



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**İKİ BOYUTLU RASYONEL BİR FARK DENKLEM SİSTEMİNİN NİTEL
İNCELEMESİ**

Merve KAYHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Şubat - 2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Merve KAYHAN tarafından hazırlanan "*İKİ BOYUTLU RASYONEL BİR FARK DENKLEM SİSTEMİNİN NİTEL İNCELEMESİ*" adlı tez çalışması 18/02/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Üye

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../.../2022 gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim KALAYCI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Merve KAYHAN
Tarih: 18/02/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ BOYUTLU RASYONEL BİR FARK DENKLEM SİSTEMİNİN NİTEL İNCELEMESİ

Merve KAYHAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

2022, 47 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; fark denklemlerinin ve sistemlerinin öneminden ve gelişiminden bahsedildi.

İkinci bölümde; fark denklemleri ve fark denklem sistemleri üzerine yayınlanmış bazı çalışmalar hakkında bir literatür özeti sunuldu.

Üçüncü bölümde; fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili bazı genel tanım ve teoremlere yer verildi.

Dördüncü bölümde; $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i, (i = 1, 2)$, parametreleri ve $x_{-j}, y_{-j}, (j = 0, 1)$, başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 y_{n-1}}{a_1 + b_1 y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 x_{n-1}}{a_2 + b_2 x_n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerin sınırlılığı ve dirençliliği, pozitif denge noktasının varlığı ve tekliği, pozitif denge noktasının lokal ve global asimptotik kararlılığı, tek pozitif denge noktasına yakınsayan bir çözümün yakınsaklık hızı, sınırsız çözümlerin varlığı ve çözümlerin periyodikliği incelendi.

Beşinci bölümde; çalışmaya dair sonuç ve önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Denge noktası, global asimptotik kararlılık, lokal asimptotik kararlılık, periyodiklik, rasyonel fark denklemi, sınırlılık ve dirençlilik, yakınsaklık hızı.

ABSTRACT

MS THESIS

QUALITATIVE STUDY OF A TWO-DIMENSIONAL SYSTEM OF RATIONAL DIFFERENCE EQUATIONS

Merve KAYHAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY

THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

2022, 47 Pages

Jury

Asst. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

This study consists of five sections.

In the first section, the importance and development of difference equations and systems were mentioned.

In the second section, some published studies on difference equations and systems of difference equations a literature review on the subject is presented.

In the third section, some general definitions and theorems about difference equations and systems of difference equations are mentioned.

In the fourth section, the system of rational difference equations

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 y_{n-1}}{a_1 + b_1 y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 x_{n-1}}{a_2 + b_2 x_n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

where the parameters $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i, (i = 1, 2)$, and the initial conditions $x_{-j}, y_{-j}, (j = 0, 1)$, are positive real numbers, existence and uniqueness of positive equilibrium point, local and global asymptotic stability

of positive equilibrium point, rate of convergence of a solution converging to the unique positive equilibrium point, existence of unbounded solutions and the periodicity has been investigated.

In the fifth section, the conclusions and recommendations of the study are mentioned.

Keywords: Boundedness and persistence, equilibrium point, globally asymptotically stability, locally asymptotically stability, periodicity, rate of convergence, rational difference equations.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğretim üyelerinden Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışma sürecimi yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan sevgili aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Merve KAYHAN
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
TABLOLAR LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
2.1. Fark Denklemleri Üzerine Yayınlanmış Makaleler	3
2.2. Fark Denklem Sistemleri Üzerine Yayınlanmış Makaleler	4
3. ÖN BİLGİLER	11
3.1. Bazı Temel Tanımlar ve Teoremler	11
3.2. Fark Denklemleri	12
3.3. Sabit Katsayılı Lineer Fark Denkleminin Çözümlerinin Davranışı	18
3.4. Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılık Analizi	21
4. İKİ BOYUTLU RASYONEL BİR FARK DENKLEM SİSTEMİNİN NİTEL İNCELEMESİ	26
4.1. Çözümlerin Sınırlılığı ve Dirençliliği	26
4.2. Pozitif Denge Noktasının Kararlılığı	29
4.3. Çözümlerin Yakınsaklık Hızı	35
4.4. Sınırsız Çözümlerinin Varlığı	37
4.5. Periyodik Çözümlerinin Varlığı	40
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	42
5.1. Sonuçlar	42
5.2. Öneriler	42
KAYNAKLAR	43

ÖZGEÇMİŞ	46
-----------------------	-----------

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 Global çekimli denge noktası (x_n)	34
4.2 Global çekimli denge noktası (y_n)	34
4.3 Sınırsız x_n nin çizimi	39
4.4 Sınırsız y_n nin çizimi	39
4.5 Periyodik x_n nin çizimi	41
4.6 Periyodik y_n nin çizimi	41

TABLÖLAR LİSTESİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
5.1 (4.1) Sisteminin Çözümlerinin Davranışı	42

SİMGELER VE KISALTMALAR

\mathbb{N}_0	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{Z}	Tam sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
λ_i	i . öz değer
\forall	Her
\exists	Bazı
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
\leq	Küçük eşittir
\geq	Büyük eşittir
\in	Elemanıdır
\notin	Elemanı değildir
$=$	Eşittir
\Rightarrow	Gerek şart
\Leftarrow	Yeter şart
\Leftrightarrow	Gerek ve yeter şart
Δ	İleri fark operatörü
Δ^{-1}	Ters fark operatörü
E	Kaydırma Operatörü
\bar{x}	x denge noktası
J_F	F fonksiyonunun Jakobiyen matrisi
\sum	Belirsiz toplam
\sum_a^b	a dan b ye toplam
\prod_a^b	a dan b ye çarpım

1. GİRİŞ

Fark denklemi, bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Fonksiyonel denklemler olarak da isimlendirilen fark denklemleri, diferansiyel denklemler ile benzerlik gösterirler. Fakat inceleme süreci yönünden, diferansiyel denklemlerden daha yenidir. Diferansiyel denklemler 200 yılı aşan bir sürede incelendiği halde, fark denklemler 100 yıllık bir inceleme sürecinde sistematik hale gelmiştir. Diferansiyel denklemlerin bilimsel önermesinde “doğada kopukluklar yoktur” yanlış varsayımına yer verilmiştir. Bu eski hipoteze göre, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade edilmiştir. Bu nedenle diferansiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifadeler olarak kabul edilmiştir. Fakat 20. yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Eski yunanlılara göre, doğa olaylarında görülen süreklilik ile kesiklilik arasındaki zıtlama, doğadaki sürekliliğin bir aldatmacasıdır. Günümüzde diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemleri kullanılarak ortadan kaldırılmak istenmiştir (Çatal, 2004).

Fark denklemleri sadece diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde değil, aynı zamanda biyoloji, mühendislik, ekonomi, savunma, demografi ve benzeri alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde ya doğrudan ya da dolaylı olarak yer alır. Bu denklemlerde bağımsız değişken tam sayılar üzerinde tanımlanır. Dolayısıyla fark denklemlerinde türev terimleri yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur (Bereketoğlu ve Kutay, 2012). Yüksek mertebeden lineer olmayan fark denklemleri, sistemin $(n + 1)$. neslinin (veya durumunun) önceki n . nesile (veya duruma) bağlı olduğu uygulamalarda büyük önem taşır (Kocic ve Ladas, 1993).

Sonlu fark işlemleri Newton ile yayılmaya başlamış, Poincaré’ e kadar uzanmıştır, Boole ile zirveye ulaşmıştır. Daha sonra Laplace fark denklemleri üzerinde çalışmıştır. 1825 yılından önce doğrusal fark denklemleri ele alınmamışken 1885 yılında Poincaré ile doğrusal fark denklem teorisine girilmiş, Lagrange doğrusal diferansiyel denklemin sabit katsayılı olması durumunda çözümünü elde etmiş, Guichard 1887’de ikinci yandaki fonksiyonun polinom olması durumundaki çözümünü incelemiş, Gelgrun asimptotik çözümler üzerinde

çalışmış, Birkhoff ve Carmichael bu çalışmalarını genişletmişlerdir. Liouville ve Sturm ikinci mertebeden self adjoint doğrusal diferansiyel operatörünün üzerinde çalışmalar yapmış ve kendi isimleri ile anılan Sturm-Liouville fark denkleminin çözümünü ifade etmişlerdir (Çatal,2004). March Artznouni, değişken katsayılı doğrusal fark denkleminin asimptotik üstel çözümlerinin özelliklerini geliştirmiş; Hooker, Riccati denklemini geliştirmiş; Popenda, ikinci mertebeden fark denkleminin osilasyonlu ve osilasyonsuz durumlarındaki teoremleri geliştirmiş ve çözümleri için bazı atıflarda bulunmuştur (Artznouni, 1987; Hooker, 1987; Popenda, 1987a; Popenda, 1987b). Kaczorek, n 'inci mertebeden homojen olmayan değişken katsayılı doğrusal fark denkleminin implicit formdaki çözümlerini vermiştir (Kaczorek, 1985). Abramov, polinom katsayılı keyfi dereceli fark denklemlerin rasyonel çözümlerini vermiştir (Abramov, 1989). Tuzik, değişken katsayılı konvolüsyon tipteki fark denklemlerin çözülebilirliğine değinmiştir (Tuzik, 1989). Kocic ve Ladas yüksek mertebeden lineer olmayan fark denklemlerinin global davranışlarına ve uygulamalarına değinmiştir (Kocic ve Ladas, 1993). Bu çalışmada iki boyutlu lineer olmayan rasyonel bir fark denklem sisteminin çözümlerinin kararlılığı ve sınırlılığı, global davranışlarının sistematik hareketi, çözümlerinin doğal periyodikliği gibi nitel incelemeleri amaçlanmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde bu tez çalışması yapılırken yararlanılan ya da tez çalışmasıyla ilişkili olan yayınlanmış bazı makaleler tanıtılacaktır.

2.1. Fark Denklemleri Üzerine Yayınlanmış Makaleler

Gibbons ve arkadaşları (2000), bu çalışmalarında

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\gamma + y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.1)$$

fark denkleminin çözümünün nitel davranışlarını gösterdiler.

Xianyi ve Deming (2003), bu çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + a}{x_n + x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.2)$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerinin yarı döngü analizini yaparak global asimptotik kararlılığı için yeter koşulları verdiler.

Zhou ve Zhou (2003), bu çalışmalarında

$$x(n+1) = x(n) \exp \left[r(n) \left(1 - \frac{x(n)}{K(n)} \right) \right] \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.3)$$

ayrık lojistik denklemini ele aldılar. Burada $r(n)$ ve $K(n)$ pozitif ω -periyodik dizilerdir. Pozitif ve global asimptotik kararlı bir global çözümün varlığının gerekli şartları sağladığını karşıt örnek vererek gösterdiler.

Xianyi ve Deming (2004), bu çalışmalarında (2.2) denkleminin bir genelleştirmesi olarak

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2} + a}{x_n + x_{n-2}} \quad \text{ve} \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-1} x_{n-2} + a}{x_{n-1} + x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.4)$$

rasyonel fark denklemlerinin pozitif denge noktalarının global kararlılıkları için yeter koşulları verdiler.

Camouzis ve arkadaşları (2007), bu çalışmalarında negatif olmayan keyfi başlangıç şartları ve pozitif parametrelere sahip olan

$$x_{n+1} = \frac{\delta x_{n-2} + x_{n-3}}{A + X_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.5)$$

fark denkleminin çözümlerinin global davranışlarını incelediler. Sıfır denge noktasının global asimptotik kararlılığı için gerek ve yeter şartları elde ettiler. Ayrıca pozitif denge noktasını araştırdılar ve pozitif parametrelerin bölgelerini buldular. Pozitif denge noktasının parametrelerinin bulunduğu bölgenin tüm pozitif çözümlerinin global çekimliliğini araştırdılar.

Abu-Sarris ve arkadaşları (2008), bu çalışmalarında $a \geq 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-k} + a}{x_n + x_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.6)$$

denkleminin tek pozitif denge noktası olan $\bar{x} = \sqrt{a}$ noktasının global asimptotik kararlı olduğunu gösterdiler.

El-Metwally ve arkadaşları (2008), bu çalışmalarında aşağıda verilen fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodik karakterini, global kararlılığını ve doğal sınırlılığını çalıştılar.

$$x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1} e^{-x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.7)$$

Verilen (2.7) fark denkleminin çözümlerinin ilginç olmasının yanı sıra aynı zamanda bir nüfus modeli olarak tanımlanabileceğini buldular.

Elsayed (2011), bu çalışmasında başlangıç şartları sıfırdan farklı gerçel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}}{\pm 1 \pm x_{n-1} x_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.8)$$

fark denkleminin çözümlerini inceledi.

Taşdemir ve Erdoğan Taşdemir (2020), bu çalışmalarında A parametresi ve başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = x_{n-1} x_{n-2} + A, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.9)$$

fark denkleminin denge noktalarının lokal asimptotik kararlılığını ve çözümlerinin yakınsaklığını araştırdılar.

2.2. Fark Denklemler Sistemleri Üzerine Yayınlanmış Makaleler

Clarck ve Kulenović (2002), bu çalışmalarında a, b, c, d keyfi pozitif reel sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a + c y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{b + d x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.10)$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışını ve global kararlılığını araştırdılar.

