer* (ÇÖ1) $\mathbb{R}^2$ *'yi 3 vektör geremez, çünkü boşta eleman kalır* (çıkarımsal/nedensel) (ÇÖ3).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ3	5
Uzaysal	*Vektörlerin* $\mathbb{R}^2$ *'de 2 bileşen* $\mathbb{R}^3$ *için 3 bileşen olduğu için boşta eleman kalmaması gerekir* (ÇÖ3).	ÇÖ2, ÇÖ3	2

Tablo 4.58'e göre ilişkilendirme biçimlerinin tamamını sergileyen öğretmen adayı olmadığı ve formal/işlemsel ve teorik/özellik ilişkilendirme biçimlerinin öğretmen adaylarının tamamı tarafından sergilendiği görülmektedir. Bununla birlikte germe ve baz kavramları arasındaki ilişkilendirmenin incelendiği görüşme sürecinde ÇÖ1 ve PÖ2'nin tamamen doğru ilişkilendirmeler yaptığı diğer öğretmen adaylarının tamamının çıkarımsal/nedensel ve teorik/özellik ilişkilendirme biçimini doğru sergileyemediğinden kaynaklı olarak eksik ya da yanlış ilişkilendirmeler yaptığı tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarından ÇÖ1'in lineer bağımlı/bağımsız vektörlerden yararlanarak formal/işlemsel, çıkarımsal/nedensel, geometrik ve teorik/özellik ilişkilendirme biçimini sergileyerek "$\mathbb{R}^2$ *'yi 3 vektör gerebilir mi?*" sorusuna verdiği cevap;

"*Vektörlerin gerdiği uzay, ürettikleri kümedir ama bazın içinde (tanımında) hem lineer bağımsızlık hem germe vardı. Sadece germeyi alarak bazı oluşturamayız. Yani baz olması için hem lineer bağımsızlık hem de o kümeyi (uzayı) üretmesi gerekir* (formal/işlemsel). $\mathbb{R}^2$ *'de üç vektör kesinlikle birbiriyle lineer bağımlıdır* (teorik/özellik). *Üç vektörden ikisi lineer bağımlı (birbirinin skaler katı) ya da* *üçü birden lineer bağımlıdır (birbirinin skaler katı). Üç vektörden ikisi bağımlı (birbirinin skaler katı) ve biri bağımsızsa (diğerlerinin skaler katı değilse)* $\mathbb{R}^2$ *'yi gerebilir* (çıkarımsal/nedensel)*. Eğer üç vektörde lineer bağımlıysa (birbirinin skaler katıysa) sadece doğrultu (doğru) (geometrik) elde ederiz. Bu* $\mathbb{R}^2$ *'yi geremez. Örneğin,* $\{(2,1),(2,3),(4,2)\}$ *için;* $\{(2,1),(4,2)\}$ *vektörleri aynı doğrultuda lineer bağımlı olduğundan birini alırım (formal/işlemsel).* $(2,3)$ *te bunlara (*$(2,1)$ *ve ya* $(4,2)$ *vektörüne) lineer bağımsız olduğundan* $\mathbb{R}^2$ *'nin tamamını gerer* (geometrik)" (ÇÖ1).

tamamen doğrudur. Ayrıca, ilişkilendirme görüşme formundaki başka bir soruya ($\mathbb{R}^2$ yi geren her küme baz olur mu? Neden açıklayınız?) PÖ2'nin formal/işlemsel ve teorik/özellik ilişkilendirme yaparak verdiği cevapta;

"$\mathbb{R}^2$ *'yi 3 vektör gerebilir, germe kavramını lineer birleşim olarak toplam olarak ele aldığımda 3 vektörün toplamı olarak düşünürsem gerebilir, aynı şekilde lineer birleşimin toplamı için vektör sayılarının artması bir sorun oluşturmuyor, toplamları önemli,* $\mathbb{R}^2$ *'yi geren her küme baz olmaz* (teorik/özellik)*. Çünkü geren küme lineer bağımlı ise baz oluşmaz. Baz olması için öncelik (1. şart) lineer bağımsızlık sonra (2. şart) germesi gerekiyordu* (formal/işlemsel)*. Lineer bağımlı olduğunda 1. faktörü (şartı) sağlamadığı için baz olmaz*" (PÖ2).

tamamen doğrudur. Germe ve baz kavramlarını doğru bir şekilde ilişkilendiren öğretmen adayları bulunsa da daha çok yanlış ilişkilendirmeler yapıldığı görülmektedir. İlişkilendirme görüşme formundaki "$\mathbb{R}^2$ yi 3 vektör gerebilir mi? Neden?" sorusuna uzaysal ve teorik/özellik ilişkilendirme biçimini sergileyerek ÇÖ2'nin verdiği yanlış cevap;

"*Geremez.* $\mathbb{R}^2$ *'yi bir ve 2 vektörle gerebiliriz* $\mathbb{R}^2$ *'de üstü (kuvvet) 2 olduğundan 2 vektör ve daha aşağısı (az sayıda vektör) ile gerilebilir. Mesela 3 vektörün germesi için* $\mathbb{R}^3$ *ve daha fazlası (*$\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \mathbb{R}^6$*) lazımdı. Uzayın ne kadar vektörü varsa yani* n *kadar vektörün minimum* $\mathbb{R}^n$ *için alınması gerektiğini düşünüyorum.*"

biçimindedir. Burada öğretmen adayının (ÇÖ2'nin) yanılgısının teorik/özellik ilişkilendirme biçiminden kaynaklandığı görülmektedir. Aynı soruya bazın tanımını ve sağlaması gereken şartları (lineer bağımsızlık ve uzayın gerilmesi şartı) doğru ifade edebilmelerine rağmen ÇÖ3'ün ve PÖ3'ün verdiği yanlış cevapların sırasıyla

> "*Geremez, maksimum 2 vektör gerebilir* (teorik /özellik). *Geremez, çünkü boşta eleman kalır* (çıkarımsal/nedensel). *Vektörlerin* $\mathbb{R}^2$ *'de 2 koordinatı (bileşen),* $\mathbb{R}^3$ *için 3 koordinatı olduğundan boşta eleman kalmaması gerekir.* $\mathbb{R}^2$ *için maksimum 2,* $\mathbb{R}^3$ *için maksimum 3 vektör almalıyım* (uzaysal) (ÇÖ3)."

> "$\mathbb{R}^2$ *'yi; 3 vektör, 4 vektör, 5 vektör… geremez. Çünkü uzayımızın şeyinden (boyutundan) küçük olması gerekir, çalıştığımız uzayı (uzayın boyutunu) aldığımız vektör sayısının geçmemesi lazım* (teorik /özellik) (PÖ3)."

biçiminde olduğu görülmektedir. $\mathbb{R}^2$ 'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısının 2 olabileceği ve aynı uzayın gerilmesi için ise en az 2 vektör alınmasının gerekliliği düşünüldüğünde, lineer bağımsızlık ve germe şartlarını sağlaması gereken bazın yalnızca 2 vektörden oluşacağı açıktır. Bu durumda verilen cevaplar; öğretmen adaylarının lineer bağımsızlık ile germe kavramlarını karıştırdığını ve dolayısıyla n vektörle $\mathbb{R}^n$ ve bu uzayı kapsayan $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} \subset \cdots$ uzaylarının gerilebileceği biçiminde yanılgıları bulunduğunu göstermektedir.

Diğer taraftan, ÇÖ3'ün germe ve baz kavramları arasında çıkarımsal/nedensel, uzaysal ve teorik/özellik ilişkilendirmelerini sergilediği ve "$\mathbb{R}^n$'i geren n lineer bağımsız vektör bazdır" ve "$\mathbb{R}^n$'de n+1 vektör lineer bağımlıdır" teoremlerini yanlış yorumladığından hata yaptığı görülmektedir. Bu öğretmen adayının yanılgıları, teorik/özellik ilişkilendirme biçimini doğru bir biçimde sergileyemediğinden kaynaklanmaktadır. Öğretmen adayının (ÇÖ3) bu ve "vektörlerin koordinatları" üzerinden kurduğu yanlış ilişkilendirmeye ilişkin bulguların elde edildiği görüşme metinlerinin ilgili bölümleri aşağıda sunulmaktadır.

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'yi 3 vektör gerebilir mi? Neden?*

ÇÖ3: *Geremez. Maksimum 2 vektör gerebilir.*

Araştırmacı: *Peki* $\{(1,2),(1,1),(1,3)\}$ *kümesi* $\mathbb{R}^2$ *'yi gerebilir mi?*

ÇÖ3: *Geremez, çünkü boşta eleman kalır.*

Araştırmacı: *Boşta eleman derken ne kastettiğinden biraz bahsedebilir misin?*

ÇÖ3: *Vektörlerin* $\mathbb{R}^2$ *'de 2 bileşeni,* $\mathbb{R}^3$ *için 3 bileşeni olduğu için boşta eleman kalmaması gerekir.*

Araştırmacı: *Yani* $\mathbb{R}^2$ *'yi germek için kaç vektör almalıyım?*

ÇÖ3: $\mathbb{R}^2$ *için maksimum 2,* $\mathbb{R}^3$ *için maksimum 3 vektör almalıyım.*

Araştırmacı: *Peki tek vektör* $\mathbb{R}^2$ *'yi gerebilir mi?*

ÇÖ3: *Gerebilir. En fazla 2 vektör alırım*

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'yi 4 vektör, 5 vektör,… gerebilir mi?*

ÇÖ3: *Geremez.*

Araştırmacı: *Neden peki?*

ÇÖ3: *Vektörlerin* $\mathbb{R}^2$ *'de 2 bileşen,* $\mathbb{R}^3$ *için 3 bileşen olduğu için boşta eleman kalmaması gerekir.*

Burada transkriptin ilgili bölümünden öğretmen adayının, $\mathbb{R}^2$ 'de alınan 3 ya da daha fazla vektörün skaler katlarının toplamından elde edilen vektörün 2 bileşenli olacağını düşünemediğinden yanıldığı görülmektedir. Bu durum, vektörlerin koordinatlarına ilişkin ön öğrenmelerdeki eksikliklerin yanılgılara neden olduğu şeklinde yorumlanabilir. Benzer şekilde "$\mathbb{R}^2$ *'yi 3 vektör gerebilir mi?*" sorusuna PÖ1'in yanlış ifadeler içeren cevabının;

> "*Germesi için lineer bağımsız olma şartı vardı* (çıkarımsal/nedensel). *3 vektör seçersek,* $\{(1,2),(0,1),(3,2)\}$ *alalım* (formal/işlemsel). *Birbirlerinin lineer kombinasyonu olmadığı sürece gerebilir* (teorik/özellik) *diye hatırlıyorum,* $\mathbb{R}^2$ *'yi 3 vektör gerebilir* (PÖ1)."

olduğu görülmektedir. Burada öğretmen adayının aldığı küme $\mathbb{R}^2$ 'yi gerer ancak bunun nedeni kümenin lineer bağımsız olması değildir. Nitekim lineer bağımsızlık germe kavramı için ön koşul değildir. Ayrıca PÖ1, "U ikiden fazla vektörden oluşuyorsa U'nun lineer bağımlı olması için $\Leftrightarrow$ U daki bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilmelidir" teoremini hatırlasa da "$\mathbb{R}^n$ 'de n+1 vektör lineer bağımlıdır" teoremini dikkate almadığından yanılmaktadır. Bu iki teorem birlikte dikkate alındığında $\{(1,2),(0,1),(3,2)\}$ kümesindeki vektörlerden birinin (en az birinin) diğer vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabileceği ve dolayısıyla lineer bağımlı olacağı açıktır. Bununla birlikte yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarından birinin (PÖ2) lineer kombinasyona ilişkin teoremde geçen "U 'daki bir vektörün diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilmesi" ifadesinde geçen "bir vektörü" kümedeki vektörlerin tamamına genelleyerek yanıldığı belirlenmiştir. Bu yanılgı, diğer bölümde (lineer bağımsızlık-baz kavramları arası ilişkilendirme) ayrıntılı olarak görüşme metninde sunulmaktadır. Yukarıda bahsedilen lineer bağımsızlığın germe kavramına ilişkin ön koşul olarak yanlış bir şekilde yorumlanmasına ilişkin bulguların elde edildiği iki öğretmen adayına ait (ÇÖ2 ve PÖ1) görüşme metinlerinin ilgili bölümleri aşağıda sunulmaktadır.

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'de 0 vektöründen farklı tek vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?*

ÇÖ2: *Tek vektörün gerebileceği uzay, bir kere tek vektör lineer bağımsız olur. Lineer bağımsız olduğu içinde bir uzayı gerebilir.*

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'yi 3 vektör gerebilir mi? Neden?*

PÖ1: *Germesi için lineer bağımsız olma şartı vardı.*

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'yi geren her küme baz olur mu? Nedenini açıklayınız?*

PÖ1: *Germesi için lineer bağımsız olması gerekiyordu. Lineer bağımsızsa yani geriyorsa da baz olur.*

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'yi geren kümelerin baz olmasına ilişkin bu düşünceni genelleyebilir misin?*

PÖ1: *Evet.* $\mathbb{R}^2$ *'yi geren her küme bazdır.*

Araştırmacı: *Lineer bağımlılık/bağımsızlık ile germe kavramları arasında nasıl bir ilişki vardır?*

PÖ3: *Bir uzayın gerilmesi için vektörlerin lineer bağımsız olması gerekiyor. Lineer bağımlı bir küme bir uzayı geremez. Çünkü lineer bağımsız olması gerekir.*

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'yi geren her küme baz olur mu? Nedenini açıklayınız?*

PÖ3: $\mathbb{R}^2$ *'yi geren her küme lineer bağımsızdır. Lineer bağımsızsa bazdır.*

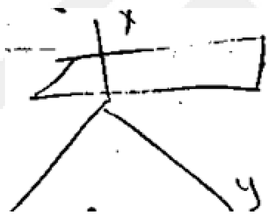
Yapılan görüşmelerden (ÇÖ2, PÖ1, PÖ3,) elde edilen bulgular; lineer bağımsızlığın germe kavramına ilişkin ön koşul olarak yanlış bir şekilde yorumlanmasının "tek vektörün $\mathbb{R}^2$ 'yi gerebileceği " ve "$\mathbb{R}^2$ 'yi geren her kümenin baz olduğuna" ve "lineer bağımlı bir kümenin herhangi bir uzayı geremeyeceği" gibi kavramlar arası doğru olmayan ilişkilendirmelere neden olduğu şeklindedir.

Yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgular; germe ve baz kavramlarını ilişkilendirmede lineer cebir performansı yüksek düzeyde olan öğretmen adaylarından birinin (ÇÖ1) ve orta (PÖ2) düzeyde olan öğretmen adaylarından birinin tamamen doğru, diğer öğretmen adaylarının teorik/özellik veya çıkarımsal/nedensel ilişkilendirmesini doğru bir şekilde yapamadığından eksik ya da tamamen yanlış ilişkilendirmeler yaptığı şeklindedir.

4.10.4 Lineer bağımsızlık-baz/boyut kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular

Öğretmen adaylarına ait transkriptlerde yer alan lineer bağımsızlık ve baz/boyut kavramlarına ilişkin kodlar tek tek incelenerek sergilenen ilişkilendirme biçimleri belirlenmiştir. Bu ilişkilendirme biçimlerine karşılık gelen örnek cevaplar aşağıda Tablo 4.59'da sunulmaktadır.

Tablo 4.59 Lineer bağımsızlık-baz-boyut kavramları arası ilişkilendirme türlerine ilişkin örnek cevaplar ve frekans dağılımı

İlişkilendirme Türleri	**Öğretmen Adaylarının Örnek Cevapları**	**Öğretmen Adayları**	**f**
Formal/işlemsel	$a(1,2,3)+b(0,1,?)$ *ya da en basit örneği verecek olursam* $a\,(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)=(a,b,c)$ *bu vektörler hem lineer bağımsız hem de bunu (eliyle (a,b,c) yi işaret ederek) gerdiği için bazdır, Lineer bağımsız vektör sayısı boyutu verir* (PÖ1).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2, PÖ3	6
Teorik/özellik	$\mathbb{R}^3$ *'ün bazı 2 olmaz,* $\mathbb{R}^3$ *'ü germek için* $\mathbb{R}^3$ *'te 3 tane baza (vektöre) ihtiyacım var. Lineer bağımsızlık şartında belki sıkıntı olmaz ama* $\mathbb{R}^3$ *'ü germesi için 3 vektöre ihtiyacım var* (ÇÖ1). $\mathbb{R}^2$ *'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı 2 dir,* $\mathbb{R}^3$ *'ün bazı 1 vektörden de, 2 vektörden de, 3 vektörden de oluşabilir* (PÖ3).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2, PÖ3	6
Geometrik	$\mathbb{R}^3$ *' ün bazı hımm,* (bir süre bekledi) *en az 2 vektörden oluşur, bu (2 vektörden oluşan baz),* Öğretmen adayı eline bir kalem alarak xyz eksenleri ve bu 3 boyutlu uzayda bir düzlem çizer ve vardığı sonuca şaşırmışçasına yorumlar. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.24'te sunulmuştur.  **Şekil 4.24** PÖ2'nin görüşme sürecindeki açıklamaları *Evet ama bu 2 vektör bir düzlem belirtir.* $\mathbb{R}^3$ *'ün içinde bir düzlem oluşur* (PÖ2).	PÖ2	1
Çıkarımsal/Nedensel	*Hımm* (bir süre bekledi), *en az 3 vektör olmalı, koordinat düzleminden dolayı en az 3 tane (vektör) olmalı, 3 vektörden oluşmalı yani* (PÖ1).	PÖ1	1
Uzaysal	-	-	0

Tablo 4.59'a göre; ilişkilendirme biçimlerinin tamamını sergileyen öğretmen adayı olmadığı gibi uzaysal ilişkilendirme biçiminin sergilenmediği, formal/işlemsel ve teorik/özellik ilişkilendirme biçimlerinin öğretmen adaylarının tamamı tarafından ve çıkarımsal/nedensel (PÖ1) ve geometrik (PÖ2) ilişkilendirme biçimlerinin yalnızca 1 öğretmen adayı tarafından sergilendiği görülmektedir. Bununla birlikte incelenen transkriptlerden lineer bağımsızlık ve baz kavramları arasındaki ilişkilendirmenin değerlendirildiği görüşme sürecinde öğretmen adaylarının çoğunluğunun (PÖ1, PÖ2,

PÖ3 ve ÇÖ3) doğru bir teorik/özellik ilişkilendirmesi yapamadığından ve bunlardan yalnızca birinin (PÖ2) işlemsel ilişkilendirme yapamadığından yanıldığı; yalnızca 2 öğretmen adayının (ÇÖ1 ve ÇÖ2) tamamen doğru ilişkilendirmeler yaptığı tespit edilmiştir. İlişkilendirme görüşme formundaki "$\mathbb{R}^3$'ün bazı 2 olabilir mi?" sorusuna doğru ilişkilendirme yapan öğretmen adaylarından ÇÖ1'in verdiği cevap;

> "*Hayır, çünkü lineer bağımsız olmalı ve germeli* (formal/işlemsel). $\mathbb{R}^3$ *ü germek için* $\mathbb{R}^3$ *'te 3 tane baza (vektöre) ihtiyacım var* (teorik/özellik). *Lineer bağımsızlık şartında belki sıkıntı olmaz ama* $\mathbb{R}^3$ *'ü germesi için 3 vektöre ihtiyacım var, yani* $\mathbb{R}^3$ *'te, 2 lineer bağımsız vektör olabilir ama* $\mathbb{R}^3$ *'ü germez*".

Burada öğretmen adayı "$\mathbb{R}^n$'i germek için n lineer bağımsız vektör gereklidir" teoreminden ve bazın tanımından yararlanarak doğru cevabı vermektedir. Görüşme sürecinde öğretmen adaylarının tamamının baz ve boyut kavramını doğru bir şeklide tanımlasa da "$\mathbb{R}^3$ *'ün bazı kaç vektörden oluşur?*" sorusuna gelince öğretmen adaylarının çoğunluğunun yanıldığı görülmektedir. Doğru cevabı 3 olan bu soruya PÖ1 ve PÖ3'ün sırasıyla;

> "*Hımm* (bir süre bekledi), *en az 3 vektör olmalı* (teorik/özellik), *xyz koordinat düzleminden dolayı* (çıkarımsal/nedensel) *en az 3 tane (vektör) olmalı, en az 3 vektör ama bu sayı artırılabilir* (PÖ1)."

> "$\mathbb{R}^2$ *'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı 2 dir.* $\mathbb{R}^3$ *'ün bazı 1 vektörden de, 2 vektörden de, 3 vektörden de oluşabilir* (PÖ3)."

cevabını verdiği tespit edilmiştir. Bu ifadelerden, öğretmen adaylarının "$\mathbb{R}^n$'i germek için en az n vektör gereklidir" ve "$\mathbb{R}^n$'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı n'dir" teoremlerine ilişkin yanılgıları olduğu şeklinde yorumlanabilir. Bu durum, öğretmen adaylarının germe ve lineer bağımsızlık kavramlarını baz kavramına genellediğinden yanıldığı şeklinde yorumlanabilir. Aynı soruya başka bir öğretmen adayının bir uzayda alınabilecek herhangi sayıda lineer bağımsız vektör sayısı ile bazı yanlış bir şekilde ilişkilendirerek;

> "$\mathbb{R}^3$ *'ün bazı aynı mantıkla (bir önceki soruda* $\mathbb{R}^2$ *'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısının 2 olmasına benzer şekilde) maksimum 3 tür, 2 olabilir, 1 olabilir* (ÇÖ3)."

biçiminde cevapladığı görülmektedir. Bu durum, lineer bağımsızlık kavramına ilişkin "$\mathbb{R}^n$'de alınan lineer bağımsız vektör kümesinin hiçbirisinde n'den fazla vektör bulunmaz" teoreminin anlaşılmadığı şeklinde yorumlanabilir. Ayrıca "$\mathbb{R}^2$ *'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz?*" sorusuna öğretmen adaylarından PÖ1;

> "*Hımm* (bir süre bekledi), *2 yok 2 değil, sonsuz olabilir mi sanki.* $\mathbb{R}^2$ *'de en az iki tane lineer bağımsız vektör vardır. Çünkü 1 tanesi (vektörün)* $\mathbb{R}^2$ *'yi geremez. 2 den fazla hepsi (2 den fazla vektör) olur, sonsuz sayıda vektör olabilir.*"

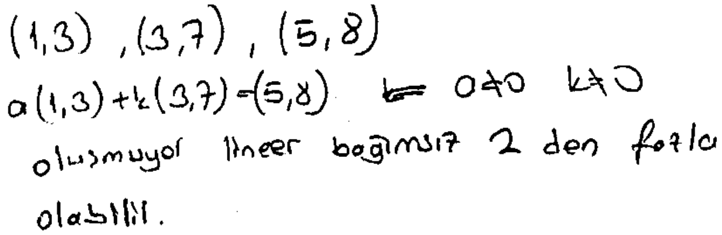
cevabını vermektedir. Bu durum germe kavramı ile lineer bağımsızlık kavramının karıştırılarak "$\mathbb{R}^n$'i germek için en az *n* vektör gereklidir," teoreminin anlaşılmadığı şeklinde yorumlanabilir. Ayrıca, lineer bağımsızlık ve baz kavramına ilişkin yanlış ilişkilendirmelerin tespit edildiği bir öğretmen adayıyla gerçekleştirilen görüşme metni aşağıda sunulmaktadır.

> Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz?*
>
> PÖ2: $\mathbb{R}^2$ *'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı 2 dir* (teorik/özellik).
>
> Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ *'de 3 lineer bağımsız vektör olup olmayacağına ilişkin neler söylersin?*
>
> PÖ2: *Şu an düşünüyorum* (uzunca bir süre bekledi)
>
> Araştırmacı: *Buna ilişkin düşüncelerinden bahsedebilir misin?*

Öğretmen adayı eline kalem alarak 3 vektör yazar. Lineer bağımsızlığın tanımında geçen kuralı yazarak uzunca bir süre sorgular.

> PÖ2: $(1,3), (3,7)$ *ve* $(5,8)$ *vektörlerini alırsam üçüde birbirinden lineer bağımsız vektörler olur mu? u ve v vektörlerinin katlarıyla (lineer birleşimi ile) (5,8) oluşur mu diyorduk* (teorik/özellik),

Öğretmen adayı işlemleri yaptıktan sonra *a* ve *k* skalerlerini sıfırdan farklı olarak elde edemeyince aldığı üç vektörü lineer bağımsız olarak yorumlar. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.25'te sunulmuştur.



Şekil 4.25 PÖ2’nin görüşme sürecindeki açıklamaları

PÖ2: *$k \neq 0$ ve $a \neq 0$ oluşmuyor ve bunlar lineer bağımsızdır* (formal/işlemsel).

Burada a ve k reel sayıları 0’dan farklı olarak elde edilebilmesine rağmen $(5,8)$’in, iki vektörün lineer birleşimi olarak yazılıp yazılamayacağını değerlendirmek için oluşturduğu LDS’nin çözümüne ilişkin işlemsel süreci doğru bir şekilde tamamlayamayan öğretmen adayının (PÖ2) yanıldığı görülmektedir. Bu öğretmen adayı, bir vektör için “diğer vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilme” şartını sağlamadığı ve dolayısıyla $(1,3), (3,7)$ ve $(5,8)$ vektörlerinin lineer bağımlı olamayacağı sonucuna varmıştır. Halbuki, “ U, ikiden fazla vektörden oluşuyorsa U’nun lineer bağımlı olması için $\Leftrightarrow$ U’daki bir vektörün diğer vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilmesidir.” teoreminde “diğer vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilme” şartının “bir vektör” için sağlanmasının vektörler kümesinin lineer bağımlı olması için yeterli olduğu ifade edilmektedir. Dolayısıyla bir vektör için sağlanmaması bu vektörler kümesinin lineer bağımlılığını ortadan kaldırmamaktadır. PÖ2’nin yanlış ilişkilendirme yapması, LDS’nin çözümüne ilişkin işlemsel süreci tamamlayamadığından ve teoremi anlamlandıramadığından kaynaklanmaktadır.

Yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgular; lineer bağımsızlık ve baz-boyut kavramlarını ilişkilendirmede lineer cebir performansı yüksek düzeyde olan bir öğretmen adayının (ÇÖ1) ve orta düzeyde (ÇÖ2) olan bir öğretmen adayının tamamen doğru, diğer öğretmen adaylarının formal/işlemsel ve teorik/özellik ilişkilendirme biçimini doğru bir şekilde sergileyemediğinden eksik ya da tamamen yanlış ilişkilendirmeler yaptığı biçimindedir.

4.10.5 Lineer bağımsızlık- LDS kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular

Öğretmen adaylarına ait transkriptlerde yer alan lineer bağımsızlık ve LDS kavramlarına ilişkin kodlar tek tek incelenerek sergilenen ilişkilendirme biçimleri belirlenmiştir. Bu ilişkilendirme biçimlerine karşılık gelen örnek cevaplar aşağıda Tablo 4.60'ta sunulmaktadır.

Tablo 4.60 Lineer bağımsızlık- LDS kavramları arası ilişkilendirme türlerine ilişkin örnek cevaplar ve frekans dağılımı

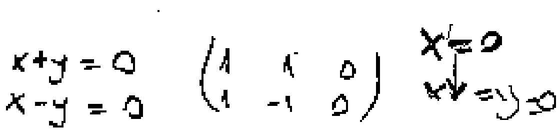
İlişkilendirme Türleri	**Öğretmen Adaylarının Örnek Cevapları**	**Öğretmen Adayları**	**f**
Formal/işlemsel	*Aslında 3 ihtimal vardır (tek, sonsuz, boş küme)* $\left.\begin{matrix}2x+2y=3\\4x+4y=5\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}x+y=\frac{3}{2}\\4x+4y=5\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}-4x-4y=-6\\4x+4y=5\end{matrix}\right\}$ *çözüm gelmedi. Demek ki HOLDS'lerinde çözüm gelmiyor. Lineer bağımlı (katsayılar matrisinin satır vektörleri lineer bağımlı olan) HOLDS'lerinde çözüm yok* (PÖ2).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2, PÖ3	6
Teorik/özellik	*Determinant 0 olduğunda parametreye bağlı sonsuz çözüm olur (HOLDS'lerinde) tek çözümde olabilir, rankına bakıyoruz. Eğer A matrisinin rankı ile tüm sistemin (ilaveli matrisin) rankı eşitse tek çözüm var, küçükse (eğer A matrisinin rankı, ilaveli matrisin rankından küçükse) parametreye bağlı sonsuz çözüm var diyebiliriz* (PÖ3).	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1, PÖ2, PÖ3	6
Geometrik	*Verdiğim 2 örnek* $\left(\left.\begin{matrix}x+y=3\\2x+2y=6\end{matrix}\right\}\right)$ *doğrunun eğimleri aynı çıkar dolayısıyla paraleldir bunların paralelse çözümü var mıdır? Ayy bir dakika kafam karıştı, ne yapabilirim kiiii, çözümü yok ki çözemem kiii. Bence yoktur* (ÇÖ3)	ÇÖ3,	1
Çıkarımsal/Nedensel	*HLDS'leri için böyle* $\left(\left.\begin{matrix}x+y=2\\2x+2y=0\end{matrix}\right\}\right.$, *burada* $2x+2y=4$ *olmadığı için çelişki olur, çözüm yok) bir durum (çözüm olmaması durumu) olmaz. İlk denklemi hangi skalerle çarparsam çarpayım 0 elde edeceğimden çelişkili bir durum oluşmaz (çözüm vardır)* (PÖ1)	ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3, PÖ1	4
Uzaysal	-	-	0

Tablo 4.60'a göre formal/işlemsel ve teorik/özellik ilişkilendirme biçiminin öğretmen adayları tarafından en çok sergilenen ilişkilendirme biçimi olduğu ve bunu çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçiminin takip ettiği, geometrik ilişkilendirmenin yalnızca 1 öğretmen adayı tarafından sergilendiği ve uzaysal ilişkilendirmenin sergilenmediği görülmektedir. Ayrıca görüşme metnini içeren transkriptler incelendiğinde; lineer bağımsızlık ve LDS kavramları arasındaki ilişkilendirmede en çok tercih edilen ilişkilendirme biçimleri olmasına rağmen öğretmen adaylarının yanlış ilişkilendirmelerinin formal/işlemsel ve teorik/özellik ilişkilendirmesinden kaynaklandığı belirlenmiştir. İlişkilendirme görüşme sürecinde öğretmen adaylarının yarısının (ÇÖ1, ÇÖ2, ÇÖ3) formal/işlemsel ve çoğunluğunun (PÖ1, PÖ2, PÖ3 ve ÇÖ1) teorik/özellik ilişkilendirmesinden kaynaklı olarak lineer bağımsızlık ve LDS kavramları arasında tamamen doğru bir ilişkilendirme yapamadığı tespit edilmiştir.

İlişkilendirme görüşme formundaki "*Katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımsız olması durumunda HLDS'nin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?*" sorusuna yalnızca formal/işlemsel ilişkilendirme sergileyerek aşağıdaki gibi doğru ilişkilendirme yapan öğretmen adaylarından PÖ1'in verdiği cevap;

"*HLDS'de katsayımız (sütun vektörü) 0 oluyordu.*

Öğretmen adayı eline kalem alarak HLDS yazar ve bu denklem sisteminin ilaveli matrisini yazar ve işlemlerini tamamladıktan sonra yorumlar. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.26'da sunulmuştur.

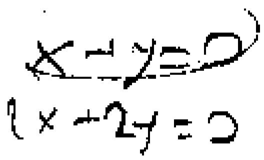


Şekil 4.26 PÖ1'in görüşme sürecindeki açıklamaları

PÖ1: $\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x-y=0 \end{matrix}\right\}$ *ve* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = 0, y = 0$ *olur ve tek çözüm vardır.*

Lineer bağımlı alacak olursam

Öğretmen adayı $\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{matrix}\right\}$ denklemini yazarak çözüm kümesini değerlendirir. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.27'de sunulmuştur.



Şekil 4.27 PÖ1'in görüşme sürecindeki açıklamaları

PÖ1: $x = -y$ *parametreye bağlı sonsuz çözüm bulunur. Lineer bağımsız olduğunda tek çözüm, lineer bağımlı iken HLDS'de sonsuz çözüm olur.*"

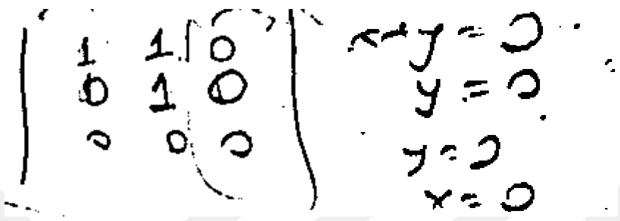
biçimindedir. Bunun üzerine "*HLDS için çözüm olmama durumu nasıldır?*" sorusuna karşılık doğru bir çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme sergileyerek;

"*Burada HLDS'leri için böyle* ($\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ 2x+2y=0 \end{matrix}\right\}$, *burada* $2x + 2y = 4$ *olmadığı için çelişki olur, çözüm yok) bir durum (çözüm olmaması durumu) olmaz. İlk denklemi hangi skalerle çarparsam çarpayım 0 elde edeceğimden çelişkili bir durum oluşmaz (çözüm vardır).*"

cevabını vermektedir. Buraya kadar HLDS'nin çözüm kümesi ile katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımlı olması durumunu doğru bir şekilde ilişkilendiren öğretmen adayına HLDS’nin katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumu ile ilişkisi sorulduğunda teorik/özellik ilişkilendirmesini doğru bir şekilde yapamadığını gösteren görüşme metni aşağıda sunulmaktadır.

Araştırmacı: *Katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda HLDS’nin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?*

Öğretmen adayı örnek olarak aldığı bir HLDS’nin çözüm kümesini bulduktan sonra yorum yapar. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.28’de sunulmuştur.



Şekil 4.28 PÖ1’in görüşme sürecindeki açıklamaları

PÖ1: *Determinantın 0 olması için katsayıların (katsayılar matrisinin satırlarından birinin) birinin 0 olması yeterli, determinant 0 ise homojense (HLDS ise) tek çözüm gelir oda (0,0) vektörüdür.*

Araştırmacı: *Çözüm kümesi ile determinant kavramı arasındaki ilişki nasıldır?*

PÖ1: *Katsayılar matrisininki 0 ve ilaveli matrisinki sıfırdan farklı ise çözüm boş küme, bu matrislerin ikisi de sıfırsa çözüm sonsuz, ikisi de (katsayılar matrisi ve ilaveli matrisin determinantı) sıfırdan farklı olursa tek çözüm vardır.*

Katsayılar matrisi ile ilaveli matrisin ranklarının eşit olup olmamasına ilişkin teorem (Tablo 4.50’deki Teorem 16) bulunmakla birlikte ilaveli matrisin determinantını içeren herhangi bir teorem ya da özellik olmamasına rağmen öğretmen adayının ilaveli matrisle ilgili ifadeleri yanıldığını göstermektedir. Teorik/özellik ilişkilendirmesini doğru yapamasa da bu öğretmen adaylarından PÖ2’nin; daha sonra formal/işlemsel ilişkilendirme sergileyerek doğru cevabı bulduğu sözde yanlış (pseudo) olan görüşme metni aşağıda sunulmaktadır.

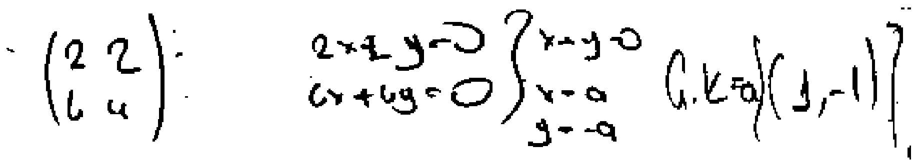
Araştırmacı: *Katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda HLDS’nin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?*

PÖ2: *Lineer bağımlı olduğunda determinantları 0 olur. Determinant 0 olduğunda çözüm yoktur. Yani denklemin çözümünü sağlamaz* (teorik/özellik).

Araştırmacı: *Bu 2 kavram arasındaki ilişkiye dair düşüncelerinden biraz daha bahsedebilir misin?*

PÖ2: *HLDS'ye göre bakalım.*

Öğretmen adayı eline bir kalem alarak öncelikle bir 2×2 matris alıp bunu katsayılar matrisi olarak kabul edip daha sonra bu katsayılar matrisine karşılık gelen bir LDS'yi yazar ve çözüm kümesini elde ettikten sonra yorumlar. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.29'da sunulmuştur.



Şekil 4.29 PÖ2'nin görüşme sürecindeki açıklamaları

PÖ2: $\left.\begin{matrix}2x+2y=0\\4x+4y=0\end{matrix}\right\} x+y=0\}$ *buradan bir çözüm gelmez.*

Araştırmacı: *Neden çözüm gelmediğinden biraz bahsedebilir misin?*

PÖ2: *Hımm, (bir süre bekledi) yok aslında* $x+y=0 \quad x=a, y=-a$ *ve* $Ç = a\{(1,-1)\}$ *şeklinde çözüm gelir.*

Araştırmacı: *Çözümün olup olmaması ile ilgili neler söyleyebilirsin?*

PÖ2: *Ama ben çözüm yok diye hatırlıyorum. Şimdi bir çözüm çıktı.*

Araştırmacı: *Bu denklem sisteminin çözüm kümesi ile ilgili ne düşünüyorsun?*

PÖ2: *Sonsuz çözüm geldi.*

Bu görüşme metninin ilk kısmında öğretmen adayının cevabının yanlış olduğu görülmektedir. Bu durum, katsayılar matrisinin determinantının 0 olmasına ilişkin HOLDS'de iki durumdan biri çözüm olmama durumu olsa da HLDS'de sonsuz çözüme (tek durum) karşılık gelmektedir. HOLDS'de determinant 0 olduğunda çözüm olmayabilir ve bununla birlikte sonsuz çözüm de olabilir. Ancak HLDS'de determinantın 0 olması durumunda sonsuz çözüm vardır. HLDS'nin katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda sonsuz elemanlı olmasına çözüm kümesini ÇÖ1'in;

"*determinant 0 sa aşikar çözüm var yani tek çözüm*"

ve PÖ3'ün;

"*Determinantın 0 olması durumunda* $n \times n$ *matrislerde çözüm yoktur demek, homojen demek 0'a eşit oluyordu (sütun vektörü). Yani bahsettiğim durum homojen denklemler (HLDS) için geçerlidir.*"

biçiminde yanlış bir şekilde ifade ettiği görülmektedir. Ayrıca, HLDS'nin katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda çözüm kümesini,

"*Katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda lineer bağımlı olur, az önce (yukarıdaki örneklerde) hesapladığım gibi lineer bağımlı homojen olan denklemlerde (HLDS) sonsuz çözüm geldi*" (PÖ2)

olarak doğru bir biçimde ifade eden PÖ2'nin HOLDS'nin katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda çözüm kümesinin sonsuz elemanlı olabileceğini ihmal ederek

"*homojen olmayan lineer denklemlerde (HOLDS) ise çözüm yoktur*" (PÖ2)

biçiminde cevap verdiği görülmektedir. Burada görüşme yapılan öğretmen adaylarının çoğunun teorik/özellik ilişkilendirmesini doğru yapamadığı ve sonsuz elemanlı (HLDS'nin katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda) olan çözüm kümesini "tek elemanlı" (PÖ1 ve ÇÖ1) ve "boş küme" (PÖ3) olarak yanlış bir şekilde ifade ettiği görülmektedir. Ayrıca PÖ3'ün; HOLDS'nin çözüm kümesine ilişkin bilgilerini ilgili teoremi (Teorem 16) doğru bir biçimde anlamlandıramadığından,

"*Rankına bakıyoruz, eğer A matrisinin rankı ile tüm sistemin (ilaveli matrisin) rankı eşitse tek çözüm var*" (PÖ3)

biçiminde eksik ve

"*küçükse (eğer A matrisinin rankı, ilaveli matrisin rankından küçükse) parametreye bağlı sonsuz çözüm var diyebiliriz*" (PÖ3)

yanlış ifade ettiği belirlenmiştir. Bu öğretmen adayı, katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda HOLDS'lerin çözüm kümesi sorulduğunda

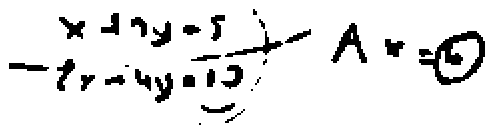
"*Determinant 0 olduğunda parametreye bağlı sonsuz çözüm olur (HOLDS'de) tek çözümde olabilir, şu anda bu ilişkiyi kuramadım*" (PÖ3)

cevabını vermektedir. Burada öğretmen adayının; katsayılar matrisinin determinantı 0 olan HOLDS'lerin çözüm kümesinin sonsuz olabileceği durumu doğru ifade etse de çözümün boş küme de olabileceğini ihmal ettiği, çözümün tek elemanlı olabileceğini söyleyerek yanıldığı ve determinant ile HOLDS'nin çözüm kümesini ilişkilendiremediğini belirttiği görülmektedir.

Ayrıca lineer cebir performans düzeyi yüksek olan öğretmen adaylarından birinin (ÇÖ1) katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda HOLDS’nin çözüm kümesini, boş küme de olabileceğini ihmal ederek yalnızca “sonsuz elemanlı” olarak değerlendirdiği görüşme metni aşağıda sunulmaktadır.

Araştırmacı: *HOLDS’nin katsayılar matrisinin satır vektörleri lineer bağımlı ise çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?*

Öğretmen adayı *katsayılar matrisinin satır vektörleri lineer bağımlı olan bir* HOLDS alır ve bu denklem sisteminin genel ifadesini yazarak yorumlar. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.30’da sunulmuştur.



Şekil 4.30 ÇÖ1’in görüşme sürecindeki açıklamaları

ÇÖ1: $\left.\begin{aligned} x+2y&=5\\ 2x+4y&=10\end{aligned}\right\}$ *alırsam, yine bir denklem kalır parametreye bağlı sonsuz çözüm olur.*

Araştırmacı: *Peki burada 5’e ve 10’a eşitledin. Bu değerler birbirinin skaler katı olmasa nasıl değerlendirirsin?*

ÇÖ1: *Skaler katı olmak zorunda değil. Çünkü katsayılar matrisinin lineer bağımlı olması sonuç matrisine (sütun vektörünün oluşturduğu matris) bağlı değil. Yani $Ax = b$ olarak yazdığımızda A ve b matrisleri farklı matrislerdir.*

Araştırmacı: *Sütun vektörünün elemanları birbirinin skaler katı olmadığı duruma ilişkin çözüm kümesini nasıl değerlendirirsin?*

ÇÖ1: *Çözümün değişeceğini düşünmüyorum. Yine parametreye bağlı sonsuz çözüm gelir.*

Burada katsayılar matrisi lineer bağımlı olduğu ve sütun vektörünün elemanlarının birbirinin katı olmadığı durumda çözüm boş küme olmasına rağmen öğretmen adayının burada örneklendirdiği özel durumu genelleyerek hata yaptığı görülmektedir. Benzer şekilde; elemanları birbirinin skaler katı olan sütun vektörünü içeren lineer denklem sistemlerine doğru yorum yapan başka bir öğretmen adayının aksi durumda (birbirinin skaler katı olmayan sütun vektörünü içeren lineer denklem sistemlerine) yanıldığı aşağıdaki görüşme metninde sunulmaktadır.

Araştırmacı: *Katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımlı olması durumunda HOLDS'nin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?*

ÇÖ2: $\left.\begin{matrix} 2x+y=3 \\ 4x+2y=6 \end{matrix}\right\}$ *olsaydı sonsuz çözümler olacaktı, yani aşikar çözüm dışında ekstra çözümler olacaktı ama* $\left.\begin{matrix} 2x+y=3 \\ 4x+2y\neq 6 \end{matrix}\right\}$ *aldığımızda çözüm sadece 0 olurdu. Çünkü burdan denklem gelmez (çözüm adımlarını uygulayınca denklem elde edemeyiz).*

Araştırmacı: *Aşikar çözümden bahsedebilir misin?*

ÇÖ2: *0 çözümünden bahsediyorum, açık olan çözüm bir tane çözüm demek.*

Bu görüşme metninde aldığı HOLDS'nin $\left(\left.\begin{matrix} 2x+y=3 \\ 4x+2y\neq 6 \end{matrix}\right\}\right)$ çözümünün olmamasına rağmen öğretmen adayı aşikar çözümün olduğunu yani çözüm kümesinin $(0,0)$ tek elemanından oluştuğunu söyleyerek yanılmaktadır. Bununla birlikte yalnızca 1 öğretmen adayının geometrik ilişkilendirme sergilediği ancak bu ilişkilendirmenin de doğru olmadığı aşağıda sunulmaktadır.

Araştırmacı: *HOLDS için ne söylersin?*

ÇÖ3: *Aslında 3 ihtimal vardır (tek, sonsuz, boş küme).*

Öğretmen adayı eline bir kalem alarak 2 denklemden oluşan LDS yazar ve 2. denklemin 1. denklemin 2 katı olduğunu dolayısıyla lineer bağımlı olduğunu ifade eder. Öğretmen adayının bu duruma ilişkin açıklamaları aşağıda Şekil 4.31'de sunulmuştur.

Şekil 4.31 ÇÖ3'ün görüşme sürecindeki açıklamaları

ÇÖ3: $\left.\begin{matrix} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{matrix}\right\}$ *burada katsayılar matrisini (ilaveli matrisi) lineer bağımlı aldım, vektörler (ilaveli matrisin satır vektörleri) birbirinin katı olsun.Çözüm kümesi* $(x, 3-x)$ *bu çözüm kümesi oluyor mu?*

Araştırmacı: *Bu çözüm kümesi 2 doğrunun birbirine göre durumlarından hangisine karşılık gelir?*

ÇÖ3: *Verdiğim 2 örnek doğrunun eğimleri aynı çıkar dolayısıyla paraleldir* (geometrik) *bunların paralelse çözümü var mıdır? Ayy bir dakika kafam karıştıı, ne yapabilirim kiiii, çözümü yok ki çözemem kiii. Bence yoktur.*

Araştırmacı: *Biraz daha kafanı toparlayıp bu denklem sisteminin çözüm kümesini söyleyebilir misin?*

ÇÖ3: *Hayır hocaam gidiyor gidiyor x ler bu denklem sisteminin çözümü yok* (formal/işlemsel), *paralel (paralel doğrular)* (geometrik) *zaten olmaz. Boş küme.*

Burada öğretmen adayının örnek gösterdiği çakışık doğrulara karşılık gelen LDS'nin geometrik yorumunu yanlış bir şekilde "paralel doğrular" olarak değerlendirdiği ve dolayısıyla doğru çözümü bulamadığı görülmektedir. Bununla birlikte, bu görüşme metni ile öğretmen adayının örnek gösterdiği HOLDS'nin çözüm kümesinin $(x, 3-x)$ elemanlarından oluştuğunu belirlediği ancak bulduğu çözüme karşılık gelen doğruların birbirine göre durumunu belirleyemediği tespit edilmiştir. Bu durum, öğretmen adayının doğruların birbirine göre durumlarından çakışıklığı ihmal ederek eğim ile yalnızca paralellik arasında ilişki kurduğu şeklinde yorumlanabilir. Yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgular; lineer bağımsızlık ve LDS'ye ilişkin eksik ya da tamamen yanlış ilişkilendirmelerin neredeyse tamamının öğretmen adaylarının formal/işlemsel ve teorik/özellik ilişkilendirmesini doğru bir şekilde yapamadığından kaynaklandığı şeklindedir. Bununla birlikte ilköğretim yıllarından beri öğrenim hayatları boyunca disiplin içinde ve disiplinler arası alanda LDS'den yararlanan öğretmen adaylarının formal/işlemsel ilişkilendirmede eksik ve yanlış bilgilere sahip olması dikkat çekici bir bulgudur.

4.10.6 Baz- lineer dönüşüm kavramları arası ilişkilendirme becerisine ilişkin bulgular

Öğretmen adaylarına ait transkriptlerde yer alan baz ve lineer dönüşüm kavramlarına ilişkin kodlar tek tek incelenmiş ve sergilenen ilişkilendirme biçimleri belirlenmiştir. Bu ilişkilendirme biçimlerine karşılık gelen örnek cevaplar aşağıda Tablo 4.61'de sunulmaktadır.

Tablo 4.61 Baz-lineer dönüşüm kavramları arası ilişkilendirme türlerine ilişkin örnek cevaplar ve frekans dağılımı

İlişkilendirme Türleri	Öğretmen Adaylarının Örnek Cevapları	Öğretmen Adayları	f
Formal/işlemsel		-	0
Teorik/özellik	*Dönüşüm bir bazı başka bir baza götürüyor . Bunu bulmada dönüşümleri kullanıyoruz* (PÖ2).	PÖ2	1
Geometrik	-		0
Çıkarımsal/Nedensel	*Lineer dönüşüm $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye bir lineer dönüşüm alayım. Mesela $(2,3) \rightarrow (3,5)$'e dönüşsün. İkisini de baz vektörleri olarak yazarsam dönüşüm yapabilirim. Dolayısıyla ilişkilidir*(ÇÖ3).	ÇÖ3,	1
Uzaysal			0
Hiçbiri		ÇÖ1, ÇÖ2, PÖ3, PÖ1	4

Tablo 4.61'e göre; öğretmen adaylarından biri (PÖ2) tarafından teorik/özellik ve başka bir öğretmen adayı (ÇÖ3) tarafından çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçiminin sergilendiği formal/işlemsel, geometrik ve uzaysal ilişkilendirme biçimlerinin sergilenmediği görülmektedir İlişkilendirme görüşme formunun uygulandığı yarı yapılandırılmış görüşmelerde geçen "*Baz vektörlerine lineer dönüşüm uygulanması durumunda nasıl bir sonuç elde edilebilir?*" sorusuna yalnızca bir öğretmen adayının (PÖ2) eksik ifadelerle;

> "*Dönüşüm bir bazı başka bir baza götürüyor. Bunu (bazı) bulmada dönüşümleri kullanıyoruz. Nasıl açıklayacağımı düşünüyorum. Bazı dönüşümler* lineer *dönüşümler yapıldığında bazların (vektörlerin) koordinatları farklı çıkıyor (baz vektörleri değişiyor).*" (PÖ2)

biçiminde iki kavram arasındaki ilişkiyi açıkladığı görülmektedir. Görüşme yapılan öğretmen adaylarından biri ise (ÇÖ1) kavramların tanımlarını

> "*Lineer dönüşüm için 2 kuralım vardır. α ile çarptığımızda içindeyken dışında da aynı sonucu vermesi $(L(\alpha u_1) = \alpha L(u_1))$, bide (ikinci şart) toplamlarını ayrı ayrı yazabilmemiz $\left(L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)\right)$. Baz vektörleri de hem lineer bağımsız hem geriyor.*" (ÇÖ1)

olarak doğru bir şekilde ifade etse de bu 2 kavramı ilişkilendiremediğini

> "*Ama bu 2 kavramı (*lineer dönüşüm*, baz) ilişkilendiremedim*" (ÇÖ1)

olarak belirtmektedir. İki kavram arasında ilişkilendirmeyi yapamamasını

> "*Hımm, aaaa lineer dönüşüm, lineer dönüşümü pek hatırlamıyorum. Baz vektörleri ve standart bazı hatta standart bazı aldığımızda diğer vektörleri oluşturduğumuzu hatırlıyorum ama genel olarak bu konu (lineer dönüşüm) pek yok*" (ÇÖ1)

biçiminde lineer dönüşüm kavramını anlayamaması ve hatırlayamaması ile açıklamaktadır. Bununla birlikte, öğretmen adaylarından biri (ÇÖ3) ise bu 2 kavramı ilişkilendirmeye çalışsa da

> "*Lineer dönüşüm* $\mathbb{R}^2$ *'den* $\mathbb{R}^2$ *'ye bir lineer dönüşüm alayım. Mesela* $(2,3) \rightarrow (3,5)$*e dönüşsün. İkisini de baz vektörleri olarak yazarsam dönüşüm yapabilirim. Dolayısıyla ilişkilidir*."

olarak yanlış bir çıkarımda bulunmaktadır. Benzer şekilde ÇÖ2, PÖ1 ve PÖ3 sırasıyla

> "*Lineer dönüşümü hatırlayamıyorum. Lineer dönüşümlere hakim değilim*" (ÇÖ2),

> "*Ne olabilir hımm, baz vektörleri matrislerde 0 olmayan satırlar bize baz vektörlerini veriyordu, ilişki (baz vektörleri ile lineer dönüşüm arasında ilişki) burada ne olabilir hatırlayamadım*" (PÖ1)

ve

> "*Lineer dönüşüm son konuydu ama buna rağmen çok hatırlamıyorum, ilişki kuramadım*" (PÖ3)

ifadeleriyle lineer dönüşüm kavramını anlamada zorlandıklarını ifade etmektedir. Bu durum bu araştırmanın nicel kısmında LCPT'den elde edilen kavram bazında performansa ilişkin bulguları destekler niteliktedir. Nitekim nicel analizler sonucu elde edilen bu bulgularda, lineer dönüşümün öğretmen adaylarının en düşük performans sergilediği kavramlar arasında yer aldığı ortaya konmaktadır.

Yukarıda Tablo 4.56-4.61'de öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmelerine ilişkin kavramlar arası doğru, eksik ve yanlış ilişkilendirmeleri ayrı ayrı incelenmiş ve öğretmen adaylarının yanlış ilişkilendirmelerinin bazı ilişkilendirme biçimlerinden kaynaklandığı tespit edilmiştir. Bu duruma ilişkin öğretmen adaylarının yanlış ve eksik ilişkilendirmelerinin kaynağı aşağıda Tablo 4.62'de sunulmaktadır.

Tablo 4.62 Öğretmen adaylarının kavram çiftleri arası eksik ve yanlış ilişkilendirmelerinin kaynağına ilişkin tablo

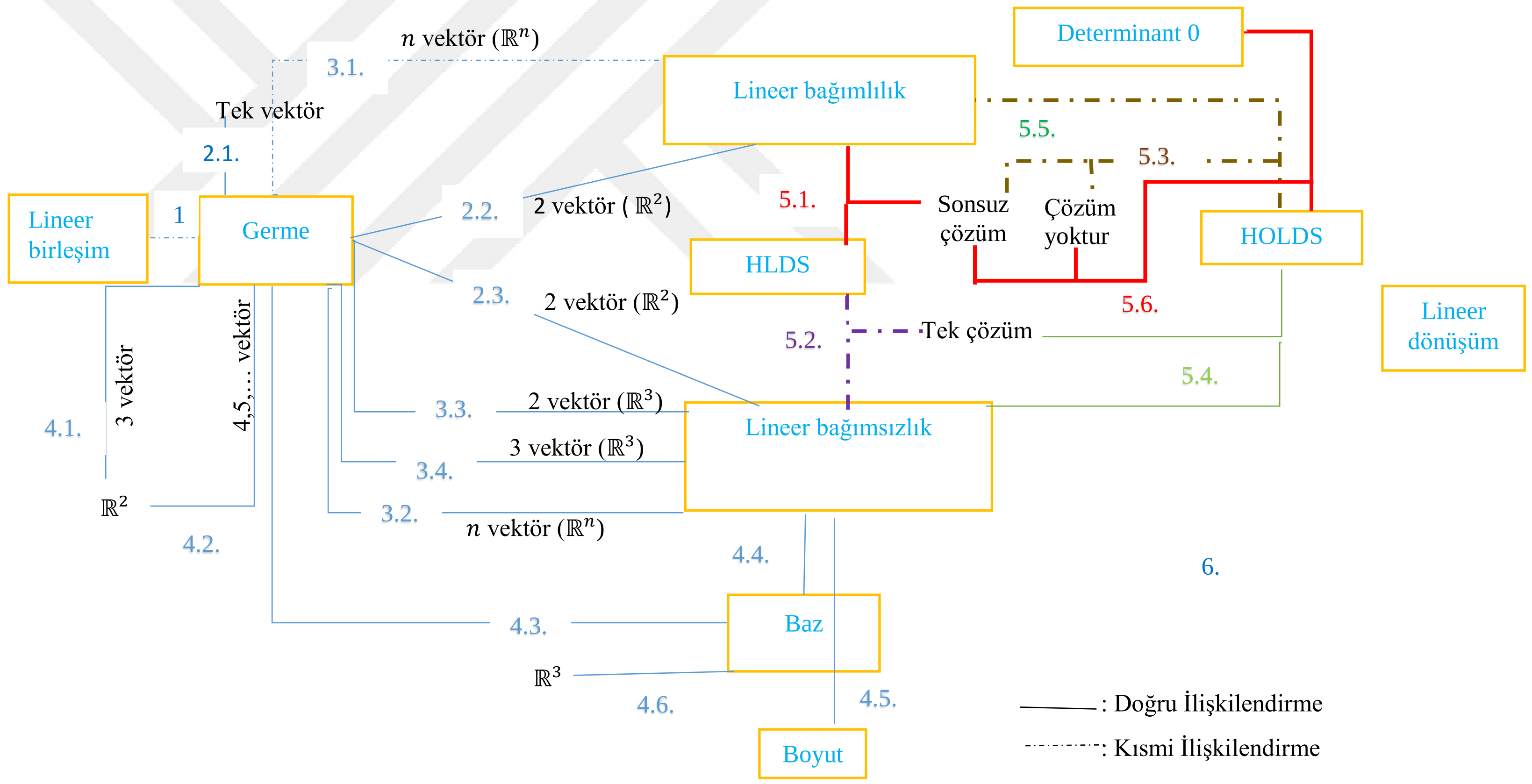
İlişkilendirme türleri / Kavram çiftleri	Formal /işlemsel	Teorik /özellik	Geometrik	Çıkarımsal /nedensel	Uzaysal
Lineer birleşim-germe				✓	
Germe-lineer bağımsızlık		✓		✓	
Germe-baz		✓		✓	
Lineer bağımsızlık-baz-boyut	✓	✓			
Lineer bağımsızlık-LDS	✓	✓			
Baz- LD				✓	

Tablo 4.62 incelendiğinde; öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmelerindeki eksik ve yanlışlarının, daha çok teorik/özellik ve çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçimini doğru sergileyemediğinden kaynaklandığı görülmektedir. Bununla birlikte yalnızca lineer bağımsızlık-baz ve lineer bağımsızlık-LDS kavramları arasındaki yanlış veya eksik ilişkilendirmelerin, diğer kavram çiftlerinden farklı olarak formal/işlemsel ilişkilendirmenin doğru yapılamamasından kaynaklandığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının ilköğretim yıllarından beri LDS kavramına ve formüllere ve işlemsel süreçlere dayalı bir ilişkilendirme biçimi olan formal/ işlemsel ilişkilendirmeye aşina olmalarına rağmen elde edilen bu bulgu dikkat çekicidir. Bu durumun lineer cebir için anahtar kavram niteliğindeki LDS'ye ilişkin halledilmesi gereken bir sorun olarak tespit edilmesinin önemli bir bulgu olduğu düşünülmektedir. Böylece öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmede başarılı oldukları ilişkilendirme biçimleri ve sorun yaşadığı ilişkilendirme biçimleri sürekli karşılaştırmalı analiz yöntemi ile ortaya konmuştur.

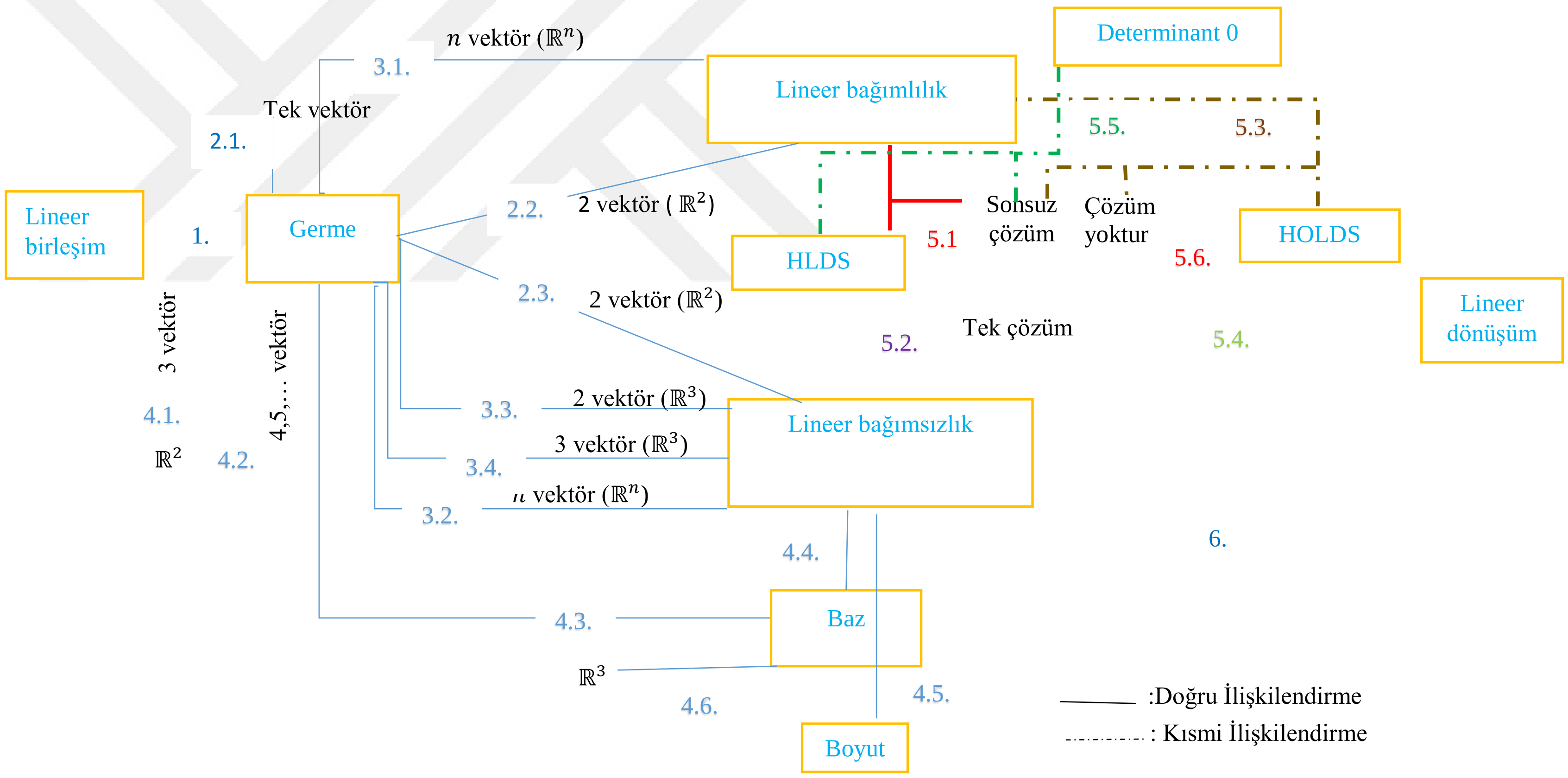
4.11 Araştırmanın Onbirinci Alt Probleme İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın bir diğer problemi, "Öğretmen adaylarının; lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz-boyut, LDS ve lineer dönüşüm kavramları arasındaki ilişkilendirme ağları nasıldır?" şeklinde olup bu problemin cevabı kavramlar arası ilişkilendirme ağı ile şekillerle görselleştirilerek sunulmuştur.

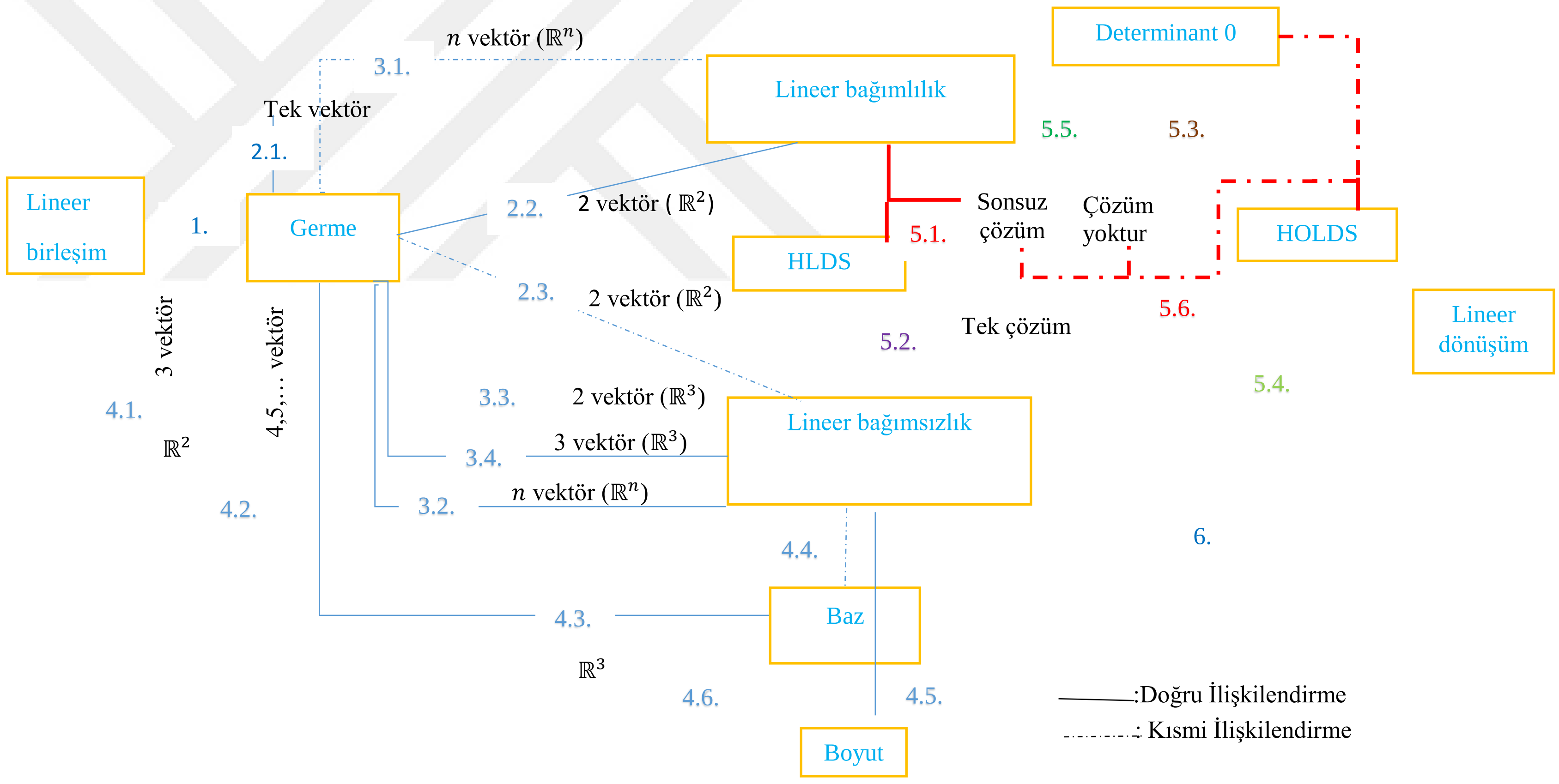
Yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen öğretmen adaylarının kurduğu kavramlar arası ilişkilendirilmenin doğru olup olmadığı (doğru, kısmen doğru, yanlış) değerlendirilerek; öğretmen adaylarının her birinin ilişkilendirme ağı ve ilişkilendirmenin yapılamadığı kavramlara ilişkin öğretmen adaylarının dağılımı Şekil 4.32-4.38'de sunulmaktadır. Bunlardan Şekil 4.32-4.37'da, kavramlar arası ilişkilendirme becerisinin ölçüldüğü İGF'deki soru numaraları ve öğretmen adaylarının kavramlar arasındaki doğru ya da kısmi ilişkilendirmeleri; Şekil 4.38'de, kavramlar arası ilişkilendirmeyi doğru yapamayan öğretmen adaylarının sayısına ilişkin dağılım sunulmaktadır.