Yalçinkaya ve arkadaşları (2008), bu çalışmalarında $a \in (0, \infty)$ için

$$z_{n+1} = \frac{z_n t_{n-1} + a}{z_n + t_{n-1}}, \quad t_{n+1} = \frac{t_n z_{n-1} + a}{t_n + z_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.11)$$

fark denklem sisteminin global asimptotik kararlılığı için yeter koşulları belirlediler.

Daş ve Bayram (2010), bu çalışmalarında $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ başlangıç şartları pozitif reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_{n-2}}{x_n y_{n-2} + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + x_{n-2}}{y_n x_{n-2} + 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.12)$$

(2.12) fark denklem sisteminin kararlılığını araştırdılar.

Kurbanlı ve arkadaşları (2011), bu çalışmalarında başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + y_n}{y_n x_{n-1} - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} + x_n}{x_n y_{n-1} - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.13)$$

rasyonel fark denklem sisteminin her çözümünün 6 periyotlu olduğunu gösterdiler.

Berg ve Stević (2011), bu çalışmalarında u_0 ve v_0 reel başlangıç şartları ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{v_n}{1 + v_n}, & v_{n+1} &= \frac{u_n}{1 + u_n}, \\ u_{n+1} &= \frac{v_n}{1 + u_n}, & v_{n+1} &= \frac{u_n}{1 + v_n}, \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{1 + v_n}, & v_{n+1} &= \frac{v_n}{1 + u_n} \end{aligned} \quad (2.14)$$

fark denklem sistemlerinin

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n} \quad (2.15)$$

Riccati fark denkleminin genel çözümü yardımıyla açık olarak çözülebileceğini gösterdiler ve bu sistemlerin asimptotik davranışlarını incelediler.

Papashinopoulos ve arkadaşları (2011), bu çalışmalarında

$$x_{n+1} = a + b x_{n-1} e^{-y_n}, \quad y_{n+1} = c + d y_{n-1} e^{-x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.16)$$

fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, kararlılığını ve asimptotik davranışını incelediler. (2.16) denkleminde a, b, c, d pozitif sabitler ve başlangıç şartları x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 pozitif reel sayılardır.

Papaschinopoulos ve Schinas (2012), bu çalışmalarında; a, b, c, d pozitif sabitleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olan

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + by_{n-1}e^{-x_n}, & y_{n+1} &= c + dx_{n-1}e^{-y_n}, & n &\in \mathbb{N}_0, \\ x_{n+1} &= a + by_{n-1}e^{-y_n}, & y_{n+1} &= c + dx_{n-1}e^{-x_n}, & n &\in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışlarını çalıştılar.

Stević (2012), bu çalışmasında x_0 ve y_0 reel başlangıç şartları, u_n, v_n, w_n, s_n dizilerinin herbiri x_n ve y_n dizilerinden biri olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{u_n}{1 + v_n}, \quad y_{n+1} = \frac{w_n}{1 + s_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.18)$$

sisteminin on altı olası durumundan on dört tanesi için çözülebilir olduğunu gösterdi.

Tollu ve arkadaşları (2013), bu çalışmalarında Riccati fark denkleminin iki özel hali olan

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{-1 + y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.19)$$

fark denklem sisteminin genel çözümlerini Fibonacci sayılarıyla ilişkilendirerek verdiler.

Yazlık ve arkadaşları (2013), bu çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \pm 1}{y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} \pm 1}{x_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.20)$$

fark denklem sisteminin çözümlerini Padovan sayılarıyla ilişkilendirerek ifade ettiler ve buldukları formülleri kullanarak bu sistemlerin bütün çözümlerinin tek bir noktaya yakınsadığını gösterdiler. Ayrıca bu sistemler için çözümleri tanımsız kılan başlangıç şartlarının kümelerini belirlediler.

El-Metwally (2013), bu çalışmasında $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ başlangıç şartları sıfırdan farklı olmak üzere,

$$x_n = \frac{x_{n-1}y_n}{\pm x_{n-1} \pm y_{n-2}}, \quad y_n = \frac{x_n y_{n-1}}{\pm y_{n-1} \pm x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.21)$$

fark denklem sisteminin çözümlerini araştırdı ve bu çözümlerin bazı özelliklerini inceledi.

Din (2013), bu çalışmasında verilen ayrık bir Lotka-Volterra modelinin denge noktalarını,

$$x_{n+1} = \frac{ax_n - \beta x_n y_n}{1 + \gamma x_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\delta y_n + \varepsilon x_n y_n}{1 + \eta y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.22)$$

denge noktalarının global asimptotik kararlılığını ve global davranışını inceledi.

Verilen (2.22) fark denklem sisteminde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}^+$ ve başlangıç şartları x_0, y_0 pozitif reel sayılardır. Ayrıca tek pozitif denge noktasının verilen çözüme yakınsama hızını araştırdı.

Din ve Elsayed (2014), bu çalışmalarında

$$x_{n+1} = \alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1} e^{-y_n}, \quad y_{n+1} = \delta + \varepsilon y_n + \zeta y_{n-1} e^{-x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.23)$$

verilen (2.23) ayrık zamanlı popülasyon modelinin nitel davranışını incelediler. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ parametreleri ve x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} başlangıç şartlarını pozitif reel sayılar olarak aldılar. Devamında ise bu modelin pozitif denge noktasının tekliğini, varlığını, sınırlılık karakterini, sürekliliğini, lokal asimptotik kararlılığını, tek pozitif denge noktasının yakınsaklık hızını ve global davranışını gösterdiler. Teorik sonuçları bazı nümerik örnekler ile desteklediler.

Din ve ark. (2014), bu çalışmalarında x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} başlangıç şartları pozitif reel sayılar ve $i \in 1, 2$ için $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$ reel pozitif parametreler olan

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 x_{n-1}}{a_1 + b_1 y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 y_{n-1}}{a_2 + b_2 x_n} \quad (2.24)$$

ikinci mertebeden rasyonel bir fark denklem sisteminin nitel davranışlarını araştırdılar. Daha açık ifade edersek sınırlılığını ve dirençliliğini, pozitif denge noktasının varlığını ve tekliğini, lokal ve global asimptotik kararlılığını, tek pozitif denge noktasına yakınsayan çözümlerin yakınsama hızını, sınırsız çözümlerinin varlığını ve doğal periyodikliğini araştırdılar.

Khan ve arkadaşları (2014), bu çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{\alpha y_{n-3}}{\beta + \gamma \prod_{i=0}^3 x_{n-i}}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-3}}{\beta_1 + \gamma_1 \prod_{i=0}^3 y_{n-i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.25)$$

verilen dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin nitel davranışını incelediler. Daha açık ifade edilirse lokal asimptotik kararlılığını, denge noktasının tekliğini, global karakterini ve verilen sistemin pozitif çözümlerinin yakınsama hızını incelediler. Teorik sonuçların doğrulanması için bazı sayısal örnekler ile desteklediler.

Tollu ve arkadaşları (2014), x_0 ve y_0 reel başlangıç şartları, p_n, q_n, r_n, s_n dizilerinin her biri x_n ve y_n dizilerinden biri olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{1 + p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1 + r_n}{s_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.26)$$

sisteminin on altı olası durumdan on dört tanesinin çözülebilir olduğunu gösterdiler. Ayrıca verdikleri genel çözümlerin on iki tanesinin Fibonacci sayıları ile ilişkili olduğunu gösterdiler.

Yazlık ve arkadaşları (2015), bu çalışmalarında çözümleri iyi tanımlı yapan keyfi reel başlangıç şartları ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{y_{n-2}x_{n-3}y_{n-4}}{y_n x_{n-1}(\pm 1 \pm y_{n-2} \pm x_{n-3} \pm y_{n-4})}, \\ y_{n+1} &= \frac{x_{n-2}y_{n-3}x_{n-4}}{x_n y_{n-1}(\pm 1 \pm x_{n-2} \pm y_{n-3} \pm x_{n-4})} \end{aligned} \quad (2.27)$$

sistemlerinin açık çözümlerini elde ettiler ve bu çözümlerin davranışlarını incelediler.

Din (2016), bu çalışmasında aşağıdaki rasyonel fark denklemlerinin

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 y_{n-1}}{a_1 + b_1 x_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 x_{n-1}}{a_2 + b_2 y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.28)$$

pozitif çözümlerinin yakınsaklık oranını, pozitif denge noktasının varlığını ve tekliğini, sınırlılığını, sürekliliğini, lokal ve global asimptotik kararlılığını araştırdı. Burada $i \in 1, 2$ için $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i$ ve başlangıç şartları olan x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} pozitif reel sayılardır.

El-Dessoky (2016), bu çalışmasında başlangıç koşulları reel sayılar ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_{n-3}}{\pm 1 \pm t_n z_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}}, & y_{n+1} &= \frac{y_{n-3}}{\pm 1 \pm x_n t_{n-1} z_{n-2} y_{n-3}}, \\ z_{n+1} &= \frac{z_{n-3}}{\pm 1 \pm y_n x_{n-1} t_{n-2} z_{n-3}}, & t_{n+1} &= \frac{t_{n-3}}{\pm 1 \pm z_n y_{n-1} x_{n-2} t_{n-3}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

dört boyutlu fark denklem sisteminin çözümlerinin varlığı, periyodikliği ve sınırlılık özelliklerini araştırdı.

El-Dessoky (2016b), bu çalışmasında reel başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{-1 + y_{n-2}x_{n-1}y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{\pm 1 \pm x_{n-2}y_{n-1}x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.30)$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini inceledi.

El-Dessoky (2016c), bu çalışmasında reel başlangıç şartları, keyfi reel parametreler ve $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{z_{n-3}}{a_1 + b_1 z_n y_{n-1} x_{n-2} z_{n-3}}, \\ y_{n+1} &= \frac{x_{n-3}}{a_2 + b_2 x_n z_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}}, \\ z_{n+1} &= \frac{y_{n-3}}{a_3 + b_3 y_n x_{n-1} z_{n-2} y_{n-3}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini inceledi. Bu çözümlerin periyodikliğini gösterdi.

El-Dessoky (2016d), bu çalışmasında başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olan,

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_n(\pm 1 \pm y_{n-1}y_{n-2})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_n}{y_n(\pm 1 \pm x_{n-1}x_{n-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.32)$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini araştırdı ve bu çözümlerin periyodikliğini gösterdi.

Elsayed ve Ahmed (2016), bu çalışmalarında başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{x_{n-2} \pm z_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{z_n y_{n-2}}{y_{n-2} \pm x_{n-1}}, \quad z_{n+1} = \frac{x_n z_{n-2}}{z_{n-2} \pm y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.33)$$

üç boyutlu rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri araştırdılar.

Elsayed ve Alghamdi (2016), bu çalışmalarında başlangıç şartları reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-7}}{1 + x_{n-7}y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-7}}{\pm 1 \pm x_{n-3}y_{n-7}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.34)$$

lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelediler.

Elsayed ve arkadaşları (2017), bu çalışmalarında başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{y_n + y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n y_{n-2}}{\pm x_n \pm x_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.35)$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelemişlerdir.

Elsayed (2017), bu çalışmasında başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}y_{n-2}}{y_n(\pm 1 \pm x_{n-1}y_{n-2}x_{n-3})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-2}y_{n-3}}{x_n(\pm 1 \pm y_{n-1}x_{n-2}y_{n-3})}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.36)$$

lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini inceledi.

Tollu ve arkadaşları (2017), bu çalışmalarında $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{a}{1 + x_n y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{b}{1 + y_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.37)$$

fark denklem sistemini tanımlamışlardır. Ayrıca bu sistemin global davranışlarını incelemişlerdir. Elde ettikleri sonuçları bazı nümerik örneklerle desteklemişlerdir.

Şahinkaya ve arkadaşları (2018), bu çalışmalarında $a \in [0, \infty)$ olmak üzere, başlangıç şartları reel sayı olan

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_n + a}{x_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n z_n + a}{y_n + z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n x_n + a}{z_n + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.38)$$

fark denklem sistemini tanımlamışlardır. Bu sistemin genel çözümlerini kapalı formda göstererek çözümlerin davranışlarını incelemişlerdir.

Phong (2020), bu çalışmasında; parametreleri, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in (0, \infty)$ ve başlangıç şartları $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 \in (0, \infty)$ aralıklarında olan

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1 y_n}{\beta_1 + \gamma_1 x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha_2 x_n}{\beta_2 + \gamma_2 y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.39)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin yakınsaklık oranı, denge noktasının global kararlılığı ve lokal asimptotik kararlılığını araştırıp teorik sonuçlarını bazı nümerik örneklerle desteklemiştir.

Tollu ve arkadaşları (2021), bu çalışmalarında; a, b parametreleri ve başlangıç şartları x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{a}{1 + y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{b}{1 + x_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.40)$$

$\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ için pratik bir yöntem kullanarak genel çözümünün olduğunu gösterdiler. Bu sistemin genel çözümünü üçüncü mertebeden lineer denklemin karakteristik sıfırları ile gösterdiler. Aynı zamanda bu sistemin iyi tanımlanmış çözümlerini karakterize ettiler. Son olarak iyi tanımlanmış çözümlerin asimptotik davranışlarını çalıştılar.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölüm dört alt bölüme ayrılmıştır. Birincisinde tez çalışmasında kullanılan bazı temel sonuçlar ve ikincisinde fark denklemleri üzerine bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü kısımda sabit katsayılı lineer fark denklemlerinin çözümleri ile ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verildi. Son olarak dördüncü alt bölümde fark denklem sistemleri üzerine literatürde tanımlanan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

3.1. Bazı Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu kısımda, bu tez çalışmasında kullanılan bazı temel sonuçlar verilmiştir.

Tanım 3.1.1. k -boyutlu bir (normlu) uzayın bir D bölgesine ait (u_1, u_2, \dots, u_k) noktalarını yine bu uzayın bir B bölgesinin (v_1, v_2, \dots, v_k) noktalarına dönüştüren,

$$\begin{cases} v_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_k) \\ v_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_k) \\ \vdots \\ v_k = f_k(u_1, u_2, \dots, u_k) \end{cases} \quad (3.1)$$

sistemine bir bölge dönüşümü denir (Balcı, 2016).

Tanım 3.1.2. (3.1) bölge dönüşümü verilmiş olsun. $i, j = 1, 2, \dots, k$ ve $\frac{\partial v_i}{\partial u_j}$ kısmi türevleri mevcut olmak üzere,

$$J = \frac{\partial(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial u_k} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial v_2}{\partial u_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_k}{\partial u_1} & \frac{\partial v_k}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial v_k}{\partial u_k} \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

determinantına (3.2) bölge dönüşümünün “jakobiyeni” veya “fonksiyonel determinanti” denir (Balcı, 2016).

Teorem 3.1.1. (Rouché Teoremi) f ve g fonksiyonları pozitif yönde yönlendirilmiş basit kapalı bir C eğrisinin üzerinde ve içinde analitik ve C üzerindeki her bir z noktasında $|g(z)| < |f(z)|$ ise f ve $f + g$ fonksiyonlarının C içindeki sıfırlarının sayısı katlılığı ile birlikte aynıdır (Özkın, 1989).

Tanım 3.1.3. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir (Camouzis ve Ladas,2008).

3.2. Fark Denklemleri

Bu kısımda, fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $n \in \mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$F(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = 0 \quad (3.3)$$

eşitliğine bir fark denklemi denir. f bir fonksiyon olmak üzere, (3.3) denklemi

$$x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}) \quad (3.4)$$

formunda ise normal fark denklemi adını alır (Soykan ve ark., 2017).

Tanım 3.2.2. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi (basamağı) denir (Soykan ve ark. 2017).

Tanım 3.2.3. \mathbb{N}_0 üzerinde tanımlı bir x_n fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_0$ için (3.3) denklemini sağlı-yorsa, bu durumda x_n fonksiyonuna \mathbb{N}_0 üzerinde (3.3) denkleminin bir çözümü denir. k . mertebeden bir fark denkleminin φ ve ψ fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi(n, x_n, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0 \quad (3.5)$$

veya

$$x_n = \psi(n, c_1, c_2, \dots, c_k) \quad (3.6)$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözümüne genel çözüm adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de özel çözüm denir (Soykan ve ark., 2017).

Teorem 3.2.1. I reel sayıların bir aralığı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $f : I^{k+1} \rightarrow I$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.7)$$

fark denkleminin bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 3.2.4. $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$ denklemini sağlayan $\bar{x} \in I$ noktasına (3.7) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Bu tanıma göre (3.7) denkleminin birden fazla denge noktası olabilir ve hatta hiç denge noktası olmayabilir.

Tanım 3.2.5. \bar{x} noktası (3.7) denkleminin bir denge noktası olsun.

(a) Eğer $x_0, \dots, x_{-k} \in I$ olmak üzere her $\epsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq -k$ için $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktası kararlıdır denir.

(b) Eğer \bar{x} denge noktası kararlı ve $x_0, \dots, x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer her $x_0, \dots, x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ise \bar{x} denge noktasına global çekimli denge noktası denir.

(d) Eğer \bar{x} denge noktası kararlı ve çekim noktası ise \bar{x} denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(e) Eğer \bar{x} denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.

(f) Eğer $x_0, \dots, x_{-k} \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$ ve bazı $\mathbf{N} \geq -k$ sayıları için $|x_{\mathbf{N}} - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktasına repeller denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 3.2.6. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (3.7) fark denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p tam sayısına da asal periyot denir (Camouzis ve Ladas,

2008).

Tanım 3.2.7. I reel sayıların bir aralığı, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere,

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad (3.8)$$

ifadesi $f : I^{k+1} \rightarrow I$ fonksiyonunun x_i lere göre kısmi türevlerinin \bar{x} denge noktasındaki değerleri olsun. Bu durumda,

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^k q_i z_{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.9)$$

denkleminin (3.7) denkleminin \bar{x} denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir.

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k q_i \lambda^{k-i} = 0 \quad (3.10)$$

polinom denkleminin ise (3.7) denkleminin \bar{x} denge noktasındaki karakteristik denklemi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 3.2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (3.10) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1' den küçük ise (3.7) denklemi \bar{x} denge noktasında lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (3.10) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1' den büyük ise (3.7) denkleminin \bar{x} denge noktası kararsızdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 3.2.3. (Karşılaştırma Teoremi) k pozitif bir tam sayı ve I gerçel sayıların bir aralığı olsun. Ayrıca

$$F : I^{k+1} \rightarrow I$$

tüm argümanlarında artan bir fonksiyon ve $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=-k}^{\infty}$ gerçel sayı dizileri olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} x_{n+1} \leq F(x_n, \dots, x_{n-k}), & n \in \mathbb{N}_0, \\ y_{n+1} = F(y_n, \dots, y_{n-k}), & n \in \mathbb{N}_0, \\ z_{n+1} \geq F(z_n, \dots, z_{n-k}), & n \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

ve $-k \leq n \leq 0$ için $x_n \leq y_n \leq z_n$ ise $n > 0$ için $x_n \leq y_n \leq z_n$ olur.

Tanım 3.2.8. Eğer her $n > 0$ için $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa bu J aralığına (3.7) denkleminin değişmez aralığı denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 3.2.9. (Lineer Fark Denklemi) Bir fark denkleminde bağımlı değişken birinci dereceden ise bu denkleme lineer fark denklemi denir. Genel olarak lineer fark denklemleri, $n \geq n_0$ için a_1, a_2, \dots, a_k ($a_k \neq 0$) katsayıları ve $f(n)$ reel değerli diziler olmak üzere,

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0x_n = f_n \quad (3.12)$$

biçimindeki denklemlerdir. Lineer fark denklemleri, katsayılarının ve f_n dizisinin durumuna göre aşağıdaki gibi isimlendirilir:

- a) Eğer $n \geq n_0$ için $f_n = 0$ ise denkleme lineer homojen fark denklemi,
- b) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ katsayıları sabit iseler, denkleme sabit katsayılı lineer fark denklemi,
- c) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları iseler denkleme değişken katsayılı lineer fark denklemi denir.

Bu tanıma göre sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemi

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0x_n = 0 \quad (3.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklem genel olarak çözülebilir. Şimdi bu denklemin çözülebilirliğini inceleyelim. (3.13) denkleminin $x(n) = \lambda^n$ formunda bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda bu çözüm (3.13) denklemini sağlayacağından çözümü denkleme yerine yazalım. Böylece

$$\lambda^{n+k} + a_1\lambda^{n+k-1} + \dots + a_k\lambda^n = 0 \quad (3.14)$$

veya

$$\lambda^n(\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k) = 0 \quad (3.15)$$

eşitliğini elde ederiz. $a_k \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$ ve dolayısıyla $\lambda^n \neq 0$ olacağından

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad (3.16)$$

olur. (3.16) denkleminin (3.13) denkleminin “karakteristik denklemi” ya da “yardımcı denklemi” denir. Bu denklem k tane reel veya kompleks köke sahiptir. Bu kökler $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

ile gösterilsin. Bu durumda çözümün şekli, bu köklerin durumuna bağlıdır ve aşağıdaki üç durumda incelenir.

A. Kökler reel ve farklı ise yani $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ köklerinin hepsi birbirinden farklı reel sayılar ise,

$$x_1(n) = \lambda_1^n, x_2(n) = \lambda_2^n, \dots, x_k(n) = \lambda_k^n \quad (3.17)$$

(3.12) denkleminin çözümleridir. Bu çözümlerin herhangi lineer kombinasyonu da bir çözümdür. Elde edilen bu çözüm aslında (3.12) denkleminin genel çözümü olup,

$$x(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_k\lambda_k^n \quad (3.18)$$

şeklinde verilir. Burada c_1, c_2, \dots, c_k keyfi reel sabitlerdir.

B. Bazı hallerde (3.16) karakteristik denkleminin bazı kökleri kompleks olabilir. Eğer $\alpha + i\beta$ kompleks sayısı karakteristik denklemin bir kökü ise $\alpha - i\beta$ kompleks sayısı da bu denklemin diğer bir köküdür. Bu durumda $x_1(n) = (\alpha + i\beta)^n$ ve $x_2(n) = (\alpha - i\beta)^n$ (3.12) denkleminin birer çözümüdür. Ayrıca bunların lineer kombinasyonu da bir çözüm olacağından

$$x_3(n) = k_1(\alpha + i\beta)^n + k_2(\alpha - i\beta)^n \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir. Burada k_1 ve k_2 keyfi reel sabitlerdir. De Moivre formülünden

$$(\alpha + i\beta)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \quad (3.20)$$

ve

$$(\alpha - i\beta)^n = r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)) \quad (3.21)$$

olur. Böylece (3.12) denkleminin genel çözümünün bu köklere karşılık gelen kısmı

$$x_3(n) = r^n(k_3 \cos(n\theta) + k_4 \sin(n\theta)) \quad (3.22)$$

formundadır. Burada k_3, k_4 keyfi reel sabitlerdir.

C. Eğer (3.12) denkleminin p tane kökü $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$ şeklinde birbirine eşit ise bu durumda (3.12) denkleminin çözümünün bu köklere karşılık gelen kısmı

$$(c_1 + c_2n + c_3n^2 + \dots + c_pn^{p-1})\lambda_1^n \quad (3.23)$$

şeklinde olur (Spiegel, 1971).

Örnek 3.2.1. Sabit katsayılı lineer homojen olan

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8 = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.24)$$

fark denkleminin genel çözümünü bulalım. Verilen denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

olup karakteristik kökler $\lambda = 2$ ve $\lambda = 4$ olarak bulunur. Böylece (3.24) fark denkleminin genel çözümü her $n \geq 0$ için

$$x_n = c_1 2^n + c_2 4^n$$

şeklindedir. Burada c_1 ve c_2 keyfi reel sabitlerdir.

Örnek 3.2.2. Sabit katsayılı lineer homojen olan

$$x_{n+3} - 8x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.25)$$

fark denkleminin genel çözümünü bulalım. Verilen denklem üçüncü mertebeden bir denklemdir ve karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

üçüncü dereceden polinom denklemdir. Karakteristik köklerin biri reel ve diğer ikisi kompleks eşleniktir. Bu kökler

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i \quad (3.26)$$

olup, (3.25) denkleminin genel çözümü her $n \geq 0$ için

$$x_n = c_1 2^n + 2^n (c_2 \cos(n\theta) + c_3 \sin(n\theta)) \quad (3.27)$$

şeklindedir. Burada c_1, c_2, c_3 keyfi reel sabitler, $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 2$ ve $\theta = \arctan(-\sqrt{3})$ tür.

Örnek 3.2.3. Sabit katsayılı lineer homojen olan

$$x_{n+3} - 11x_{n+2} + 39x_{n+1} - 45x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.28)$$

fark denkleminin genel çözümünü bulalım. Verilen denklem üçüncü mertebeden olup karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45 = 0$$

cebirsel denklemdir. Bu cebirsel denklemin kökleri $\lambda_{1,2} = 3$ ve $\lambda_3 = 5$ olup (3.28) denkleminin genel çözümü her $n \geq 0$ için

$$x_n = (c_1 + c_2n)3^n + c_35^n$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2, c_3 keyfi reel sabitlerdir.

3.3. Sabit Katsayılı Linear Fark Denkleminin Çözümlerinin Davranışı

Bu kısımda, verilen sonuçlar tüm sabit katsayılı lineer fark denklemlerini kapsamaktadır. Fakat anlatımın kolaylığı için

$$x_{n+1} - ax_n - bx_{n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.29)$$

sabit katsayılı homojen lineer fark denklemini ele alacağız. (3.29) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \quad (3.30)$$

denklemdir. (3.30) denkleminin kökleri λ_1 ve λ_2 olsun. Şu halde aşağıdaki üç durumu incelememiz gerekir.

A. Köklerin farklı reel sayılar olması durumu: Bu durumda $x_n = \lambda_1^n$ ve $x_n = \lambda_2^n$ çözümleri lineer bağımsızdır. Eğer $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ise λ_1 köküne dominant (baskın) karakteristik kök ve $x_n = \lambda_1^n$ çözümüne de dominant (baskın) çözüm denir. Aksi halde λ_1 kökü dominant karakteristik kök ve $x_n = \lambda_2^n$ çözümü de dominant çözüm olur. Açıkça (3.29) denkleminin genel çözümü

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \quad (3.31)$$

olur. Şimdi (3.31) genel çözümünün davranışının dominant çözümün davranışına bağlı olduğunu göstereceğiz. Bunun için $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca (3.31) genel çözümünü

$$x_n = \lambda_1^n \left(c_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right) \quad (3.32)$$

şeklinde yazalım. $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \rightarrow 0$ olur. Sonuç olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_1\lambda_1^n$$

olur. Burada λ_1 dominant kökünün alacağı değerlere bağlı olarak altı durum ortaya çıkar.

i) $\lambda_1 > 1$: $\{c_1\lambda_1^n\}$ dizisi ıraksaktır. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_1\lambda_1^n = \infty$ olur. Bu bir kararsızlık durumudur.

ii) $\lambda_1 = 1$: $\{c_1\lambda_1^n\}$ dizisi sabit dizidir. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c_1$ olur.

iii) $0 < \lambda_1 < 1$: $\{c_1\lambda_1^n\}$ dizisi monoton olarak sifira yakınsar. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ olur. Bu bir kararlılık durumudur.

iv) $-1 < \lambda_1 < 0$: $\{c_1\lambda_1^n\}$ dizisi sıfır civarında salınarak sifira yakınsar. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ olur. Bu bir kararlılık durumudur.

v) $\lambda_1 = -1$: $\{c_1\lambda_1^n\}$ dizisi a_1 ve $-a_1$ değerleri arasında salınır.

vi) $\lambda_1 = -1$: $\{c_1\lambda_1^n\}$ dizisi sıfır civarında salınır fakat her bir salınım bir öncekinden daha büyük olur. Yani dizi monoton artandır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \text{sgn}(c_1)\infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = -\text{sgn}(c_1)\infty$ olur. Bu da bir kararsızlık durumudur.