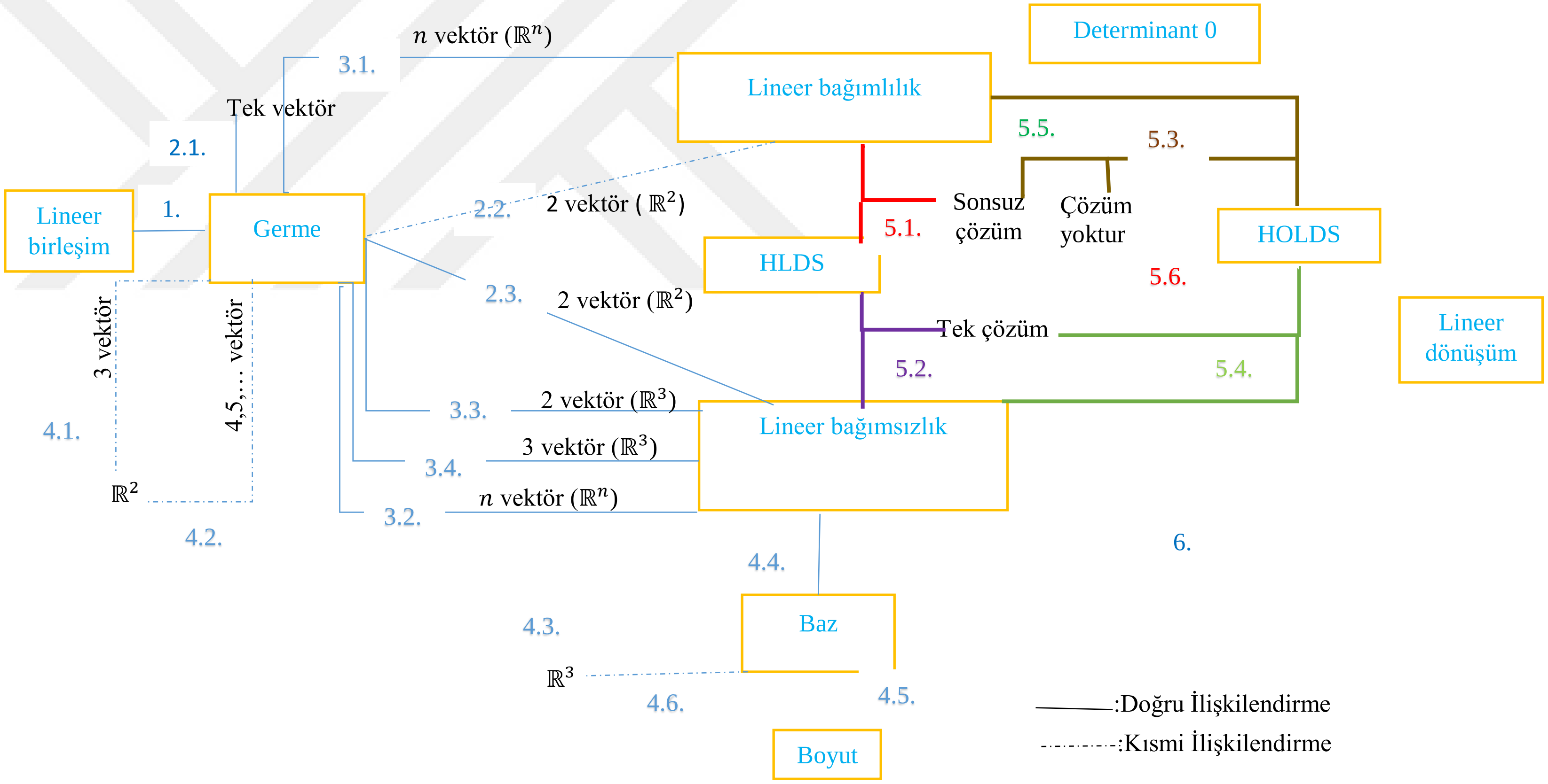
Şekil 4.32 ÇÖ1'in kavramlar arası ilişkilendirme ağı



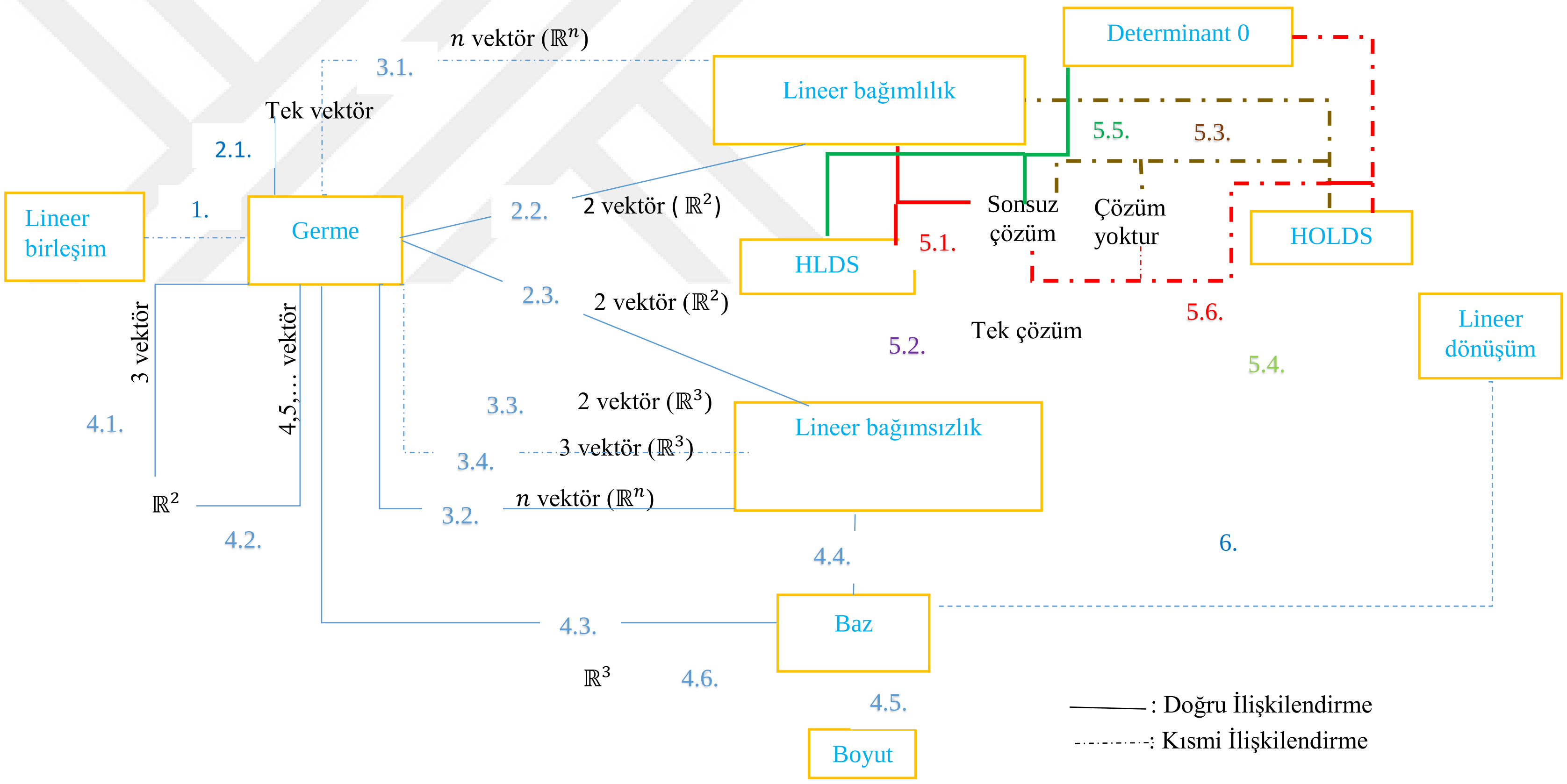
Şekil 4.33 ÇÖ2'nin kavramlar arası ilişkilendirme ağı



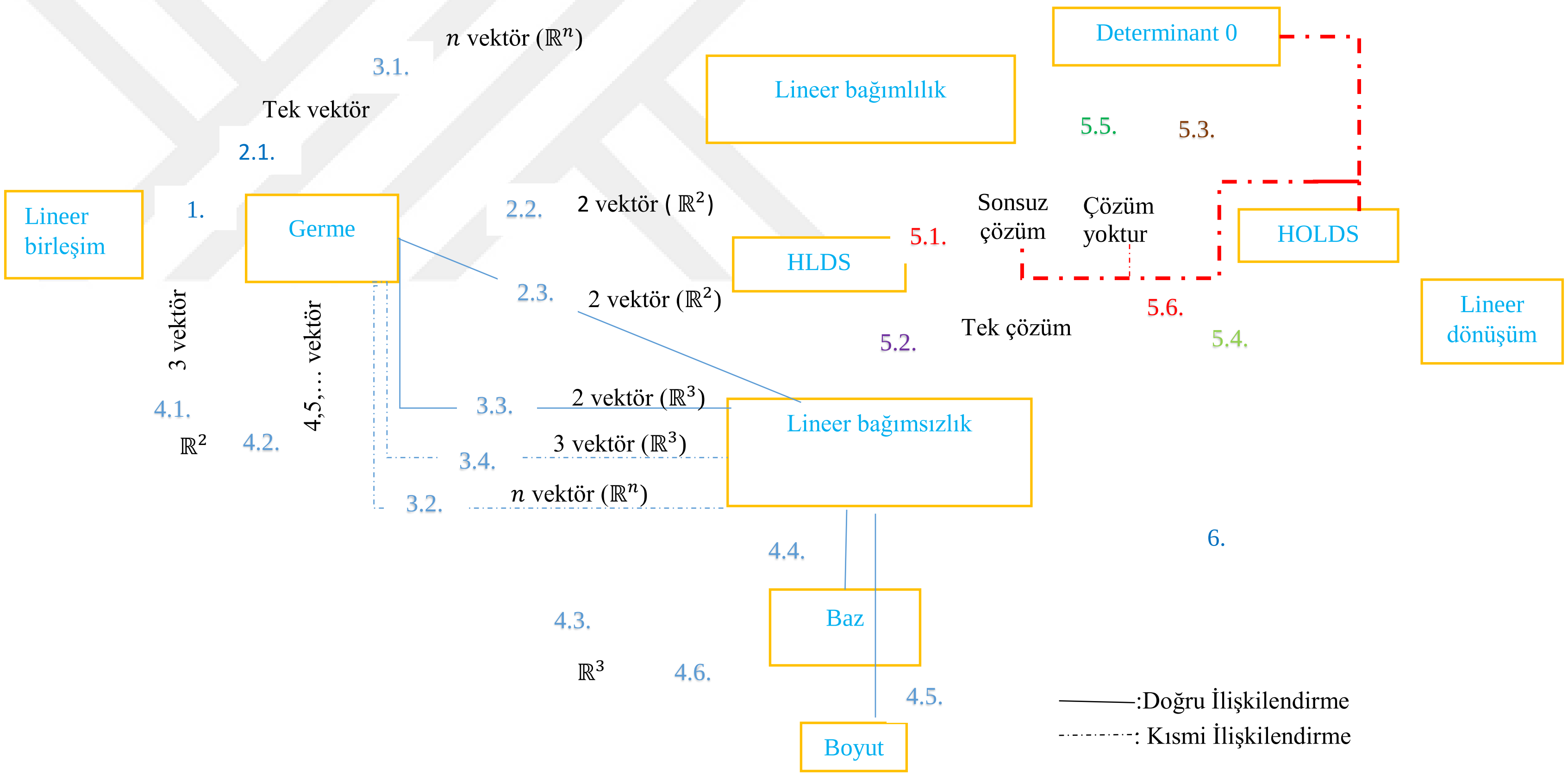
Şekil 4.34 ÇÖ3'ün kavramlar arası ilişkilendirme ağı



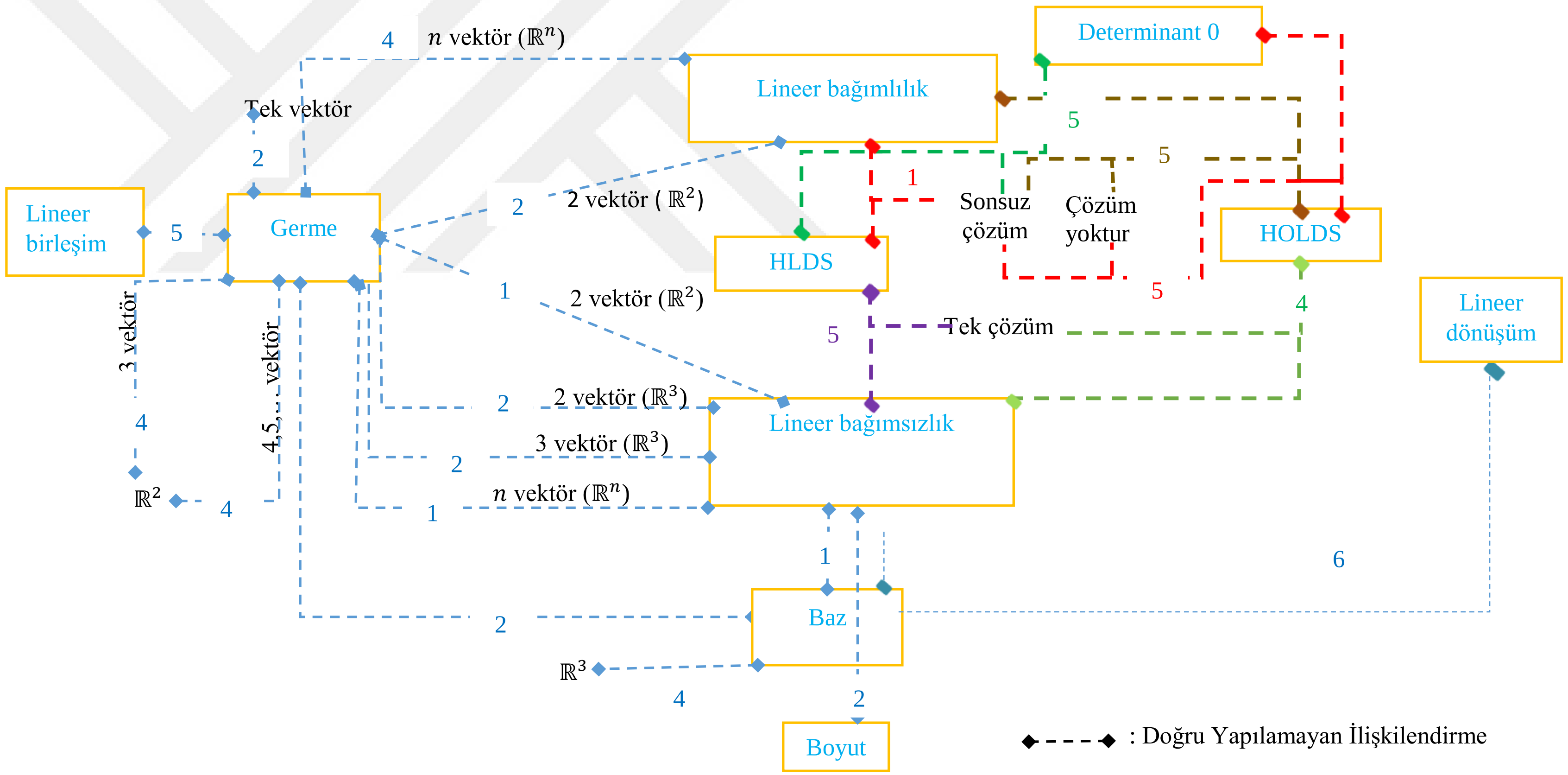
Şekil 4.35 PÖ1'in kavramlar arası ilişkilendirme ağı



Şekil 4.36 PÖ2'nin kavramlar arası ilişkilendirme ağı



Şekil 4.37 PÖ3'in kavramlar arası ilişkilendirme ağı



Şekil 4.38 Kavramlar arası ilişkilendirmeyi doğru yapamayan (eksik ya da yanlış ilişkilendirme yapan) öğretmen adaylarının sayısına ilişkin dağılım

Şekil 4.38'e göre; farklı vektör sayıları için 2 ve 3 boyutlu uzaylarda gerçekleştirilebilecek ilişkilendirmenin sorgulandığı yarı yapılandırılmış görüşmelerde ilişkilendirme yapamayan öğretmen adayı sayısının; lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, germe, baz kavramları arası ilişkilendirmede diğer kavram çiftlerine göre daha az sayıda olduğu görülmektedir. Bununla birlikte Şekil 4.38 incelendiğinde, öğretmen adaylarının neredeyse tamamının lineer dönüşüm ile baz kavramları arasında ilişki kuramadığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmede eksiklerinin ve yanlışlarının olduğu kavramların başında lineer dönüşüm olmakla birlikte bunun ardından LDS ve lineer birleşim kavramları gelmektedir. Birçok kavramla (lineer bağımlılık/ bağımsızlık, determinant ve rank) ilişkili bir kavram olan LDS kavramına ilişkin elde edilen bu bulgu dikkat çekicidir. Öğretmen adaylarının lineer bağımlılık (LDS'nin katsayılar matrisinin lineer bağımlılığı) ile HLDS kavramını ilişkilendirmede başarılı oldukları ancak determinantın (LDS'nin katsayılar matrisinin) 0 olması ile LDS kavramını ilişkilendirmede başarılı olamadıkları görülmektedir. Diğer taraftan, Şekil 4.38, germe ve lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarının öğretmen adaylarının çoğu tarafından ilişkilendirildiğini göstermektedir. Bununla birlikte, lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramı ile ilişkilendirseler de "$\mathbb{R}^2$ *'yi 3 vektör gerebilir mi? Neden?*" ve "$\mathbb{R}^2$ *'yi 4,5,6 … vektör gerebilir mi? Neden?*" sorularına öğretmen adaylarının yarısından çoğunun yanlış cevap vermesi, germe kavramına ilişkin yanılgıları olduğunu göstermektedir.

4.12 Araştırmanın Onikinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın bir diğer problemi, "Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme puanları ne düzeydedir ve bu öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme puanları ile lineer cebir performans puanları arasındaki ilişki nasıldır?" şeklindedir. Öğretmen adaylarının her birinin kavram çiftlerine ilişkin oluşturulan ilişkilendirmeler kavramlar arası ilişkilendirme rubriğine göre değerlendirilerek kavramlar arası ilişkilendirme puanları hesaplanmıştır Öğretmen adaylarına ilişkin nicel analizler sonucu elde edilen LCPT puanları ile yarı yapılandırılmış görüşmelerle toplanan verilerin nicel analizinden elde edilen kavramlar arası ilişkilendirme puanları ve bu puanlar arasındaki ilişkiyi gösteren ilgili istatistikler sırasıyla aşağıda Tablo 4.63'te ve Tablo 4.64'te sunulmuştur.

Tablo 4.63 Öğretmen adaylarına ilişkin LCPT ve kavramlar arası ilişkilendirme puanları

Öğretmen adayları / Puanlar	ÇÖ1 (yüksek)	PÖ1 (yüksek)	ÇÖ2 (orta)	PÖ2 (orta)	ÇÖ3 (düşük)	PÖ3 (düşük)
Kavramlar arası ilişkilendirme puanı	80.9	66.6	59.5	61.9	42.8	26.1
Lineer cebir performans puanı	82.5	88.6	65.8	70.2	57.9	56.1

Tablo 4.64 Kavramlar arası ilişkilendirme ile LCPT puanlarına ilişkin Pearson Momentler Çarpımı Korelasyon katsayısı

Ölçüm	Kavramlar arası ilişkilendirme	LCPT
Kavramlar arası ilişkilendirme	1	0.84
LCPT	0.84	1

n=6, p<.05

Tablo 4.63 ve 4.64 incelendiğinde; LCPT ve kavramlar arası ilişkilendirme puanına göre başarı sıralamasının büyük ölçüde korunduğu ve öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme puanları ile LCPT puanları arasında pozitif yönde anlamlı ilişki olduğu görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme performansları arttıkça lineer cebir performanslarının artacağı şeklinde yorumlanabilir. Bununla birlikte, Tablo 4.63 öğretmen adaylarının tamamının kavramlar arası ilişkilendirme puanının LCPT puanından daha düşük olduğunu göstermektedir. Bu durum, öğretmen adaylarının daha çok kavram bilgisi soruları içeren LCPT'de, kavramlar arası ilişkilendirme puanlarının belirlendiği yarı yapılandırılmış görüşmelere göre daha iyi performans gösterdikleri şeklinde yorumlanabilir. Ayrıca, farklı düzeylerde lineer cebir performansı sergileyen öğretmen adayları karşılaştırıldığında düşük düzeyde olan öğretmen adayları ile diğerleri (orta ve yüksek düzey) arasındaki kavramlar arası ilişkilendirme puan farkının oldukça yüksek (15.9-47.7) olduğu tespit edilmiştir. Bu kavramlar arası ilişkilendirme puan farkının lineer cebir performans puanı farkına göre daha da arttığı görülmektedir. Bu durum, lineer cebir performansı düşük düzeyde olan öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmede oldukça düşük düzeyde ilişkilendirme yapabildiği şeklinde yorumlanabilir.

BÖLÜM 5

5 SONUÇ VE TARTIŞMA

5.1 Tartışma

Bu araştırma; lineer cebir dersinde ÇTTÖ ve PDÖ'nün öğretmen adaylarının, akademik performansına, özyeterlik algısına ve sergilediği anlama boyutlarına etkisinin ne düzeyde olduğunu ve öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme becerilerindeki başarısızlıkların hangi ilişkilendirme biçiminden kaynaklandığını belirlemek amacıyla gerçekleştirilmiştir.

Araştırmaya konu olan lineer cebir kavramlarının öğretiminin tamamlanmasının ardından uygulanan LCPT sonuçlarına göre çalışma ve karşılaştırma gruplarının son test puan ortalamaları arasında çalışma grupları lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu ancak çalışma gruplarının kendi arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı tespit edilmiştir. Bununla birlikte, PDÖ ve ÇTTÖ'nün uygulandığı çalışma ve karşılaştırma gruplarının tamamında öğretmen adaylarının LCPT ön ve son test puanları arasında anlamlı bir artış olduğu ancak etki büyüklüğü hesaplandığında bu artışın çalışma gruplarında daha yüksek olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte bulgular, karşılaştırma grubunda gerçekleştirilen öğretime göre PDÖ ve ÇTTÖ'nün öğretmen adaylarının lineer cebir performanslarını daha fazla geliştirdiği ancak bu iki yöntem arasında bir farklılık olmadığı sonucunu ortaya koymaktadır. Araştırma sonucumuza paralel olarak alanyazında probleme dayalı öğrenmenin (Kar, 2010), genel anlamda görselleştirme yaklaşımlarının (Konyalıoğlu ve ark., 2003), çoklu temsil temelli veya bilgisayar destekli öğretimin (Aydın, 2009; Çevik, 2015; Diković, 2007; Doğan, 2001; Doğan, 2018; Dorier, 2002; İzgiol, 2014; Pecuch-Herrero, 2000; Turğut, 2010; Wu, 2004) özelde GeoGebra destekli öğretimin (Diković, 2009; Kan, 2014) lineer cebir alanında ve lisans düzeyinde diğer matematik alanlarında (Çekmez ve Baki, 2018; Gómez-Chacón ve Escribano, 2011; Güven ve Yılmaz, 2012; Kepçeoğlu ve Yavuz, 2017; Kumah ve Wonu, 2020; Ocal, 2017) akademik performans düzeyini artırdığını bununla birlikte kavramların temsilleri arasında ilişkilendirme imkânı sunduğunu (Kan, 2014) gösteren çalışmalar bulunmaktadır. Ayrıca, alan yazında rutin olmayan problemleri çözme becerisi arttıkça matematik alanındaki başarının arttığı (Altun ve Memnun, 2008) vurgulanmaktadır. Bu durumun GÖ ile gerçekleştirilen derslerde öğretmen adaylarının diğer iki yönteme (PDÖ ve ÇTTÖ) göre daha az aktif olduğu, öğretimin daha çok cebirsel temsil bazında gerçekleşmesinden ve rutin olmayan problemlerden çok fazla yararlanılmamasından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Nitekim rutin problemlerin çözümünde işlemsel becerilerin yeterli olduğu ancak rutin olmayan problemlerin çözümünde üst düzey becerilerin sergilenmesi gerektiği (Lee, Yeo ve Hong, 2014) ve dolayısıyla rutin olmayan problemleri çözmenin bazı bilişsel becerileri geliştirdiği (Polya, 1962) bilinmektedir. Alanyazında lineer cebirin bazı kavramları üzerine yapılan çalışmalar; geleneksel öğretimin kavramların formal tanımının içselleştirilmesinde yetersiz kaldığını (Cárcamo, Fortuny ve Fuentealba, 2018; Wawro ve ark., 2012), formal tanımı oluşturmada ve kavram imajını zenginleştirmede öğretim sürecinde yararlanılan görselleştirmelerin ve senaryoların etkili olduğunu (Wawro ve ark., 2012) ortaya koymaktadır. Ayrıca GÖ yerine; bilgisayar destekli öğretim uygulanan lineer cebir derslerinde öğretmen adaylarının kavramsal bilgi gerektiren sorularda daha iyi performans gösterdikleri (Doğan, 2001), kavramsal anlamalarının geliştiği, kavram yanılgılarının azaldığı (Doğan, 2007), bilgisayar desteğiyle uzaktan öğretim şeklinde gerçekleştirilen lineer cebir derslerinde öğretmen adaylarının kendilerini özgürce ifade ettiği ve farklı bakış açıları kazandığı (Oktaç, 2004) görülmektedir. Ayrıca, araştırmamıza paralel olarak bilgisayar destekli öğretimin, bilişsel süreçlere olumlu etkilerinin olduğu (Doğan-Dunlap ve Hall, 2004) ve performansı artırdığı sonucuna varılan çalışmalar bulunmaktadır (Diković, 2009; Wu, 2004). Bu araştırmada lineer cebir performansına ilişkin elde edilen sonucun; GeoGebra destekli öğretimde, zamanın verimli bir şekilde kullanılmasından dolayı istenilen amaçlar için uğraşılmasına daha çok imkân (Aktümen ve ark., 2011) bulunmasından ve bu yazılımın öğrenme sürecine olumlu etkilerinden (cebirsel ve geometrik temsilleri ilişkilendirme ve öğrenim sürecinde sezgisel bir his edinme) (Diković, 2009) kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir.

Araştırma sonuçlarına göre, çalışma ve karşılaştırma gruplarının MKÖAÖ son test puan ortalamaları arasında çalışma grupları lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu ancak çalışma grupları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı tespit edilmiştir. Bu bulgu, ÇTTÖ ve PDÖ'nün öğretmen adaylarının özyeterlik algılarını karşılaştırma grubunda gerçekleştirilen formalizme dayalı GÖ'ye göre daha fazla geliştirdiği sonucunu ortaya koymaktadır. Ancak, öğrenilecek kavramın zorluk derecesi ile düşük düzeyde özyeterlik inancı arasında anlamlı ilişki (Zimmerman, 2000) olmasına rağmen öğrenilmesi zor kavramlar olarak nitelendirilen lineer cebir kavramlarının öğretim sürecinde özyeterlik inancının artması dikkat çekici bir sonuçtur. Araştırma sonuçlarımızın aksine alanyazında rutin olmayan problemlerin özyeterliği etkilemediği sonucuna varılan çalışmalara rastlanmaktadır (Taşkın, Aydın, Güven ve Akşan, 2012). Araştırma sonuçlarımıza paralel olarak; öğretim sürecinde geometrik temsillerin kullanımının, (Panaoura, 2014) GeoGebra destekli öğretimin (Hohenwarter ve Fuchs, 2004; Kohen, Amram, Dagan ve Miranda, 2019; Zetriuslita ve Istikomah, 2021) ve probleme dayalı öğrenmenin (Boud ve Feletti, 1991; Schunk ve Pajares, 2001; Jungert ve Rosander, 2010; Peranginangin, Saragih ve Siagian, 2019) ve rutin olmayan problemleri çözme becerisinin (Öztürk, Akkan ve Kaplan, 2020) özyeterliği artırdığını gösteren araştırmalar bulunmaktadır. Alanyazında bu durumun nedeni, GeoGebra destekli öğretimin öğrencilere kendi düşüncesini rahatlıkla uygulayabilme (Zetriuslita ve Istikomah, 2021) ve kendi çabalarıyla sonuç elde edebilme (Zetriuslita, Nofriyandi ve Istikomah, 2020); probleme dayalı öğretimin işbirliği içinde çalışma ve bilgilerini yansıtma (Jungert ve Rosander, 2010) imkânları sunması ile açıklanmaktadır. Ayrıca, probleme dayalı öğrenim sonucunda yalnızca performansın değil öğrenme ortamlarındaki atmosferin de olumlu yönde etkilendiği bilinmektedir (Jungert ve Rosander, 2010). Özyeterlik algısının öğrenme sürecindeki duyuşsal durumdan (ilgi, merak, heyecan, mutluluk gibi anlık hislerine) etkilenebileceği (Bandura, 1997; Cassidy ve Eachus, 2002) düşünüldüğünde bu olumlu atmosferin özyeterliğe olumlu etkisi olabilir. Ayrıca bu sonucun dikkat çekici senaryoların ve GeoGebra'dan yararlanarak oluşturulan görsel materyallerin ilgi, merak uyandırmasından ve dolayısıyla öğretmen adaylarının öğretim sürecindeki duyuşsal durumuna olumlu etkilerinden kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Bununla birlikte alanyazında, özyeterlik algısının; doğrudan yaşantıya (kişisel deneyimlerine), dolaylı yaşantıya (model alma), sözel iknaya (dönütler, takdir edilme,…) bağlı olarak farklılaştığı vurgulanmaktadır (Bandura, 1997; Cassidy ve Eachus, 2002). Bunlar arasından öz yeterliliği en çok etkileyen değişkenin doğrudan yaşantı olduğu ve bunun ardından sözel iknanın geldiği bilinmektedir (Arslan, 2012). Bu araştırmada öz yeterliğe ilişkin elde edilen sonuçların; öğrencilerin aktif olduğu her iki öğretim yaklaşımının doğrudan yaşantı sağlaması ve uygulanan öğretimde çevre ile yakın etkileşimin karşılaştırma grubunda gerçekleştirilen formalizme dayalı öğretime göre daha fazla olması, öğretim sürecinde yapılan değerlendirmelerin dönüt vermesi ile açıklanabileceği düşünülmektedir. Ayrıca, bu araştırmada özyeterlik algısını, özellikle PDÖ'de heterojen gruplarda başarılı öğrencilerin gözlemlenmesiyle (model alma) veya bu öğrencilerin problemleri nasıl çözdüğünün öğretmen tarafından açıklanmasıyla oluşan dolaylı deneyimin (Bonne ve Lawes, 2016) etkilemiş olabileceği düşünülmektedir.

Araştırma sonucunda lineer cebir öğretiminin tamamlanmasının ardından çalışma ve karşılaştırma gruplarında uygulanan MSA son test puan ortalamalarında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı tespit edilmiştir. Bu bulgu, PDÖ ve ÇTTÖ ile gerçekleştirilen lineer cebir derslerinin öğretmen adaylarının ölçekte yer alan "problemler" konusuna ilişkin düşünme yapılarını etkilemediği sonucunu ortaya koymaktadır. Bu durumun, öğretmen adayları ilköğretim yıllarından beri gördüğü "problemler" konusuyla ilgili olan MSA'da yer alan soruları lineer cebir dersini almadan önce cevaplayabilmektedir. Dolayısıyla bu araştırmada elde edilen bu sonucun (deneysel uygulama sürecinde öğretmen adaylarının ilköğretim yıllarından beri gördüğü "problemler" konusu ile ilgili soruların çözüm sürecindeki tercihlerinin değişmemesine ilişkin sonuç) soruların çözüm sürecine ilişkin tercihlerinde öğretmen adaylarının daha çok lisans öğreniminden önce öğrendikleri bilgileri tercih etmelerinden (Kardeş-Birinci ve ark., 2014) kaynaklandığı düşünülmektedir. Bunun nedeni öğretmen adaylarının cevaplayabildiği sorular için yeni yollar araştırma gereği duymaması olabilir. Ulaşılan alanyazın incelendiğinde GÖ dışında uygulanan yaklaşım, yöntem ve tekniklerin "problemler" konusuna ilişkin düşünme yapılarını geliştirdiğine dair bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Araştırma sonucunda, öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık, lineer denklem-LDS, baz-boyut, germe, lineer birleşim, lineer dönüşüm, vektör uzayı kavramları ile ilgili sergiledikleri performansların aynı düzeyde olmadığı belirlenmiştir. Kardeş-Birinci (2016), öğretmen adaylarının en iyi performans gösterdiği soruların vektör uzayı (herhangibir vektör kümesinin vektör uzayı belirtip belirtmemesi) ve en düşük performans gösterdiği, en çok cevapsız bıraktığı soruların ise lineer birlesim ile ilgili olduğu sonucuna varmıştır. Eldeki araştırmada ise öğretmen adaylarının en yüksek performansı lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramında ve en düşük performansı vektör uzayı kavramında gösterdiği tespit edilmiştir. Bu durum ayrıca araştırılması gereken bir husus olmakla birlikte, öğretim üyelerinin derslerde takip etmiş oldukları yaklaşım, yöntem ve tekniklerin bu farklılığı oluşturmuş olabileceği düşünülmektedir. Alanyazında işlemsel süreçler içeren kavramların daha kolay öğrenildiği, vektör uzayı

(Dorier, 2002) ve lineer dönüşüm gibi soyut yapıdaki kavramların öğrenilmesinde öğretmen adaylarının zihinlerinin karıştığı vurgulanmaktadır (Carlson ve ark., 1993). Bu araştırmada da vektör uzayı kavramı ile ilgili performansın en azından bu tez kapsamında incelenen kavramlara nazaran düşük olması bu durumu destekler niteliktedir. Bunlarla birlikte, vektör uzayı; hesaplamaların, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^2$'ye, $\mathbb{R}^2$'den $\mathbb{R}^3$'e genellemelerin yeterli olmadığı, aksiyomlarla tanımlanan ve aksiyomların anlaşılması için soyutlama yapabilmeyi (Molodsij, 1977), soyutlama yapabilmek için de yoğun bir zihinsel örgütlemeyi (Biber ve Argun, 2012) gerektiren yalnızca matematiksel anlamada en üst düzeye ulaşabilmiş bireylerin yüksek performans gösterebileceği (Tall, 2004) bir kavramdır. Ayrıca kavram bazında ortaya çıkan bu performans farklılıklarının; öğretmen adaylarının araştırmaya konu olan diğer kavramlara (vektör uzayı, lineer birleşim, germe, lineer dönüşüm) göre lineer denklem-LDS ve lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarına daha çok aşina olmalarından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Bununla birlikte bu durum, son test puan ortalamalarının oldukça yüksek olduğu lineer denklem-LDS, lineer bağımlılık/bağımsızlık gibi kavramlarla ilgili soruların üst düzey zihinsel becerileri kullanmadan işlemsel algoritmalarla da kolaylıkla çözülebilmesi ile açıklanabilir. Alanyazında araştırma sonuçlarımıza paralel olarak vektör uzayı kavramının yeterince anlaşılmadığına (Aydın, 2007; Dorier, 2002; Fischer, 2005; Parraguez ve Oktaç, 2010) ve lineer dönüşüm kavramıyla ilgili zorluklar yaşandığına (Haddad, 1999; Bogomolny 2006) ilişkin çalışmalar mevcuttur. Bu durumun; ön koşul gerektiren yapılarda eksik bilgilere sahip olunmasından (Parraguez ve Oktaç, 2010), vektör uzayı (Dorier, 2002) ve lineer dönüşüm kavramlarının soyut yapısından, bu kavramların tanımlarındaki aksiyomların içselleştirilmeden ezberlenmesinden (Bogomolny, 2006) ve kümeden özel bir eleman alınıp, bir eleman üzerinden gerekli aksiyomların sağlanıp sağlanmadığının incelenerek tüm elemanlara genelleme yapılması yanılgısından (Doğan-Dunlap, 2006) kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir.

Araştırma sonucunda, kavram bazında ön test ve son testlerde sergilenen anlama boyutu yüzdelerinin değiştiği ve uygulanan yaklaşımların ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının sergiledikleri anlama boyutlarının farklılaşmasına neden olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları lineer dönüşüm haricinde kavramların tamamında çalışma ve karşılaştırma gruplarının ön test ve son testlerde en yüksek yüzde ile BA anlama boyutunu sergilemişlerdir. Çalışma ve karşılaştırma gruplarının tamamında ön ve son testlerde lineer denklem-LDS kavramına ilişkin sorularda Öİ anlama boyutunun en düşük yüzde ile sergilendiği, diğer kavramların tamamında ise grupların tamamında ön testlerde ve ÇTTÖ ve karşılaştırma grubunda son testlerde KM anlama boyutunun ya hiç sergilenmediği ya da en düşük yüzde ile sergilendiği tespit edilmiştir. PDÖ grubunda ise KM anlama boyutunun lineer birleşim ve lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramlarında ön testte en düşük düzeyde sergilenmesine rağmen son testte BA anlama boyutundan sonra en yüksek düzeye ulaştığı ve lineer denklem-LDS kavramında da BA anlama boyutundan sonra en yüksek düzeyde sergilenme durumunu koruduğu belirlenmiştir. Benzer şekilde, ÇTTÖ grubunda da lineer denklem-LDS kavramında TM boyutunun sıralaması değişmiş ve BA anlama boyutundan sonra en yüksek düzeye ulaştığı belirlenmiştir. Eldeki araştırmanın bu sonuçları, sergilenen anlama boyutlarının kavram ve gruplar bazında farklılaştığı şeklinde yorumlanabilir. Bu durumda BA boyutunun neredeyse kavramların tamamında (lineer dönüşüm haricinde) en çok sergilenmesinin, öğretmen adaylarının, öğrenim hayatları boyunca ölçme ve değerlendirmelerde daha çok işleme dayalı tekniklerle değerlendirilmesinden ve çözüm sürecinde cevaba ulaşmak için bu tekniklere aşina olmalarından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Ayrıca grupların tamamında deneysel sürecin tamamlanmasının ardından uygulanan son testlerde Öİ anlama boyutu sergilenen yüzdeler arasında en düşük değerler arasında yer almaktadır. Lisans düzeyinde matematik alanlarında daha çok formalizimden (aksiyom, teorem ve ispatların) yararlanılmasına rağmen bu sonucun elde edilmesi dikkat çekicidir. Araştırma sonuçlarımıza paralel olarak BA boyutunun en yüksek (Thompson ve ark., 2010, s.6; Kardeş-Birinci, 2016), Öİ anlama boyutunun düşük yüzde ile sergilendiğini (Thompson ve ark., 2010, s.6) ve kavram bazında sergilenen anlama boyutlarının sıralamasının değiştiğini (Kardeş-Birinci, 2016, s.138) ortaya koyan çalışmalar bulunmaktadır. Bu durumun kavramların yapılarından kaynaklandığı düşünülmektedir (Kardeş-Birinci, 2016, s.138).

Çalışma ve karşılaştırma gruplarında öğretimin tamamlanmasının ardından lineer birleşim kavramına ilişkin sorular dikkate alınarak elde edilen LCPT sonuçlarına göre, çalışma ve karşılaştırma gruplarının son test puan ortalamaları arasında PDÖ grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca bu testte yer alan aynı kavramla ilgili soruların çözüm sürecinde ön test ve son testte sergilenen anlama boyutları karşılaştırıldığında farklılaşmalar olduğu ve anlama boyutları arasında oluşan bu değişimlerin performans puanlarından elde edilen sonuçlara paralel bir şekilde PDÖ grubunda anlamlı olduğu belirlenmiştir. Bu çalışma grubunda anlama boyutları arasından yalnızca Öİ'ye geçişin istatistiksel olarak anlamlı olduğu, ÇTTÖ ve karşılaştırma gruplarındaki boyutlar arasındaki geçişlerin ise anlamlı olmadığı belirlenmiştir. Burada lineer birleşim kavramı ile ilgili sergilenen performansa ve çözüm sürecine ilişkin sonuçların, senaryoların bu kavramın formal yapısına uygun öğrenme ortamlarının tasarlanmasını sağlamış olabileceğinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Çalışma ve karşılaştırma gruplarında uygulanan LCPT'deki germe kavramıyla ilgili soruların çözüm sürecinde ön test ve son testte sergilenen anlama boyutları karşılaştırıldığında farklılaşmalar olduğu ve anlama boyutları arasında oluşan bu farklılaşmaların PDÖ ve ÇTTÖ gruplarının her ikisinde de anlama boyutları arasındaki geçişlerden yalnızca Öİ'ye geçişin istatistiksel olarak anlamlı olduğu ve karşılaştırma grubunda ise istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı tespit edilmiştir. Ulaşılan alanyazında anlama boyutlarına ilişkin anlamlı bir farklılaşmayı gösteren çalışmaya rastlanmamış olmakla birlikte; yapılan çalışmalarda bilgisayar destekli öğretimin (Mathematica) germe kavramının formal tanımını anlamaya (kavramsal anlamaya) ilişkin olumlu etkilerinin olduğu sonucuna varılan (Doğan-Dunlap ve Hall, 2004) çalışma bulunmaktadır. Bu durumun, germe kavramının yapısından ve çalışma gruplarındaki öğrenme ortamlarının bu yapıya uygun tasarlanması yönünde etki sağlamış olabileceğinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Çalışma ve karşılaştırma gruplarında öğretiminin tamamlanmasının ardından lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin sorular dikkate alınarak elde edilen LCPT sonuçlarına göre, çalışma ve karşılaştırma gruplarının son test puan ortalamaları arasında PDÖ grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca bu testin aynı kavramla ilgili sorularının çözüm sürecinde ön ve son testte sergilenen anlama boyutları karşılaştırıldığında farklılaşmalar olduğu ve anlama boyutları arasında oluşan değişimlerin PDÖ ve karşılaştırma gruplarında istatistiksel olarak anlamlı olduğu ve bu anlamlı farklılığın yalnızca PDÖ grubunda anlama boyutları arasındaki geçişlerden (BA'dan KM'ye ve TM'den KM'ye geçişten) kaynaklı olduğu ve ÇTTÖ grubunda ise istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olmadığı tespit edilmiştir. Ulaşılan alanyazında anlama boyutlarına ilişkin anlamlı bir farklılaşmayı gösteren çalışmaya rastlanmamış olmakla birlikte yapılan çalışmalarda; bilgisayar destekli öğretimin (Mathematica) araştırmamıza paralel olarak lineer bağımsızlık kavramına ilişkin performansı etkilemediğini gösteren çalışma bulunmaktadır (Doğan-Dunlap ve Hall, 2004). Bununla birlikte bilgisayar destekli öğretimin (Mathematica); lineer bağımsızlık kavramına ilişkin performansa (Kan, 2014; Doğan 2018), formal tanımı anlamaya (Doğan-Dunlap ve Hall, 2004; Doğan-Dunlap, 2007) olumlu etkilerinin olduğunu ve bu kavrama ilişkin düşünme yapılarını farklılaştırdığını gösteren (Doğan, 2018) çalışmaların sayısının daha fazla olduğu gözlenmektedir. Çalışmalarda elde edilen farklı sonuçların, bilgisayar destekli öğretimde farklı yazılımlar (GeoGebra, Mathematica) kullanılmasından ve dolayısıyla öğretim sürecindeki uygulamaların farklılaşmasından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. PDÖ grubunda KM anlama boyutu yönünde oluşan anlamlı farklılığın senaryolar temelli gerçekleştirilen öğretimin, bu kavramın (lineer bağımlılık/bağımsızlık) öğretim sürecine ilişkin olumlu etkilerinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Çalışma ve karşılaştırma gruplarında öğretiminin tamamlanmasının ardından lineer denklem-LDS kavramına ilişkin sorular dikkate alınarak elde edilen LCPT sonuçlarına göre, çalışma ve karşılaştırma gruplarının son test puan ortalamaları arasında ÇTTÖ grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca bu testin aynı kavramla ilgili sorularının çözüm sürecinde ön ve son testte sergilenen anlama boyutları karşılaştırıldığında farklılaşmalar olduğu, anlama boyutları arasında oluşan farklılaşmaların PDÖ ve ÇTTÖ gruplarında istatistiksel olarak anlamlı olduğu, bunun yanı sıra oluşan bu farklılaşmaların yalnızca ÇTTÖ grubunda anlama boyutları arasındaki geçişlerden (BA'dan Öİ'ye, BA'dan TM'ye) kaynaklandığı ve karşılaştırma grubunda ise istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olmadığı tespit edilmiştir. Bu araştırmada senaryoların lineer denklem-LDS kavramına ilişkin performansı etkilemediği biçiminde elde edilen sonucun aksine alanyazında, bu kavram ile ilgili senaryoların performansı olumlu yönde etkilediği sonucuna varılan çalışma bulunmaktadır (Trigueros, 2018). Araştırma sonucumuza paralel olarak, lineer denklem-LDS kavramına ilişkin bilgisayar destekli öğretimin (Mathematica, Mapple, Scratch ve GeoGebra) (Mallet, 2007; Kan, 2014; Batista ve Baptista, 2014) performansa olumlu etkilerinin olduğunu gösteren çalışmalar bulunmaktadır. Bu durumun, ÇTTÖ yaklaşımında öğretim sürecinde kullanılan materyallerin lineer denklem-LDS kavramını somut hale getirmesinden kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Sergilenen çözüm sürecine ilişkin araştırma sonuçlarımıza paralel olarak sketchpad yazılımından yararlanarak gerçekleştirilen çoklu temsil yaklaşımının lineer denklem kavramına ilişkin çözüm sürecini farklılaştırdığı (Deniz, 2016) ve bu kavrama ilişkin en çok işlemsel anlamanın (BA) sergilendiği ortaya konmaktadır (Kardeş-Birinci ve ark., 2014). Bu durumun, öğrencilerin lisans öğreniminden önce öğrendikleri bilgileri tercih etmelerinden kaynaklı olduğu alanyazında açıklanmaktadır (Kardeş-Birinci ve ark., 2014).

Çalışma ve karşılaştırma gruplarında öğretiminin tamamlanmasının ardından lineer dönüşüm kavramına ilişkin sorular dikkate alınarak elde edilen LCPT sonuçlarına göre, çalışma ve karşılaştırma gruplarının son test puan ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca bu testin aynı kavramla ilgili sorularının çözüm sürecinde ön ve son testte sergilenen anlama boyutları karşılaştırıldığında farklılaşmalar olduğu ve anlama boyutları arasında oluşan değişimlerin ÇTTÖ grubunda istatistiksel olarak anlamlı olduğu (BA'dan TM'ye geçişten kaynaklı olarak), PDÖ ve karşılaştırma gruplarında ise istatistiksel olarak anlamlı olmadığı tespit edilmiştir. Araştırma sonucumuza paralel olarak, bilgisayar destekli öğretimin (Mathematica) GÖ'e göre lineer dönüşüm kavramına ilişkin performansa etkisinin olmadığını ve kavramsal anlamaya (Doğan 2001) olumlu etkilerinin olduğunu gösteren çalışma bulunmaktadır. ÇTTÖ grubunda TM boyutuna geçişin anlamlı olması; beklenen bir sonuç olmakla birlikte bu araştırmada başka bir beklenen sonucun (Öİ boyutuna anlamlı geçiş) gerçekleşmediği tespit edilmiştir. TM anlama boyutuna anlamlı geçişlere ilişkin sonucun çoklu temsil temelli öğretimde geometrik temsillere odaklanılmasından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Performansa ilişkin anlamlı bir farklılık olmamasının ve bir (TM) anlama boyutu haricindeki boyutlara geçiş olmamasının lineer dönüşüm kavramının yapısından (yalnızca işlemsel algoritmaları uygulamanın cevabı bulmak için yeterli olmadığı, sağlatılması gereken iki aksiyom içeren lineer dönüşüm kavramının soyut yapısından) kaynaklandığı düşünülmektedir.

Araştırma sonucunda; PDÖ'nün (lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık-bağımsızlık) ve ÇTTÖ'nün (germe, lineer denklem-LDS ve lineer dönüşüm) uygulandığı çalışma gruplarında kavramların çoğuna ilişkin sergilenen anlama boyutları arasındaki geçişlerin anlamlı olduğu ancak karşılaştırma grubunda anlamlı bir geçiş ve dolayısıyla sergilenen anlama boyutlarında bir zenginleşme durumu olmadığı tespit edilmiştir. Bu durumun, ÇTTÖ'nün ve PDÖ'nün yukarıda belirtilen kavramlar bazında kavramların yapısına uygun öğretim yaklaşımları olmasından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir.

PDÖ'nün uygulandığı çalışma grubundaki öğretmen adaylarının, modüllerin her birinin sonunda kendisini değerlendirmesi sonucunda olumlu yönde değişimler olduğu tespit edilmiştir. Alanyazında öğretmen adaylarının kendisini değerlendirmesi hususunda modüller arasında anlamlı farklılaşmalar olduğunu gösteren çalışmalar bulunmaktadır (Ersoy, 2012; Cantürk-Günhan, 2006). Bu durumun (anlamlı farklılaşmaların) daha çok formalizme dayalı öğretim gören öğretmen adaylarının uygulama süresine bağlı olarak zaman geçtikçe PDÖ sürecine alışmalarından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Bununla birlikte, genel anlamda öğretmen adaylarının; bilgileri araştırma, kullanma, sorgulama, ilişkilendirme, kişiler arası iletişim kurma ve sürce katkı sağlama becerilerinin gelişimi yönünde PDÖ'nün katkı sağladığını düşündükleri belirlenmiştir. Ayrıca, PDÖ'nün uygulandığı çalışma grubundaki öğretmen adaylarının, modüllerin her birinin sonunda eğitim yönlendiricisi tarafından değerlendirilmesi sonucunda olumlu yönde değişimler olduğu tespit edilmiştir. Eğitim yönlendiricisinin, öğretmen adaylarının PDÖ sürecinde bilgileri araştırma, kullanma, sorgulama, ilişkilendirme, kişiler arası iletişim kurma ve sürece katkı sağlama becerilerinin geliştiğini düşündüğü sonucuna varılmıştır. Benzer şekilde; başka bir çalışmada eğitim yönlendiricisinin; PDÖ sürecinde öğrencilerin sorgulama, iletişim, bağımsız çalışma ve problem çözme becerilerinin geliştiğine ilişkin düşünceleri vurgulanmaktadır (Taşkıran, Musal ve Atabey, 2001; Cantürk-Günhan, 2006). Alanyazında araştırmamıza paralel bir biçimde PDÖ'nün iletişim (Duch ve ark., 2001, s.111), değerlendirme (Cantürk-Günhan, 2006), bağımsız öğrenme (Cantürk-Günhan, 2006), eleştirel düşünme, yaratıcı düşünme (Ersoy, 2012) ve problem çözme (Boud ve Feletti,1991; Özgen ve Pesen, 2010) becerilerini geliştirme yönünde olumlu katkıları olduğu (Cerezo, 2004), bununla birlikte sorgulama (Cantürk-Günhan, 2006) ve muhakeme etme (Boud ve Feletti, 1991) becerilerini geliştirdiği sonucuna varılan çalışmalar bulunmaktadır. Bu durumun öğretmen adaylarının sürece aktif katılımından, grup çalışmalarında diğer grup üyelerinin model alınmasından ve rutin olmayan problemlerin üst düzey düşünmeyi gerektirmesinden kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir.

PDÖ'nün uygulandığı çalışma grubundaki öğretmen adaylarının, modüllerin her birinin sonunda eğitim yönlendiricisini değerlendirmelerinde ikinci değerlendirme ile üçüncü değerelendirme arasında anlamlı bir farklılık olmadığı ancak diğer (birinci modül ve ikinci modül ile birinci modül ve üçüncü modül) modüller arasında anlamlı farklılıklar olduğu tespit edilmiştir. Alanyazında öğretmen adaylarının eğitim yönlendiricisini değerlendirmesi hususunda modüller arasında anlamlı farklılaşmalar olduğunu gösteren çalışmalar bulunmaktadır (Ersoy, 2012; Cantürk-Günhan, 2006). Bu durumun (anlamlı farklılaşmaların) daha çok formalizme dayalı öğretim gören öğretmen adaylarının PDÖ sürecine alışmalarından ve sürecin daha verimli hale gelmesinden kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Bununla birlikte genel anlamda; PDÖ sürecinde eğitim yönlendiricisinin öğretmen adaylarına bilginin araştırılması, kullanılması, sorgulanması, ilişkilendirilmesi, iletişim kurulması ve ortamın düzenlenmesi hususunda rehberlik ettiği belirlenmiştir. Alanyazında araştırmamıza paralel bir biçimde eğitim yönlendiricisinin PDÖ sürecine olumlu katkıları (öğrencilerin eleştirel düşünmesine, bağımsız öğrenmesine, iletişim ve değerlendirme becerilerinin gelişimine ve öğrenme sürecine katkısı) (Cantürk-Günhan, 2006) olduğu ve güvenli bir ortam sağladığı (Musal, Taşkıran, Dicle ve Özkan, 2001) sonucuna varılan çalışmalar bulunmaktadır. Bu durumun eğitim yönlendiricisinin senaryolara çözüm bulma sürecinde öğretmen adaylarının tamamının öğrenme sürecine aktif katılımını ve grupla çalışmasını teşvik etmesinden ve öğrenme ortamının rutin olmayan problemlerden oluşan senaryolarla ilgi çekici hale gelmesinden kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir.

Araştırmanın nitel kısmının amacı, öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme biçimlerinin lineer cebir kavramları bağlamında incelenmesi ve eksik ve yanlış ilişkilendirmelerin hangi ilişkilendirme biçimlerinden kaynaklandığını belirlemektir. Bu amaçla; deneysel sürecin tamamlanmasının ardından çalışma gruplarından seçilen farklı düzeyde lineer cebir performansına sahip öğretmen adayları ile görüşmeler yapılmış, araştırmaya konu olan lineer cebir kavramlarının (lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, LDS ve lineer dönüşüm) formal/işlemsel, teorik/özellik, geometrik, çıkarımsal/nedensel ve uzaysal ilişkilendirme biçimlerinden yararlanarak ilişkilendirildiği tespit edilmiştir. Bu kapsamda yapılan analizler sonucunda; öğretmen adaylarının neredeyse tamamının ilişkilendirme biçimlerinin tamamından yararlandığı ve en yüksek düzeyde sergilenen ilişkilendirme biçiminin formal/işlemsel ilişkilendirme biçimi olduğu ve bunu sırasıyla teorik/özellik, geometrik, çıkarımsal/nedensel ve uzaysal ilişkilendirme biçiminin takip ettiği sonucuna varılmıştır. Benzer şekilde geometri alanında yapılan bir çalışmada; öğretmen adaylarının matematiksel ilişkilendirmeler arasında daha çok işlemsel ilişkilendirmeden yararlandıkları ortaya konmuştur (Eli, 2009). Bahsi geçen çalışmada en çok sergilenen ilişkilendirme biçiminin işlemsel ilişkilendirme olmasının nedeni, daha çok işlemsel anlamaya ağırlık veren öğretim biçimlerinin uygulanması ve ilişkisel anlamanın yeterince sağlanamaması olarak açıklanmaktadır (Eli, 2009). Aynı çalışmada, "geometrik şekillerin birinden yararlanarak başka bir şeklin özelliğinin bulunması" anlamına gelen türetimsel ilişkilendirmenin en az sayıda sergilenen ilişkilendirme biçimi olduğu sonucuna varılmıştır (Eli, 2009). Bu araştırmada böyle bir ilişkilendirmeye rastlanmamış olmakla birlikte; "öğretmen adaylarının kavram bilgilerini somut nesnelere veya diğer matematiksel kavramlara yansıtarak oluşturduğu kendine özgü doğru ya da yanlış çıkarımlar" olarak ifade edilen çıkarımsal/nedensel ilişkilendirme biçiminin diğer birçok (uzaysal ilişkilendirme haricindeki) ilişkilendirme biçimine göre daha az sergilendiği görülmektedir. Ayrıca bu çalışmada, PÖ1 ve PÖ2 haricindeki öğretmen adaylarının tamamı tarafından sergilenen "birden fazla sayıda uzayın birlikte değerlendirilmesi" anlamı taşıyan uzaysal ilişkilendirmenin diğer ilişkilendirme biçimlerine göre oldukça az sayıda sergilendiği belirlenmiştir. Üç boyutlu şekli tanımlamada iki ve üç boyut arasındaki ilişkiden yararlanan katılımcıların çoğunun, "iki boyut ve üç boyut arasında yapılan geçiş" olarak tanımlanan 2D-3D ilişkilendirme biçimini sergilediği sonucuna varan bir çalışma bulunmaktadır (Eli, 2009). Bununla birlikte, bahsi geçen çalışmada üç boyutlu şekillerin tanımlamalarını yapabilse de katılımcıların iki boyutlu şeklin ölçümleri ile üç boyutlu şeklin ölçümleri arasındaki ilişkiyi ifade etmekte zorlandığı tespit edilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının 1-boyutlu ve 2-boyutlu uzayda alınan temel geometrik kavramları yorumlayabildiği ancak aynı kavramları 3-boyutlu uzayda yorumlamada sorun yaşandığı sonucuna varılan çalışma bulunmaktadır (Tuluk, 2014). Araştırmamız bağlamında bahsi geçen uzaysal ilişkilendirmenin çok fazla sergilenmemesine ilişkin bulgu; üç ve daha fazla boyuttaki uzayların bir ve iki boyutlu uzaya göre daha soyut ve daha çok uzamsal beceri gerektiriyor olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Bu araştırmada incelenen yalnızca birden fazla sayıda uzayın birlikte değerlendirilmesini ifade eden uzaysal ilişkilendirmede; farklı boyutlardaki uzayların birine ilişkin bilgilerin diğerine/diğerlerine genellenmesi söz konusu değildir. Aynı anlamı taşımayan iki farklı temanın (uzaysal (bu araştırma), 2D-3D (Eli, 2009)) incelendiği bu çalışmalarda elde edilen farklı sonuçların çalışmaların yapıldığı alanların (lineer cebir ve geometri) ve bu alanlarda uygulanan öğretim biçimlerinin farklı olmasından kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir.

ÇTTÖ'nün ve PDÖ'nün uygulandığı gruplardan görüşme yapmak için seçilen öğretmen adaylarının eksik ve yanlış ilişkilendirmelerinin daha çok teorik/özellik ve çıkarımsal/nedensel ilişkilendirmelerin doğru yapılamamasından kaynaklandığı belirlenmiştir. Lineer cebire ilişkin ulaşılan alanyazında bu ilişkilendirme biçimlerini içeren bir çalışmaya rastlanmamış olmakla birlikte; öğrencilerin teoremlerden doğru bir şekilde yararlanamadığına (Thompson, 1994; Machín, Rivero ve Santos-Trigo, 2010), yanlış çıkarımlarda bulunduğuna ve birden fazla sayıda uzayı birlikte ele almada zorluklar yaşadığına ve bunların başarıyı etkilediğine ilişkin bulguların elde edildiği cebir (Şenay ve Özdemir, 2014) ve matematiğin diğer alanlarında (Thompson, 1994; Machín ve ark., 2010) yapılan çalışmalar bulunmaktadır. Araştırma sonuçlarımıza paralel olarak cebirin başka bir dalında yapılan bir çalışmada; gerekli şartların belirtildiği teorem ifadelerinden yararlanılmadığı veya yararlanıldığında da doğru bir biçimde yararlanılmadan denklemlerin çözüldüğü ortaya konmuştur (Şenay ve Özdemir, 2014). Bahsi geçen çalışmada bu durumun kaynağı, öğretmen adaylarının soyutlama seviyelerinin indirgenmiş olması ile açıklanmaktadır (Şenay ve Özdemir, 2014). Cebirden başka bir matematik alanında (analiz) yapılan çalışmalarda, hesaplamalarda sıkça yararlanılan alanın temel teoremine ilişkin yanılgılar olduğu ve bu durumun teoremin ön gerekliliklerine dikkat edilmeden yanlış bir şekilde kullanılmasından (Thompson, 1994), teorik bilgi eksikliğinden ve teoremin anlamlandırılmasında yaşanan zorluklardan (Machín ve ark., 2010) kaynaklandığı belirtilmektedir. Bu araştırmada tespit edilen benzer bir durum bulgulardaki "lineer bağımsızlık-baz/boyut kavramları arası ilişkilendirme becerisine" ilişkin bölümde öğretmen adaylarından biri (PÖ2) ile yapılan görüşmelerden elde edilen transkriptten alınan örnek bir kesit ile sunulmaktadır. Bu örnekte öğretmen adayı vektörlerin $(\{(1,2),(3,7),(5,8)\})$ lineer bağımlı olup olmadığını değerlendirirken ilgili teoremden (Teorem 6) yararlanmaya çalışsa da lineer bağımlılık için teoremin ifadesinde geçen; "U'daki bir vektörün diğer vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilmesi" gerek yeter şartı doğru bir şekilde anlamadığından yanıldığı tespit edilmiştir. Ayrıca, bu araştırmadaki çıkarımsal ilişkilendirme ile tamamen aynı anlamı taşımasa da “geometrik şekillerin birinden yararlanarak başka bir şeklin özelliğinin bulunması” olarak tanımlanan türetimsel ilişkilendirmenin yeterince gerçekleştirilemediğine ve daha çok işlemsel ilişkilendirmeler yapıldığına ilişkin bir çalışma bulunmaktadır (Eli, 2009). Bu durumun, kavramların ilişkisel anlama gerçekleştirilmeden sadece enstrümental düzeyde (Skemp, 1976) bilinmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Çıkarımda bulunmanın, temel becerilerden akıl yürütmenin alt becerileri arasında yer aldığı (MEB, 2013) düşünüldüğünde öğrencilerin zayıf akıl yürütme yüzdelerinin en yüksek düzeyde olduğu, bunu kusurlu akıl yürütmenin takip ettiği ve doğru akıl yürütme yüzdesinin ise en düşük düzeyde olduğu sonucuna varılan çalışmanın bu araştırmayı destekler nitelikte olduğu düşünülmektedir (Umay ve Kaf, 2005). Bu durum, akıl yürütme sürecinin tamamlanmaması ve kavramsal eksiklikler olmasından kaynaklanmaktadır (Umay ve Kaf, 2005).

Kavramlar arası ilişkilendirme becerisinin sorgulandığı yarı yapılandırılmış görüşmelerde; lineer bağımsızlık, germe, baz kavramları arası ilişkilendirme yapamayan öğretmen adayı sayısının diğer kavram çiftlerine göre daha az sayıda olduğu tespit edilmiştir. Araştırmamızın aksine alanyazında baz kavramının öğreniminde lineer bağımsız vektörler ve bu vektörlerin uzayı germesi gibi bir dizi kavramın öğrenilmesi ve ilişkilendirilmesi gerektiği ancak öğrencilerin bu ilişkilendirmeyi yapamadığı ortaya konmaktadır (Stewart and Thomas, 2010). Bu araştırmada ayrıca, öğretmen adaylarının neredeyse tamamının lineer dönüşüm ile baz kavramları arasında ilişki kuramadığı tespit edilmiştir. Bu durumun lineer dönüşüm kavramına ilişkin performansın düşük (bu araştırmanın nicel kısmından elde edilen bulgulara dayalı olarak) ve dolayısıyla kavram bilgisinin eksik olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmede eksiklerinin ve yanlışlarının olduğu kavramların başında lineer dönüşüm olmakla birlikte bunun ardından birçok kavramla (lineer bağımlılık/ bağımsızlık, determinant, rank) ilişkili olan LDS gelmektedir. Bu araştırmanın nicel kısmında LDS’ye ilişkin elde edilen sonuca (LDS performansının diğer kavramlara göre oldukça yüksek olması) rağmen nitel kısımda elde edilen bu sonuç dikkat çekicidir. Bu durumun, LCPT’deki LDS kavramına ilişkin soruların çözümünde yeterli olduğu düşünülen işlemsel algoritmaları uygulamanın, lisans düzeyinde teoremler temelinde anlatılan aynı kavramı diğer kavramlarla ilişkilendirmede yetersiz olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bunun yanı sıra, öğretmen adaylarının LDS ile lineer bağımlılık (LDS’nin katsayılar matrisinin lineer bağımlılığı) kavramını ilişkilendirmede nispeten başarılı oldukları ancak determinantın (LDS'nin katsayılar matrisinin) 0 olması ile LDS kavramını ilişkilendirmede başarılı olamadıkları tespit edilmiştir. Alanyazında HOLDS'de değişken sayısının denklem sayısına eşit olduğu ve değişken sayısının denklem sayısından farklı olduğu durumlarda sergilenen performansların farklılaştığını (Aydın, Delice ve Kardeş 2011; Cutz, 2005, akt. Oktaç, 2008) ortaya koyan çalışmalar mevcuttur. Ayrıca, bu araştırmada öğretmen adaylarının, HOLDS'de determinantın (LDS'nin katsayılar matrisinin) 0 olması ile LDS'nin çözümünü ilişkilendirmede zorlandığı tespit edilmiştir. Bu durumun, LDS kavramının öğretiminde tek elemanlı çözüm kümesine sahip lineer denklem sistemleri üzerinde yoğunlaşılmasından ve dolayısıyla öğretmen adaylarının denklem sistemlerinin çözüm kümesinin boş küme (Ramírez 2005, akt. Oktaç, 2008) ya da sonsuz olduğu durumları anlamlandırmakta zorlanmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Lineer cebir performansı düşük düzeyde olan öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmede oldukça düşük düzeyde performans sergilediği bunun yanı sıra öğretmen adaylarının bu iki performans (lineer cebir performans puanı ile kavramlar arası ilişkilendirme puanı) puanları arasında anlamlı ilişki olduğu tespit edilmiştir. Lineer cebir alanında kavram bazında yapılan çalışmalarda, bazı kavramları ilişkilendirmede zorluklar yaşandığını gösteren çalışma bulunmaktadır (Stewart and Thomas, 2010). Matematik alanında diğer dallarda (analiz) yapılan çalışmalarda, öğretmen adaylarının nispeten kavram bilgisine sahip olduğu ancak kavramlar arasındaki ilişkiyi yanlış yorumladıklarını (Açıkyıldız, 2013), kavramları birbiri ile ilişkili olarak anlamlandırmakta ve kullanmakta zorluk yaşadıklarını (Mumcu, 2018) gösteren çalışmalar bulunmaktadır. Araştırmamıza paralel olarak problem çözme performansı ile matematiği kendi içinde ilişkilendirme puanları arasında yüksek düzeyde ilişki olduğunu ve bunun yanı sıra matematiği kendi içinde ilişkilendirmenin problem çözme becerisinin anlamlı bir yordayıcısı olduğunu gösteren bir çalışma bulunmaktadır (Özgen, 2013). Bahsi geçen çalışmada, orta düzeyde problem çözme becerisine sahip öğretmen adaylarının ilişkilendirme becerisinin düşük düzeyde olduğu sonucuna varılmıştır (Özgen, 2013). Bu durumun, öğretmen adaylarının daha çok işlemsel bilgiyi önemsemelerinden (Eli, 2009) ve işlemsel bilgi ile kavramsal bilgi arasında ilişkilendirmede sorun yaşamalarından (Toluk-Uçar, 2011) kaynaklandığı düşünülmektedir. Ayrıca alanyazında öğretmenlerin; bir ilişkilendirme etkinliği örneği vermede zorluk yaşadığı (Leikin ve Levav-Waynberg, 2007), öğretim sürecinde ilişkilendirme etkinliklerinden yararlanmanın zor bir durum olduğunu düşündükleri (Schoenfeld, 1991) ve ilişkilendirme hakkındaki görüşlerinin tamamen disiplin içi ile sınırlı olduğu (Businskas, 2008) vurgulanmıştır. Yukarıda bahsi geçen çalışma sonuçları dikkate alındığında daha çok üniversiteden önce öğrendikleri bilgileri tercih ettikleri (Kardeş-Birinci ve ark., 2014) bilinen öğretmen adaylarının öğrenim hayatlarında kavramlar arası ilişkilendirmede zorluk yaşayan ve sınırlı bilgiye sahip öğretmenlerle karşılaşmış olabileceğinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

5.2 Sonuç

Bu araştırmanın nicel kısmı, lineer cebir dersinde ÇTTÖ'nün ve PDÖ'nün öğretmen adaylarının, akademik performansına, özyeterlik algısına ve sergilediği anlama boyutlarına etkisinin ne düzeyde olduğunu belirlemek; nitel kısmı öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirme biçimlerini lineer cebir kavramları bağlamında incelemek ve eksik ve yanlış ilişkilendirmelerin hangi ilişkilendirme biçimlerinden kaynaklandığını belirlemek amacıyla gerçekleştirilmiştir ve araştırma kapsamında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Araştırmaya konu olan lineer cebir kavramlarının öğretiminin tamamlanmasının ardından uygulanan LCPT'den ve MKÖAÖ'den elde edilen verilere göre çalışma ve karşılaştırma gruplarının son test puan ortalamaları arasında çalışma grupları lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu ancak çalışma gruplarının kendi arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı belirlenmiştir. Ayrıca, MSA son test puan ortalamaları incelendiğinde, çalışma ve karşılaştırma grupları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı tespit edilmiştir.

Bu araştırmada, öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık, LDS, baz-boyut, germe, lineer birleşim, lineer dönüşüm, vektör uzayı kavramlarıyla ilgili sergiledikleri performansların aynı düzeyde olmadığı ve öğretmen adaylarının en yüksek performansı lineer bağımlılık/bağımsızlık ve en düşük performansı vektör uzayı kavramına ilişkin sorularda gösterdiği tespit edilmiştir.

Araştırma sonucunda, ön ve son testlerde sergilenen anlama boyutlarının yüzdelerinin kavram bazında değiştiği ve uygulanan yöntem ve yaklaşımların öğretmen adaylarının sergiledikleri anlama boyutlarının farklılaşmasına neden olduğu belirlenmiştir. Bunun yanı sıra çalışma ve karşılaştırma gruplarının tamamının, ön test ve son testlerde lineer dönüşüm haricindeki kavramlar bazında en çok BA anlama boyutunu sergiledikleri tespit edilmiştir.

Öğretimin tamamlanmasının ardından kavram bazında performanslar dikkate alınarak; lineer birleşim kavramına ilişkin elde edilen sonuçlar, PDÖ grubu lehine; lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin elde edilen sonuçlar, PDÖ grubu lehine; LDS kavramına ilişkin elde edilen sonuçlar, ÇTTÖ grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca bu araştırmada, lineer dönüşüm kavramına ilişkin performanslar incelendiğinde çalışma ve karşılaştırma grupları arasında anlamlı bir farklılık olmadığı sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte kavramların geometrik temsilini içeren soru ifadelerinde çalışma gruplarının karşılaştırma grubuna göre; rutin olmayan problemlerin çözümünde ise çalışma gruplarından PDÖ grubunun diğer gruplara göre daha iyi performans sergiledikleri tespit edilmiştir.

Araştırma sonucunda; PDÖ'nün (lineer birleşim, germe ve lineer bağımlılık-bağımsızlık) ve ÇTTÖ'nün (germe, LDS ve lineer dönüşüm) uygulandığı çalışma gruplarında kavramların çoğuna ilişkin sergilenen anlama boyutları arasındaki geçişlerin anlamlı olduğu ancak karşılaştırma grubunda anlama boyutları arasında anlamlı bir geçiş ve dolayısıyla sergilenen anlama boyutlarında bir zenginleşme durumu olmadığı tespit edilmiştir.

PDÖ'nün öğrenme ortamlarına katkıları incelendiğinde öğretmen adaylarının ve eğitim yönlendiricisinin; bilgileri araştırma, kullanma, sorgulama, ilişkilendirme, kişiler arası iletişim kurma ve sürece katkı sağlama becerilerinin gelişimi yönünde katkı sağladığını düşündükleri ve süreç devam ettikçe bu düşüncelerinin olumlu yönde etkilendiği sonucuna varılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının, bu becerilerin gelişimi hususunda eğitim yönlendiricisinin rehberlik ettiğini düşündükleri belirlenmiştir.

Deneysel sürecin tamamlanmasının ardından çalışma gruplarından seçilen yüksek, orta ve düşük düzeyde lineer cebir performansına sahip öğretmen adayları ile görüşmeler yapılmış, çalışmaya konu olan lineer cebir kavramlarının (lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, LDS ve lineer dönüşüm) formal/işlemsel, teorik/özellik, geometrik, çıkarımsal/nedensel ve uzaysal ilişkilendirme biçimlerinden yararlanarak ilişkilendirildiği belirlenmiştir. Bununla birlikte; öğretmen adaylarının neredeyse tamamının ilişkilendirme biçimlerinin tamamından yararlandığı ve en yüksek düzeyde sergilenen ilişkilendirme biçiminin formal/işlemsel ilişkilendirme biçimi olduğu ve bunu sırasıyla teorik/özellik, geometrik, çıkarımsal/nedensel ve uzaysal ilişkilendirme biçiminin takip ettiği tespit edilmiştir. Ayrıca, ÇTTÖ'nün ve PDÖ'nün uygulandığı gruplardan görüşme yapmak için seçilen öğretmen adaylarının eksik ve yanlış ilişkilendirmelerinin daha çok teorik/özellik ve çıkarımsal/nedensel ilişkilendirmelerin doğru yapılamamasından kaynaklandığı belirlenmiştir.

Kavramlar arası ilişkilendirme becerisinin sorgulandığı yarı yapılandırılmış görüşmelerde; lineer bağımsızlık, germe, baz kavramları arası ilişkilendirme yapamayan öğretmen adayı sayısının diğer kavram çiftlerine göre daha az sayıda olduğu ve baz ve lineer dönüşüm kavramları arası ilişkilendirme yapamayan öğretmen adayı sayısının diğer kavram çiftlerine göre oldukça fazla sayıda olduğu tespit edilmiştir.

Lineer cebir performansı düşük düzeyde olan öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmede oldukça düşük düzeyde performans sergilediği bunun yanı sıra öğretmen adaylarının bu iki performans (lineer cebir performans ve kavramlar arası ilişkilendirme) puanları arasında anlamlı ilişki olduğu tespit edilmiştir.

5.3 Öneriler

Bu araştırmada lineer cebirde GÖ'nün; performansı PDÖ ve ÇTTÖ yaklaşımına göre daha az etkilediği, kavram bazında anlamlı bir farklılık oluşturmadığı ve çözüm sürecinde sergilenen anlama boyutlarını çeşitlendirmediği sonucuna varılmıştır. Alanyazında kavramlara ilişkin tam anlamıyla öğrenmenin gerçekleşmesi için anlama boyutlarının tamamının sergilenmesi gerektiği vurgulanmakla (Doğan-Dunlap, 2010; Usiskin, 2012) birlikte, ülkemizde öğretim süreci, daha çok BA anlama boyutunu geliştirmeye yönelik gerçekleştirilmektedir. Bununla birlikte GÖ haricinde bu araştırmada uygulanan PDÖ'nün ve ÇTTÖ'nün tek başına performans ve anlama boyutları bağlamında kavramların tamamında etkili olmadığı ortaya konmuştur. Ayrıca kavramların yapılarının (formal, işleme dayalı, somut, soyut,…) birbirinden farklı olduğu ve kavramın yapısına göre performans ve sergilenen anlama boyutlarının farklılaştığı (Kardeş-Birinci, 2016) bilinmektedir. Kavram bazında sergilenen performans ve anlama boyutlarına ilişkin elde edilen sonuçlar dikkate alınarak iki farklı öğretim yaklaşımının bu araştırmada tespit edilen olumlu etkilerini birleştirmek adına lineer cebir kavramlarının öğretiminde çoklu temsil temelli (GeoGebra destekli) probleme dayalı öğretim yönteminin uygulanması önerilebilir.

Lineer cebir, kökeni LDS'lerin çözümüne dayanan cebirin bir dalı (Konyalıoğlu ve ark., 2003) olarak adlandırılabilir. Deneysel uygulama sürecinde, öğretmen adaylarının çoğunun lineer cebir derslerine temel olabilecek ilköğretimden itibaren öğrendikleri LDS kavramıyla ilgili sorun yaşadıkları görülmüştür. Bu kavramın öğrenimi ve öğretiminde yaşanan zorluklar ve nedenleri incelenerek bu nedenleri ortadan kaldıracak uygulamalar geliştirilebilir. Vektör uzayı olarak adlandırılan soyut sistemlerle ilgili modern cebirin kollarından biri olan lineer cebirde (Konyalıoğlu ve ark., 2003), yaşanan zorlukları ortadan kaldırmak için rutin olmayan problemlerden ve teknoloji desteğinden yararlanılan bu araştırmada öğretmen adaylarının akademik başarılarının ve özyeterlik algılarının olumlu yönde geliştiği görülmüş ancak kavram bazında vektör uzayı (Turğut, 2010) ve lineer dönüşüme ilişkin performansın düşük olduğu tespit edilmiş ancak bunların nedenini belirlenememiştir. Nitekim lineer bağımsızlık ve baz kavramlarından yararlanarak lineer dönüşümler anlatıldığında başarı düzeyinin arttığını ve kavramsal yaklaşımın daha iyi öğrenmeyi sağladığını (Uhlig, 2003), bilgisayar destekli yapılan lineer cebir öğretiminde akademik performansın arttığını ve en büyük farklılaşmanın temel vektör uzayı kavramıyla lineer dönüşüm kavramını anlamada gerçekleştiğini (Doğan, 2001) gösteren çalışmalar mevcuttur. Bu iki kavramla ilgili yaşanan zorlukların nedenleri ve bu nedenlerin nasıl ortadan kaldırılabileceği farklı araştırmalarla desteklenebilir.

Alanda analitik geometri, disiplinler arası alanda fizik, alan dışında mühendislik ile iç içe olan lineer cebir kavramlarının bu alanlardaki uygulamalarıyla ilişkilendirerek öğrenim ve öğretiminin yapılması ve olumlu-olumsuz etkilerinin araştırılması önerilebilir.