B. Köklerin çakışık reel sayılar olması durumu: Bu durumda $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olup, (3.29) denkleminin genel çözümü

$$x_n = (c_1 + c_2n)\lambda^n \quad (3.33)$$

olur. Açıkça, eğer $|\lambda| \geq 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi ıraksaktır. Buradan iki durum ortaya çıkar:

i) Eğer $\lambda > 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi monoton olarak sonsuza ıraksar.

ii) Eğer $\lambda \leq -1$ ise $\{x_n\}$ dizisi sıfır civarında salınarak sonsuza ıraksar.

Eğer $\lambda < 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi sifira yakınsar. Çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda^n = 0$ dır.

C. Köklerin kompleks olması durumu: Bu durumda kökler eşlenik olup, $\beta \neq 0$ olmak üzere $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ şeklindedir. Bu durumda çözüm

$$x_n = r^n(c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta)) \quad (3.34)$$

olur. (3.34) formülü

$$x_n = ar^n \cos(n\theta - \omega) \quad (3.35)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

olarak verilir. Kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğundan çözüm de salınımlıdır. Fakat bu salınım üç farklı tarzda olur.

i) $r > 1$ durumu: Bu durumda $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ olup, her iki kökün mutlak değeri 1' den büyüktür. Böylece $\{x_n\}$ dizisi hem 0 civarında salınır hem de sınırsız büyüyerek ıraksar.

ii) $r = 1$ durumu: Bu durumda $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ olup, her iki kökün mutlak değeri 1' e eşittir. Böylece $\{x_n\}$ dizisi zıt işaretli iki sabit değer arasında salınır.

iii) $r < 1$ durumu: Bu durumda $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ olup, her iki kökün mutlak değeri 1' den küçüktür. Böylece $\{x_n\}$ dizisi hem 0 civarında salınır hem de azalarak sifıra yakınsar.

Elde edilen bu sonuçlar aşağıdaki teoremle özetlenebilir.

Teorem 3.3.1.

(i) (3.29) denkleminin bütün çözümleri sıfır civarında salınır ancak ve ancak onun karakteristik denklemi pozitif köklere sahip değildir.

(ii) (3.29) denkleminin bütün çözümleri sifıra yakınsar ancak ve ancak $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ dir.

Şimdi

$$x_{n+1} - ax_n - bx_{n-1} = c \quad (c \neq 0) \quad (3.36)$$

homojen olmayan lineer fark denklemini düşünelim. (3.36) denklemi içinde benzer sonuçlar elde edilir. Fakat (3.36) denklemi, $a + b \neq 1$ olmak üzere,

$$\left(x_{n+1} - \frac{c}{1-a-b}\right) - a\left(x_n - \frac{c}{1-a-b}\right) - b\left(x_{n-1} - \frac{c}{1-a-b}\right) = 0 \quad (3.37)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde

$$y_n = x_n - \frac{c}{1-a-b} \quad (3.38)$$

değişken değiştirmesi yapılırsa yine homojen lineer bir denklem olan

$$y_{n+1} - ay_n - by_{n-1} = 0 \quad (3.39)$$

denklemi elde edilir. Yukarıda ki teorem (3.39) denklemi için geçerli olduğundan (3.38) değişken değiştirmesi ile birlikte (3.36) denkleminin çözümlerine dair aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.2.

(i) (3.36) denkleminin bütün çözümleri $y = \frac{c}{1-a-b}$ noktası civarında salınır ancak ve ancak (3.29) denkleminin karakteristik denklemi pozitif köklere sahip değildir.

(ii) (3.36) denkleminin bütün çözümleri $y = \frac{c}{1-a-b}$ noktasına yakınsar ancak ve ancak (3.29) denkleminin karakteristik denkleminin kökleri için;
 $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ 'dir.

Uyarı 3.3.1. (3.36) denklemi için, eğer $a + b \neq 1$ ise,

$$\bar{y} - a\bar{y} - b\bar{y} = c \Rightarrow \bar{y} = \frac{c}{1-a-b} \quad (3.40)$$

elde edilir ki bu (3.36) denkleminin tek denge noktasıdır.

Uyarı 3.3.2. (3.29) ve (3.36) ve denklemlerin çözümlerinin yakınsak olduğu durumlar aynı zamanda bu denklemin sırasıyla tek denge noktaları olan $\bar{x} = 0$ ve $\bar{y} = \frac{c}{1-a-b}$ noktalarının asimptotik kararlı olduğu durumlardır.

3.4. Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılık Analizi

Bu kısımda ele alınacak olan fark denklem sistemleri adi fark denklem sistemleri olacaktır. Yani bir bağımsız değişken ve birden fazla bağımlı değişken içeren fark denklemlerinin sistemlerini ele alacağız. Bu tür sistemler daha fazla bağımlı değişken içerebilmesine rağmen bu tez çalışmasının konusuna uygun bir ön çalışma için bağımlı değişken sayısını iki ile sınırlı tutacağız. Bu tür sistemler iki boyutlu fark denklem sistemleri olarak ifade edilir. Bu kısımda tezin konusu ile ilişkili olan iki boyutlu genel bir fark denklem sisteminin vektörel formda yazılıp vektör hesabı ile kararlılığının nasıl analiz edildiği üzerine bazı temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Teorem 3.4.1. I ile J birer reel sayı aralığı, $f : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I$ ve $g : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow J$ sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise her $(x_{-i}, y_{-i}) \in I \times J$ başlangıç şartı ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}) \\ y_{n+1} = g(x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}) \end{cases} \quad (3.41)$$

fark denklem sisteminin bir tek $\{(x_n, y_n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Kocic ve Ladas, 1993).

Tanım 3.4.1. Eğer (\bar{x}, \bar{y}) için (3.41) fark denklem sisteminde

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}) \end{cases} \quad (3.42)$$

ise (\bar{x}, \bar{y}) noktasına (3.41) sisteminin denge noktası denir.

(3.41) fark denklem sistemi uygun bir vektör dönüşümü yardımıyla vektörel bir fark denklem sistemi şeklinde ifade edilebilir. Yani, eğer

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-k} \\ y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{n-k} \end{pmatrix} \in I^{k+1} \times J^{k+1} \quad (3.43)$$

ise (3.41) fark denklem sistemi

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad n \in \mathbf{N}_0 \quad (3.44)$$

vektörel fark denklem sistemi ile ifade edilir. Burada F vektör dönüşümü

$$F \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k) \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ g(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k) \\ v_0 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

şeklindedir. Eğer (3.41) sistemi (\bar{x}, \bar{y}) denge noktasına sahip ise (3.44) sisteminin denge noktasının

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{y} \\ \vdots \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in I^{k+1} \times J^{k+1} \quad (3.46)$$

şeklinde olduğu açıktır (Kocic ve Ladas, 1993).

Burada herhangi bir vektör veya matris normu $\|\cdot\|$ ile gösterilecektir. Ayrıca (3.44) sisteminin bir başlangıç şartı

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ \vdots \\ x_{-k} \\ y_0 \\ y_{-1} \\ \vdots \\ y_{-k} \end{pmatrix} \in I^{k+1} \times J^{k+1} \quad (3.47)$$

şeklindedir.

Tanım 3.4.2. (3.44) fark denklem sisteminin bir denge noktası \bar{X} olsun.

(a) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\|X_0 - \bar{X}\| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için $\|X_n - \bar{X}\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa \bar{X} denge noktası kararlıdır denir. Aksi takdirde, \bar{X} denge noktası kararsızdır.

(b) Eğer \bar{X} denge noktası kararlı ve $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \rightarrow \bar{X}$ olacak şekilde $\|X_0 - \bar{X}\| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa \bar{X} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \rightarrow \bar{X}$ ise \bar{X} denge noktasına global çekimli denir.

(d) Eğer \bar{X} denge noktası hem lokal asimptotik kararlı hem de global çekimli ise \bar{X} denge noktası global asimptotik kararlıdır denir (Kocic ve Ladas, 1993).

(3.44) fark denklem sisteminin \bar{X} denge noktasındaki lineerleştirilmiş sistemi; F dönüşümünün \bar{X} denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_0} & \frac{\partial f}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial u_k} & \frac{\partial f}{\partial v_0} & \frac{\partial f}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial v_k} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u_0} & \frac{\partial g}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial u_k} & \frac{\partial g}{\partial v_0} & \frac{\partial g}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial v_k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2k+2) \times (2k+2)} \quad (3.48)$$

olmak üzere,

$$Z_{n+1} = J_F Z_n, \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad (3.49)$$

şeklindedir ve (3.44) sisteminin \bar{X} denge noktası civarındaki karakteristik polinomu $a_0 > 0$ olmak üzere,

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^{2(k+1)} + a_1 \lambda^{2k+1} + \dots + a_{2k+1} \lambda + a_{2(k+1)} \quad (3.50)$$

şeklinde yazılabilir (Kocic ve Ladas, 1993).

Teorem 3.4.2. (3.44) fark denklem sisteminin bir denge noktası \bar{X} olsun. Eğer bu sistemin \bar{X} denge noktasındaki J_F jakobiyen matrisinin tüm öz değerleri $|\lambda| < 1$ açık birim diskinde ise \bar{X} denge noktası lokal asimptotik karardır. Eğer öz değerlerden en az biri için $|\lambda| > 1$ ise \bar{X} denge noktası kararsızdır (Kocic ve Ladas, 1993).

Teorem 3.4.3. f ve g fonksiyonları sırasıyla

$$f : [a_2, b_2] \times [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1], \quad g : [a_1, b_1] \times [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$$

şeklinde tanımlansın ve $f(u, v)$ fonksiyonu, her $v \in [a_2, b_2]$ için u değişkenine göre azalan, her $u \in [a_2, b_2]$ için v değişkenine göre artan, benzer şekilde $g(z, w)$ fonksiyonu, her $w \in [a_1, b_1]$ için z değişkenine göre azalan, her $z \in [a_1, b_1]$ için w değişkenine göre artan olsun. Ayrıca, M, m, R, r sayıları $m \leq M, r \leq R$ eşitsizliklerini sağlayan reel sayılar olmak üzere,

$$M = F(r, R), \quad m = f(R, r), \quad R = g(m, M), \quad r = g(M, m) \quad (3.51)$$

sistemi tanımlansın. Böylece (3.51) sisteminden $m = M$ ve $r = R$ olduğu görülür. Bu durumda

$$x_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}) \quad (3.52)$$

fark denklem sisteminin

$$x_{n_0} \in [a_1, b_1], \quad x_{n_0+1} \in [a_1, b_1], \quad y_{n_0} \in [a_2, b_2], \quad y_{n_0+1} \in [a_2, b_2] \quad (3.53)$$

şartını sağlayan her pozitif (x_n, y_n) çözümü sisteminin tek pozitif denge noktasına yakınsar (Papaschinopoulos ve Schinas, 2012).

Bir fark denkleminin veya sisteminin bir denge noktasına yakınsayan çözümlerinin yakınsaklık hızı da hesaplanabilir. Bununla ilgili sonuçları vermek için

$$X_{n+1} = (A + B(n))X_n, \quad (3.54)$$

vektörel fark denklem sistemini düşünelim. (3.54)'te X_n m -boyutlu bir vektör, $A \in C^{m \times m}$ sabit bir matris ve $B : Z^+ \rightarrow C^{m \times m}$, $n \rightarrow \infty$ için

$$\|B(n)\| \rightarrow 0 \quad (3.55)$$

şartını sağlayan bir matris fonksiyonu olsun. (3.55)' te verilen $\|\cdot\|$ sembolü

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.56)$$

vektör normunu ve buna karşılık gelen herhangi bir matris normunu göstermektedir. Bu durumda aşağıdaki iki sonuç (3.54) sisteminin yakınsaklık hızını verir.

Teorem 3.4.4. (Birinci Perron Teoremi): (3.55) şartı sağlansın. Eğer (3.54) sisteminin bir çözümü X_n ise yeterince büyük n değerleri için $X_n = 0$ veya

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|X_n\|)^{1/n} \quad (3.57)$$

olur. Verilen (3.57) eşitliğinde p sayısı A matrisinin öz değerlerinden birinin modülüne eşittir.

Teorem 3.4.5. (İkinci Perron Teoremi): (3.55) şartı sağlansın. Eğer (3.54) sisteminin bir çözümü X_n ise yeterince büyük n değerleri için ya $X_n = 0$ veya

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X_{n+1}\|}{\|X_n\|} \quad (3.58)$$

olur. Verilen (3.58) eşitliğinde p sayısı A matrisinin öz değerlerinden birinin modülüne eşittir.