Bu araştırmada genel performansa ilişkin sonuçlar, PDÖ ve ÇTTÖ arasında bir fark olmadığı yönünde olsa da kavram bazında ve sergilenen anlama boyutlarına ilişkin elde edilen sonuçlar bu yöntem ve yaklaşımlarının farklı etkileri olduğu yönündedir. Bu durum, değerlendirmenin ayrıntılı olarak yapılması gerektiğine işaret etmektedir. Bununla birlikte bu araştırmayla, kavram bazında ve anlama boyutları bağlamında bu öğretim yöntem ve yaklaşımlarının statik bir etkisinin olmadığı ortaya konmaktadır. Bu araştırmadan elde edilen sonuçlar dikkate alındığında sergilenen anlama boyutlarını; PDÖ'nün daha çok KM ve Öİ, ÇTTÖ'nün Öİ ve TM boyutu yönünde etkilediği görülmektedir. Ülkemizde, lisans düzeyinde öğretim süreci, daha çok hesaplamalar

(BA) ve teorem-ispat (Öİ) anlama boyutunu geliştirmeye yönelik gerçekleştirilse de, bu süreçte uygulanan formalizme dayalı öğretim tekniklerinin yeterli olmadığı (Wawro ve ark., 2012) kavramlara ilişkin tam anlamıyla öğrenmenin gerçekleşmesi için anlama boyutlarının tamamının sergilenmesi gerektiği (Doğan-Dunlap, 2010; Usiskin, 2012) bilinmektedir. Dolayısıyla, daha az sergilenen anlama boyutları tespit edilerek kavramın yapısına göre sağlam ve dengeli bir matematiksel anlayış geliştirilmesini sağlamak için öğretim sürecinde farklı yöntem, teknik ve yaklaşımlardan yararlanılması ve öğretimin bireyselleştirilmesi önerilebilir.

Diğer taraftan, genel anlamda matematik alanında ve lineer cebirde kavramların öğretimi sürecine; kullanım alanları, beceri, teorik yapı, özellikler veya temsil bileşenlerinden hangisi ile başlanması ve daha sonra hangi anlama boyutlarına yer verilmesi gerektiğine ilişkin bir takım bilgiler olsa da sınırları belli olan bir uygulama mevcut değildir. Bununla ilgili alanyazında, lineer cebir öğretimine ilişkin somutluk, gereksinim ve genellenebilirlik ilkelerinin dikkate alınmasının önemine dikkat çekilmektedir (Harel 2000). Bunlardan somutluk ilkesi ile soyut yapıdaki lineer cebir kavramlarının geometrik temsilinden yararlanarak somutlaştırılması gerektiği vurgulanmaktadır. Bununla birlikte, lineer cebir öğretiminde kavramların somutlaştırılmasına bağlı kalınmasının öğrencilerin anlayışları için sağlam bir temel oluşturabileceği ancak öğretim sürecinin her aşamasında geometrik ifadelerden yararlanılmasının uygun olmadığına dikkat çekilmektedir (Harel 2000). Bu duruma ilişkin, kavramların geometrik temsillerinden özellikle lineer cebir dersinin giriş bölümünde yararlanılmasının doğru bir uygulama şekli olmadığı bilinmektedir (Harel 2000). Bu durum dikkate alınmadığında kavramların geometrik temsiline odaklanıldığı dolayısıyla kavramların doğru bir şekilde inşa edilemediği ve genelleme ($\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ ten $\mathbb{R}^{n}{}'$e) yapılamadığı düşünülmektedir (Harel 2000). Ayrıca, gereksinim ilkesi ile öğrencilerin öğretilmek istenilen bilgiye gereksinim (zihinsel anlamda) duyması gerektiği ve bunun öğretim etkinliklerinin gerçekçi ve anlaşılabilir düzeyde problem durumları içermesi (Harel, 2000) ile sağlanabileceği belirtilmektedir (Harel, 2000). Böylece, öğrencilerin bilişsel çatışmalarla karşılaştıklarında problemi çözmek ve zihinsel dengeye ulaşmak için aktif olabileceği ve matematiksel kavramları düşünerek soyutlayabileceği düşünülmektedir (Harel, 2000). Ayrıca, lineer cebirin öğretiminde önemi vurgulanan ve öğrencilerin zorlandığı bilinen ilkelerden biri olan genellenebilirlik ilkesi ile öğretim sürecinde kavramların yalnızca $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ ile sınırlandırılmadan $\mathbb{R}^{n\prime}$e genelleyerek öğretim yapılması gerektiğine dikkat çekilmektedir (Harel, 2000). Lineer cebir öğretimine ilişkin tüm bu ilkeler dikkate alındığında eldeki araştırmanın PDÖ ile ilgili olumlu sonuçlarına dayanarak kavramların öğretiminde geometrik temsilinden bahsedilmeden ilgi çekici ve merak uyandırıcı bir senaryo ile derse giriş yapıldığı; senaryolar temelinde kavrama ilişkin bilgiler ve teorem ifadelerinin ($\mathbb{R}^2$'de iki vektörün lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart biri diğerinin skaler katı olmasıdır, $\mathbb{R}^2$'nin gerilmesi için lineer bağımsız 2 vektör gereklidir, ...) öğrenciler tarafından keşfederek ve sorgulayarak yapılandırıldıktan sonra $\mathbb{R}^{n\prime}$e genellenmesinin sağlandığı ($\mathbb{R}^n$'de iki vektörün lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart biri diğerinin skaler katı olmasıdır, $\mathbb{R}^n$'nin gerilmesi için lineer bağımsız n vektör gereklidir,…) deneysel bir çalışma yapılması önerilebilir. Ayrıca, GÖ ve PDÖ grubunda uygulama sürecinde vektörlerin lineer bağımsız olup olmadığını veya gerdiği uzayı bulmada yararlanılan LDS'nin çözümünü (kavramların tanımından yararlanarak gerçekleştirilen çözüm sürecindeki LDS) bulmaya ilişkin ÇTTÖ'ye göre daha çok zaman harcandığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla, öğretim sürecinin aşamalarının tamamında GeoGebranın cebir penceresinden ve hesaplamalardan (rank, determinant, LDS çözümü gibi) yararlanılması zamanı verimli kullanma ve istenilen hedefler doğrultusunda zaman kazanma açısından yararlı olabilir.

Ülkemizde lisans düzeyinde lineer cebirde ve diğer disiplin içi alanlarda (Sevimli ve Delice, 2013) daha çok "Tanım ⇾ Teorem ⇾ İspat ⇾ Uygulamalar ⇾ Test" yaklaşımının dikkate alındığı formalizme dayalı öğretim yapılmaktadır. Öğrenilen matematiğin anlamının vurgulanmadığı, öğrencilere anlam oluşturma fırsat ve olanaklarının sunulmadığı, matematiksel kavram ve ilişkilerin gerçek hayat ile ilişkilendirilmediği bu yaklaşıma benzer daha çok ezbere dayalı uygulamaların; öğrenciye matematiksel ilişkileri keşfetme, başka kavramlarla ilişkilendirme, modelleme ve problem çözme gibi üst düzey matematiksel beceri gerektiren fırsatları sunamadığı ve bu öğrenme döngüsünün matematiksel ilişkileri keşfetme, başka kavramlarla ilişkilendirme, modelleme ve problem çözme gibi üst düzey matematiksel becerileri desteklemediği belirtilmektedir (MEB, 2013). İntegral konusu ile ilgili sorularda analiz dersinin içeriğinde yer alan analizin temel teoreminden yararlanarak öğrencilerin daha çok ezbere dayalı uygulamalar yaptığı ortaya konmaktadır (Sevimli ve Delice, 2013). Alanyazında ise integralin hesaplanmasına ilişkin temel teşkil eden ve analizin bazı kavramlarını içeren bu teoremin çoklu temsil desteğinden yararlanarak anlamlandırılabileceği vurgulanmaktadır (Schnepp ve Nemirovsky, 2001; Thompson ve Silverman, 2008; Sevimli, 2013). Bu araştırmada, PDÖ ve ÇTTÖ uygulanan çalışma gruplarında bazı kavramlara ilişkin sergilenen anlama boyutlarından Öİ boyutu yönünde anlamlı farklılaşmalar olduğu ortaya konmaktadır. Alanyazında, kavramların anlamlı ve ilişkisel olarak öğrenilmesi bağlamında, kavramsal anlamaya odaklanılması ve gerçek hayat uygulamalarına yer verilmesine ilişkin önerinin (Mumcu, 2018) yanı sıra geometrik temsillerin arkasında aksiyomatik bir dilin var olduğu (Fischbein, 1993) vurgulanmaktadır. Ayrıca, bu araştırmada teoremlerin anlamlandırılamaması öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmedeki eksik ve yanlışların en önemli nedenlerinden biri olarak tespit edilmiştir. Bu araştırmada ve alanyazında elde edilen tüm bu sonuçlar ışığında teorik yapının anlamlandırılması için teoremlerin açıklanması ve ispatı da dahil olmak üzere kavramların öğretiminde geometrik temsilden (Bardelle, 2009) ve rutin olmayan problemlerden yararlanılması önerilebilir.

Diğer taraftan matematiksel ilişkilendirmelerden yararlanan öğretmenler; öğrencilerinin öğrenme-öğretme sürecine birbiriyle ilişkili matematiksel kavramları öğrenebilmeleri yönünde (Evitts, 2005) katkı sağlamaktadır. Bu durum dikkate alındığında, lisans öğrenim sürecinde öğretmen adaylarının matematiksel ilişkilendirmeden yararlanmasına yönelik farkındalık oluşturulması (Özgen, 2013) önerilebilir.

GENİŞLETİLMİŞ TÜRKÇE ÖZET

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi Bilim Dalı
Doktora Tezi

LİNEER CEBİR DERSİNDE ÇOKLU TEMSİL TEMELLİ VE PROBLEME DAYALI ÖĞRETİMİN ÖĞRETMEN ADAYLARININ DÜŞÜNME YAPILARINA, ANLAMA BOYUTLARINA, AKADEMİK BAŞARILARINA VE ÖZYETERLİK ALGILARINA ETKİSİ

Atiye AYYILDIZ ALTINBAŞ

Ülkenin kalkınmasında ve bilgi toplumunun oluşturulmasında, matematik öğretiminin önemli bir katkısı bulunmaktadır (Aydın, 2003a). Son yıllarda yapılan çalışmalarda kural ve formüle dayalı matematik öğretiminden çok öğrenci merkezli öğrenimi, dolayısıyla öğrencinin sorgulayarak, yaparak yaşayarak kurallara ulaşmasını ve matematiksel kavramları ezberlemeden öğrenmesini, içselleştirmesini hedefleyen eğitim felsefeleri benimsenmektedir. Bunun için gerçek hayatta karşılaşılan problemlere ilişkin yaratıcı çözümler üretebilme, grupla uyumlu bir şekilde çalışabilme, analitik ve eleştirel düşünebilme gibi becerilerin geliştirilmesinde gerçek hayatta birçok uygulamaya sahip, üniversitelerde matematik ve mühendislik alanlarında verilen lineer cebir dersinin önemli bir yeri bulunmaktadır. Lineer cebir dersinde vektör uzayları, matris, determinant, lineer denklem sistemleri, baz, boyut, lineer bağımsızlık, lineer dönüşüm gibi kavramlar önemli ve birçok konuyla bağlantılıdır. Bu nedenle ezberlemek yerine içselleştirilmesi gereken kavramlardır. Yapılan çalışmalar bu kavramlarda yaşanılan zorlukların sebepleri olarak; öğrencilerin altyapılarının ve hazırbulunuşluk düzeylerinin yeterli olmamasını, bazı kavramların işlemsel algoritmalarının olmamasını, zorlanılan kavramların farklı sorularda farklı algoritmalar gerektirmesini, bu kavramların öğrencilerin önceki bilgileriyle ilişkilendirilmeden GÖ yöntemleriyle öğretilmesini göstermiştir (Carlson ve ark., 1993).

Diğer taraftan öğretmen adaylarının lineer cebir başarılarının, matematiksel düşünme yapılarına ve uzamsal yeteneklerine göre farklılaştığı belirlenmiştir (Kardeş-Birinci, 2016). Düşünme yapılarının ve özyeterlik algı düzeyinin akademik başarıyı etkileyen etkenler arasında olduğu düşünülmektedir (Kardeş-Birinci, 2016). Matematik başarısı için, öğrencinin sahip olduğu düşünme yapısının belirlenip ona göre hareket edilmesi, öğrenci başarısını olumlu yönde etkilemektedir (Carbo, 1980). Lineer cebir dersinde de farklı düşünme yapılarına sahip öğrencilere hitap edebilmek için çeşitli öğretim yöntemlerinden yararlanılabilir. Bu araştırma lineer cebir dersinde öğrencilerin anlamlandırmada ve ilişkilendirmede güçlük çektikleri disiplin içinde ve ekonomi, mühendislik, fen bilimleri gibi disiplinlerarası alanda önemli olan lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, boyut, LDS, lineer dönüşüm kavramlarıyla ilgili öğrenme sürecinin sonunda öğretmen adaylarının akademik başarılarının, anlama boyutlarının, düşünme yapılarının, özyeterlik algı düzeylerinin farklı öğretim yaklaşımlarından ne düzeyde etkilendiğini araştırmak için yürütülecektir. Görselleştirme, konuyu anlamlandırma ve ilişkilendirmede etkili olmaktadır (Kardeş, 2010). Lineer cebir kavramlarının geometrik ifadelerden yararlanılarak soyut olan kavramlara somutluk katarak anlatılması, zor olan kavramların anlaşılmasını sağlamaktadır. Ayrıca, ders kitaplarında öğrenilenlerle hayat arasında gerçek bir bağ kurulamaması ezberciliğin nedenleri arasında yer almaktadır (Akyüz, 2001). Bu nedenle ders içerisinde matematiksel kavramların günlük yaşam içerisinde kullanımının verilmesi önemlidir (İlgar ve Gülten, 2013). Bu bağlamda araştırmada uygulanacak olan öğretim yöntem ve teknikleri PDÖ ve ÇTTÖ'dür. GÖ yerine öğrencinin aktif olduğu yöntem ve tekniklerle dersler işlenirse öğrencilerin bilişsel ve duyuşsal gelişim seviyeleri değişebilir. Matematiksel düşünme yapıları bir yetenek değil tercihtir (Kardeş-Birinci, 2016). Bireyler yaşantıları sonucu tercihlerini değiştirebilmektedir. Ayrıca yaşantıları sonucu yargılarını da değiştirebilmektedir. Dolayısıyla, hangi yaklaşımın düşünme yapılarını, anlama boyutlarını ve özyeterlik algılarını etkileyeceğinin araştırılmasının alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir

Araştırmanın katılımcılarını, 2018-2019 öğretim yılında İç Anadolu bölgesinde bir devlet üniversitesinin farklı iki eğitim fakültesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünün 2. sınıfında öğrenim görmekte olan öğretmen adayları oluşturmaktadır. Araştırmanın yöntemi, nitel ve nicel desenlerin birlikte kullanıldığı karma yöntem olarak belirlenmiştir. Uygulama sürecinde lineer birleşim, lineer bağımlılık/bağımsızlık, germe, baz, LDS ve lineer dönüşüm kavramlarıyla ilgili GeoGebra yazılımından yararlanarak geliştirilen materyaller, bu kavramların gerçek hayattaki uygulamalarından esinlenerek geliştirilen rutin olmayan problemlerden oluşan senaryolar ve çalışma yaprakları kullanılmıştır. Araştırmada veriler; öğrencilerin özyeterlik algı düzeylerini belirlemek için Umay (2001) tarafından hazırlanmış "*Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği",* Presmeg (1985) tarafından geliştirilen

“Matematik Süreç Aracı” ve araştırmacılar tarafından geliştirilen açık uçlu sorulardan oluşan “*Lineer Cebir Performans Testi”* ve *“İlişkilendirme Görüşme Formu”* aracılığıyla toplanmıştır. Verilerin nicel analizinde betimsel istatistiklerden, bağımlı gruplar t-testinden, Wilcoxon işaretli sıralar testinden, tek yönlü varyans analizinden, Kruskal Wallis testinden, iki yönlü kay kare testinden, McNemar Bowker testinden ve tekrarlı ölçümler için tek yönlü varyans analizinden; nitel analizinde sürekli karşılaştırmalı analizden yararlanılmıştır. Araştırma sonucunda lineer cebir dersini çoklu temsil temelli ve probleme dayalı öğrenen ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının; formalizme dayalı geleneksel öğretimle öğrenen ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına göre daha başarılı olduğu ve bu yaklaşımların özyeterlik algısını geliştirmede daha etkili olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra, çalışma gruplarında sergilenen anlama boyutlarının zenginleştiği ancak geleneksel öğretim gerçekleştirilen karşılaştırma grubunda sergilenen anlama boyutlarında anlamlı bir değişim olmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının en çok formal/işlemsel en az uzaysal ilişkilendirme yaptığı belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının kavramlar arası ilişkilendirmedeki yanılgılarının daha çok çalışmaya konu olan kavramlarla ilgili teoremlere ilişkin yanılgılarından ve bu kavramlara ilişkin yanlış çıkarımlarda bulunmalarından kaynaklandığı tespit edilmiştir.

Lineer cebir kavramları yapılarının (formal, işleme dayalı, somut, soyut,…) birbirinden farklı olduğu ve kavramın yapısına göre performans ve sergilenen anlama boyutlarının farklılaştığı (Kardeş-Birinci, 2016) düşünüldüğünde bu çalışmadan elde edilen sonuçlar dikkate alınarak iki farklı öğretim yaklaşımının olumlu etkilerini birleştirmek adına lineer cebir kavramlarının öğretiminde çoklu temsil temelli (GeoGebra destekli) probleme dayalı öğretim yaklaşımının uygulanması önerilebilir.

KAYNAKÇA

Açıkgöz, K. Ü. (2004). *Aktif öğrenme* (6.baskı). İzmir: Eğitim Dünyası yayınları.

Açıkyıldız, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının türev kavramını anlamaları ve yaptıkları hatalar* (Yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 344475)

Ajdukiewicz K. (Ed.). (1974) Expressions and their meanings. In: Pragmatic Logic. Synthese Library, Vol. 62. (pp. 7-15). Springer, Dordrecht. doi: 10.1007/978-94-010-2109-8_2

Akarsu, B. (1975). *Felsefe Terimleri Sözlüğü*. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Akarsu, B. (2016). Hipotezlerin, değişkenlerin ve örneklemin belirlenmesi. M. Metin (Ed.), *Eğitimde Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (3. baskı). içinde (s.21-43). Ankara: Pegem Akademi.

Akın, P. (2009). *İlköğretim 5. sınıf matematik dersi için probleme dayalı öğrenme yönteminin öğrenci başarısına etkisi* (Yüksek lisans tezi). Ege Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 241307)

Aktümen, M., Yıldız, A., Horzum, T. ve Ceylan, T. (2011). İlköğretim matematik öğretmenlerinin GeoGebra yazılımının derslerde uygulanabilirliği hakkındaki görüşleri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *2*(2), 103-120. https://dergipark.org.tr/en/pub/turkbilmat/issue/21564/231440 adresinden edinilmiştir.

Akyüz, Y. (2001). *Türk eğitim tarihi (Başlangıçtan 2001'e)*(8. Baskı). İstanbul: Alfa Basım Yayım Dağıtım Ltd. Şti.

Akyıldız, P. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının lineer cebir dersine yönelik tutumları ve alan dili becerilerinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 333427)

Aladağ, E., ve Şahinkaya, N. (2013). Sosyal bilgiler ve sınıf öğretmeni adaylarının sosyal bilgiler ve matematik derslerinin ilişkilendirilmesine yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *21*(1), 157-176.

Alkan, H., ve Bukova-Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *25*(3), 221-236. http://www.gefad.gazi.edu.tr/en/download/article-file/77238 adresinden edinilmiştir.

Altun, M., ve Memnun, D.S. (2008). Mathematics teacher trainees' skills and opinions on solving non-routine mathematical problems. *Journal of Theory and Practice in Education*, *4*(2), 213-238.

Anderson, J.R. (2009). *Cognitive psychology and its implications* (7. ed.). New York: W.H. Freeman. https://www.academia.edu/17613920/Cognitive_Psychology_and_Its_Implications_and_Scientific_American_Explores_the_Hidden_Mind adresinden edinilmiştir.

Arslan, A. (2012). Predictive power of the sources of primary school students'self-efficacy beliefs on their self-efficacy beliefs for learning and performance. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *12*(3), 1915-1920.

Atkinson, R.L., Atkinson, R.C., Smith, E.E., Bem, D.J., & Nolen-Holeksema, S. (2008). *Psikolojiye giriş* (Çev. Y. Alagon). Ankara: Arkadaş Yayınları.

Aydın, B. (2003a). Bilgi toplumu oluşumunda bireylerin yetiştirilmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *14*(14), 183–190. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/114809 adresinden edinilmiştir.

Aydın, O. (2003b). Okul öncesi dönem çocuğunun gelişim özellikleri. M. Sevinç (Ed.). *Gelişim ve eğitimde yeni yaklaşımlar* (pp. 132–142). İstanbul: Morpa Kültür Yayınları.

Aydın, S., (2007). Bazı özel öğretim yöntemlerinin lineer cebir öğrenimine etkileri. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, *6*(19), 214-223. https://dergipark.org.tr/en/pub/esosder/issue/6133/82251 adresinden edinilmiştir.

Aydın, S. (2009). Lineer Cebir Eğitimi Üzerine. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *10*(1), 93-106. https://dergipark.org.tr/tr/pub/inuefd/issue/8706/108706 adresinden edinilmiştir.

Aydın, E., Delice, A. ve Kardeş, D. (2011). Matematik öğretmen adaylarına yönelik lineer denklem sistemleri öz-yeterlik algısı ölçeği. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *2*(2), 160-182. https://dergipark.org.tr/en/pub/turkbilmat/issue/21564/231444 adresinden edinilmiştir.

Azar, A. (2010). Ortaöğretim fen bilimleri ve matematik öğretmeni adaylarının öz yeterlilik inançları. *Uluslararası Yönetim İktisat ve İşletme Dergisi*, *6*(12), 235-252. https://dergipark.org.tr/en/pub/ijmeb/issue/54588/744128 adresinden edinilmiştir.

Aytekin, C. ve Kıymaz, Y. (2019). Teaching linear algebra supported by GeoGebra visualization environment. *Acta Didactica Napocensia*, *12*(2), 75-96. doi: 10.24193/adn.12.2.7

Bal, A.P. (2015). Skills of using and transform multiple representations of the prospective teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *197*, 582-588. doi: 10.1016/j.sbspro.2015.07.197

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory.* Englewood Cliffs Prentice Hall.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* New York: Freeman.

Bandura, A. (2012). On the functional properties of perceived self-efficacy revisited. *Journal of Management*, *38*(1), 9-44. doi: 10.1177/0149206311410606

Bardelle, C. (2009, January). *Visual proofs: An experiment*. Paper presented at the Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education, Lyon. https://www.researchgate.net/profile/Ralph-Johan-Back/publication/31598087_Student_Justifications_in_High_School_Mathematics/links/02bfe50e7fb80e4e22000000/Student-Justifications-in-High-School-Mathematics.pdf#page=78 adresinden edinilmiştir.

Bartels, B. (1995). *Examining and promoting mathematical connections with concept Maps* (Doctoral dissertation). University of Illinois, USA. http://hdl.handle.net/2142/19078 adresinden edinilmiştir.

Barrows, H. (2002). Is it truly possible to have such a thing as dPBL?. *Distance Education*, *23*(1), 119-122. doi:10.1080/01587910220124026

Batista, S.C.F., & Baptista, C.B.F. (2014). Learning object for linear systems: Scratch in mathematics. *International Journal on New Trends in Education and Their Implications*, *5*(1), 71-81. http://ijonte.org/FileUpload/ks63207/File/08a.batista.pdf adresinden edinilmiştir.

Ben-Chaim, D., Fey, J., Fitzgerald, W., Benedetto, C., & Miller, J. (1997). *Development of proportional reasoning in a problem-based middle school curriculum.* In Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED412091.pdf adresinden edinilmiştir.

Bengmark, S., Thunberg, H., & Winberg, T.M. (2017). Success-factors in transition to university mathematics. *International journal of mathematical education in science and technology*, *48*(7), 988-1001. doi: 10.1080/0020739X.2017.1310311

Biber, A. ve Argun, Z. (2012). Matematik öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavram bilgilerini kullanarak yürüttükleri bazı genelleme ve soyutlamalar. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *20*(2), 655-668. https://dergipark.org.tr/en/pub/kefdergi/issue/48697/619554 adresinden edinilmiştir.

Bishop A.J. (2008). Spatial abilities and mathematics education – A Review. *Educational Studies in Mathematics* 11, (257-269). doi: 10.1007/BF00697739

Bonne, L., & Lawes, E. (2016). Assessing students'maths self-efficacy and achievement. *Assessment News*, *2*, 60-63. doi: 10.18296/set.0048

Bosse, M.J. (2003). The beauty of "and" and "or": connections within mathematics for students with learning differences. *Mathematics and Computer Education*, *37*(1), 105-114.

Bogomolny, M. (2006). *The role of example-generation tasks in students'understanding of linear algebra* (Doctoral dissertation). Simon Fraser University, Canada. http://summit.sfu.ca/item/3385 adresinden edinilmiştir.

Boud, D., & Feletti, G. (1991). *The challenge of problem based learning*. London: Kogan Page.

Businskas, A.M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* (Doctoral dissertation). Simon Fraser University, Canada. http://summit.sfu.ca/system/files/iritems1/9245/etd4202_0.pdf adresinden edinilmiştir.

Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E.K., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2016). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (20. Baskı). *Ankara: Pegem Akademi*.

Byers, V., & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching*, *81*, 24-27.

Can, A. (2016). *SPSS ile bilimsel araştırma sürecinde veri analizi* (4. Baskı). *Ankara: Pegem Akademi*.

Cantürk-Günhan, B. C. (2006). *İlköğretim II kademede matematik dersinde probleme dayalı öğrenmenin uygulanabilirliği üzerine bir araştırma* (Doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 206025)

Cantürk-Günhan, B. ve Başer, N. (2009). Probleme dayalı öğrenmenin öğrencilerin eleştirel düşünme becerilerine etkisi. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, *7*(2), 451-482. https://dergipark.org.tr/en/pub/tebd/issue/26107/275071 adresinden edinilmiştir.

Carbo, M. (1980). *An analysis of the relationship between the modality preferences of kindergartners and selected reading treatments as they affect the learning of a basic sight-word vocabulary* (Doctoral dissertation). St. John's University, New York. Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 8021790)

Cárcamo, A., Fortuny, J., & Fuentealba, C. (2018). The emergent models in linear algebra: an example with spanning set and span. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *37*(4), 202-217. doi: 10.1093/teamat/hrx015

Carlson, D., Johnson, C.R., Lay, D.C., & Porter, A.D. (1993). The linear algebra curriculum study group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46. doi: 10.1080/07468342.1993.12345738

Cassidy, S., & Eachus, P. (2002). Developing the computer user self-efficacy (CUSE) scale: Investigating the relationship between computer self-efficacy, gender and experience with computers. *Journal of Educational Computing Research*, *26*(2), 133-153. doi: 10.2190/JGJR-0KVL-HRF7-GCNV

Cawley, P. (1989). The introduction of a problem-based option into a conventional engineering degree course. *Studies in Higher Education*, *14*(1), 83-95. doi: 10.1080/03075078912331377632

Chinnappan, M., & Lawson, M.J. (2000). Knowledge connectedness in geometry problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 26-43. doi: 10.2307/749818

Clements, K. (1982). Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *2*(3), 33-39. https://www.jstor.org/stable/40247750 adresinden edinilmiştir.

Creswell, J.W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (2nd ed.). California: Sage Publications.

Creswell, J., & Plano Clark, V.L. (2007). Understanding mixed methods research. In J. Creswell (Ed.), *Designing and conducting mixed methods research* (pp. 1-19). Thousand Oaks, CA: Sage.

Cerezo, N. (2004). Problem-based learning in the middle school: A research case study of the perceptions of at-risk females. *Research in Middle Level Education Online*, *27*(1), 1-13. doi: 10.1080/19404476.2004.11658164

Coxford, A.F., (1995). The case for connections. In P. A. House and A.F. Coxford (Eds.), *Connecting Mathematics across the Curriculum*, (pp. 3-12). Reston, VI: National Council of Teachers of Mathematics.

Cutz, B. (2005). *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobrelos sistemas de ecuaciones y su solución* (Unpublished master's thesis). University of Mexico, Cinvestav.

Cüceloğlu, D. (1999). *İnsan ve davranışı: Psikolojinin temel kavramları.* İstanbul: Remzi Kitapevi.

Çatlı, G. ve Solak, S. (2013, Haziran). *Birinci dereceden iki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerine yönelik öğrenci yaklaşımları.* Bilgisayar ve Matematik eğitimi sempozyumu'nda sunulan bildiri, Trabzon. http://www.bilmat.org/turkbilmat/ozetler.pdf adresinden edinilmiştir.

Çekmez, E. ve Baki, A. (2018). Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna yönelik anlamalarına etkisi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *10*(1), 30-58. doi: 10.16949/turkbilmat.419038

Çetin, H. (2016). *Sorgulayıcı öğrenme yaklaşımıyla çoklu temsil destekli tam sayı öğretiminin 6. Sınıf öğrencilerinin başarılarına model tercihlerine ve temsiller arası geçiş becerilerine etkisi* (Doktora tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 436707)

Çevik, G. (2015). *Lineer cebir uygulamalarının bilgisayar destekli görselleştirilmesinin, öğretmen adaylarının farkındalıklarına, görselleştirmelerine etkisi ve memnuniyeti* (Yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 394797)

Çilenti, K. (1988). *Eğitim teknolojisi ve öğretim*. Ankara: Yargıcı Matbaası.

Dağyar, M. (2014). *Probleme dayalı öğrenmenin akademik başarıya etkisi: Bir meta-analiz çalışması* (Doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 378551)

Deniz, S. (2016). *Doğrusal denklemlerin 7. sınıflarda öğretiminde geometri sketchpad kullanımının çoklu temsil ve enstrümantal yaklaşım boyutundan incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi, Eskişehir. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 425491)

Delice, A. ve Sevimli, E. (2011). İntegral kavramının öğretiminde konu sıralamasının kavram imgeleri bağlamında incelenmesi; belirli ve belirsiz integraller. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(30), 51-62. https://dergipark.org.tr/en/pub/pauefd/issue/11113/132871 adresinden edinilmiştir.

Dias, A.M., Artigue, M., & Dıdırem, E. (1995, July). *Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra.* Paper presented at the Proceedings of the 19th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Brazil. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.972.8334&rep=rep1&type=pdf#page=43 adresinden edinilmiştir.

Diković, L. (2007). Interactive learning and teaching of linear algebra by web technologies: some examples. *The Teaching of Mathematics*, *10*(2), 109-116. http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/19/tm1025.pdf adresinden edinilmiştir.

Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, *6*(2), 191-203. doi: 10.2298/CSIS0902191D

Dilberoğlu, M. (2015). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının alan derslerindeki matematik ile ortaokul matematiğini ilişkilendirme becerilerinin incelenmesi* (Doktora tezi). Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 399987)

Doğan, H. (2001, June). *A comparison study between a traditional and experimental program.* Paper presented at the 10th International Conference on Intelligent Systems, Arlington. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED482567.pdf adresinden edinilmiştir.

Dogan-Dunlap, H., & Hall, B. (2004). Computers and linear algebra. *WSEAS Transactions on Mathematics*, *3*(3), 537-542.

Dogan-Dunlap, H. (2006). Lack of set theory relevant prerequisite knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(4), 401-410.

Doğan-Dunlap, H. (2007). *Student thinking modes expressed while determining linear indepence/depence of sets of vectors* (Doctoral dissertation). University of Texas at El Paso, USA. Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 1444083)

Doğan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students'modes of reasoning: Geometric representations. *Linear Algebra and Its Applications*, *432*(8), 2141-2159.

Doğan, H. (2018). Differing instructional modalities and cognitive structures: Linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *542*, 464-483. doi: 10.1016/j.laa.2017.07.007

Dorier, J.L. (1990). *Continuous analysis of one year of science students'work, in linear algebra, in first year of French university*. Proceedings of the 14th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education, Mexico. https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16903 adresinden edinilmiştir.

Dorier, J.L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 255-273). doi: 10.1007/0-306-47231-7_24

Dorier, J.L. (2002, August). Teaching linear algebra at university, In: L. Tatsien, C. Zhijie, X. Mi, & Z. Chunlian (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, (pp. 875-884). https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16877 adresinden edinilmiştir.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, A.D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra, MAA Notes Volume 42* (pp. 85-106). Washington DC: The Mathematical Association of America. http://www.math.kent.edu/~edd/LinearAlgebra.pdf adresinden edinilmiştir.

Duch, B.J., Groh, S.E., & Allen, D.E. (2001). *The power of problem-based learning: a practical "how to" for teaching undergraduate courses in any discipline*. Sterling, Virginia: Stylus Publishing, LLC.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. (pp. 109-122), Hillsdale, NJ: LEA.

Duman, B. ve Yakar, A. (2017). Öğretime yönelik duyuşsal farkındalık ölçeği. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, *6*(1), 200-229.

Edens, K.M. (2000). Preparing problem solvers for the 21st century through problem-based learning. *College Teaching*, *48*(2), 55-60. doi: 10.1080/87567550009595813

Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metodlarına giriş*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Eli, J.A. (2009). *An exploratory mixed methods study of prospective middle grades teachers'mathematical connections while completing ınvestiagtive tasks in geometry* (Doctoral dissertation). University of Kentucky, USA. http://uknowledge.uky.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1784&context=gradschool_diss adresinden edinilmiştir.

Eli, J.A., Mohr-Schroeder, M.J., & Lee, C.W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 297-319. doi: 10.1007/s13394-011-0017-0

Eli, J.A., Mohr-Schroeder, M.J., & Lee, C.W. (2013). Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics*, *113*(3), 120-134. doi: 10.1111/ssm.12009

Erçerman, B. (2008). *Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin lineer cebir bilgilerinin değerlendirilmesi* (Yüksek lisans tezi). Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 213449)

Ergene, B. (2011). *Matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin çoklu temsiller bileşeninde incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 298582)

Ersoy, Y. (2006). İlköğretim Matematik Öğretim Programındaki Yenilikler-I: amaç, içerik ve kazanımlar. *İlköğretim Online*, *5*(1), 30-44. https://ilkogretim-online.org/index.php?mno=121079 adresinden edinilmiştir.

Ersoy, E. (2012). *Probleme dayalı öğrenme sürecinde üst düzey bilişsel düşünme becerileri ve duyuşsal kazanımlardaki değişim* (Doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 313069)

Ertekin, E., Solak, S. ve Yazıcı, E. (2010). The effects of formalism on teacher trainees'algebraic and geometric interpretation of the notions of linear dependency/independency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(8), 1015-1035. doi: 10.1080/0020739X.2010.500689

Evitts, T. (2005). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula* (Doctoral dissertation). The Pennsylvania State University, USA. Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3157533)

Ferri, R.B. (2003). *Mathematical thinking styles-An empirical study*. Paper presented at the Third Conference of the European society for Research in Mathematics Education, Bellaria. http://erme.site/cerme-conferences/cerme3/cerme-3-proceedings/ adresinden edinilmiştir.

Fischer, A. (2005, February). *Mental models of the concept of vector space.* Paper presented at the 4^{th} Conference of the European society for Research in Mathematics Education, San Feliu de Guixols. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.118.788&rep=rep1&type=pdf adresinden edinilmiştir.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162. doi: 10.1007/BF01273689

Freudenthal, H. (Ed.). (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Garland, N.J. (1995). Peer group support in economics: Innovations in problem-based learning. In W. Gijselaers, D. Tempelaar, P. Keizer, E. Bernard, & H. Kasper (Eds.), *Educational Innovation in Economics and Business Administration: The Case of Problem-Based Learning* (pp. 331–337). Dordrecht: Kluwer.

Gerez-Cantimer, G. (2015). *Özel eğitim gereksinimli çocukların öğretmenlerinin mesleki ve matematik öğretim özyeterlilik algılarının belirlenmesi* (Doktora tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 381753)

Girard, N.R. (2002). *Students' representational approaches to solving calculus problems: Examining the role of graphing calculators* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3066950)

Goldin, G.A., & Kaput, J.J. (1996, January). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning*, 397-430. https://www.researchgate.net/publication/269407907 adresinden edinilmiştir.

Goldin, G.A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Gómez-Chacón, I.M., & Escribano, J. (2011). Teaching geometric locus using GeoGebra an experience with pre-service teachers. *GeoGebra International Journal of Romania, GeoGebra The New Language For The Third Millennium*, *2*(1), 209-224. https://ggijro.files.wordpress.com/2011/07/1gomezt.pdf adresinden edinilmiştir.

Gökçek, T. (2016). Karma yöntem araştırması. M. Metin (Ed.), *Eğitimde Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (s.373-410). Ankara: Pegem Akademi.