4. İKİ BOYUTLU RASYONEL BİR FARK DENKLEM SİSTEMİNİN NİTEL İNCELEMESİ

Bu bölümde; $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i, (i = 1, 2)$, parametreleri ve x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 y_{n-1}}{a_1 + b_1 y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 x_{n-1}}{a_2 + b_2 x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.1)$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denklem sistemi tanımlanmış ve bu sistemin pozitif çözümlerinin nitel davranışı araştırılmıştır. Bu araştırma pozitif çözümlerin sınırlılığı ve dirençliliği, pozitif denge noktasının varlığı ve tekliği, pozitif denge noktasının lokal ve global kararlılığı, sistemin yakınsaklık hızı, sınırsız çözümlerin varlığı ve periyodik çözümleri konularını kapsar.

4.1. Çözümlerin Sınırlılığı ve Dirençliliği

Bu kısımda; (4.1) fark denklem sisteminin çözümlerinin sınırlılığı ve dirençliliği araştırılacaktır.

Teorem 4.1.1. Eğer $\beta_1 \beta_2 < a_1 a_2$ ise (4.1) rasyonel fark denklem sisteminin her pozitif $\{(x_n, y_n)\}$ çözümü sınırlı ve dirençlidir.

İspat. (4.1) sistemi

$$x_{n+1} = \frac{\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\beta_1}{a_1} y_{n-1}}{1 + \frac{b_1}{a_1} y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\beta_2}{a_2} x_{n-1}}{1 + \frac{b_2}{a_2} x_n} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. (4.2)' de $i \in 1, 2$ için $\frac{\alpha_i}{a_i} = A_i$ ve $\frac{\beta_i}{a_i} = B_i$ değişken değiştirmeleri yapılırsa $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$x_{n+1} = \frac{A_1 + B_1 y_{n-1}}{1 + \frac{b_1}{a_1} y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{A_2 + B_2 x_{n-1}}{1 + \frac{b_2}{a_2} x_n} \quad (4.3)$$

sistemi elde edilir. (4.3)' te verilen eşitliklerden;

$$x_{n+1} \leq A_1 + B_1 y_{n-1} \quad \text{ve} \quad y_{n+1} \leq A_2 + B_2 x_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.4)$$

fark eşitsizlikleri elde edilir. Karşılaştırma teoremini dikkate alarak

$$u_{n+1} = A_1 + B_1 v_{n-1}, \quad v_{n+1} = A_2 + B_2 u_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.5)$$

lineer denklem sistemini ele alalım. (4.5) lineer fark denklem sisteminde başlangıç şartları $u_{-1} = x_{-1}$, $u_0 = x_0$, $v_{-1} = y_{-1}$, $v_0 = y_0$ şeklindedir. (4.5) sisteminin birinci denklemi ikincisinde ve benzer şekilde ikincisi de birincisinde kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa birbirinden bağımsız olan

$$u_{n+1} = A_1 + B_1 A_2 + B_1 B_2 u_{n-3}, \quad (4.6)$$

ve

$$v_{n+1} = A_2 + B_2 A_1 + B_1 B_2 v_{n-3} \quad (4.7)$$

denklemleri elde edilir. (4.6) ve (4.7)'deki denklemler homojen olmayan lineer fark denklemleridir ve bunlar çözülebilirdir. Bu lineer fark denklemlerinin genel çözümlerini bakılırsa (4.6)'nın bir özel çözümü $u_n = A$ formunda aranabilir ve

$$u_n = \frac{A_1 + B_1 A_2}{1 - B_1 B_2} \quad (4.8)$$

olarak elde edilir. (4.6)'nın tamamlayıcı çözümü homojen kısmı olan

$$u_{n+1} = B_1 B_2 u_{n-3} \quad (4.9)$$

lineer denkleminin karakteristik denklemi ile bulunur. Böylece (4.9)'dan

$$\lambda^4 - B_1 B_2 = 0 \quad (4.10)$$

karakteristik denklemini ve

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{B_1 B_2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt[4]{B_1 B_2}, \quad \lambda_3 = -i\sqrt[4]{B_1 B_2}, \quad \lambda_4 = i\sqrt[4]{B_1 B_2} \quad (4.11)$$

karakteristik köklerini elde ederiz. Sonuç olarak (4.6)'nın genel çözümü

$$u_n = \frac{A_1 + B_1 A_2}{1 - B_1 B_2} + c_1 \left(\sqrt[4]{B_1} \sqrt[4]{B_2} \right)^n + c_2 \left(-\sqrt[4]{B_1} \sqrt[4]{B_2} \right)^n + c_3 \left(-i\sqrt[4]{B_1} \sqrt[4]{B_2} \right)^n + c_4 \left(i\sqrt[4]{B_1} \sqrt[4]{B_2} \right)^n \quad (4.12)$$

olarak bulunur. Benzer işlemler sonucu (4.7)'nin genel çözümü

$$v_n = \frac{A_2 + A_1 B_2}{1 - B_1 B_2} + c_1 \left(\sqrt[4]{B_1} \sqrt[4]{B_2} \right)^n + c_2 \left(-\sqrt{B_1} \sqrt{B_2} \right)^n + c_3 \left(-i \sqrt[4]{B_1} \sqrt[4]{B_2} \right)^n + c_4 \left(i \sqrt[4]{B_1} \sqrt[4]{B_2} \right)^n \quad (4.13)$$

olarak bulunur.

(4.12) ve (4.13)'ten kolayca görülür ki eğer $B_1 B_2 < 1$ ise yani $\beta_1 \beta_2 < a_1 a_2$ ise bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\alpha_1 a_2 + \alpha_2 \beta_1}{a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2} \quad (4.14)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{\alpha_2 a_1 + \alpha_1 \beta_2}{a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2} \quad (4.15)$$

olup $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri sınırlıdır. Ayrıca $u_{-1} = x_{-1}$, $u_0 = x_0$, $v_{-1} = y_{-1}$, $v_0 = y_0$ varsayımı ve Karşılaştırma teoremi ile $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin sınırlı olduğu sonucu ortaya çıkar. Şimdi $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri için üst sınırlar belirleyelim. $x_n \leq u_n$ ve $y_n \leq v_n$ olduğundan

$$x_n \leq \frac{\alpha_1 a_2 + \alpha_2 \beta_1}{a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2} = U_1 \quad (4.16)$$

ve

$$y_n \leq \frac{\alpha_2 a_1 + \alpha_1 \beta_2}{a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2} = U_2 \quad (4.17)$$

yazılabilir. Alt sınırları bulmak için (4.1), (4.14) ve (4.15) kullanılabilir. Böylece $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri için alt sınırlar

$$x_{n+1} \geq \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1 y_n} \geq \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1 \frac{\alpha_1 a_2 + \alpha_1 \beta_2}{a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2}} = \frac{\alpha_1 (a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2)}{a_1 (a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2) + b_1 (\alpha_1 a_2 + \alpha_1 \beta_2)} = L_1 \quad (4.18)$$

ve

$$y_{n+1} \geq \frac{\alpha_2}{a_2 + b_2 x_n} \geq \frac{\alpha_2}{a_2 + b_2 \frac{\alpha_1 a_2 + \alpha_1 \beta_2}{a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2}} = \frac{\alpha_2 (a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2)}{a_2 (a_1 a_2 - \beta_1 \beta_2) + b_2 (\alpha_1 a_2 + \alpha_1 \beta_2)} = L_2 \quad (4.19)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak; (4.16), (4.17), (4.18) ve (4.19)'den $n \geq 1$ için

$$L_1 \leq x_n \leq U_1, \quad L_2 \leq y_n \leq U_2 \quad (4.20)$$

olur, yani $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ sınırlı ve dirençlidir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç başlangıç şartları $[L_1, U_1] \times [L_2, U_2]$ kümesinden seçildiğinde Teorem 4.1.1'den doğal olarak ortaya çıkar.

Sonuç 4.1.1. $\{(x_n, y_n)\}$ dizisi (4.1) fark denklem sisteminin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda $[L_1, U_1] \times [L_2, U_2]$ kümesi (4.1) fark denklem sisteminin değişmez bir kümesidir.

4.2. Pozitif Denge Noktasının Kararlılığı

Bu kısımda; (4.1) fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının varlığı, tekliği ve bu tek pozitif denge noktasının lokal ve global asimptotik kararlılığı araştırılmıştır.

Aşağıdaki lemma (4.1) fark denklem sisteminin bir tek pozitif denge noktasının var olduğunu ifade eder.

Lemma 4.2.1. (4.1) fark denklem sistemi tek pozitif denge noktasına sahiptir.

İspat . (4.1)'in denge noktaları

$$\bar{x} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 \bar{y}}{a_1 + b_1 \bar{y}}, \quad \bar{y} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 \bar{x}}{a_2 + b_2 \bar{x}} \quad (4.21)$$

sisteminin çözümleridir. (4.21) sisteminin denklemleri birbiri içinde kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{x} - \frac{A_1 + B_1 \bar{x}}{C_1 + D_1 \bar{x}} = 0, \quad \bar{y} - \frac{A_2 + B_2 \bar{y}}{C_2 + D_2 \bar{y}} = 0 \quad (4.22)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$A_1 = \alpha_1 a_2 + \beta_1 \alpha_2,$$

$$B_1 = \alpha_1 b_2 + \beta_1 \beta_2,$$

$$C_1 = a_1 a_2 + b_1 \alpha_2,$$

$$D_1 = a_1 b_2 + b_1 \beta_2,$$

$$A_2 = a_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2,$$

$$B_2 = \alpha_2 b_1 + \beta_1 \beta_2$$

$$C_2 = a_1 a_2 + b_2 \alpha_1$$

$$D_2 = a_2 b_1 + b_2 \beta_1$$

kısaltmaları yapıldı. (4.22)'deki denklemler birbirinden bağımsızdır. Buradan

$$D_1 \bar{x}^2 + (C_1 - B_1) \bar{x} - A_1 = 0 \quad (4.23)$$

ve

$$D_2 \bar{y}^2 + (C_2 - B_2) \bar{y} - A_2 = 0 \quad (4.24)$$

ikinci dereceden polinom denklemlerine ulaşılır. (4.23) ve (4.24) denklemleri için

$$\Delta_{\bar{x}} = (C_1 - B_1)^2 + 4A_1 D_1 > 0 \quad (4.25)$$

ve

$$\Delta_{\bar{y}} = (C_2 - B_2)^2 + 4A_2 D_2 > 0 \quad (4.26)$$

olduğundan her iki denklemin daima iki ayrık reel kökü mevcuttur. Ayrıca $-A_1/D_1 < 0$ ve $-A_2/D_2 < 0$ olduğundan her iki denklemin kökleri zıt işaretlidir. Böylece (4.1) tek pozitif denge noktasına sahiptir.

Teorem 4.2.1. Eğer

$$(\beta_1 + b_1 \bar{x}) (\beta_2 + b_2 \bar{y}) < (a_1 + b_1 \bar{y}) (a_2 + b_2 \bar{x})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise (4.1) fark denklem sisteminin tek pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat: Lemma 4.2.1.den (4.1) fark denklem sisteminin tek pozitif denge noktası vardır. (4.1) sisteminin (\bar{x}, \bar{y}) denge noktası civarında hesaplanan lineerleştirilmiş sistemi

$$Z_{n+1} = J_F(\bar{x}, \bar{y})Z_n, \quad (4.27)$$

şeklinde elde edilir. Burada Z_n vektörü

$$Z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix},$$

F vektör dönüşümü

$$F \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 + \beta_1 y_{n-1}}{a_1 + b_1 y_n} \\ \frac{\alpha_2 + \beta_2 x_{n-1}}{a_2 + b_2 x_n} \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ve F dönüşümünün (\bar{x}, \bar{y}) sabit noktası civarındaki jakobiyen matrisi

$$J_F(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b_1 \bar{x}}{a_1 + b_1 \bar{y}} & 0 & \frac{\beta_1}{a_1 + b_1 \bar{y}} \\ -\frac{b_2 \bar{y}}{a_2 + b_2 \bar{x}} & 0 & \frac{\beta_2}{a_2 + b_2 \bar{x}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

şeklinde elde edilir. $J_F(\bar{x}, \bar{y})$ jakobiyen matrisinin karakteristik polinomu

$$P(\lambda) = \lambda^4 - \frac{b_1 b_2 \bar{x} \bar{y}}{(a_2 + b_2 \bar{x})(a_1 + b_1 \bar{y})} \lambda^2 + \frac{b_1 \beta_2 \bar{x} + \beta_1 b_2 \bar{y}}{(a_2 + b_2 \bar{x})(a_1 + b_1 \bar{y})} \lambda - \frac{\beta_1 \beta_2}{(a_2 + b_2 \bar{x})(a_1 + b_1 \bar{y})}$$

olarak elde edilir. $P(\lambda)$ polinomunun tüm sıfırları mutlak değerce 1'den küçük olduğunda (4.1) sisteminin (\bar{x}, \bar{y}) denge noktasının lokal asimptotik kararlı olacağını biliyoruz. Tüm sıfırların mutlak değerce 1'den küçük olması ve dolayısıyla denge noktasının lokal asimptotik kararlılığı için gerek ve yeter şartı Rouché teoremini kullanarak elde edebiliriz. Bunun

için $P(\lambda)$ polinomunu

$$\Phi(\lambda) = \lambda^4$$

ve

$$\Psi(\lambda) = \frac{-b_1 b_2 \bar{x} \bar{y}}{(a_2 + b_2 \bar{x})(a_1 + b_1 \bar{y})} \lambda^2 + \frac{b_1 \beta_2 \bar{x} + \beta_1 b_2 \bar{y}}{(a_2 + b_2 \bar{x})(a_1 + b_1 \bar{y})} \lambda - \frac{\beta_1 \beta_2}{(a_2 + b_2 \bar{x})(a_1 + b_1 \bar{y})}$$