Gürlen, E. (2011). Probleme dayalı öğrenmenin öğrenme ürünlerine, problem çözme becerilerine, öz yeterlik algı düzeyine etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *40*(40), 221-232. https://dergipark.org.tr/en/pub/hunefd/issue/7796/102070 adresinden edinilmiştir.

Güven, B. ve Yılmaz, G. K. (2012). Dinamik geometri yazılımı kullanımının sınıf öğretmeni adaylarının dönüşümler konusundaki akademik başarılarına etkisi. *Education Sciences*, *7*(1), 442-452. https://dergipark.org.tr/en/pub/nwsaedu/issue/19817/212014 adresinden edinilmiştir.

Haddad, M., (1999). *Difficulties in the learning and teaching of linear algebra: a personal experience* (Doctoral Dissertation). Concordia University, Canada. https://concordiauniversity.on.worldcat.org/search?queryString=ot:(Spectrum)+854 adresinden edinilmiştir.

Hammad, S., Graham, T., Dimitriadis, C., & Taylor, A. (2020). Effects of a successful mathematics classroom framework on students'mathematics self-efficacy, motivation, and achievement: a case study with freshmen students at a university foundation programme in Kuwait. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-26. Doi: 10.1080/0020739X.2020.1831091

Harari-Eshel O. (2001) Knowledge and explanation in Aristotle's posterior analytics. In: G. Hon, S.S. Rakover (Eds), *Explanation Theoretical Approaches and Applications* (pp. 137-164). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-015-9731-9_6

Harel, G. (2000). Principles of learning and teaching of linear algebra: Old and new observations. J.L. Dorier (Ed.). *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Haris, K., Marcus R., & Mclaren K. (2001). Curriculum materials supporting problem based teaching. *School Science and Mathematics*, *101*(6), 310–318. doi: 10.1111/j.1949-8594.2001.tb17962.x

Hau, S. A. (1993). *An analysis of the mathematical connections recognized by students in an elementary school teacher education program* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9320696)

Herendiné-Kónya, E. (2015, February). The level of understanding geometric measurement. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 536-542).

Herscovics, N., & Bergeron, J.C. (1983). Models of understanding. *International Reviews on Mathematical Education*, *15*(2), 75-83.

Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and ve teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York, NY: Macmillan.

Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., & Wearne, D. (1997). Making mathematics problematic: A rejoinder to Prawat and Smith. *Educational Researcher*, *26*(2), 24-26. doi: 10.3102/0013189X026002024

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an ıntroductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hillel, J., & Sierpinska, A. (1994). On one persistent mistake in linear algebra. In *The Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education 18,* (pp. 65-72).

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004, July). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In *Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference* (pp. 1-6).

Hu, W., & Adey, P. (2002). A scientific creativity test for secondary school students. *International Journal of Science Education*, *24*(4), 389–403. doi: 10.1080/09500690110098912

Hung, W., Jonassen, D.H., & Liu, R. (2008). Problem-based learning. *Handbook of research on educational communications and technology*, *3*(1), 485-506.

Işıksal, M. ve Çakıroğlu, E. (2006). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiğe ve matematik öğretimine yönelik yeterlik algıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *31*(31), 74–84. https://dergipark.org.tr/tr/pub/hunefd/issue/7807/102397 adresinden edinilmiştir.

İlgar, L. ve Gülten, D.Ç. (2013). Matematik konularının günlük yaşamda kullanımının öğrencilere öğretilmesinin gerekliliği ve önemi. *İstanbul Zaim Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *2*(3), 119-128. https://hdl.handle.net/20.500.12436/110 adresinden edinilmiştir.

İnal, G. (2011). *Bilişsel yetenekler testi form-6'nın geçerlik güvenirlik çalışması ve altı yaş çocuklarının bilişsel yeteneklerine muhakeme eğitim programının etkisinin incelenmesi.* (Doktora tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 279772)

İzgiol, D. (2014). *Teknoloji destekli çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin lineer cebir öğrenimine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi* (Yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 368255)

Johnstone, K.M., & Biggs, S.F. (1998). Problem-based learning: introduction, analysis, and accounting curricula implications. *Journal of Accounting Education*, *16*(3-4), 407-427. doi: 10.1016/S0748-5751(98)00026-8

Jungert, T., & Rosander, M. (2010). Self-efficacy and strategies to influence the study environment. *Teaching in Higher Education*, *15*(6), 647-659. doi: 10.1080/13562517.2010.522080

Kan, O. (2014). *Geogebra destekli öğretimin lineer cebir dersine ait bazı konularda akademik başarı üzerine etkisi* (Yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 372148)

Kaptan, F. ve Korkmaz, H. (2001). Fen eğitiminde probleme dayalı öğrenme yaklaşımı. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *20*, 191-192. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/87967 adresinden edinilmiştir.

Kar, T. (2010). *Lineer cebirde probleme dayalı öğrenme yönteminin öğrencilerin akademik başarıları, problem çözme becerileri ve yaratıcılıkları üzerine etkisi* (Yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 270737)

Kardeş, D. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının lineer denklem sistemleri çözüm süreçlerinin öz yeterlik algısı ve çoklu temsil bağlamında incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 264144)

Kardeş-Birinci, D., Delice, A. ve Aydın, E. (2014). University students'solution processes in systems of linear equation. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *152*, 563-568. doi: 10.1016/j.sbspro.2014.09.244

Kardeş-Birinci, D. (2016). *Matematik öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarını anlayışlarının düşünme yapıları ve uzamsal yetenekleri bağlamında incelenmesi* (Doktora tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 437063)

Katwibun, D. (2004). *Middle school students'mathematical dispositions in a problem based classroom* (Doctoral dissertation). Oregon State University, USA. Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3133389)

Kaya, D., (2015). *Çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin cebirsel muhakeme becerilerine, cebirsel düşünme düzeylerine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi üzerine bir inceleme* (Doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 395240)

Keller, B.A., & Hirsch, C.R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*(1), 1-17. doi: 10.1080/0020739980290101

Kepçeoğlu, İ. ve Yavuz, İ. (2017). GeoGebra yazılımıyla limit ve süreklilik öğretiminin öğretmen adaylarının başarısına etkisi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *11*(1), 21-47. doi: 10.17522/balikesirnef.354961

Kılıç, H. (2016a). Probleme dayalı öğretim. E. Bingölbali, S. Arslan, İ.Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (pp. 643-654). Ankara: Pegem Akademi yayıncılık.

Kılıç, S. (2016b). Bağımlı örneklemlerde McNemar testi. *Journal of Mood Disorders*, *6*(4), 256-258.

Kılınç, A. (2007). Probleme dayalı öğrenme. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *15*(2), 561-578. https://dergipark.org.tr/en/pub/kefdergi/issue/49102/626594 adresinden edinilmiştir.

Kızıloğlu, F.N. ve Konyalıoğlu, A.C. (2002). Matematik öğretmenlerinin sınıf içi davranışları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *10*(1), 119-124.

Kohen, Z., Amram, M., Dagan, M., & Miranda, T. (2019). Self-efficacy and problem-solving skills in mathematics: the effect of instruction-based dynamic versus static visualization. *Interactive Learning Environments*, 1–20. doi: 10.1080/10494820.2019.1683588.

Konyalıoğlu, A.C., İpek, A.S. ve Işık, A. (2003). On the teaching linear algebra at the University level: The role of visualization in the teaching vector spaces. *Research in Mathematical Education*, *7*(1), 59-67. https://www.koreascience.or.kr/article/JAKO200311921733962.pdf adresinden edinilmiştir.

Köroğlu, H. ve Yeşildere, S. (2004). İlköğretim yedinci sınıf matematik dersi tamsayılar ünitesinde çoklu zeka teorisi bazlı öğretimin öğrenci başarısına etkisi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*(2), 25-41. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/77316 adresinden edinilmiştir.

Köse, O. (2018). *Üst düzey uzamsal yeteneğe sahip matematik öğretmen adaylarının düşünme yapılarına göre solo taksonomisi düzeylerinin belirlenmesi* (Yüksek lisans tezi), Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 506001)

Krutetskii, V.A. (1976*). The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: Universty of Chicago Press.

Kumah, M.S., & Wonu, N. (2020). The effectiveness of geogebra in the teaching of elementary algebra at St Theresa's College Ghana. *International Journal of Progressive Sciences and Technologies, 23*(2), 570-579.

Lawson, M.J., & Chinnappan, M. (1994). Generative activity during geometry problem solving: Comparison of the performance of high-achieving and low achieving school students. *Cognition and Instruction*, *12*(1), 61-93. doi: 10.1207/s1532690xci1201_3

Lean, G., & Clements, M.K. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 267-299. doi: 10.1007/BF00311060

Leder, G.C., Forgasz, H.J., & Jackson, G. (2014). Mathematics, English and Gender ıssues: Do Teachers Count?. *Australian Journal of Teacher Education, 39*(9). doi: 10.14221/ajte.2014v39n9.3

Lee, J.E., (2012). Prospective elementary teachers'perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(6), 429-452. doi: 10.1007/s10857-012-9220-5

Lee, N.H., Yeo, D.J.S. & Hong, S.E., (2014). A metacognitive-based instruction for Primary Four students to approach non-routine mathematical word problems. *ZDM Mathematics Education* 46**,** 465–480 (2014). doi: 10.1007/s11858-014-0599-6

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A., (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 349-371. doi: 10.1007/s10649-006-9071-z 26.

Leon, A.C. (1998). Descriptive and inferential statistics. *Comprehensive Clinical Psychology*. Vol *3*, 243–285. doi: 10.1016/B0080-4270(73)00264-9

Lincoln, S.Y., & Guba, E.G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Thousand Oaks, CA: Sage. doi: 10.1016/0147-1767(85)90062-8

Lockwood, E., (2011). Students connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics*, 78(3), 307-322. doi: 10.1007/s10649-011-9320-7.

Long, C., & Dunne, T. (2014). Approaches to teaching primary level mathematics. *South African Journal of Childhood Education, 4*(2), 134-153.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Machín, M.C., Rivero, R.D., & Santos-Trigo, M. (2010). Students'use of derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. In F. Hitt, D. Holton, & P.W. Thompson (Eds.), *Conference Board of the Mathematical Sciences Issues in Mathematics Education Vol. 16. Research in Collegiate Mathematics Education 7,* (pp. 29-62).

Maitland, B. (1998). Problem-based learning for an architecture degree. In, D. Boud and G. Feletti (Eds.), The *challenge of problem-based learning*, (pp. 211–217). London: Kogan Page.

Mallet, D.G. (2007). Multiple representations for systems of linear equations via the computer algebra system Maple. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(1), 16-32.

Malpass, J.R., O'Neil, J., Harold, F., & Hocevar, D. (1999). Self regulation, goal orientation, self efficacy, worry and high stakes math achievement for mathematically gifted high school students. *Roeper Review, 21*(4), 281-290. doi: 10.1080/02783199909553976

Miles M., & Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis*. California: Sage Publications.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2013). *Ortaöğretim matematik (9, 10, 11 ve 12.) sınıflar dersi öğretim programı*, Ankara, M.E.B. Web: https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343 adresinden edinilmiştir.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı [MEB] (2018a). *Ortaöğretim matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) dersi öğretim programı*. Ankara, M.E.B. Web: http://mufredat.meb.gov.tr/dosyalar/201821102727101-ogm%20matemat%c4%b0k%20prg%2020.01.2018.pdf adresinden edinilmiştir.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı [MEB] (2018b). İlköğretim matematik dersi öğretim programı. Ankara, M.E.B. Web: https://mufredat.meb.gov.tr/dosyalar/201813017165445-matemat%c4%b0k%20%c3%96%c4%9eret%c4%b0m%20programı%202018v.pdf adresinden edinilmiştir.

Molodsij, V.N., (1977). Studien zur philosophischen Problemen der Mathematik Berlin: Dt. Verl. d. Wissenschaften.

Monroe, E.E., & Mikovch, A.K., (1994). Making mathematical connection across the curriculum: activities to help teachers begin. *School Science and Mathematics*, 94(7), 371-376. doi: 10.1111/j.1949-8594.1994.tb15697

Mortensen, M.F., & Smart, K. (2007). Free-choice worksheets increase students'exposure to curriculum during museum visits. *Journal of Research in Science Teaching*, *44*(9), 1389–1414. doi: 10.1002/tea.20206

Mousley, J., (2004). An aspect of mathematical understanding: the notion of "connected knowing". Proceedings of the *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3-25, 377-384.

Mumcu, H.Y. (2018). Matematiksel ilişkilendirme becerisinin kuramsal boyutta incelenmesi: Türev kavramı örneği. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *9*(2), 211-248. doi: 10.16949/turkbilmat.379891

Musal, B., Taşkıran, H.C., Dicle, O. ve Özkan, Ş. (2001). Dokuz Eylül Üniversitesi Tıp Fakültesi'nde öğrencilerin eğitim etkinlikleri, fakültenin sağladığı destek/olanaklar, eğitim yönlendiricilerine ilişkin görüşleri. *Dokuz Eylül Üniversitesi Tıp Fakültesi Dergisi*, *15*(4), 371-375.

Narlı, S. (2016). İlişkilendirme becerisi ve muhtevası. E. Bingölbali, S. Arslan, İ.Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler*, (pp. 231-244). Ankara: Pegem Akademi yayıncılık.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principals and standards for school mathematics*. Reston, Va: NCTM Publications.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2009). *Guiding principles for mathematics curriculum and assessment.* http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=23273 adresinden edinilmiştir.

Oakley, L. (2004). *Cognitive development*. New York, USA: Routledge Press.

Oberlander, J., & Talbert-Johnson, C. (2004). Using technology to support problem-based learning. *Action in teacher education*, *25*(4), 48-57. doi: 10.1080/01626620.2004.10648296

Ocal, M.F. (2017). The effect of geogebra on students'conceptual and procedural knowledge: the case of applications of derivative. *Higher Education Studies, 7*(2), 67-78. doi: 10.5539/hes.v7n2p67

Oktaç, A. (2004). Student discussions on a Linear Algebra problem in a distance-education course. *Linear Algebra and Its Applications, 379,* 439-455. doi: 10.1016/j.laa.2003.08.021

Oktaç, A. (2008). *Ortaöğretim düzeyinde lineer cebir ile ilgili kavram yanılgıları. Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri,* Ankara: Pegem Akademi.

Olgun, B. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının sözel problemleri çözümü: Görsel-uzamsal yetenekler, temsil kullanımı ve matematiksel düşünme yapıları* (Yüksek lisans tezi). Boğaziçi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 435137)

O'Sullivan, B. (2014 August). Multiple perspectives: Using several frameworks for the analysis of tasks in mathematics textbooks. *Seventh Yerme summer school,* Kassel, Germany.

Özcan, Z.Ç. (2017). Ortaokul öğrencilerinin eleştirel düşünme becerilerinin matematik başarısı, yaş ve sınıf seviyesi açısından incelenmesi. *Medeniyet Eğitim Araştırmaları Dergisi*, *1*(1), 43-52. https://dergipark.org.tr/en/pub/mead/issue/30039/322222 adresinden edinilmiştir.

Özdemir, Ş. (2012). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoklu temsiller kullanılarak problem çözme algılarının açınsanması* (Yüksek lisans tezi). İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 316373)

Özgen, K. ve Pesen, C. (2010). Probleme dayalı öğrenme yaklaşımı ile işlenen matematik dersinde öğrencilerin problem çözme becerilerinin analizi. *Milli Eğitim Dergisi*, *40*(186), 27-37. https://dergipark.org.tr/en/pub/milliegitim/issue/36198/407054

Özgen, K. (2013). Problem çözme bağlamında matematiksel ilişkilendirme becerisi: öğretmen adayları örneği. *Education Sciences*, *8*(3), 323-345. https://dergipark.org.tr/en/pub/nwsaedu/issue/19811/211897 adresinden edinilmiştir.

Özgen, K. (2016, May). Matematiksel ilişkilendirme üzerine kuramsal bir çalışma. In *International Conference on Research in Education & Science* (pp. 19-22).

Özhan-Turan, A. (2011). *12. sınıf öğrencilerinin analitik geometrideki temsil geçişlerinin krutetskii düşünme yapıları bağlamında incelenmesi: doğruların birbirine göre durumları* (Yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 298580)

Özmen, H. (2016). Nicel araştırma yaklaşımına dayalı yöntemler. M. Metin (Ed.), *Eğitimde Bilimsel Araştırma Yöntemleri* içinde (pp.45-76). Ankara: Pegem Akademi.

Öztürk, T. ve Güven, B. (2016). Evaluating students'beliefs in problem solving process: A case study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(3), 411-429. doi: 10.12973/eurasia.2016.1208a

Öztürk, M., Akkan, Y., & Kaplan, A. (2020). Reading comprehension, Mathematics self-efficacy perception, and Mathematics attitude as correlates of students' non-routine Mathematics problem-solving skills in Turkey. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51(7), 1042-1058. doi: 10.1080/0020739X.2019.1648893

Pajares, F., & Miller, M.D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of Educational Psychology*, *86*(2), 193. doi: 10.1037/0022-0663.86.2.193

Pajares, F., & Kranzler, J. (1995). Self-efficacy beliefs and general mental ability in mathematical problem-solving. *Contemporary Educational Psychology*, *20*(4), 426-443. doi: 10.1006/ceps.1995.1029

Panaoura, A. (2014). Using representations in geometry: a model of students'cognitive and affective performance. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(4), 498-511. doi: 10.1080/0020739X.2013.851804

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and Its Applications*, *432*(8), 2112-2124. doi: 10.1016/j.laa.2009.06.034

Patton, M.Q. (2018). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri.* Nitel Analiz ve Yorumlama. (Çev.) A. Çekiç, A. Bakla, Bütün M., Demir S.B (Eds.). Ankara: Pegem Akademi.

Patton, M.Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. SAGE Publications, inc.

Pecuch-Herrero, M. (2000). Strategies and computer projects for teaching linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*, 181-186. doi: 10.1080/002073900287237

Peranginangin, S.A., Saragih, S., & Siagian, P. (2019). Development of learning materials through PBL with Karo culture context to ımprove students'problem solving ability and self-efficacy. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(2), 265-274. doi: 10.29333/iejme/5713

Peterson, R.F., & Treagust, D.F. (1998). Learning to teach primary science through problem-based learning. *Science Education, 82*(2), 215-237. doi: 10.1002/(SICI)1098-237X(199804)82:2%3C215::AID-SCE6%3E3.0.CO;2-H

Piaget, J. (2000). *Çocukta zihinsel gelişim*. (H. Portakal, Çev.) İstanbul: Cem Yayınevi.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23(5), 505-528.* doi: 10.1007/BF00571470

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?. In *Learning Mathematics* (pp. 61-86). Springer, Dordrecht.

Plooy, R.D., & Long, C. (2014). Engaging with cognitive levels: A practical approach towards assessing the cognitive spectrum in mathematics. *20th Annual National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa* Kimberley, Northern Cape.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* New York, NY: John Wiley & Sons.

Pourdavood, R.R. (2012). Classrooms socio-mathematical discourse: two nine-grade-dyads' non-routine problem-solving engagement. *American Journal of Human Ecology*, 1(2), 44-50. doi: 10.11634/21679622150477

Presmeg, N.C. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation* (Doctoral dissertation). University of Cambridge, England. https://ethos.bl.uk/OrderDetails.do?uin=uk.bl.ethos.355279 adresinden edinilmiştir.

Presmeg, N.C., & Bergsten, C. (1995). Preference for visual methods: An international study. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, *3*, (pp. 58-65).

Pugalee, D.K. (2001). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students'work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics, 101*(5), 236-245. doi: 10.1111/j.1949-8594.2001.tb18026.x

Ramírez, M. (2005). *Dificultades que presentan los estudiantes en los sistemas de ecuaciones lineales en los modos geométrico y analítico* (Unpublished master's thesis). Universidad Autónoma de Guerrero, Meksika.

Reynolds, F. (1997). Studying psychology at degree level: Would problem-based learning enhance students'experiences?. *Studies in Higher Education, 22*(3), 263-275. doi: 10.1080/03075079712331380886

Roddy, M.R. (1992). *Mathematics teachers' conceptions of "connections"* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9239490)

Roh, K.H. (2003). Problem-based learning in mathematics. *Education Resources Information Center Digest*, 1-7. Abstract retrieved from *Education Resources Information Center* databese. (No. ED482725)

Saban, A. (2004). *Öğrenme-öğretme süreci yeni teori ve yaklaşımlar*. Ankara: Nobel Yayın

Sabella, M.S., & Redish, E.F. (2004). Knowledge activation and organization in physics problem-solving. *American Journal of Physics*, *75*(11), 1017-1029. doi: 10.1119/1.2746359

Savery, J.R. (2015). Overview of problem-based learning: definitions and distinctions. In A. Walker, H. Leary, C.E. Hmelo-Silver, & P.A. Ertmer (Eds.), *Essential readings in problem-based learning, (pp.*5-15). Indiana, West Lafayette: Purdue University Press.

Savin-Baden, M., & Major, C.H. (2004). *Foundations of problem-based learning*. ABD: McGraw-Hill.

Schnepp, M., & Nemirovsky, R. (2001). Constructing a foundation for the fundamental theorem of calculus. In A.A. Cuoco, F.R. Curcio, R. Feynmen (Eds.), *The roles of representation in school mathematics*, (pp. 90-102). Reston, Va. : National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A.H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and ınformal mathematics. In J. Voss, D. N. Perkins, and J. Segal (Eds.), *Informal Reasoning and Education*, (pp. 311–343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schultz, J.E., & Waters, M.S., (2000). Why representations?. *Mathematics Teacher, 93*(6), 448-453.

Schwartz, P., Mennin, S., & Webb, G., (Eds.) (2001). *Problem-based learning: Case studies, experience and practice*. London: Kogan Page.

Senemoğlu, N. (2015). *Gelişim öğrenme ve öğretim*. Ankara: Erek Ofset Matbaası.

Senk, S.L., & Thompson, D.R. (2003). *Standards-based school mathematics curricula: What are they? What do students learn?* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sevimli, E. (2013). *Bilgisayar cebiri sistemi destekli öğretimin farklı düşünme yapısındaki öğrencilerin integral konusundaki temsil dönüşüm süreçlerine etkisi* (Doktora tezi). Marmara Üniversitesi, Türkiye. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 349944)

Sevimli, E. ve Delice, A. (2013). An investigation of students' concept images and integration approaches to definite integral: Computer algebra system versus traditional environments. *Proceeding of PME 37, 4,* 201-208.

Shama, G., & Dreyfus, T.(1994). Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 45-70. doi: 10.1007/BF01273300

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the learning of mathematics*, *10*(3), 24-41.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students'thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Springer, Dordrecht.

Sifoğlu, N. (2007). *İlköğretim 8. sınıf fen bilgisi dersinde yapısalcı öğrenme ve probleme dayalı öğrenme yaklaşımlarının öğrenci başarısı üzerine etkisi* (Yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 190944)

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26. http://www.davidtall.com/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf adresinden edinilmiştir.

Skemp, R.R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Skemp, R.R. (1979). Goals of learning and qualities of understanding. *Mathematics Teaching*, *88,* 44-49.

Skemp, R.R. (1982). Symbolic understanding. *Mathematics Teaching*, *99,* 59-61.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stewart, S., & Thomas, M.O. (2007). Embodied, symbolic and formal aspects of basic linear algebra concepts. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 201-208).

Stewart, S., & Thomas, M.O. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 173-188. doi: 10.1080/00207390903399620

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded Theory Procedures and Techniques.* Newbury Park, CA. Sage.

Şenay, Ş.C., ve Özdemir, A.Ş. (2014). Matematik öğretmen adaylarının lineer kongrüanslara ilişkin soyutlamayı indirgeme eğilimleri. *Eğitim ve İnsani Bilimler Dergisi: Teori ve Uygulama*, (10), 59-72. https://dergipark.org.tr/en/pub/eibd/issue/22665/242058 adresinden edinilmiştir.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In M.J. Høines & A.B. Fuglestad (Eds.), *28th Conference of the international group for the psychology of mathematics education.* Vol. 4 (pp. 281–288). Bergen.

Taşkıran, H.C., Musal, B. ve Atabey, N. (2001). Dokuz Eylül Üniversitesi Tıp Fakültesinde probleme dayalı öğrenim yöntemi ve işleyişi konusunda eğitim yönlendiricilerinin görüşleri. *Dokuz Eylül Üniversitesi Tıp Fakültesi Dergisi*, *15*(4), 377-378.

Tataroğlu-Taşdan, B.T., Uğurel, I. ve Koyunkaya, M.Y. (2017). Matematik öğretmen adaylarının geliştirdikleri matematik öğrenme etkinliklerinin matematik içi ilişkilendirmeye ilişkin görüşleri kapsamında incelenmesi. *Türkbilmat–3 3. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu*, 87.

Taşova, H.İ. (2011). *Matematik öğretmen adaylarının modelleme etkinlikleri ve performansı sürecinde düşünme ve görselleme becerilerinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 298531)

Taşkın, D., Aydın, F., Güven, B. ve Akşan, E. (2012). Ortaöğretim öğrencilerinin problem çözmeye yönelik inanç ve öz-yeterlilik algıları ile rutin ve rutin olmayan problemlerdeki başarıları arasındaki ilişkinin incelenmesi. *Education Sciences*, *7*(1), 50-61. https://dergipark.org.tr/en/pub/nwsaedu/issue/19817/211978 adresinden edinilmiştir.

Tekay, T. ve Doğan, M. (2015). İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin doğrusal denklemlerin grafikleri ile ilgili soruları çözme becerilerinin değerlendirilmesi. *Matder Matematik Eğitimi Dergisi*, *2*(1), *1-9.*

Thomas, N., & Mulligan, J. (1994). Researching mathematical understanding through children's representations of number. In *Paper presented at the Australian Association for Research in Education Annual Conference*, Newcastle.

Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 229-274. doi: 10.1007/BF01273664

Thompson, P.W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Thompson, D.R., Kaur, B., & Bleiler, S.K. (2010). Using a multi-dimensional approach to understanding to assess primary students'mathematical knowledge. *5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, Tokyo, 18-22.

Toluk-Uçar, Z., (2011). Öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi: Öğretimsel açıklamalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *2*(2), 87-102. https://dergipark.org.tr/en/pub/turkbilmat/issue/21564/231439 adresinden edinilmiştir.

Tonbuloğlu, B., Aslan, D., Altun, S. ve Aydın, H. (2013). Proje bazlı öğrenmenin öğrencilerin bilişüstü becerileri ve öz yeterlik algıları ile proje ürünleri üzerindeki etkisi. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, *10*(23), 97-117. https://dergipark.org.tr/en/pub/mkusbed/issue/19550/208235 adresinden edinilmiştir.

Trigueros, M. (2018). Learning linear algebra using models and conceptual activities. In *Challenges and strategies in teaching linear algebra* (pp. 29-50). Springer, Cham.

Tuğran, Z. (2015). *İşbirlikli öğrenmenin lise öğrencilerinin matematik öz yeterlik algısı ve başarısı üzerindeki etkisi* (Yüksek lisans tezi). Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Çanakkale. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 391267)

Tuluk, G. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının nokta, çizgi, yüzey ve uzay bilgileri ve çokluntemsilleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *22*(1), 361-384. https://dergipark.org.tr/tr/pub/kefdergi/issue/22603/241534 adresinden edinilmiştir.

Turğut, M. (2010). *Teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine* etkisi (Doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 265541

Turgut, M. (2018). Synergies among students'thinking modes and representation types in linear algebra: employing statistical implicative analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(8), 1181-1202. doi: 10.1080/0020739X.2018.1443221

Türk Dil Kurumu [TDK] Türkçe Sözlüğü. https://sozluk.gov.tr/ adresinden edinilmiştir.

Uçuş, H. (2017). *Uzaktan eğitimin görme engellilerin problem çözüm sürecine yansımalarının incelenmesi: düşünme yapıları bağlamında matematiksel iletişim* (Yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 490662)

Uden, L. (2006). *Technology and problem-based learning*. C. Beaumont (Ed.). ABD: IGI Global.

Uhlig, F. (2003). A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its applications*, *361*, 147-159. doi: 10.1016/S0024-3795(02)00319-1

Umay, A. (2001). İlköğretim matematik öğretmenliği programının matematiğe karşı öz yeterlik algısına etkisi. *Qafqaz Üniversitesi Dergisi*, *8*(1), 1-8.

Umay, A. ve Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28*(28), 188-195. https://dergipark.org.tr/en/pub/hunefd/issue/7808/102434 adresinden edinilmiştir.

Ural, A. (2007). *İşbirlikli öğrenmenin matematikteki akademik başarıya, kalıcılığa, matematik öz yeterlik algısına ve matematiğe karşı tutuma etkisi* (Doktora tezi) Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 211656)

Usiskin, Z. (2012). What does it mean to understand some mathematics*? 12th International Congress on Mathematical Education*, Seoul, Korea, 8-15 July. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/Conferences/ICME/ICME12/www.icme12.org/upload/submission/1881_F.pdf adresinden edinilmiştir.

Usiskin, Z. (2015). What does it mean to understand some Mathematics?. In *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education*.http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/panama_cursusboek/pcb_31_11-30_Usiskin.pdf adresinden edinilmiştir.

Uslu, G. (2006). *Ortaöğretim matematik dersinde probleme dayalı öğrenmenin öğrencilerin derse ilişkin tutumlarına, akademik başarılarına ve kalıcılık düzeylerine etkisi* (Yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 180130)

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G.F., & Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *Primus*, *22*(8), 577-599. doi: 10.1080/10511970.2012.667516

Webb, N.L. (2009). Webb's depth of knowledge guide. *Career and Technical Education Definitions*. http://www.aps.edu/rda/documents/resources/Webbs_DOK_Guide.pdf adresinden edinilmiştir.

Wood, E.F. (1993). *Making the connections: The mathematical understanding of 179 prospective secondary mathematics teachers* (Doctoral Dissertation). Michigan State University, USA. Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9326789.

Wu, H. (2004). Computer aided teaching in linear algebra. *The China Papers*, *3*(*7)*, 100-102.

Yaman, S. (2003). *Fen bilgisi eğitiminde probleme dayalı öğrenmenin öğrenme ürünlerine etkisi* (Doktora tezi). Gazi Universitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 133749)

Yaman, S., Koray, Ö.C. ve Altunçekiç, A. (2004). Fen bilgisi öğretmen adaylarının öz yeterlik inanç düzeylerinin incelenmesi üzerine bir araştırma. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, *2*(3), 355-364. https://dergipark.org.tr/en/pub/tebd/issue/26127/275219 adresinden edinilmiştir.

Yılmaz, K. (2007). *Öğrencilerin epistemolojik ve matematik problemi çözmelerine yönelik inançlarının problem çözme sürecine etkisinin araştırılması* (Yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, İstanbul. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 210271)

Yıldırım, A. ve Şimşek H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin yayıncılık,

Yi, J., Yoo, J., & Lee, K.H. (2013). Toward students'full understanding of trigonometric ratios. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, *17(*1), 63-78. Doi: 10.7468/jksmed.2013.17.1.063

Yürekli, Ü.B. (2008). *Sınıf öğretmeni adaylarının matematiğe yönelik öz-yeterlilik algıları ve tutumları arasındaki ilişki* (Yüksek lisans tezi). Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Denizli. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez no. 226813)

Zetriuslita, Z., Nofriyandi, N., & Istikomah, E. (2020). The effect of geogebra-assisted direct ınstruction on students'self-efficacy and self-regulation. *Infinity Journal*, *9*(1), 41-48. doi: 10.22460/infinity.v9i1.p41-48

Zetriuslita, N., & Istikomah, E. (2021). The increasing self-efficacy and self-regulated through geogebra based teaching reviewed from initial mathematical ability level. *International Journal of Instruction*, *14*(1), 587-598. doi: 10.29333/iji.2021.14135a

Zimmerman, B.J. (2000). Self-efficacy: An essential motive to learn. *Contemporary Educational Psychology*, *25*(1), 82-91. doi: 10.1006/ceps.1999.1016

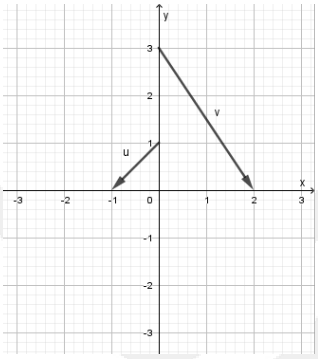
EKLER

EK 1. Lineer Cebir Performans Testi

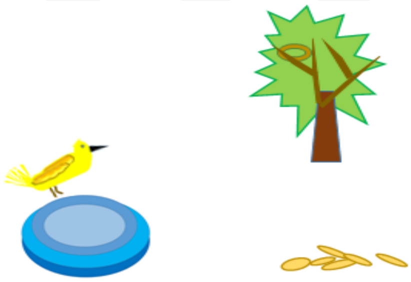
1) $A = (2,1,4)$ ve $B = (-10,6,3)$ olmak üzere $\overrightarrow{AB}$ vektörünün bileşenlerini bulunuz

2) $A = (2,1), B = (3,2)$, $C = (4,-1)$ ve $D = (3,0)$ olmak üzere $5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ vektörünü bulunuz.

3)



$3\vec{u}-\vec{v}=?$



4)

Şekildeki kuş doğrusal hareketle havuzun $(1,1,3)$ noktasındaki suyu içtikten sonra yerde bulunan $(1,5,0)$ noktasındaki yemi alıp ağaçtaki $(1,8,4)$ noktasındaki yavrusuna götürmüştür. Buna göre kuşun

a) aldığı yol kaç birimdir?

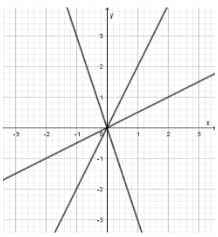
b) yer değiştirmesi kaç birimdir?

5) $\mathbb{R}^2$'de $A = \{(x,2x): x \in \mathbb{R}\}$ olsun.

a) A kümesinin ifade ettiği cebirsel yapı hakkında ne düşünüyorsunuz?

b) Bu kümenin geometrik olarak temsil ettiği kavram hakkında ne düşünüyorsunuz?

6)

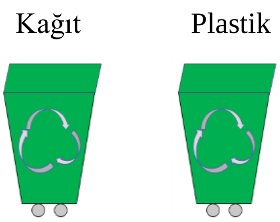


a) Şekilde verilen 3 doğruya karşılık gelen doğru denklemlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin çözüm kümesini inceleyiniz.

b) Bu çözüm kümesinin ifade ettiği cebirsel yapı hakkında ne düşünüyorsunuz?

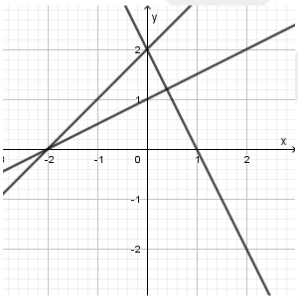
7) $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ -x+y=4 \end{array}\right\}$ lineer denklem sisteminin çözümünü inceleyiniz.

8)



Tuna ve Deren çevre bilinci kazanmış iki bireydir. Kağıt ve plastikleri farklı kutularda biriktirerek geri dönüşüme göndermektedirler. Tuna'nın attığı kağıt miktarı Dereninkinin 2 katından1 eksik, plastik miktarı ise yarısıdır. Tuna toplam 21kg, Deren ise toplam 20 kg geri dönüşüm biriktirdiğine göre kaç kg kağıt geri dönüşüme gönderilmek üzere toplanmıştır?

9)



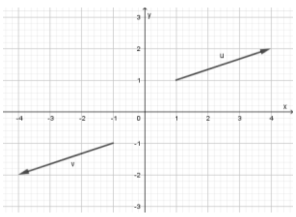
Şekilde verilen 3 doğruya karşılık gelen doğru denklemlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin çözüm kümesini inceleyiniz.

10) $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=-8 \\ x-y-2z=-8 \\ x+y+az=6 \end{array}\right\}$ lineer denklem sisteminin $\mathbb{R}^3$'te tek bir çözümünün olması için a'nın alabileceği değerleri bulunuz.

11) $(1,2)$ vektörünün x eksenine göre simetrisi alınıp orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle elde edilecek vektörü bulunuz.

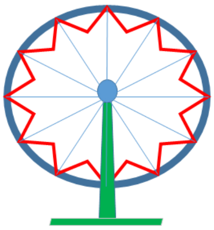
12) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{u}=\vec{v}$ eşitliği sağlanıyorsa $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı kaç derecedir?

13)



$\vec{u}$ vektörünü $\vec{v}$ vektörüne dönüştürmek için hangi dönüşüm(dönüşümler) uygulanmalıdır? Açıklayınız.

14)

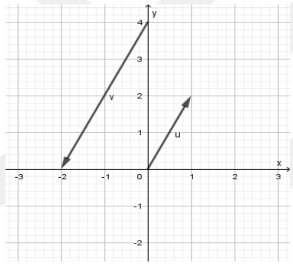


K

Şekilde eşit aralıklarla yerleştirilmiş 12 adet kabini bulunan dönme dolap saat yönünde dönerek hareket etmektedir ve dönme dolabın merkezindeki nokta orijin olarak alınmaktadır. Müşteriler dönme dolaba, sadece **K** konumundaki kabinlerden binebilmektedir. Dönme dolaba ilk olarak lunaparka eğlenmek için gelen 3 arkadaştan Deniz binmiştir. Deniz'in bindiği kabin $(10, 10\sqrt{3})$ noktasına geldiğinde ise dolaba Berna binmiştir. Dolap 60° daha döndükten sonra Berna, orijine göre simetrisinde Eren'in olduğunu fark etmiştir. Dolap o anda arıza yapmıştır. Dolap arıza yaptığında Deniz'in, Berna'nın ve Eren'in bulundukları noktaların koordinatlarını belirleyiniz. Deniz'in ve Berna'nın konumlarını simetri dönüşümüne göre inceleyiniz.

15) $V = \{(1,2),(1,3)\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

16)



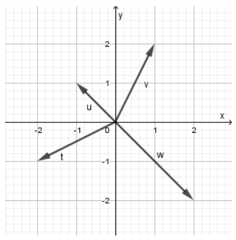
$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını inceleyiniz.

17) $V = \{(1,2,3),(2,3,4),(3,6,a)\}$ kümesinin lineer bağımlı olması için a kaç olmalıdır? İnceleyiniz.

18) $V = \{(1,2),(2,a)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$'yi geriyorsa a hangi değeri (değerleri) alamaz? Açıklayınız.

19) $\mathbb{R}^3$'te $(2,3,4)$ vektörünün gerdiği (ürettiği) kümeyi yazınız. Bu kümenin temsil ettiği geometrik kavram hakkında ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

20)

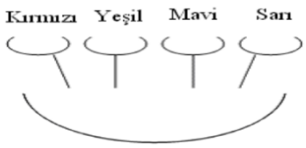


a) $\mathbb{R}^2$'deki $(3,2)$ vektörü şekilde verilen hangi vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilir mi? Açıklayınız.

b) $(3,2) = m(1,-3) + n(-2,6)$eşitliğini sağlayacak $m, n \epsilon \mathbb{R}$ değerleri var mıdır?

c) a ve b şıklarında verdiğiniz cevapları birlikte yorumlayınız.

21)



Renkleri karıştıran bir makinenin ana kabında, 4 farklı rengin bulunduğu küçük tüplerden gelen sıvı haldeki renklerin karıştırılmasıyla yeni renkler elde edilmektedir.

(Fischer, 2005)

Bu durumun vektör uzayı oluşturup oluşturamayacağını inceleyiniz.

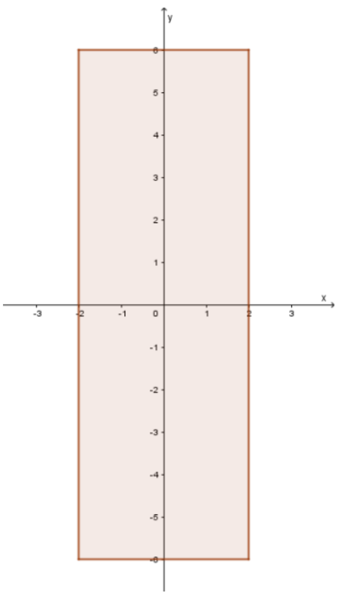
22) a) $V = \{(-1,1),(1,3)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayının bir bazı mıdır?

b) $V = \{(2,3)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayının bir bazı mıdır?

23) a) $\mathbb{R}^3$ uzayı için baz vektörlerinden oluşan bir küme yazınız.

b) $\mathbb{R}^3$ uzayının boyutunu belirleyiniz. Nedenini açıklayınız.

24)



Boyama yarışması düzenlenmiştir. Bu yarışmada boyanabilecek noktalar yandaki dikdörtgensel bölge ile sınırlandırılmıştır. Yarışmada en çok noktayı boyayan kişi kazanacaktır. Ancak yarışmacı bir takım kurallara uymak zorundadır. Yarışmacının ilk olarak yapması gereken içinde vektörlerin koordinatlarının yazıldığı kartlardan birini çekmektir. Bu kartlardan birini çeken kişi kartta yazan vektör ya da vektörlerin lineer bileşimlerini boyayabilecektir. Ayşe, Ali ve Fatma arasında yapılan yarışmada Ayşe $(-1,2)$ ve $(1,-2)$ vektörlerini, Ali $(1,0)$ ve $(0,1)$ vektörlerini, Fatma ise $(1,3)$ vektörünü çekmiştir.

Buna göre;

a) Ayşe dikdörtgensel bölge dışına çıkmamak şartıyla boyama işlemini tamamladığında nasıl bir şekil elde eder?
b) Ali dikdörtgensel bölge dışına çıkmamak şartıyla boyama işlemini tamamladığında nasıl bir şekil elde eder?
c) Fatma dikdörtgensel bölge dışına çıkmamak şartıyla boyama işlemini tamamladığında nasıl bir şekil elde eder?
d) $(-2, -4)$ noktasını kim veya kimler boyamıştır?
e) Dikdörtgensel bölge üzerinde ve içindeki tüm noktaları boyamak için çekilen vektörler nasıl olmalıdır? Açıklayınız.
f) Dikdörtgensel bölge üzerinde ve içindeki tüm noktaları boyamak için en az kaç tane vektöre ihtiyaç vardır?
g) Ayşe'nin, Ali'nin ve Fatma'nın çektikleri vektörlerden hangileri $\mathbb{R}^2$ uzayının bir bazı olur? İnceleyiniz.

EK 2. Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği

	Her Zaman	Çoğu Zaman	Bazen	Ender Olarak	Hiçbir Zaman
1. Matematiği günlük yaşamımda etkin olarak kullanabildiğimi düşünüyorum.					
2. Günümü/zamanımı planlarken matematiksel düşünürüm.					
3. Matematiğin benim için uygun bir uğraş olmadığını düşünüyorum.					
4. Matematikte problem çözme konusunda kendimi yeterli hissediyorum.					
5. Yeterince uğraşırsam her türlü matematik problemini çözebilirim.					
6. Problem çözerken yanlış adımlar atıyorum duygusu taşırım.					
7. Problem çözerken beklenmedik bir durumla karşılaştığımda telaşa kapılırım.					
8. Matematiksel yapılar ve teoremler içinde dolaşıp yeni küçük keşifler yapabilirim.					
9. Matematikte yeni bir durumla karşılaştığımda nasıl davranmam gerektiğini bilirim.					
10. Matematiğe çevremdekiler kadar hakim olmanın benim için imkansız olduğuna inanırım.					
11. Problem çözmekle geçirdiğim zamanların büyük bölümünü kayıp olarak görüyorum.					
12. Matematik çalışırken kendime olan güvenimin azaldığını fark ediyorum.					
13. Matematikle ilgili sorunlarında çevremdekilere kolaylıkla yardım edebilirim.					
14. Yaşam içindeki her türlü probleme matematiksel yaklaşımla çözüm önerileri getirebilirim.					

EK 3. Kendini Değerlendirme Formu

Aşağıdaki ifadelerde probleme dayalı öğretim sürecinde modül … (1, 2 ya da 3) boyunca siz öğretmen adaylarının gelişim sağlayabileceği bir takım beceriler yer almaktadır. Bu ifadeleri dikkatlice okuyarak, sizde gerçekleştiğini düşündüğünüz gelişimin derecesini ilgili sütunun altına işaretleyiniz.

Öğretmen adayının Adı: Puanı:

	Yeterli değil	Az yeterli	Orta düzeyde yeterli	Yeterli	Oldukça yeterli
1. Oturumlara hazırlıklı gelme					
2. Problemi tanımlama					
3. Problemin çözümüne ilişkin hipotez oluşturma					
4. Çözüm sürecine ilişkin eylem planı yapma					
5. Problem çözümü için ihtiyaç duyulan bilgileri kaynaklardan araştırma					
6. Elde edilen bilgilerle hipotez arasında bağ kurma					
7. Çözüm sürecine ilişkin oluşturulan hipotezleri deneme					
8. Elde ettiği sonuçları bir araya getirme					
9. Grup üyeleri ile iletişim kurma					
10. Grup üyeleri ile işbirliği ve uyum içinde çalışma					
11. Gruplar arasında iletişim kurma					
12. Gruplar arasında bilgilerini paylaşma ve savunma					
13. Oturum öncesi belirlenen kurallara uyma					
14. Süreçte zamanı verimli kullanma					
15. Probleme ilişkin elde ettiği çözümü savunma					
16. Elde ettiği bilgilerle ön bilgilerini ilişkilendirme					

EK 4. Eğitim Yönlendiricisini Değerlendirme Formu

Aşağıdaki ifadelerde modül … (1, 2 ya da 3) boyunca öğretim sürecine rehberlik eden eğitim yönlendiricisinin probleme dayalı öğretim sürecinde siz öğretmen adaylarının bir takım becerilerinin gelişimine ilişkin sağlayabileceği katkılar yer almaktadır. Bu ifadeleri dikkatlice okuyarak, eğitim yönlendiricisinin sağladığını düşündüğünüz katkıların derecesini ilgili sütunun altına işaretleyiniz.

	Yeterli değil	Az yeterli	Orta düzeyde yeterli	Yeterli	Oldukça yeterli
1. Öğretmen adaylarının oturuma hazırlıklı gelmelerini sağlama					
2. Öğretmen adaylarının problemi tanımlamalarına yardımcı olma					
3. Öğretmen adaylarının ön bilgilerini hatırlamalarına yardımcı olma					
4. Öğretmen adaylarının eksik bilgilerinin belirlenmesine yardımcı olması					
5. Bilgiye ulaşmada öğretmen adaylarına rehberlik etmes					
6. Elde edilen bilgilerle hipotez arasında bağ kurmalarına yardımcı olma					
7. Çözüm sürecine ilişkin oluşturulan hipotezleri denemelerine rehberlik etme					
8. Elde ettiği sonuçları bir araya getirmelerine yardımcı olma					
9. Grup kurallarını oluşturmalarını sağlama					
10. Grup üyelerinin iletişim kurmalarını ve bilgi paylaşımını sağlama					
11. Öğretim sürecinde güvenli ortam oluşturma					
12. Öğretmen adaylarına geri bildirimde bulunma					
13. Probleme ilişkin çözümün sunulmasını organize etme					
14. Probleme ilişkin çözümün tamamlanmasına yardımcı olma					

Puan:

EK 5. Öğretmen Adayını Değerlendirme Formu

Aşağıdaki ifadelerde probleme dayalı öğretim sürecinde modül … (1, 2 ya da 3) boyunca katılımcı öğretmen adaylarının gelişim sağlayabileceği bir takım beceriler yer almaktadır. Bu ifadeleri dikkatlice okuyarak, öğretmen adayının her birine ilişkin gerçekleştiğini düşündüğünüz gelişimin derecesini ilgili sütunun altına işaretleyiniz.

Öğretmen adayının Adı: Puanı:

	Yeterli değil	Az yeterli	Orta düzeyde yeterli	Yeterli	Oldukça yeterli
1. Oturuma hazırlıklı gelme					
2. Problemi tanımlama					
3. Problemin çözümüne ilişkin hipotez oluşturma					
4. Çözüm sürecine ilişkin eylem planı yapma					
5. Problem çözümü için ihtiyaç duyulan bilgileri kaynaklardan araştırma					
6. Elde edilen bilgilerle hipotez arasında bağ kurma					
7. Çözüm sürecine ilişkin oluşturulan hipotezleri deneme					
8. Elde ettiği sonuçları bir araya getirme					
9. Grup üyeleri ile iletişim kurma					
10. Grup üyeleri ile işbirliği ve uyum içinde çalışma					
11. Gruplar arasında iletişim kurma					
12. Gruplar arasında bilgilerini paylaşma ve savunma					
13. Oturum öncesi belirlenen kurallara uyma					
14. Süreçte zamanı verimli kullanma					
15. Probleme ilişkin elde ettiği çözümü savunma					
16. Elde ettiği bilgilerle ön bilgilerini ilişkilendirme					

EK 6. Modüller

Modül 1: **Acemi Mühendis Ne Yapacak Kiiii…**

1. OTURUM-1. BÖLÜM

Mühendislik fakültesinde okuyan Ali CANKURTARAN, balıkçılıkla uğraştığı için küçük bir sahil kasabasında yaşayan ailesinin yanına tatile gelmiştir. Sınav dönemini henüz atlatan Ali ailesiyle birlikte televizyonda yayınlanan bir belgeseli izlemektedir. Belgeselin konusu karıncaların farklı bir türü olan çöl karıncalarıdır. Belgesel çöl karıncaların ulaşımı sağlama biçimlerinden bahsetmektedir. Konu fakültede aldığı derslerden dolayı en çokta Ali'nin ilgisini çekmiştir. Belgeselde simülasyonlardan da yararlanılmıştır. Simülasyonda çöl karıncalarından bir tanesinin $(0,0)$ noktasındaki yuvasından çıktıktan sonra doğrusal hareketle aşağıdaki yolları izleyerek yuvaya götürmek üzere besin topladığı gösterilmektedir. Ayrıca çöl karıncasının;

kuzey yönünde 3 birim,

kuzeydoğu yönünde $5\sqrt{2}$ birim,

güneydoğu yönünde $3\sqrt{2}$ birim,

güneybatı yönünde $4\sqrt{2}$ birim

güneydoğu yönünde $2\sqrt{2}$ birim,

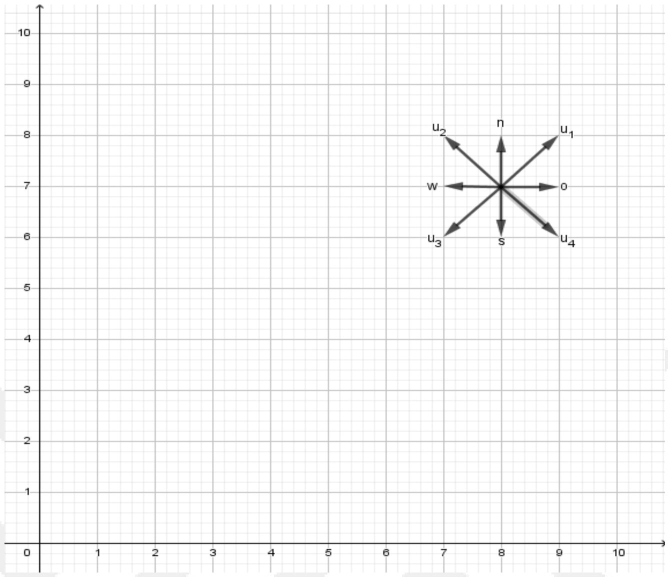
ve

kuzeydoğu yönünde $6\sqrt{2}$ birim

yol aldıktan sonra geldiği noktada 10.000 adıma ulaştığından bahsedilmektedir. Çöl karıncası şimdi ne yapacak? İşte tamda belgeselin en heyecanlı bölümünde elektrikler kesilmiştir. Ancak Ali belgeselin sonunu merak etmektedir. Bunun için de Lineer cebir dersinde aldığı bilgilerden yararlanacaktır. Ancak merakını gidermek için canlıların özellikleri ile ilgili eksik olan bilgilerini tamamlaması gerekmektedir.

1. Sorun nedir?
2. Çöl karıncalarını diğer karıncalardan ayıran özellikler neler olabilir?
3. Çöl karıncası yiyecek topladıktan sonra yuvasına dönmek için nasıl bir yol izleyebilir?

4. Size göre Ali, aşağıda verilen $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{o}$, $\overrightarrow{u_1}$ $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_4}$ vektörlerini kullanarak karıncanın soruda verilen doğrultularda hareket edip 10.000 adım attıktan sonra bulunduğu konumu verecek bir modeli nasıl oluşturabilir?



1.OTURUM-2. BÖLÜM

Bir süre sonra kasabada fırtına çıktığından dolayı elektrikler kesildiği haberini alan Ali CANKURTARAN babasıyla birlikte kayıklarını kontrol etmek için iskeleye vardığında fırtına sonucunda tüm kayıkların direksiyonlarının zarar gördüğünü tespit etmiştir. Bu durum ise kayıkların tek bir doğrultuda sabit hızla hareket etmelerine neden olmuştur. Ancak maddi hasardan çok daha önemli bir sıkıntı vardır. Kasabalı fırtına sırasında ayağına demir düşen bir balıkçının getirildiği hastanede tedavi gördüğü esnada acil olarak X ilacına ihtiyaç olduğu halde ilacın bittiği haberini almıştır. Vakit kaybetmeden en kısa sürede helikopter ile ilacı temin etmek için en yakın şehirden yardım istenmiştir. Ancak bir sorun vardır. İskele ve çevresinde hortum olduğu için iskeleye yaklaşamayan helikopter ilacı adaya bırakmak zorunda kalmıştır. Zamanla yarışıldığı düşünülürse en kısa sürede adaya ulaşmak gerekmektedir. Kayıkların birbirine bağlanarak taşınabilmesini sağlamak üzere ip bulunduğundan, gerekirse birden fazla kayıkta seçilebilmektedir. Yeter ki bir an önce harekete geçilsin. İskeledeki hareket noktası O başlangıç noktası olarak alınırsa adaya ilacın bırakıldığı nokta başlangıç noktasına en kısa mesafede olan $(40, 64)$ noktasıdır. İlaçların suya değmemesi gerektiğinden yüzme ihtimali kafadan çıkarılmalıdır. Bu durumda tatil için kasabaya gelen Ali'nin bir insanın hayatını kurtarmak için lineer cebir bilgilerini kullanma zamanı gelmiştir. İskelede bulunan 6 kayık O başlangıç noktasından bir dakika sonunda sırasıyla $(5, 8)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$ $(1, 3)$ ve $(2, 6)$ konumlarına ulaşabilmektedir ve bu kayıklardan her biri aynı doğrultularda, sabit hızla hareket edebilmektir.

1. Adada ilacın bulunduğu noktaya ulaşmak için nasıl bir çözüm yolu bulunabilir?

2. Adada ilacın bulunduğu noktaya ulaşmak için seçilebilecek kayıklar hangi doğrultuda giden kayıklar olabilir? Seçtiğiniz kayıklarla istenilen noktaya ulaşımı modelleyebilir misiniz?

3. (1,3) ve (2,6) doğrultusunda giden kayıkları seçerseniz adanın (40,64) noktasına direk ulaşıp ilaçları alabilir misiniz?

4. Adanın (40,64) noktasına ulaşmak için birden fazla kayık kullanma zorunluluğu var mıdır? Tek kayıkla da ulaşılabilir mi? Neden?

5. İlacı hastaneye en kısa sürede yetiştirmek için en doğru tercih hangi kayıkla ve ya kayıklarla yola çıkmak olmalıdır?

2.OTURUM- 1. BÖLÜM

Mühendislik okuyan Ali, lineer birleşim kavramına ilişkin bilgilerinden yararlanarak (5,8) vektörü doğrultusunda hareket eden kayık vasıtasıyla (40,64) noktasındaki ilacı alıp en kısa sürede ilacı hastaneye yetiştirmiştir. Ancak Ali sürekli kasabada kalamayacağından bir daha acil bir durumla karşılaşılırsa sorunun nasıl halledileceğiyle ilgili tereddütleri bulunmaktadır. Dolayısıyla, Ali helikopterin bıraktığı ilaç her zaman aynı noktaya konumlanamayacağından ihtiyaç halinde denizdeki tüm noktalara ulaşabilecek şekilde sorunun nasıl halledileceğiyle ilgili bir çözüm yolu aramaktadır. Sizce tüm noktalara ulaşmak için nasıl bir çözüm yolu bulunabilir?

1. Probleme ilişkin yeni bilgiler nelerdir?
2. Ali'nin yerinde siz olsaydınız nasıl bir çözüm yolu bulurdunuz?

Ali, kasabada bulunmadığı zamanlarda sorun yaşanmasını önlemek için noktaların tamamına ulaşımı sağlayacak kayıklar bir arada demir atacak şekilde iskeleyi bölmelere ayırarak düzenlemeyi düşünmektedir. Bu düzenleme; hem zaman kaybını azaltacak hem de Ali kasabada bulunmadığında da kasabalının işini kolaylaştıracaktır. Bu durumda, bölmelere yerleştirilmek üzere deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşabilecek hangi kayıklardan kaç tane seçilebilir?

1. Her bölmede 2 kayık olacak şekilde bir düzenleme yapılırsa, noktaların tamamına ulaşabilmek için hangi kayıklar bir arada bulunmamalıdır?
2. Düzenleme yapılırken seçilecek kayıkların sağlaması gereken şartlar neler olabilir?
3. Sizce tüm noktalara ulaşımı sağlamak için bölmelere tek kayık yerleştirilerek düzenleme yapılabilir mi?
4. Vektörlerde toplama ve skalerle çarpma işlemlerini kullanarak kayıkların sağlaması gereken şartları nasıl belirlersiniz?
5. Lineer denklem sisteminin çözümü, rank ve determinant ile lineer bağımsızlık arasında nasıl bir ilişki vardır?
6. Düzenleme yapılırken deniz yüzeyindeki noktaların tamamına ulaşılabilecek kayıkların yerleştirileceği bölmelerde kaç kayığın yer alması gerekir?
7. Düzenleme yapılırken kayık yerleştirilen bölmelerde en az kaç kayığın yer alması gerekir?

2.OTURUM- 2. BÖLÜM

İskelede fırtına sırasında tahribat olmuştur. Kayıklar kaldırma ve taşıma makineleriyle tersaneye çekilerek, iskelenin etrafının boşaltılıp bakım onarımı yapılacaktır. Ancak sürekli her fırtınadan sonra bakım onarım yapılamayacağından kalıcı bir çözüm bulunması gerekmektedir.

1. Size göre iskelede fırtına sırasında tahribat oluşmasını önlemek için nasıl önlemler alınabilir?

Yaşanacak her bir fırtına sırasında kayıkların tahribatını önlemek için iskelenin önüne dalgakran yapılması planlanmaktadır. Ancak mevsimden dolayı hala fırtına olma olasılığı kuvvetlidir. Bu yüzden önlem amaçlı olarak acil durumda kullanmak için tüm noktalara ulaşabilecek koordinatlara sahip olabildiğince az sayıda kayık ve ya kayıklar iskelede bırakılarak diğer tüm kayıklar tersaneye taşınacaktır.

1. Yeni bilgiler nelerdir?

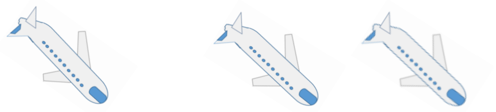
2. Size göre tek kayık bu ihtiyacı karşılayabilir mi? Neden?

3. İskelede bırakılabilecek kayıklar $(1,3)$ ve $(2,6)$ doğrultusunda giden kayıklar olabilir mi?

4. Size göre iskelede bırakılacak kayıkların sağlaması gereken şartlar neler olabilir?

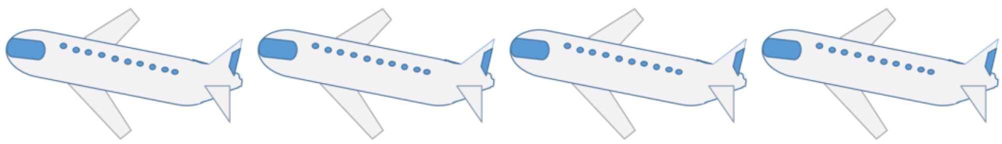
5. Size göre Ali bu sorunu nasıl halledebilir? İskelede bırakılabilecek kayıklar hangileri olabilir? Tüm ihtimalleri belirtiniz.

3.OTURUM



Ali CANKURTARAN, iskelede kalacak kayıkları seçerek iskeleyi sahil kasabası için bir gereksinim olan dalgakıran yapımına hazır duruma getirmiştir. Böylece hem üstüne düşen görevi yerine getirmenin verdiği rahatlıkla hem de tatilin bitmesiyle Ali için üniversiteyi okuduğu şehir olan Antalya'ya dönme vakti gelmiştir. Antalya ya gitmek için kasabaya en yakın şehir olan İstanbul'dan uçağa binmiştir.

İstanbuldan saat 6:00 da havalanan THY3AB uçağı saat 7:00 de Antalya Havalimanı kulesinden Antalya havaalanına inmek için izin istemektedir. Aynı zamanda pilot iniş için yolculara da bilgi vermiştir. Bilgi verdikten sonra pilotun ses sistemini açık unutmasından dolayı, kokpitteki pilotlarla kule görevlisinin konuşmaları yolcu kabinine duyulmaktadır.

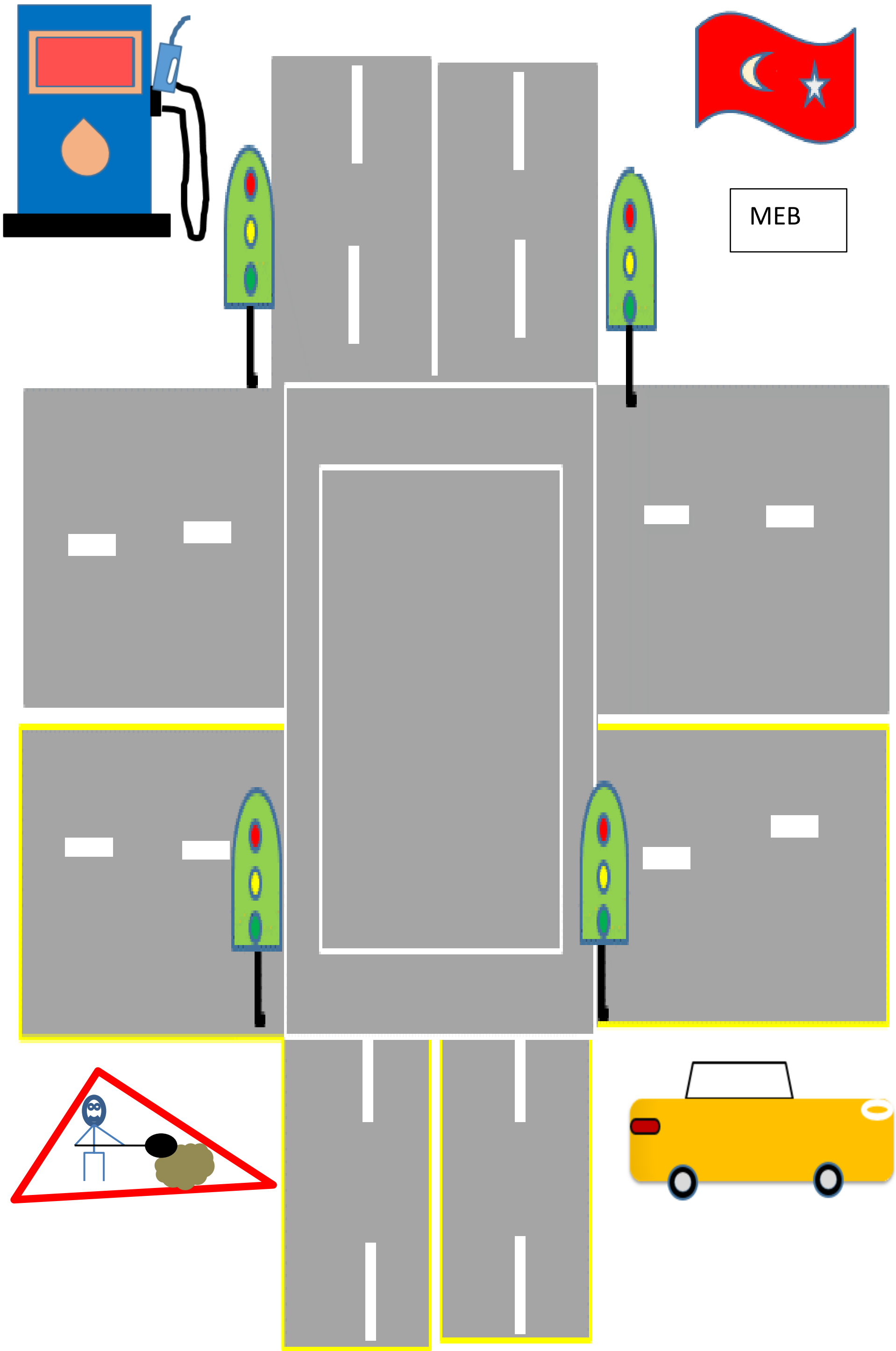


Antalya havaalanında hava trafik kontrolörü olarak görev yapan Deniz PANİKLEYEN ise havada hareket eden araçların koordinatlarını belirlemek için kullanılan radar ekranında gördüklerine anlam veremiyor. Denizin radar ekranından tespitine göre THY3AB uçağının yaklaşık olarak 37 enlem ve 32 boylamda yani (37,32) konumunda yer alan Konya semalarında olması gerekiyor. Bir hata olduğunu farkeden Deniz, radardan yaklaşık olarak (37,30) konumundaki Antalya semalarında uçmakta olduğunu tespit ettiği uçaklardan biri olan THY2QD uçağı ile irtibata geçerek bulunduğu konumun koordinatlarını söylemesini istiyor. THY2QD uçağı pilotu ise koordinatlarının yaklaşık olarak (37,42) olduğunu ve Batman semalarında bulunduğunu söylüyor.

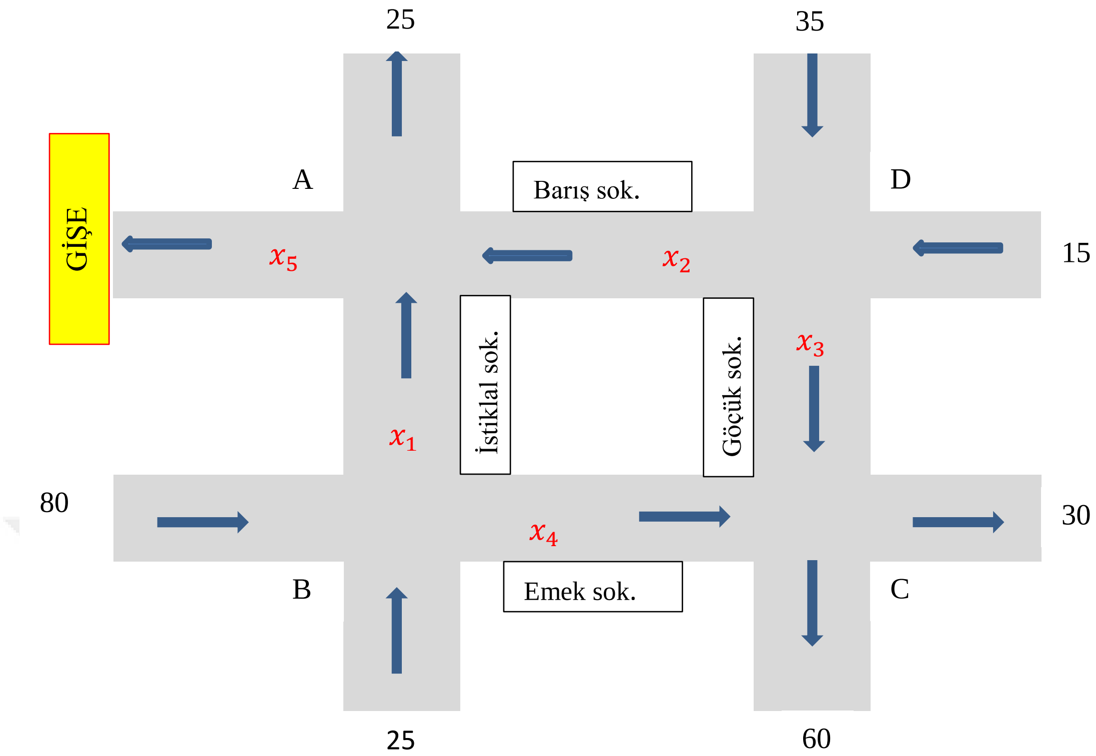
1. Tüm konuşmaları dikkatlice dinleyen Ali, bir kez daha lineer cebir bilgilerine başvurarak bu problemin neden kaynaklandığını düşünebilir?

Bilgisayarın teknik bakımının yeni yapıldığını hatırlayan Deniz ise bilgisayar teknisyeninin programlamada hata yapmış olabileceğini düşünmektedir ve hatanın önündeki bilgisayardan kaynaklandığının farkına varmaktadır. Ancak hatayı düzeltmesi için fazla vakit yoktur. Çünkü THY3AB uçağı her an yakıt sorunu yaşayabileceğinden THY3AB uçağının inişine oldukça kısa sürede izin vermesi gerekmektedir. Aynı zamanda hava trafiğinin yoğun olduğu Antalyada 2 uçak daha iniş için izin istemektedir. "Hava sahasında kaç tane uçak var? İniş için öncelik sırası nasıl olmalı?" sorularına cevap vermesi gereken Deniz'in acilen hava sahasında yer alan tüm uçakların gerçek koordinatlarını belirlemesi gerekmektedir.

2. Sizce sorun nedir? Bilgisayar (radar) neden hatalı sonuçlar vermektedir?
3. Ekranda (39,32) konumunda görünen uçağın gerçek konumu ne olabilir?
4. Gerçek konumu (38,30) olan uçağın radar ekranındaki konumu ne olabilir?
5. Bilgisayar ekranındaki tüm uçakların gerçek konumları nasıl bulunabilir? Modelleyiniz.


MEB

1.OTURUM



Verilen trafik ağı modeli büyük şehirde bir bölgenin trafik akışını temsil etmektedir. Modelde bu bölgede trafiğin en yoğun olduğu 17:00-18:00 saatleri arasında elde edilen veriler görülmektedir. Caddelerde trafik tek yönlü işlemektedir ve oklar trafik akışının yönünü göstermektedir. Ayrıca trafik akışları olarak adlandırılan, caddeden dakikada geçen araç sayısı bir değişken veya bir sayı ile ifade edilmektedir. Belediye, bölgedeki trafik yoğunluğunu kontrol altına almak için bir düzenleme yapmak istemektedir. Bunun için trafik planlamacısı Mehmet DÜZENLİ'yi görevlendirmiştir. Mehmet DÜZENLİ'nin aklına birtakım çözüm önerileri gelsede belediye yönetiminin karşısına verilerle çıkmak istemektedir. Bunun içinde öncelikle her sokaktaki trafik akışını hesaplaması gerektiğini farkeden Mehmet için üniversitede aldığı teorik bilgiyi uygulama vakti gelmiştir.

Mehmet, trafiği hareket halinde tutmak için göz önüne alınması gereken;

1) Bir kesişme noktasına (kavşağa) gelen toplam akış miktarı çıkan toplam akış miktarına eşittir.

2) Ağa gelen toplam akış miktarı ağdan çıkan toplam akış miktarına eşittir. Ayrıca her kavşak için giren akış miktarı çıkan akış miktarına eşitlenmelidir.

3)Tek yönlü caddelerde zıt yönden akış olmadığından, bütün değerler negatif olmayacak şekilde belirlenmelidir.

biçimindeki temel varsayımları kullanarak trafik ağı modelinde trafik akışları olarak ifade edilen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 değerlerini bulmak istemektedir. Bu durumda

1) Sorun nedir?
2) Mehmet, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 değerlerini bulmak için lineer cebir bilgisini nasıl kullanabilir?
3) *DA*'nın doğrultusunda yer alan gişeden dakikada kaç tane araç geçebilir?
4) Trafiği hareket halinde tutmak şartıyla *B*'den *A*' ya dakikada gidebilecek maksimum ve minimum araç sayısı kaç olabilir?
5) Trafik ışıkları *B*' den *C*'ye dakikada 60 araç gidecek şekilde ayarlanırsa trafik ağının diğer sokaklardaki trafik akışı nasıl olabilir?
6) Hangi yol ve ya yolların tek tek kapatılması trafik tıkanıklığına neden olamaz?

2.OTURUM

Mehmet DÜZENLİ bölgeyi incelemeye gittiğinde caddelerin etrafındaki alanın inşa edilmemiş boş arazi olduğunu görmüş ve bölgenin ihtiyacına göre birtakım okul, hastane, petrol vb. sosyal yapıların bu boş araziye inşa edilebileceğini düşünmüştür. İncelemelere devam eden Mehmet'in Göçük sokakta çukur ve tümsekler farketmesi üzerine görevlendirilen ve aynı bölgede inceleme yapan jeolojik mühendisi Hakan TAŞ, önlem almak amacıyla Göçük sokağın trafiğe kapatılması gerektiği yönündeki raporunu belediye yönetimine bildirmiştir. Böylece bu sokak kalıcı olarak trafiğe kapatılmıştır. Bu durumda

1) Düzenlemeye yön verebilecek yeni bilgiler nelerdir?
2) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 değerleri nasıl değişir?
3) Yayaların güvenliği açısından yaya üst geçidinin yapılması için öncelikle tercih edilmesi gereken yol neresi olabilir?
4) Yüksek kazanç elde etme ihtimalini artırmak için Petrol ofisi yapılması en uygun alan neresi olabilir?