şeklinde verilen iki polinomun toplamı şeklinde yazabiliriz. Buradan $|\lambda| < 1$ için, $\Phi(\lambda)$ polinomunun tüm sıfırları $|\lambda| < 1$ açık birim diskinin içindedir. Eğer $|\psi(\lambda)| < |\Phi(\lambda)|$ kabul edersek $P(\lambda)$ ve $\Phi(\lambda)$ polinomlarının tüm sıfırları katlılığı ile birlikte $|\lambda| < 1$ açık birim diskinin içinde kalır. Yani, eğer

$$\begin{aligned} |\Psi(1)| &= \frac{-b_1 b_2 \bar{x} \bar{y}}{(a_2 + b_2 \bar{x})(a_1 + b_1 \bar{y})} + \frac{b_1 \beta_2 \bar{x} + \beta_1 b_2 \bar{y}}{(a_2 + b_2 \bar{x})(a_1 + b_1 \bar{y})} - \frac{\beta_1 \beta_2}{(a_2 + b_2 \bar{x})(a_1 + b_1 \bar{y})} \\ &= \frac{(\beta_1 + b_1 \bar{x})(\beta_2 + b_2 \bar{y})}{(a_1 + b_1 \bar{y})(a_2 + b_2 \bar{x})} < 1 = \Phi(1) \end{aligned} \quad (4.29)$$

eşitsizliği sağlanırsa Rouché teoreminden $\Phi(\lambda)$ ve $P(\lambda) = \Phi(\lambda) + \psi(\lambda)$ polinomlarının $|\lambda| < 1$ açık birim diski içinde sıfırlarının sayısı aynıdır. Böylece Lemma 4.2.1'den (4.1) sisteminin (\bar{x}, \bar{y}) tek pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.2.2. Eğer $\beta_1 \beta_2 < a_1 a_2$ ise (4.1) sisteminin tek pozitif denge noktası global çekimlidir.

İspat: $\{(x_n, y_n)\}$ dizisi (4.1) sisteminin bir çözümü ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = M_1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = m_1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = M_2, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n = m_2 \quad (4.30)$$

olsun. Şimdi

$$f(u, v) = \frac{\alpha_1 + \beta_1 v}{a_1 + b_1 u} \quad (4.31)$$

ve

$$g(x, y) = \frac{\alpha_1 + \beta_1 y}{a_1 + b_1 x} \quad (4.32)$$

fonksiyonlarını dikkate alalım. f ve g fonksiyonlarının kısmi türevleri sırasıyla her $(u, v) \in (L_2, U_2)^2$ için

$$f_u(u, v) = -\frac{(\alpha_1 + \beta_1 v) b_1}{(a_1 + u b_1)^2} < 0, \quad f_v(u, v) = \frac{\beta_1}{a_1 + u b_1} > 0 \quad (4.33)$$

ve her $(x, y) \in (L_1, U_1)^2$ için

$$g_x(x, y) = -\frac{(\alpha_1 + \beta_1 y) b_1}{(a_1 + x b_1)^2} < 0, \quad g_y(x, y) = \frac{\beta_1}{a_1 + x b_1} > 0 \quad (4.34)$$

olarak bulunur. Yani f fonksiyonu her $v \in (L_2, U_2)$ için u değişkenine göre azalan ve her $u \in (L_2, U_2)$ için v değişkenine göre artandır. Benzer şekilde; g fonksiyonu her $y \in (L_1, U_1)$ için x değişkenine göre azalan ve her $x \in (L_1, U_1)$ için y değişkenine göre artandır. Böylece (M_1, m_1, M_2, m_2) çözümüne sahip olan

$$M_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1 M_2}{a_1 + b_1 m_2}, \quad m_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1 m_2}{a_1 + b_1 M_2}, \quad (4.35)$$

$$M_2 = \frac{\alpha_2 + \beta_2 M_1}{a_2 + b_2 m_1}, \quad m_2 = \frac{\alpha_2 + \beta_2 m_1}{a_2 + b_2 M_1}$$

sistemini yazabiliriz. (4.35) sisteminden

$$a_1 M_1 + b_1 M_1 m_2 = \alpha_1 + \beta_1 M_2, \quad (4.36)$$

$$a_1 m_1 + b_1 m_1 M_2 = \alpha_1 + \beta_1 m_2, \quad (4.37)$$

$$a_2 M_2 + b_2 M_2 m_1 = \alpha_2 + \beta_2 M_1, \quad (4.38)$$

$$a_2 m_2 + b_2 m_2 M_1 = \alpha_2 + \beta_2 m_1 \quad (4.39)$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.36) ve (4.37) taraf tarafa çıkarılırsa

$$\frac{a_1}{b_1}(M_1 - m_1) + M_1 m_2 - m_1 M_2 = \frac{\beta_1}{b_1}(M_2 - m_2) \quad (4.40)$$

eşitliği ve benzer şekilde (4.38) ve (4.39) taraf tarafa çıkarılırsa

$$\frac{a_2}{b_2}(M_2 - m_2) + M_2 m_1 - m_2 M_1 = \frac{\beta_2}{b_2}(M_1 - m_1) \quad (4.41)$$

eşitliği elde edilir. (4.40) ve (4.41) taraf tarafa toplanırsa

$$(a_1 b_2 - \beta_2 b_1)(M_1 - m_1) = (M_2 - m_2)(\beta_1 b_2 - b_1 a_2) \quad (4.42)$$

eşitliği elde edilir. $M_1 = m_1$ ve $M_2 = m_2$ olması için $a_1 b_2 - \beta_2 b_1 \neq 0$ ve $\beta_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla aşağıdaki dört durum ortaya çıkar.

- i) $a_1 b_2 > \beta_2 b_1$ ve $a_2 b_1 > \beta_1 b_2$
- ii) $a_1 b_2 > \beta_2 b_1$ ve $a_2 b_1 < \beta_1 b_2$
- iii) $a_1 b_2 < \beta_2 b_1$ ve $a_2 b_1 < \beta_1 b_2$
- iv) $a_1 b_2 < \beta_2 b_1$ ve $a_2 b_1 > \beta_1 b_2$

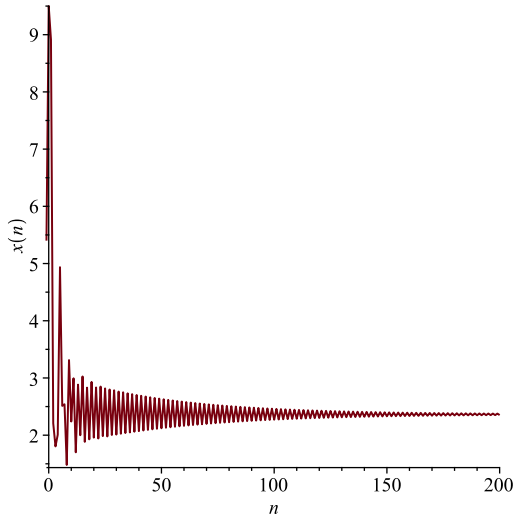
Bunlardan sadece *i*) durumu sınırlılık şartını sağlar. Dolayısıyla $\beta_1\beta_2 < a_1a_2$ ise Teorem 3.2.4.' e göre (4.1) sisteminin tek pozitif denge noktası vardır ve sistemin her pozitif çözümü bu denge noktasına yakınsar. Yani (4.1) sisteminin tek pozitif denge noktası global çekimlidir.

Teorem 4.2.2.'de elde ettiğimiz teorik sonucu doğrulamak için (4.1) sisteminin parametrelerine ve başlangıç şartlarına bazı değerler vererek elde edilen özel bir durum aşağıdaki örnekte verilir.

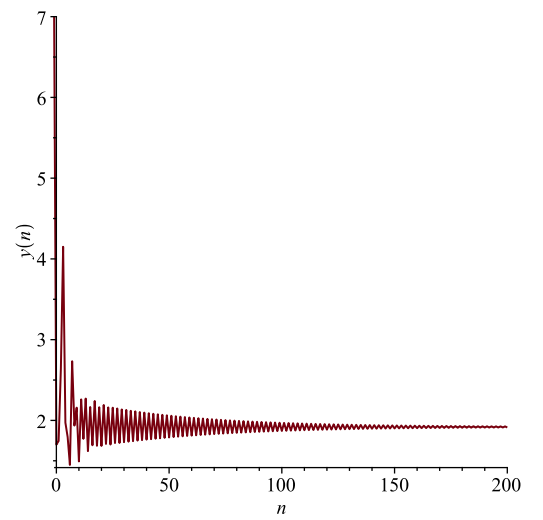
Örnek 4.2.1. (4.1) sisteminde $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 13.1$, $a_1 = 7$, $b_1 = 3$, $\alpha_2 = 12$, $\beta_2 = 3.5$, $a_2 = 8.2$, $b_2 = 1$ alınırsa

$$x_{n+1} = \frac{1 + 12.1y_{n-1}}{7 + 3y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{12 + 3.5x_{n-1}}{6 + x_n} \quad (4.43)$$

fark denklem sistemini elde ederiz. Bu durumda $\beta_1\beta_2 < a_1a_2$ şartı sağlanır ve böylece denge noktası $(2.364109242, 1.919175757)$ olup global çekimlidir. Başlangıç şartlarını $x_{-1} = 5.4$, $x_0 = 9.5$, $y_{-1} = 7$, $y_0 = 1.7$ seçersek elde edilen çözümün grafiği çözümün grafiği Şekil 4.1. ve Şekil 4.2. ile verilir.



Şekil 4.1. Global çekimli denge noktası (x_n)



Şekil 4.2. Global çekimli denge noktası (y_n)

Aşağıdaki teorem önceki iki teoremin teorik sonucudur.

Teorem 4.2.3. Eğer

$$(\beta_1 + b_1\bar{x})(\beta_2 + b_2\bar{y}) < (a_1 + b_1\bar{y})(a_2 + b_2\bar{x})$$

ve

$$\beta_1\beta_2 < a_1a_2$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.1) sisteminin tek pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat: Teorem 4.2.1'den sistemin tek pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu ve Teorem 4.2.2'den global çekimli olduğunu biliyoruz. Böylece hem lokal asimptik kararlı hem de global çekimli olduğundan Tanım 3.2.2'nin (d) şıkkı gereğince sistemin tek pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

4.3. Çözümlerin Yakınsaklık Hızı

Bu kısımda; (4.1) denklem sisteminin tek pozitif denge noktasına yakınsayan bir çözümünün yakınsama hızı belirlenecektir.

(x_n, y_n) dizisi (4.1) sisteminin $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ve $p = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}$ herhangi bir çözümü olsun. Burada $\bar{x} \in [L_1, U_1]$ ve $\bar{y} \in [L_2, U_2]$ aralığındadır. Hata terimlerini bulmak için (4.1) sisteminden

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \bar{x} &= \frac{\alpha_1 + \beta_1 y_{n-1}}{a_1 + b_1 y_n} - \frac{\alpha_1 + \beta_1 \bar{y}}{a_1 + b_1 \bar{y}} \\ &= \alpha_1 \left(\frac{1}{a_1 + b_1 y_n} - \frac{1}{a_1 + b_1 \bar{y}} \right) + \beta_1 \left(\frac{y_{n-1}}{a_1 + b_1 y_n} - \frac{\bar{y}}{a_1 + b_1 \bar{y}} \right) \\ &= \frac{\alpha_1 b_1 (\bar{y} - y_n)}{(a_1 + b_1 y_n)(a_1 + b_1 \bar{y})} + \frac{\beta_1 (a_1 y_{n-1} + y_{n-1} b_1 \bar{y} - a_1 \bar{y} - b_1 y_n \bar{y})}{(a_1 + b_1 y_n)(a_1 + b_1 \bar{y})} \\ &= \frac{-\alpha_1 b_1 (y_n - \bar{y}) + \beta_1 [a_1 (y_{n-1} - \bar{y}) + b_1 (y_{n-1} - \bar{y}) - \bar{y} (y_{n-1} - \bar{y})]}{(a_1 + b_1 y_n)(a_1 + b_1 \bar{y})} \\ &= \frac{-b_1 (\alpha_1 + \beta_1 \bar{y})}{(a_1 + b_1 y_n)(a_1 + b_1 \bar{y})} (y_n - \bar{y}) + \frac{\beta_1 (a_1 + b_1 \bar{y})}{(a_1 + b_1 y_n)(a_1 + b_1 \bar{y})} (y_{n-1} - \bar{y}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

ifadesi elde edilir. (4.44) ve (4.21) sisteminden

$$x_{n+1} - \bar{x} = \frac{-b_1\bar{x}}{(a_1 + b_1y_n)} (y_n - \bar{y}) + \frac{\beta_1}{(a_1 + b_1y_n)} (y_{n-1} - \bar{y}) \quad (4.45)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $y_{n+1} - \bar{y}$ sisteminin hata terimleri de elde edilebilir.