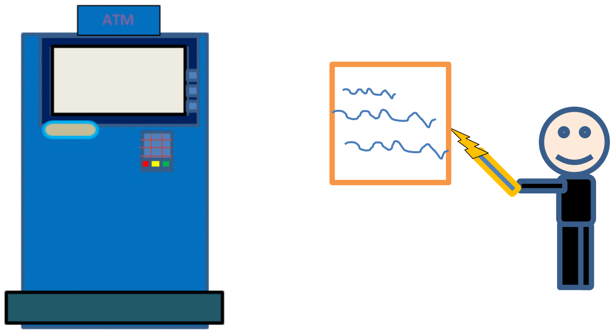
5) Öğrencilerin gürültünün az olduğu sakin bir ortamda ders dinleyebileceği bir okul yapılması için en uygun alan neresi olabilir?

6) Yol genişletme çalışması ile trafik yoğunluğunu azaltma çalışmasına gidilse hangi caddeden yol genişletme işlemine başlanırsa daha etkili bir çalışma olabilir?

7) Belediye yönetimi kesintisiz trafik akışı sağlamak için size yeni bir yol planı çizme şansı verse nasıl bir trafik akış şeması modellerdiniz?

MODÜL 3

ŞİFRELER NASIL ÇÖZÜLEBİLİR Kiii



Para, değerli eşya taşıma ve ATM hizmetlerini veren bir güvenlik şirketi gerçekleşebilecek tehdit unsurlarını önlemek için güvenlik önlemlerini artırmak istemektedir. Bunun için güvenlikten sorumlu müdür Murat GARANTİCİ Kriptoloji alanından yararlanmayı uygun görmüştür. Müdür Murat GARANTİCİ taşımadan sorumlu olacak çalışanlarını seçerken de Kriptoloji alanında bilgili kişilerden tercih etmektedir. Ayrıca müdür, şirkette ajan olma ihtimaline karşı önlem olarak değerli eşyanın, hangi kurumdan teslim alınıp, hangi araçla taşınacağını sadece işlemi gerçekleştirecek kişiye bildirecektir. Bu gizlilik Kriptoloji alanından faydalanarak sağlanacaktır. Kriptolojide öncelikle alfabedeki harfler

A	B	C	Ç	D	E	F	G	Ğ	H	I	J	K
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
L	M	N	O	P	R	S	Ş	T	U	V	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

olacak şekilde sayılara dönüştürülüp daha sonra sayılar üçer üçer gruplara ayrılmaktadır. Bu grupların her birine $L(x) = Ax$ dönüşümü uygulanarak gönderilmek istenen mesaj şifrelenmektedir. Bu dönüşüm uygulandıktan sonra elde edilen şifredeki sayıların sayısı ile gönderilmek istenen mesajdaki harf sayısı birbirine eşittir. Dönüşümde kullanılan A, her güvenlik görevlisine farklı tanımlanan anahtar matristir. Ayrıca müdür Murat, mesajları

Değerli Eşyanın Teslim Alınacağı Kurum-Kullanılacak Araç sıralamasına uygun olarak göndermektedir. Tüm bu işlemleri uygulayan Müdür Murat, haftanın ilk şifresini

86-64-6-78-51-11-90-53-22

olarak göndermiştir.

1) Sizce şifre nasıl çözülebilir?

2) Değerli eşyayı taşıma işlemini gerçekleştirecek olan güvenlik görevlisi Hakan'a verilen anahtar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ise sizce Hakan şifreyi nasıl çözebilir?

3) Müdür Murat GARANTİCİ, zırhlı araçla taşıma işlemini gerçekleştirmesi için Hakan'a göndermek üzere '$ZIRHLI$'mesajını nasıl şifreleyebilir?

4) Burada tanımlanan harfleri sayılara dönüştürme ve sayıları anahtar matrisle sayılara dönüştürme işlemi fonksiyon olabilir mi?

Güvenlik görevlisi olarak çalışanlardan biri olan Esra, Kriptolojiye iyice merak salmış bu alanda kullanılan $L(x) = Ax$ dönüşümünün ve müdürün güvenlik görevlilerine tanımladığı A anahtar matrisinin özelliklerini merak etmektedir.

1) Esra bu merakını nasıl giderebilir?

2) Kriptolojide kullanılan anahtar matrisin sağlaması gereken şartlar neler olabilir? Hangi matris türleri anahtar matris olarak alınabilir?

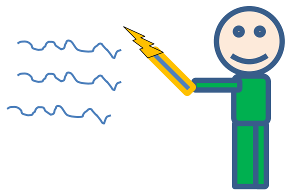
3) Kriptolojide kullanılan $L(x) = Ax$ dönüşümü toplama ve skalerle çarpma işlemlerini koruyor olabilir mi?

4) Kriptolojide kullanılan $L(x) = Ax$ dönüşümü lineerlik şartını koruyor olabilir mi? Lineerlik (doğrusallık) şartını sağlayan dönüşümlere örnekler verebilir misiniz?

5) Müdür siz olsaydınız şifreleme yapabilmek için anahtar matrisi belirleyerek bir değerli eşya taşıma olayını nasıl modellerdiniz.

EK 7. Çalışma Yaprağı 3

Çalışma grubu: PDÖ uygulanan grup



Kavram: Lineer bağımlılık/bağımsızlık

1) $\{(1,1),(2,1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$'de lineer bağımlı olup olmadığını (lineer bağımlılık tanımından yararlanarak) inceleyiniz.

2) $\{(1,2),(2,3)\}, \{(0,1),(3,4)\}, \{(1,2),(2,4)\}$ ve $\{(1,1),(3,3)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$'de lineer bağımlı olup olmadığını (lineer bağımlılık tanımından yararlanarak) inceleyiniz.

3) Vektörlerin bileşenleri ile lineer bağımlılığı/bağımsızlığı arasındaki ilişki nasıldır?

4) Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) bir robot geliştirme yarışması düzenlemektedir. Robotun hareket edebilmek üzere enerji depoladığı nokta başlangıç noktası olarak kabul edilmektedir. Geliştirilecek robottan zeminde hareket ederek, bir fabrikanın birimlerinin tamamına paket taşıma işlemini gerçekleştirmesi beklenmektedir. Bunun için ulaşabileceği noktalara yön vermek üzere vektör gruplarının robotun beynine yüklenmesi gerekmektedir. İlk turda yarışmanın katılımcılarına, "robotun beynine yüklenmek üzere hangi vektör gruplarını seçersiniz" sorusu sorulmuştur. Katılımcıların seçtikleri vektör kümeleri aşağıdaki gibidir.

K_1 (Katılımcı 1)→ $\{(1,2),(1,3),(1,1)\}$,

$K_2 \rightarrow \{(1,1),(2,2),(3,4)\}$

$K_3 \rightarrow \{(1,3),(2,6),(3,9)\}$

$K_4 \rightarrow \{(1,3),(2,3)\}$

$K_5 \rightarrow \{(1,2),(2,4)\}$

$K_6 \rightarrow \{(1,2),(2,3),(3,5)\}$

- Buna göre sizce hangi katılımcılar ilk turu geçerek yarışmaya devam etmeye hak kazanmıştır?
- İlk turda elenen yarışmacıların geliştirdiği robotlar hangi doğrultudaki noktalara ulaşabilir?

İkinci turda katılımcılara seçtikleri vektör kümelerinin daha sade hale getirilerek az sayıda vektörle zemindeki noktaların tamamına ulaşılıp ulaşılamayacağı sorulmuştur. Bu soruyu da doğru cevaplayan katılımcılar finale kalmıştır.

- K_2’nin yerinde siz olsaydınız nasıl cevap verirdiniz?
- K_6’nın yerinde siz olsaydınız nasıl cevap verirdiniz?

Finalde yarışmacılardan zemindeki noktaların yanı sıra havadaki noktaların tamamına ulaşabilecek bir robot geliştirmeleri istenmiş ve aşağıdaki vektör kümelerinden hangilerinin seçiminin doğru bir yol olacağı sorulmuştur.

$V_1 = \{(1,1,3),(2,3,4),(3,4,7)\}$

$V_2 = \{(1,1,2),(1,2,3),(-2,3,4),(3,4,5)\}$

$V_3 = \{(0,1,2),(2,4,6),(3,4,5),(1,1,1)\}$

Finale kalan 3 yarışmacıdan (K_1, K_2 ve K_6);

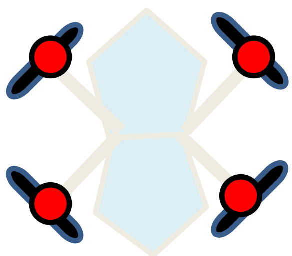
$K_1 \rightarrow V_1, V_2$ ve V_3

$K_2 \rightarrow V_2$ ve V_3

$K_1 \rightarrow V_2$

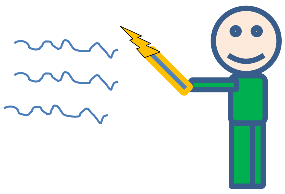
vektör kümeleri ile zemindeki ve havadaki noktaların tamamına ulaşabilecek bir robot geliştirilebileceğini ifade etmiştir.

- Sizce yarışmayı hangi katılımcı kazanmıştır?
- Diğer katılımcıların yarışmayı kazanamamasının nedenlerini nasıl açıklarsınız?
- Siz olsaydınız yalnızca zeminde hareket etmek üzere geliştirdiğiniz robotun beynine yüklenmek üzere en az sayıda vektörün seçiminde hangi özellikleri dikkate alırdınız?
- Siz olsaydınız zeminde ve havada hareket etmek üzere geliştirdiğiniz robotun beynine yüklenmek üzere en az sayıda vektörün seçiminde hangi özellikleri dikkate alırdınız?



EK 8. Çalışma Yaprağı 3

Çalışma grubu: ÇTTÖ uygulanan grup



Kavram: Lineer bağımlılık/bağımsızlık

1) $\{(1,1),(2,1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$'de lineer bağımlı olup olmadığını (lineer bağımlılık tanımından yararlanarak) inceleyiniz.
2) $\{(1,2),(2,3)\}, \{(0,1),(3,4)\}, \{(1,2),(2,4)\}$ ve $\{(1,1),(3,3)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$'de lineer bağımlı olup olmadığını (lineer bağımlılık tanımından yararlanarak) inceleyiniz.

3) Vektörlerin bileşenleri ile lineer bağımlılık/bağımsızlığı arasındaki ilişki nasıldır?

4) $\mathbb{R}^2$'de alınan u ve v vektörlerine ilişkin lineer bağımlılık/bağımsızlığın tanımında geçen $au + bv = 0$ ifadesini yorumlayınız.
5) Bilgisayarınızda mevcut olan $\mathbb{R}^2$'de 2 vektöre ilişkin materyalden yararlanarak;

1. Adım: Sürgüler yardımıyla birbirinin skaler katı olmayan iki vektör seçiniz.
2. Adım: Satır vektörleri seçtiğiniz vektörlerden oluşan matrisin rankını ve determinantını cebir penceresinden yararlanarak inceleyiniz.
3. Adım: Lineer bağımlılık/bağımsızlığın tanımında geçen $au + bv = 0$ eşitliğine karşılık gelen lineer denklem sisteminin çözüm kümesini cebir penceresinden yararlanarak inceleyiniz.
4. Adım: $\mathbb{R}^2$'de 2 lineer bağımsız vektöre ilişkin örnekler veriniz.
5. Adım: Sürgüler yardımıyla birbirinin skaler katı olan iki vektör seçiniz.
6. Adım: Satır vektörleri seçtiğiniz vektörlerden oluşan matrisin rankını ve determinantını cebir penceresinden yararlanarak inceleyiniz.
7. Adım: Lineer bağımlılığın/bağımsızlığın tanımında geçen $au + bv = 0$ eşitliğine karşılık gelen lineer denklem sisteminin çözüm kümesini cebir penceresinden yararlanarak inceleyiniz.
8. Adım: $\mathbb{R}^2$'de 2 lineer bağımlı vektöre ilişkin örnekler veriniz.
9. Adım: Lineer bağımlılık/bağımsızlık, rank ve determinant arasında nasıl bir ilişki vardır?

6) Bilgisayarınızda mevcut olan $\mathbb{R}^2$'de 3 vektöre ilişkin materyal üzerindeki cebir penceresinde bulunan lineer denklem sisteminin çözüm kümesinden yararlanarak

$\{(1,2),(1,3),(1,1)\},\{(1,1),(2,2),(3,4)\}$ ve $\{(1,3),(2,6),(3,9)\}$ kümelerinin $\mathbb{R}^2$'de lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Adım: $\mathbb{R}^2$'de 3 vektörden oluşan vektör kümeleri alarak lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

2. Adım: $\mathbb{R}^2$'de 4 vektörden oluşan vektör kümeleri alarak lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

3. Adım: $\mathbb{R}^2$'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı kaçtır?

7) Bilgisayarınızda mevcut olan $\mathbb{R}^3$'te 3 vektöre ilişkin materyal üzerindeki cebir penceresinde bulunan lineer denklem sisteminin çözüm kümesinden yararlanarak $\{(1,1,3),(2,3,4),(3,4,7)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$'te lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz. Bu vektörlerden herhangi biri diğerlerinin lineer toplamı olarak yazılabilir mi?

8) Bilgisayarınızda mevcut olan $\mathbb{R}^3$'te 4 vektöre ilişkin materyal üzerindeki cebir penceresinde bulunan lineer denklem sisteminin çözüm kümesinden yararlanarak $\{(1,1,2),(1,2,3),(-2,3,4),(3,4,5)\}$ ve $\{(0,1,2),(2,4,6),(3,4,5),(1,1,1)\}$ kümelerinin $\mathbb{R}^3$'te lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Adım: $\mathbb{R}^3$'te 3 vektörden oluşan vektör kümeleri alarak lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

2. Adım: $\mathbb{R}^3$'te 4 vektörden oluşan vektör kümeleri alarak lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

3. Adım: $\mathbb{R}^3$'te en fazla lineer bağımsız vektör sayısı kaçtır?

9) Bilgisayarınızda mevcut olan materyallerin tamamından elde ettiğiniz en fazla lineer bağımsız vektör sayısına ilişkin çıkarımlarınızı $\mathbb{R}^n$'e genelleyebilir mizsiniz?

10) $\mathbb{R}^2$'de lineer bağımlı 2 vektöre ilişkin örnekler veriniz. $\mathbb{R}^3$'te lineer bağımlı 2 vektöre ilişkin örnekler veriniz. $\mathbb{R}^4$'te lineer bağımlı 2 vektöre ilişkin örnekler veriniz. Elde ettiğiniz çıkarımlarınızı $\mathbb{R}^n$'e genelleyebilir mizsiniz?

11) Herhangi sayıda vektörün lineer bağımlılığı için skaler kat gerek şart mıdır?

12) Herhangi 2 vektörün lineer bağımlılığı için skaler kat yeter şart mıdır?

13) Bilgisayarınızda mevcut olan lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramına ilişkin materyallerin tamamının grafik penceresinden yararlanarak;

1. Adım: $\mathbb{R}^2$'de aynı doğrultuda olan 2 vektörün lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

2. Adım: $\mathbb{R}^2$'de aynı doğrultuda olmayan 2 vektörün lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

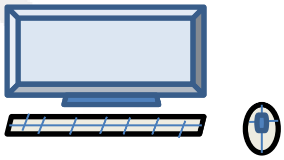
3. Adım: $\mathbb{R}^2$'de farklı doğrultudaki 3 vektörün lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

4. Adım: $\mathbb{R}^3$'te ikisi aynı biri bunlardan farklı doğrultuda 3 vektörün lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

5. Adım: $\mathbb{R}^3$'te tamamı birbirinden farklı doğrultuda aynı düzlemdeki 3 vektörün lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

6. Adım: $\mathbb{R}^3$'te tamamı birbirinden farklı doğrultuda aynı düzlemde olmayan 3 vektörün lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

7. Adım: Lineer bağımlılık/bağımsızlık kavramını geometrik olarak yorumlayınız.



EK 9. İlişkilendirme Görüşme Formu

Merhaba,

Bu görüşme lineer birleşim, germe, lineer bağımlılık/bağımsızlık, baz, boyut, koordinat, lineer denklem sistemleri, lineer dönüşüm kavramları arasındaki ilişkilendirme becerilerinizi belirlemek amacıyla yapılacaktır. Yapılacak olan bu çalışmayla öğretim üyelerine ve siz öğretmen adaylarına bir takım bilgiler sunulacaktır. Çalışmada kişisel bilgiler kesinlikle gizli tutulacaktır. İsminiz hiçbir şekilde kullanılmayacak ve değiştirilerek kullanılacaktır. Görüşmenin yaklaşık olarak 45 dakika sürmesi planlanmaktadır. İzin verirseniz, hem zamanı daha iyi kullanabilmek için hem de sorulara vereceğiniz cevapları daha ayrıntılı değerlendirmek için görüşmeyi ses kaydı ile kaydetmek istiyorum.

Atiye AYYILDIZ ALTINBAŞ
Sevgiler

Yukarıdaki açıklamaları okudum ve bu çalışmada gönüllü olarak bulunmayı kabul ediyorum.

Adı-Soyadı:

SORULAR

1. Lineer birleşim ile germe kavramları arasında nasıl bir ilişki vardır?

2.1. $\mathbb{R}^2$ 'de 0 vektöründen farklı tek vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?

2.2. $\mathbb{R}^2$ 'de 0 vektöründen farklı lineer bağımlı 2 vektörün gerebileceği ile ilgili ne söylersiniz?

2.3. $\mathbb{R}^2$ 'de 0 vektöründen farklı lineer bağımsız 2 vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?

3.1. Lineer bağımlı bir küme bir uzayı gerebilir mi? Neden?

3.2. Lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerebilir mi? Neden?

3.3. $\mathbb{R}^3$ 'te 2 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzay ile ilgili ne söyleyebilirsin?

3.4. $\mathbb{R}^3$ 'te 3 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzay ile ilgili ne söyleyebilirsin?

4.1. $\mathbb{R}^2$ 'yi 3 vektör gerebilir mi? Neden?

4.2. $\mathbb{R}^2$ 'yi 4 vektör, 5 vektör,… gerebilir mi? Neden?

4.3. $\mathbb{R}^2$ 'yi geren her küme baz olur mu? Neden açıklayınız?

4.4. Lineer bağımsızlık kavramı ile baz kavramı arasında nasıl bir ilişki vardır?

4.5. $\mathbb{R}^2$ 'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz?

4.6. $\mathbb{R}^3$ 'ün bazı kaç vektörden oluşur?

5.1. Katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımlı olması durumunda homojen lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

5.2. Katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımsız olması durumunda homojen lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

5.3. Katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımlı olması durumunda homojen olmayan lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

5.4. Katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımsız olması durumunda homojen olmayan lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

5.5. Katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda homojen lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

5.6. Katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda homojen olmayan lineer denklem sistemlerinin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

6. Baz vektörlerine lineer dönüşüm uygulanması durumunda nasıl bir sonuç elde edilebilir?

EK 10. Öğretmen Adaylarından Birinin (ÇÖ2) Görüşme Sürecine İlişkin Transkript

1) Araştırmacı: Lineer birleşim ile germe kavramları arasında nasıl bir ilişki vardır?

ÇÖ2: Lineer birleşimi, nasıl açıklayabilirim bunu ikisinin arasındaki farkı hiç hatırlamıyorum şu an.

Araştırmacı: Bu iki kavramın ne ifade ettiğini ya da tanımını söyleyebilir misin?

ÇÖ2: Germe bir uzayda bir vektörü ele aldığımızda bu vektörden yola çıkarak oluşturabildiğimiz genel bir denklem.

Araştırmacı: Lineer birleşimden biraz bahsedebilir misin?

ÇÖ2: Lineer birleşim vektörlerin toplamı, skaler katlarının toplamı herhangi vektörlerin toplamı

Araştırmacı: Lineer birleşim ile germe kavramları arasındaki ilişkiden biraz bahsedebilir misin?

ÇÖ2: Bunu bilmiyorum.

2.1. Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ 'de 0 vektöründen farklı tek vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?

ÇÖ2: Tek vektörün gerebileceği uzay, bir kere tek vektör lineer bağımsız olur. Lineer bağımsız olduğu içinde bir uzayı gerebilir.

2.2. Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ 'de 0 vektöründen farklı lineer bağımlı 2 vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?

ÇÖ2: Lineer bağımlı 2 vektör bir uzayı tek bir doğru üzerinde gerer. Mesela, 2 tane lineer bağımlı vektör alalım. $\{(1,0),(2,1)\}$ alalım bunlar lineer bağımlıdır ama bir dakika bakmam lazım.(Öğretmen adayı eline bir kalem alarak lineer bağımlılık bağımsızlığa ilişkin işlemsel algoritmaları uygulayarak katsayıların 0 olması gerektiğini elde eder ve aşağıdaki biçimde yorumlar). $\{(1,0),(2,1)\}$ lineer bağımsızdır, ilk başta yanlış anlamışım. $(1,0)$ ve $(0,0)$ lineer bağımlı vektörlerini aldığımızda bunlar bir noktada kesiştiği içinde tek bir doğruyu gerecektir.

Peki 0 vektörü haricinde lineer bağımlı 2 vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?

ÇÖ2: $\{(1,2),(2,4)\}$ lineer bağımlı olur, 2 vektör olduğunda bunlar birbirinin katı olduğundan lineer bağımlıdır.

Araştırmacı: Bu vektörler kümesinin gereceği uzay nasıldır?

ÇÖ2: Gene bir koordinat düzleminde gösterilirse zaten bu iki vektör aynı vektördür, yani tek vektördür, o yüzden tek bir doğru üzerinde uzayı gerer.

2.3. Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ 'de 0 vektöründen farklı lineer bağımsız 2 vektörün gerebileceği uzay ile ilgili ne söylersiniz?

ÇÖ2: Demin (bir önceki soruda) verdiğim örnekler buna olur. Lineer bağımsız 2 vektörün gerebileceği uzay; hımm, $\{(1,0),(2,1)\}$ alırsam bu iki vektör lineer bağımsızdır. Bu 2 vektör koordinat düzleminin tamamını tarar. Yani $\mathbb{R}^2$ uzayını tamamen tarar

3.1 Araştırmacı: Lineer bağımlı bir küme herhangi bir uzayı gerebilir mi?

ÇÖ2: Lineer bağımlı bir küme bir uzayı gerer.

Araştırmacı: Neden?

ÇÖ2: (1,2) ve (0,0) vektörlerini alırsam germe kuralını uygularsam bu iki vektörün bir uzayı gerdiğini görürüz.

Araştırmacı: Peki lineer bağımlı 2 vektörün gerdiği uzaydan bahsedebilir misin?
ÇÖ2: Lineer bağımlı olduğundan uzayın tamamını taramaz. Ya bir noktada kesişirler (orijin) ya da çakışıktırlar. Bu yüzden uzayı bir doğru üzerinde tarar. Lineer bağımlı 2 vektör bir uzayı geremez.
Araştırmacı: Bir noktada kesişme ile kastettiğin durum nasıldır? Açıklayabilir misin?
ÇÖ2: Yaa bu 2 vektör bunlar lineer bağımlı dedik. Bunlar lineer bağımlı olduğu için tüm uzayı germiyor yani birbiri ile çakışık doğrular.
Araştırmacı: 2 lineer bağımlı vektörün gerdiği uzay ile ilgili ne söyleyebilirsin?
ÇÖ2: 2 lineer bağımlı vektör tek bir doğru üzerinde gerer.
Araştırmacı: Lineer bağımlılık/bağımsızlık ile germe kavramları arasında nasıl bir ilişki vardır?

ÇÖ2: Lineer bağımsızlıkla germe arasında şöyle bir ilişki vardır. Mesela lineer bağımsız bir vektör germe şartını da sağlıyorsa baz oluşturabilir.

3.2 Araştırmacı: Lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerebilir mi? Neden?

ÇÖ2: Lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerer. Hatta lineer bağımsız bir küme bir uzayı gerince baz oluşturur.
Araştırmacı: Bu lineer bağımsız kümenin gerdiği uzaydan, oluşturduğu bazdan biraz bahsedebilir misin?($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,…)
ÇÖ2: kendinden 1 fazla olan uzayı geriyordu diye hatırlıyorum.
Araştırmacı: Nasıl?
ÇÖ2: Mesela 3 vektör $\mathbb{R}^4$ ’ü geriyor.
Araştırmacı: Peki lineer bağımsız tek vektör baz olur mu?
ÇÖ2: (1,2) alacak olursam tek vektör aldığım için ve 0 dışındaki tüm vektörler lineer bağımsız olduğu için germe işlemini uyguladığımızda gerdiğini görürüz (gerdiği uzayı buluruz).
Araştırmacı: Tek vektör nasıl bir uzayın bazıdır?
ÇÖ2: Mesela (1,2) aldım tek boyut (tek vektör) olduğu için $\mathbb{R}$’nin bazıdır.
Araştırmacı: (1,2) vektörüne tek boyutlu olarak ifade ederken nasıl düşündüğünden bahsedebilir misin?
ÇÖ2: Yok 2 boyut aslında tek değil
Araştırmacı: (1,2) vektörünün $\mathbb{R}$’nin bazı olması durumundan biraz bahsedebilir misin?
ÇÖ2: Hımm, bunu bilemiyorum tarif edemem.
Araştırmacı: (1,2) vektörüyle $\mathbb{R}$’nin nasıl üretilebileceğinden biraz bahsedebilir misin?
ÇÖ2: Kafam karıştı (bir süre bekledi) $\mathbb{R}^2$ ’yi gerebilirim sanırım çünkü 2 bileşen var.
Araştırmacı: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ya da … $\mathbb{R}^n$ haricinde uzayı nasıl tarif edersin?
ÇÖ2: Edemem galiba, $\mathbb{R}^n$ kapsamlı bir şey, hepsini kapsar.
Araştırmacı: herhangi bir düzlemin uzay olup olmayacağına ilişkin düşüncelerin neler?
ÇÖ2: Düzlemin uzay olabileceğini düşünüyorum
Araştırmacı: Herhangi bir uzaydan alınan 2 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzay ile ilgili ne söyleyebilirsin?
ÇÖ2: Lineer bağımsız iki vektörün gerdiği uzay $\mathbb{R}^2$ ’dir. $\mathbb{R}^2$ ’yi tamamen tarar.
Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ ’de 2 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzay ile ilgili ne söyleyebilirsin?
ÇÖ2: $\mathbb{R}^2$ ’nin tamamını gerer.

3.3 Araştırmacı: $\mathbb{R}^3$ ’te 2 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzay ile ilgili ne söyleyebilirsin?

ÇÖ2: (soruyu tekrarlar) yine tüm uzayı gerer

3.4 Araştırmacı: $\mathbb{R}^3$ 'te 3 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzay ile ilgili ne söyleyebilirsin?

ÇÖ2: Bunda da tüm uzayı gerer derim.

Araştırmacı: $\mathbb{R}^3$ 'te 2 ve 3 lineer bağımsız vektörün gerdiği uzaylarla ilgili farklılık olup olmadığına ilişkin düşüncelerinden bahsedebilir misin?

ÇÖ2: hımm, (bir süre bekledi) 2 tanesi (2 lineer bağımsız vektör) bir alt uzayını gerer bu (3 lineer bağımsız vektör) $\mathbb{R}^3$ 'ün tamamını gerer.

Araştırmacı: Bu derken nasıl bir durumdan bahsediyorsun?

ÇÖ2: 2 tane vektör bir alt uzayını gerer, 3 tane vektör tamamını gerer.

4.1 Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ 'yi 3 vektör gerebilir mi? Neden?

ÇÖ2: Geremez. $\mathbb{R}^2$ 'de üstü (kuvvet) 2 olduğundan 2 vektör ve daha aşağısı (az sayıda vektör) ile gerilebilir. Mesela 3 vektörün germesi için $\mathbb{R}^3$ ve daha fazlası ($\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^6$, ...) lazımdı.

Araştırmacı: Peki 3 vektörün $\mathbb{R}^2$ 'yi gerdiği durum olabilir mi?

ÇÖ2: Bu 3 vektörün ikisinin çakışık olduğunu düşünüp tek vektör olarak düşünürsek toplam 2 vektör olur $\mathbb{R}^2$ 'yi üretebiliriz ama bu konuda net bir şey söyleyemeyeceğim.

Araştırmacı: Çakışıklıkla ne söylemek istiyorsun?

ÇÖ2: Mesela 3 vektör aldım bunların ikisi aynı vektör. 2 vektör aynı yani $(1,2),(2,4)$ ve $(2,4)$ alırsam yani bu 2 vektör demek $(\{(1,2),(2,4)\})$ $\mathbb{R}^2$ 'yi üretebiliriz diye düşünüyorum.

Araştırmacı: Birbirinden farklı 3 vektör $\mathbb{R}^2$ 'yi gerebilir mi?

ÇÖ2: $\mathbb{R}^2$ 'yi geremez, 3 vektör $\mathbb{R}^3$ ve daha fazlasını ($\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^6$, ...) gerebilir.

Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ 'yi gerebilmesi için alınan vektör kümelerinin sağlaması gereken şartlardan bahsedebilir misin?

ÇÖ2: $\mathbb{R}^2$ 'yi bir ve 2 vektörle gerebiliriz.

4.2 Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ 'yi 4 vektör, 5 vektör,… gerebilir mi? Neden?

ÇÖ2: hayır hayıır geremez.

Araştırmacı: Bunun nedeni nedir?

ÇÖ2: Biraz önce söylediklerimi tekrar edebilirim aynı şekilde. Uzayın ne kadar vektörü varsa yani n kadar vektörün minimum $\mathbb{R}^n$ için alınması gerektiğini düşünüyorum. (n vektörle $\mathbb{R}^n$ ve bu uzayı kapsayan ($\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} \subset \cdots$) uzayları gerilebilir)

Araştırmacı: Germe ile baz (baz) arasında nasıl bir ilişki vardır?

ÇÖ2: Germe şartı sağlanmadığında baz olmaz.

Araştırmacı: Germe şartı baz için yeterli bir şart mıdır?

ÇÖ2: Hayır, yeterli değildir. Bununla birlikte lineer bağımsızlıkta olması gerekiyor. Lineer bağımsız ve germe bazın oluşmasını sağlar.

4.3 Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ 'yi geren her küme baz olur mu? Neden açıklayınız?

ÇÖ2: Oluşturmaz. $\mathbb{R}^2$ 'yi geren küme lineer bağımlı da olabilir.

4.4 Araştırmacı: Lineer bağımsızlık kavramı ile baz- boyut kavramı arasında nasıl bir ilişki vardır?

ÇÖ2: Lineer bağımsızlık olmazsa baz sağlanmıyor

Araştırmacı: Boyut nasıl bulunur?

ÇÖ2: Bazdaki lineer bağımsız vektör sayısına boyut denir.

4.5 Araştırmacı: $\mathbb{R}^2$ 'de en fazla lineer bağımsız vektör sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz?

ÇÖ2: 2 dir ve $\mathbb{R}^2$ 'nin boyutu 2 dir.
Araştırmacı: Peki $\mathbb{R}^2$ 'nin boyutu 2 haricinde başka değerler alabilir mi?
ÇÖ2: Olmaz.
4.6 Araştırmacı: $\mathbb{R}^3$ 'ün bazı kaç vektörden oluşur?
ÇÖ2: 3 vektörden oluşur. Standart bazları $\{(1,0,0), \dots\}$ dır.
Araştırmacı: Peki $\mathbb{R}^3$ 'ün boyutu 3 haricinde başka değerler alabilir mi?
ÇÖ2: Olmaz. $\mathbb{R}^3$ 'ün bazı 3 vektörden oluşur.
5.1 Araştırmacı: Katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımlı olması durumunda öncelikle HLDSnin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
ÇÖ2: Mesela $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{array}\right\}$ alırsam bunun sonsuz çözümü var.
5.3 Araştırmacı: Katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımlı olması durumunda HOLDS için ne söylersin?
ÇÖ2: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{array}\right\}$ olsaydı sonsuz çözümler olacaktı, yani aşikar çözüm dışında ekstra çözümler olacaktı ama $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y \neq 6 \end{array}\right\}$ aldığımızda çözüm sadece 0 olurdu. Çünkü burdan denklem gelmez (çözüm adımlarını uygulayınca denklem elde edemeyiz).
Araştırmacı: Aşikar çözümden bahsedebilir misin?
ÇÖ2: 0 çözümünden bahsediyorum, açık olan çözüm bir tane çözüm demek.
Araştırmacı: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözümünü nasıl ifade edersin?
ÇÖ2: bunun çözümü sonsuz, aşikar yani tek bir çözüm yok burada
5.2/5.4 Araştırmacı: Katsayılar matrisinin satır vektörlerinin lineer bağımsız olması durumunda HLDS ve HOLDS'lerin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
ÇÖ2: Lineer bağımlı için sonsuz çözüm geldi, bu da tam tersi, çözüm kümesi boş küme.
Araştırmacı: HLDS ve HOLDS'lerin hangisinden bahsediyorsun?
ÇÖ2:ikisi de aynı.
5.5 Araştırmacı: Katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda HLDS'lerin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
ÇÖ2: Determinant 0 olunca lineer bağımlı oluyordu.
Araştırmacı: HLDSnin çözüm kümesinden biraz bahseder misin?
ÇÖ2: Çözüm kümesi var (elemanı) olur, çözüm kümesi boş küme olmaz.
5.6 Araştırmacı: Katsayılar matrisinin determinantının 0 olması durumunda HOLDS'lerin çözüm kümesi ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
ÇÖ2: Bunu bilmiyorum şu an.

6) Araştırmacı: Baz vektörlerine lineer dönüşüm uygulanması durumunda nasıl bir sonuç elde edilebilir?

ÇÖ2: lineer dönüşümü hatırlayamıyorum. Lineer dönüşümlere hakim değilim.

EK 11. Matematik Süreç Aracı İzni

atiye ayyıldız <atiyea42@gmail.com>
Alıcı: halil.tasova25

Merhaba hocam,
Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi bilim dalı doktora öğrencisiyim. Tarafınızdan Türkçeye adaptasyonu gerçekleştirilen **Matematiksel Süreç Aracı'nı** "Lineer Cebirde Çoklu Temsil Temelli Öğretimin ve Probleme Dayalı Öğrenmenin Öğretmen Adaylarının Düşünme Yapılarına, Anlama Boyutlarına, Akademik Başarılarına ve Özyeterlik Algılarına Etkisi" konulu tez çalışmamda kullanabilir miyim?

Saygılarımı sunarım.

Halil Ibrahim Tasova
Alıcı: ben

Merhaba Atiye Hocam,

E-postaniz icin tesekkur ederim. Tabi ki kullanabilirsiniz. Calismalarinizda kolayliklar dilerim.

Saygilarimla,

Halil İbrahim TAŞOVA

EK 12. Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği İzni

atiye ayyıldız <atiyea42@gmail.com> 14 Mayıs Cum 12:26

Alıcı: aumay

Merhaba hocam,

Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi bilim dalı doktora öğrencisiyim. Tarafınızdan geliştirilen **Matematiğe Karşı Özyeterlik Algısı Ölçeği'ni** "Lineer Cebirde Çoklu Temsil Temelli Öğretimin ve Probleme Dayalı Öğrenmenin Öğretmen Adaylarının Düşünme Yapılarına, Anlama Boyutlarına, Akademik Başarılarına ve Özyeterlik Algılarına Etkisi" konulu tez çalışmamda kullanabilir miyim?

aysunumay 16 Haziran Çar 21:04 (20 saat önce)

Alıcı: ben

Geliştirmiş olduğum Matematiğe Karşı Özyeterlik ölçeğini tez çalışmanızda kullanmanızdan mutluluk duyarım.
Başarılar dilerim.

Prof.Dr. Aysun Umay

EK 13. Araştırma İzin Belgesi

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dekanlığı

Sayı : 46826381-044-E.983 04/01/2019
Konu : Araştırma İzni (Atiye AYYILDIZ)

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 02.01.2019 tarih ve E.255 sayılı yazınız.

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Doktora Programı öğrencisi Atiye AYYILDIZ'ın "Lineer Cebirde Çoklu Temsil Temeli Öğretimin ve Probleme Dayalı Öğrenmenin Öğretmen Adaylarının Düşünme Yapılarına, Anlama Boyutlarına, Akademik Başarılarına ve Özyeterlilik Algılarına Etkisi" adlı tezi için Fakültemiz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğrencilerine anket uygulama isteği bizzat uygulaması şartı ile Dekanlığımızca uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi rica ederim.

e-imzalıdır
Prof. Dr. Bülent DİLMAÇ
Dekan