$$\begin{aligned} y_{n+1} - \bar{y} &= \frac{\alpha_2 + \beta_2 x_{n-1}}{a_2 + b_2 x_n} - \frac{\alpha_2 + \beta_2 \bar{x}}{a_2 + b_2 \bar{x}} \\ &= \alpha_2 \left(\frac{1}{a_2 + b_2 x_n} - \frac{1}{a_2 + b_2 \bar{x}} \right) + \beta_2 \left(\frac{x_{n-1}}{a_2 + b_2 x_n} - \frac{\bar{x}}{a_2 + b_2 \bar{x}} \right) \\ &= -\frac{\alpha_2 a_2 (x_n - \bar{x})}{(a_2 + b_2 x_n)(a_2 + b_2 \bar{x})} + \frac{\beta_2 [a_2 (x_{n-1} - \bar{x}) + b_2 \bar{x} (x_{n-1} - x_n)]}{(a_2 + b_2 x_n)(a_2 + b_2 \bar{x})} \\ &= \frac{(x_n - \bar{x})(-\alpha_2 b_2 - \beta_2 b_2 \bar{x}) + \beta_2 (x_{n-1} - \bar{x})(a_2 + b_2 \bar{x})}{(a_2 + b_2 x_n)(a_2 + b_2 \bar{x})(\alpha_2 + \beta_2 \bar{x})} \\ &= \frac{-b_2(\alpha_2 + \beta_2 \bar{x})}{(a_2 + b_2 x_n)(a_2 + b_2 \bar{x})} (x_n - \bar{x}) + \frac{\beta_2 (a_2 + b_2 \bar{x})}{(a_2 + b_2 x_n)(a_2 + b_2 \bar{x})} (x_{n-1} - \bar{x}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

(4.46) ve (4.21) sisteminden

$$y_{n+1} - \bar{y} = \frac{-b_2\bar{y}}{(a_2 + b_2x_n)} (x_n - \bar{x}) + \frac{\beta_2}{(a_2 + b_2x_n)} (x_{n-1} - \bar{x}) \quad (4.47)$$

eşitliği elde edilir. $e_n^1 = x_n - \bar{x}$ ve $e_n^2 = y_n - \bar{y}$ olsun. Bu durumda hata terimlerinin sistemi

$$e_{n+1}^1 = a_n e_n^2 + b_n e_{n-1}^2$$

$$e_{n+1}^2 = c_n e_n^1 + d_n e_{n-1}^1$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$a_n = \frac{-b_1\bar{x}}{a_1 + b_1y_n}, \quad b_n = \frac{\beta_1}{a_1 + b_1y_n}, \quad (4.48)$$

$$c_n = \frac{-b_2\bar{y}}{a_2 + b_2x_n}, \quad d_n = \frac{\beta_2}{a_2 + b_2x_n} \quad (4.49)$$

dir. Bu katsayıların n üzerinden limitleri alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{-b_1\bar{x}}{a_1 + b_1\bar{y}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\beta_1}{a_1 + b_1\bar{y}} \quad (4.50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{-b_2\bar{y}}{a_2 + b_2\bar{x}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{\beta_2}{a_2 + b_2\bar{x}} \quad (4.51)$$

değerlerine ulaşılır. Böylece hata terimlerinin limit sistemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{pmatrix} e_{n+1}^1 \\ e_{n+1}^2 \\ e_n^1 \\ e_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b_1\bar{x}}{a_1 + b_1\bar{y}} & 0 & \frac{\beta_1}{a_1 + b_1\bar{y}} \\ \frac{-b_2\bar{y}}{a_2 + b_2\bar{x}} & 0 & \frac{\beta_2}{a_2 + b_2\bar{x}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_n^1 \\ e_n^2 \\ e_{n-1}^1 \\ e_{n-1}^2 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Bu sistem (4.1) fark denklem sisteminin (\bar{x}, \bar{y}) denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş sistemine benzer formdadır. Teorem 3.4.4 ve Teorem 3.4.5'ten aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 4.3.1. (4.1) sisteminin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow \bar{x} \quad ve \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \rightarrow \bar{y}$$

şartını sağlayan pozitif bir çözümü $\{(x_n, y_n)\}$ olsun. Burada $\bar{x} \in [L_1, U_1]$ ve $\bar{y} \in [L_2, U_2]$ 'dir.

Bu durumda (4.1) sisteminin her çözümünün $\begin{pmatrix} e_{n+1}^1 \\ e_{n+1}^2 \\ e_n^1 \\ e_n^2 \end{pmatrix}$ hata vektörü

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (||e_n||)^{\frac{1}{n}} = |\lambda_{1,2,3,4} J_F(\bar{x}, \bar{y})| \quad (4.53)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{||e_{n+1}||}{||e_n||} = |\lambda_{1,2,3,4} J_F(\bar{x}, \bar{y})|$$

asimptotik bağıntılarını sağlar. (4.53) limit eşitliklerinde verilen $\lambda_{1,2,3,4} J_F(\bar{x}, \bar{y})$ Jakobiyen matrisinin karakteristik kökleridir.

4.4. Sınırsız Çözümlerinin Varlığı

Bu kısımda; (4.1) fark denklem sisteminin sınırsız çözümlerinin varlığı incelenecektir.

Teorem 4.4.1. Eğer $\beta_1\beta_2 > (a_1 + b_1U_2)(a_2 + b_2U_1)$ ise (4.1) fark denklem sisteminin her pozitif $\{(x_n, y_n)\}$ çözümü sınırsızdır.

İspat. $\beta_1\beta_2 > (a_1 + b_1U_2)(a_2 + b_2U_1)$ olsun. (4.1) sisteminden

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2x_{n-1}}{a_2 + b_2x_n} \geq \frac{\alpha_2 + \beta_2x_{n-1}}{a_2 + b_2U_1} \quad (4.54)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.54) eşitsizliğindeki $U_1 = \frac{\alpha_1a_2 + \beta_1\alpha_2}{a_1a_2 - \beta_1\beta_2}$ dir. Benzer şekilde (4.1) sisteminden

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1 + \beta_1y_{n-1}}{a_1 + b_1y_n} \geq \frac{\alpha_1 + \beta_1y_{n-1}}{a_1 + b_1U_2} \quad (4.55)$$

olduğu görülür. (4.55) eşitsizliğinde verilen $U_2 = \frac{\alpha_2a_1 + \alpha_1\beta_2}{a_1a_2 - \beta_1\beta_2}$ şeklindedir. Şimdi

$$w_{n+1} = c_2 + d_2z_{n-1}, \quad z_{n+1} = c_1 + d_1w_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.56)$$

lineer fark denklem sistemini dikkate alalım. (4.56)' de lineer fark denklemlerinde c_1, d_1, c_2, d_2 değerleri;

$$c_1 = \frac{\alpha_1}{a_1 + b_1U_2}, \quad d_1 = \frac{\beta_1}{a_1 + b_1U_2}, \quad c_2 = \frac{\alpha_2}{a_2 + b_2U_1}, \quad d_2 = \frac{\beta_2}{a_2 + b_2U_1} \quad (4.57)$$

şeklindedir. (4.56) lineer sisteminin denklemleri birbiri içinde kullanılır ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$w_{n+1} = c_2 + c_1d_2 + d_1d_2w_{n-3}, \quad (4.58)$$

$$z_{n+1} = c_1 + c_2d_1 + d_1d_2z_{n-3} \quad (4.59)$$

bağımsız lineer homojen olmayan fark denklemleri elde edilir. (4.58) ve (4.59) lineer fark denklemlerinin genel çözümleri, $n \geq 0$ için

$$w_n = \frac{c_2 + c_1d_2}{1 - d_1d_2} + r_1 \left(\sqrt[4]{d_1} \sqrt[4]{d_2} \right)^n + r_2 \left(-\sqrt{d_1} \sqrt{d_2} \right)^n + r_3 \left(-i \sqrt[4]{d_1} \sqrt[4]{d_2} \right)^n + r_4 \left(i \sqrt[4]{d_1} \sqrt[4]{d_2} \right)^n \quad (4.60)$$

ve

$$z_n = \frac{c_1 + c_2d_1}{1 - d_1d_2} + s_1 \left(\sqrt[4]{d_1} \sqrt[4]{d_2} \right)^n + s_2 \left(-\sqrt{d_1} \sqrt{d_2} \right)^n + s_3 \left(-i \sqrt[4]{d_1} \sqrt[4]{d_2} \right)^n + s_4 \left(i \sqrt[4]{d_1} \sqrt[4]{d_2} \right)^n \quad (4.61)$$

şeklinde elde edilir. (4.60) ve (4.61) genel çözümlerinde $r_j, s_j, (j = 1, 2, 3, 4)$, katsayıları keyfi sabitlerdir. (4.60) ve (4.61) genel çözümlerinden açıkça görülür ki $d_1 d_2 > 1$ ise, yani

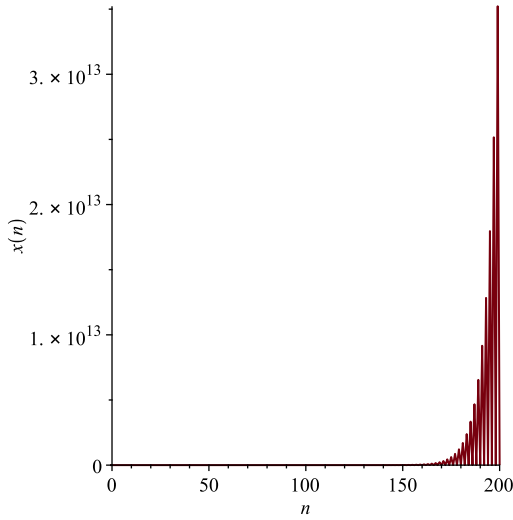
$$\beta_1 \beta_2 > (a_1 + b_1 U_2)(a_2 + b_2 U_1)$$

şartı sağlanırsa (w_n) ve (z_n) dizileri sınırsızdır. Karşılaştırma teoremi gereğince (x_n) ve (y_n) dizileri de sınırsızdır. Böylece ispat tamamlanır.

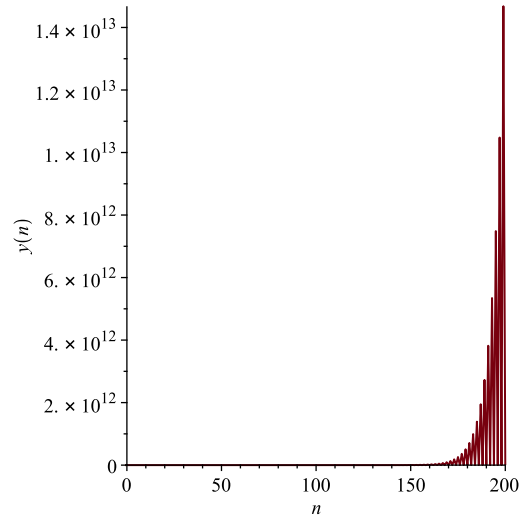
Örnek 4.4.1. (4.1) sisteminde $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 12.1, a_1 = 3.6, b_1 = 3, \alpha_2 = 12, \beta_2 = 3.5, a_2 = 6, b_2 = 1$ alınırsa

$$x_{n+1} = \frac{1 + 12.1y_{n-1}}{3.6 + 3y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{12 + 3.5x_{n-1}}{6 + x_n} \quad (4.62)$$

fark denklem sistemini elde ederiz. Bu durumda $\beta_1 \beta_2 > (a_1 + b_1 U_2)(a_2 + b_2 U_1)$ şartı sağlanır ve denge noktası $(2.808100791, 2.478213327)$ olup kararsızdır. Başlangıç şartları $x_{-1} = 5.4, x_0 = 9.5, y_{-1} = 7, y_0 = 1.7$ olarak seçilirse elde edilen çözümün grafiği Şekil 4.3. ve Şekil 4.4. ile verilir.



Şekil 4.3. Sınırsız x_n nin çizimi



Şekil 4.4. Sınırsız y_n nin çizimi

4.5. Periyodik Çözümlerin Varlığı

Bu kısımda; (4.1) sisteminin iki periyotlu çözümlerinin varlığı araştırılacaktır. Aşağıdaki teorem iki periyotlu çözümlerin varlığını ifade eder.

Teorem 4.5.1. Eğer $a_1a_2 = \beta_1\beta_2$ ise (4.1) sistemi esas periyodu iki olan çözümlere sahiptir.

İspat. (4.1) sisteminin $p_1 \neq p_2$ ve $q_1 \neq q_2$ şartlarını sağlayan periyodik çözümü

$$\dots, (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots \quad (4.63)$$

şeklinde olsun. Burada p_1, p_2, q_1, q_2 pozitif reel sayılardır. (4.1) fark denklem sisteminden aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\alpha_1 + \beta_1 q_1}{a_1 + b_1 q_2}, & p_2 &= \frac{\alpha_1 + \beta_1 q_2}{a_1 + b_1 q_1}, \\ q_1 &= \frac{\alpha_2 + \beta_2 p_1}{a_2 + b_2 p_2}, & q_2 &= \frac{\alpha_2 + \beta_2 p_2}{a_2 + b_2 p_1}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

(4.64) sisteminde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$p_1 a_1 + p_1 b_1 q_2 = \alpha_1 + \beta_1 q_1, \quad p_2 a_1 + p_2 b_1 q_1 = \alpha_1 + \beta_1 q_2 \quad (4.65)$$

$$q_1 a_2 + q_1 b_2 p_2 = \alpha_2 + \beta_2 p_1, \quad q_2 a_2 + q_2 b_2 p_1 = \alpha_2 + \beta_2 p_2 \quad (4.66)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.65) ve (4.66)'deki eşitlikler kendi içinde taraf tarafa çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{a_1}{b_1}(p_1 - p_2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 = \frac{\beta_1}{b_1}(q_1 - q_2) \quad (4.67)$$

ve

$$\frac{a_2}{b_2}(q_1 - q_2) + q_1 p_2 - q_2 p_1 = \frac{\beta_2}{b_2}(p_1 - p_2) \quad (4.68)$$

eşitlikleri bulunur. (4.67) ve (4.68) taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(a_1 b_2 - b_1 \beta_2)(p_1 - p_2) + (a_2 b_1 - \beta_1 b_2)(q_1 - q_2) = 0 \quad (4.69)$$

eşitliği elde edilir. $p_1 \neq p_2$ ve $q_1 \neq q_2$ kabulleri ile birlikte (4.5) eşitliğinden kolayca görülür ki

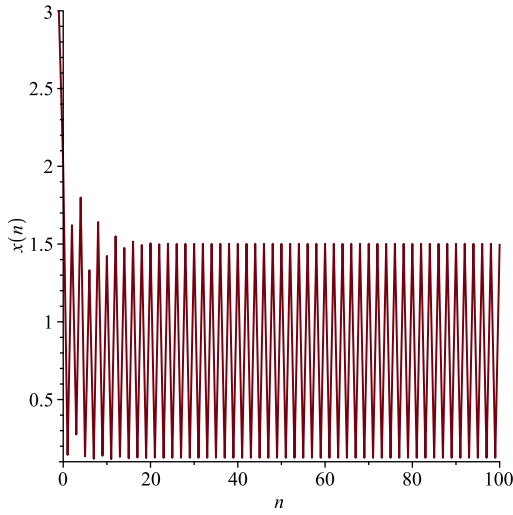
$$a_1 b_2 - b_1 \beta_2 = 0 \quad \text{ve} \quad a_2 b_1 - \beta_1 b_2 = 0 \quad (4.70)$$

olduğunda (4.1) sistemi iki periyotlu çözümlere sahiptir. Sonuç olarak (4.70) eşitliğinden $a_1 a_2 = \beta_1 \beta_2$ sonucu elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

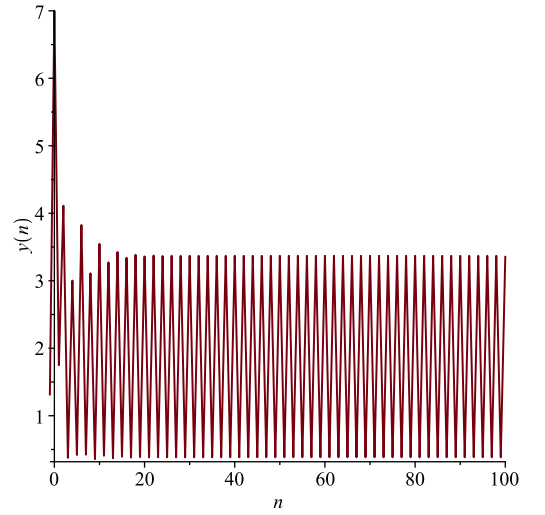
Örnek 4.5.1. (4.1) sisteminde $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 6$, $a_1 = 12$, $b_1 = 9$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 4$, $a_2 = 2$, $b_2 = 3$ alınırsa

$$x_{n+1} = \frac{3 + 6y_{n-1}}{12 + 9y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{2 + 4x_{n-1}}{2 + 3x_n} \quad (4.71)$$

fark denklem sistemini elde ederiz. Bu durumda $a_1 a_2 = \beta_1 \beta_2$ şartı sağlanır ve denge noktası $(0.4413911092, 1.132782218)$ olup kararsızdır. Başlangıç şartlarını $x_{-1} = 3$, $x_0 = 2$, $y_{-1} = 1.3$, $y_0 = 7$ seçilirse elde edilen çözümün grafiği Şekil 4.5. ve Şekil 4.6. ile verilir.



Şekil 4.5. Periyodik x_n nin çizimi



Şekil 4.6. Periyodik y_n nin çizimi

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada iki boyutlu (4.1) rasyonel fark denklem sisteminin bazı şartlar altında pozitif çözümlerinin sınırlılığı ve dirençliliği, tek pozitif denge noktasının varlığı ve tekliği, tek pozitif denge noktasının lokal ve global asimptotik kararlılığı, sınırsız çözümlerin varlığı ve pozitif iki periyotlu çözümlerin varlığı çalışıldı. Ayrıca sistemin tek pozitif denge noktasına yakınsayan bir çözümünün yakınsaklık hızına dair bir sonuç elde edildi. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 5.1. (4.1) Sisteminin Çözümlerinin Davranışı

Parametrelerin Durumu	Çözümlerin Durumu
$\beta_1\beta_2 < a_1a_2$	Çözümler sınırlı ve (\bar{x}, \bar{y}) denge noktası global çekimli
$\beta_1\beta_2 = a_1a_2$	Çözümler sınırlı ve iki periyotlu
$\beta_1\beta_2 > (a_1 + b_1U_2)(a_2 + b_2U_1)$	Çözümler sınırsız

5.2. Öneriler

Bu çalışmada ele alınan sistem ikinci mertebeden ve iki boyutludur. Bu özellikler değiştirilip daha yüksek mertebeden ya da daha yüksek boyutlu sistemler elde edilebilir. Elde edilen sistemlerin denge noktalarının kararlılık karakterleri ve çözümlerinin salınımlılık, periyodiklik gibi özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Abu-Saris, R., Cinar, C. and Yalcinkaya, I., 2008, On the asymptotic stability of $x_{n+1} = (x_n x_{n-k} + a)/(x_n + x_{n-k})$, *Computers & Mathematics with Applications*, 56(5), 1172-1175.
- [2] Balcı, M., 2016, *Matematik Analiz 2*, Palme Yayıncılık, Ankara.
- [3] Bereketoğlu, H. ve Kutay, V., 2012, *Fark Denklemleri*, Gazi Kitabevi, Ankara.
- [4] Berg, L. and Stević S., 2011, On some systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 1713-1718.
- [5] Camouzzis E., Chatterjee, E. and Ladas, G., 2007, On the dynamics of $x_{n+1} = \delta x_{n-2} + x_{n-3}/A + x_{n-3}$, *Journal Mathematical Analysis And Applications*, 331, 230-239 .
- [6] Camouzzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- [7] Clarck D. and Kulenović M. R. S., 2002, A coupled system of rational difference equations, *An International Journal Computers and Mathematics with Applications*, 43, 849-867.
- [8] Çatal, S., 2004, Cebirsel katsayılı homojen diferansiyel denklemlerin fark denklemleri ile çözümü, *Deü Mühendislik Fköltesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(1), 129-138.
- [9] Das, S. E. and Bayram, M., 2010, On a system of rational difference equations, *World Applied Sciences Journal* , 10(11), 1306-1312.
- [10] Din, Q., 2013, Dynamics of a discrete Lotka-Volterra model, *Advances in Difference Equations*, 95, 1-13.
- [11] Din, Q. and Elsayed, E. M., 2014, Stability analysis of a discrete ecological model, *Computational Ecology and Software* , 4(2), 89-103.
- [12] Din Q., Ibrahim, T. F. and Khan, K. A., 2014, Behavior of competitive system of second order difference equations, *The Scientific World Journal*, 2014, 9.
- [13] Din, Q., 2016, Asymptotic behavior of an anti-competitive system of second-order difference equations, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24, 37-43.
- [14] Elaydi, S., 1995, *An Introduction to Difference Equations*, Springer-Verlag, New York.
- [15] El-Dessoky, M. M., 2016a, On a solvable for some systems of rational difference equations, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9, 3744-3759.
- [16] El-Dessoky, M. M., 2016b, Solution for rational systems of difference equations of order

three, *Mathematics* , 4(53), 1-12.

- [17] El-Dessoky, M. M., 2016c, On the solutions and periodicity of some nonlinear systems of difference equations, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9, 2190-2207.
- [18] El-Dessoky, M. M., 2016d, The form of solutions and periodicity for some systems of third order rational difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 1076-1092.
- [19] El-Metwally, H. and Grove, E. A., Ladas, G., Levins, R., Radin, M., 2001, On the difference equation $x_{n+1} = a + \beta x_{n-1} e^{-x_n}$, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Advances in Difference Equations*, 47(7), 4623-4634.
- [20] El-Metwally, H., 2013, Solutions form for some rational systems of difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 903593, 10 pages.
- [21] Elsayed M. E., 2011, On the solution of some difference equations, *European Journal Of Pure and Applied Mathematics*, 4(3), 287-303.
- [22] Elsayed, E. M. and Ahmed, A. M., 2016, Dynamics of a three-dimensional systems of rational difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 1026-1038.
- [23] Elsayed, E. M. and Alghamdi, A., 2016, The form of the solutions of nonlinear difference equations systems, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9(5), 3179-3196.
- [24] Elsayed, E. M., Alotaibi, A. and Almaylubi, A. H., 2017, On a solutions of fourth order rational systems of difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 7(22), 1298-1308.
- [25] Elsayed, E. M., 2017, On a solutions and periodicity of some rational systems of difference equations, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 2(108), 159-171.
- [26] Garic-Demirović, M., Kulenović, M. R. S. and Nurkanović, M., 2009, Global behavior of four competitive rational systems of difference equations in the plane, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2009, 34s, Article ID 153058.
- [27] Gibbons, C. H., Kulenović, M. and Ladas, G., 2000, On the recursive sequence $y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\gamma + y_n}$, *Mathematical Sciences Research Hot-Line*, 4(2), 1-11.
- [28] Grove, E. A. and Ladas, G., 2005, Periodicities in Nonlinear Difference Equations, *Chapman & Hall/CRC*, ISBN 9780429128202, Boca Raton, Fla, USA, 392.
- [29] Kelley, W., G., and Peterson, A., C., 2001, Difference Equations An Introduction with Applications, *Academic Press*, USA.
- [30] Khan, A. Q. Din, Q., Qureshi, M. N. and Ibrahim, T. F. 2014, Global behavior of an anti-

competitive system of fourth-order rational difference equations, *Computational Ecology and Software*, 4(1), 35-46 .

- [31] Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications, Kluwer Academic Publishers, London.
- [32] Kulenović, M. R. S. and Ladas, G., 2002, Dynamics of second order rational difference equations, *Chapman & Hall/CRC* ISBN 9780429122781, Boca Raton, Fla, USA, 232.
- [33] Kurbanli, A. S., Çınar, C. and Şimşek, D., 2011, On the periodicity of solutions of the system of rational difference equations, *Applied Mathematics*, 2, 410-413.
- [51] Li, X. and Zhu, D., 2003, Global asymptotic stability in a rational equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(9), 833-839.
- [35] Li, X. and Zhu, D., 2004, Two rational recursive sequences, *Computers and Mathematics with Applications*, 47, 1487-1494.
- [36] Özkın İ. K., 1989, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Ertem Matbaacılık, Ankara.
- [37] Papaschinopoulos, G., Radin, M. A. and Schinas, C. J., 2011, On the system of two difference equations of exponential form: $x_{n+1} = a + \beta x_{n-1} e^{-x_n}$, *Mathematical and Computer Modelling* 54(11-12), 2969–2977.
- [38] Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., 2012, On the dynamics of two exponential type systems of difference equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 64(7), 2326–2334 .
- [39] Phong, M. N., 2020, A note on the global behavior of a system of second-order rational difference equations, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 8(2) , 81-93.
- [40] Pituk, M., 2002, More on Poincare’s and Perron’s theorems for difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 8(3), 201–216 .
- [41] Sedaghat, H., 2003, Nonlinear Difference Equations: Theory with Applications to Social Science Models (vol. 15) of Mathematical Modelling: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [42] Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, Lineer Fark Denklemleri, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- [43] Stević, S., 2012, On some solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 5010-5018.
- [44] Şahinkaya, A. F., Yalçınkaya, İ. and Tollu, D. T., 2018, A solvable system of nonlinear difference equations, *Ikonion Journal of Mathematics*, 2(1), 10-20.

- [45] Tang, X. and Zou, X., 2006, On positive periodic solutions of Lotka Volterra competition systems with deviating arguments, *Proceedings of the American Mathematical Society* 134(10), 2967–2974 .
- [46] Taşdemir, E., Erdoğan Taşdemir T., 2020, On the stability Of a third order difference equation, *Kirklareli University Journal of Engineering and Science* , 6(2), 132-141.
- [47] Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2013, On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers, *Advances in Difference Equations*, 2013, 174.
- [48] Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2014, On fourteen solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 233, 310-319.
- [49] Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2017, On global behavior of a system of nonlinear difference equations of order two, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 27(3), 373-383.
- [50] Tollu, D. T., Yalçinkaya, İ., Ahmed, H., Yao, S. W. 2021, A detailed study on a solvable system related to the linear fractional difference equation, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 18(5), 5392–5408.
- [51] Yalcinkaya, I., Cinar, C. and Simsek D., 2008, Global asymptotic stability of a system of difference equations, *Applicable Analysis*, 6(87), 677-687.
- [52] Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2013, On the solutions of difference equation systems with padovan numbers, *Applied Mathematics*, 4, 15-20.
- [53] Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2015, On the behaviour of solutions for some systems of difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 18(1), 166-178.
- [54] Zhou, Z. and Zou, X. , 2003, Stable periodic solutions in a discrete periodic logistic equation, *Applied Mathematics Letters* 16, 2, 165–171.