



T.C.  
NECMETTİN ERBAKAN  
ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



$\varphi$  -TEKRARLAYAN HEMEN HEMEN

KOSİMPLEKTİK  $(\kappa, \mu)$  -UZAYLARI

Başak ELİGÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2021  
KONYA  
Her Hakkı Saklıdır

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



**Başak ELİGÜL**  
14.07.2021

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

$\varphi$  – TEKRARLAYAN HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK  $(\kappa, \mu)$  -UZAYLARI

**Başak ELİGÜL**

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN**

**2021, 50 Sayfa**

**Jüri**

**Prof. Dr. Nesip AKTAN**

**Doç. Dr. Melek ERDOĞDU**

**Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR**

Bu tezin amacı; genelleştirilmiş  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzaylarından yararlanarak çeşitli ispatlar gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, pseudo-projective  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayları üzerinde konu ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Ve ek olarak concircular  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzaylarında da çalışma gerçekleştirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Hemen hemen kosimplektik manifold,  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayı

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**$\varphi$  – RECURENT ALMOST COSYMLECTIC  $(\kappa, \mu)$ -SPACES**

**Başak ELİGÜL**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS**

**Advisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN**

**2021, 50 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Nesip AKTAN**

**Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU**

**Asst. Prof. Dr. Gülhan AYAR**

The aim of this thesis is that various proofs have been carried out by using  $\varphi$  – recurrent almost cosymplectic  $(\kappa, \mu)$ - spaces. Also, related studies have been done on pseudo projective  $\varphi$  – recurrent almost cosymplectic  $(\kappa, \mu)$  - spaces. And in addition work has been carried out in concircular  $\varphi$  – recurrent almost cosymplectic  $(\kappa, \mu)$ - spaces.

**Keywords:** Almost cosymplectic manifold,  $\varphi$  – recurrent almost cosymplectic  $(\kappa, \mu)$ - spaces

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Başak ELİGÜL  
KONYA-2021

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ .....</b>	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER .....</b>	<b>vii</b>
<b>SİMGELER.....</b>	<b>viii</b>
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR .....</b>	<b>3</b>
2.1. Riemann Manifoldlar .....	3
2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlar .....	9
2.3. Hemen Hemen Kosimplektik Manifoldlar .....	19
2.4. Hemen Hemen Kosimplektik $(\kappa, \mu)$ - Uzayları .....	23
2.5. Ricci Soliton.....	28
<b>3. <math>\varphi</math>-TEKRARLAYAN HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK <math>(\kappa, \mu)</math>-</b>	
<b>UZAYLARI .....</b>	<b>30</b>
3.1. Tensör Alanı Özellikleri .....	30
3.2. Eğrilik Özellikleri .....	32
3.3. Genelleştirilmiş $\varphi$ -Tekrarlayan Hemen Hemen Kosimplektik $(\kappa, \mu)$ -Uzayları	34
3.4. Pseudo-Projective $\varphi$ -Tekrarlayan Hemen Hemen Kosimplektik $(\kappa, \mu)$ -Uzayları	36
3.5. Concircular $\varphi$ -Tekrarlayan Hemen Hemen Kosimplektik $(\kappa, \mu)$ -Uzayları .....	38
<b>4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....</b>	<b>41</b>
<b>5. KAYNAKLAR .....</b>	<b>42</b>

## SİMGELER

### Simgeler

$D$	Değme dağılımı
$div$	Divergens operatörü
$J$	Hemen hemen kompleks yapı
$B$	İkinci temel form
$M^n(c)$	$c$ sabit eğrilikli uzay form
$\nabla$	Levi-Civita konneksiyonu
$L$	Lie türev operatörü
$\chi(M)$	$M$ üzerindeki $C^\infty$ vektör alanları uzayı
$TM$	$M$ üzerindeki tanjant demeti
$TM^\perp$	$M$ üzerindeki tanjant demetlerinin ortogonal tümleyeni
$N$	Nijenhuis tensör alanı
$O(s)$	Ortogonal grup
$R$	Riemann eğrilik tensörü
$U(n)$	Üniter grup
$C$	Wely konformal eğrilik tensör alanı

## 1. GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldları çok önemli bir yere sahiptir.  $(2n+1)$ -boyutlu bir  $C^\infty$  sınıfından diferensiyellenebilir  $M$  manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı  $U(n) \times 1$  tipine indirgenbiliyorsa  $M$  ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, 1959 yılında J.Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada  $U(n) \times 1$  yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre,  $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(X) = 1 \quad (1.1)$$

denklemlerini sağlayan  $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı  $\varphi$ , bir vektör alanı  $\xi$  ve bir 1-form olan  $\eta$  ile oluşturulan  $(\varphi, \xi, \eta)$ -üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir  $g$  metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının  $J$  kompleks yapısının  $J^2 = -I$  integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

Hemen hemen değme metrik yapıya bağlı kalarak, (Goldberg ve Yano 1969) kosimplektik manifoldu tanımlamışlardır. Bu tanımlamayı takip eden yıllarda özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde birçok çalışmaya imza atmıştır (Olszak 1981-89).

$(\kappa, \mu)$ - uzayları ilk olarak değme metrik manifoldlarda belli bir özel eğrilik şartı olan

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)(\kappa I + \mu h)X - \eta(X)(\kappa I + \mu h)Y$$

denklemleriyle Blair tarafından incelenmiştir. Burada  $\kappa, \mu$  fonksiyonları reel sabitler ve

$h = \frac{1}{2} L_\xi \varphi$  olarak alınmıştır (Blair 1995). Bu uzaylar  $D_\alpha$  - homotetik dönüşümler altında

değişmez.  $D_\alpha$  - homotetik dönüşümler yardımıyla Boeckx değme metrik manifoldlar üzerinde  $(\kappa, \mu)$ - uzayları için tam sınıflandırma vermiştir (Boeckx 2000). Bu çalışmaları takiben, Koufogiorgos  $(\kappa, \mu)$ - uzayları için  $\kappa, \mu$  fonksiyonlarını sabit olmayan fonksiyonlar olarak 3- boyutta örneklerle incelemiştir. Bunun yanı sıra, boyutun 3 ten büyük olması durumunda  $\kappa, \mu$  fonksiyonlarının sabit olacağını ispatlamıştır. Aksi halde,  $(\kappa, \mu)$ - yapılarının var olmayacağını göstermiştir (Koufogiorgos 2000).

1986 yılında Ricci soliton kavramını Hamilton ‘Four manifolds with positive curvature operator’ adlı makalesi ile literatüre kazandırmıştır. 1993 yılında Iwey kompakt 3-manifoldlarda Ricci soliton konusunu çalışmış ve 2006 yılında Cao Ricci solitonların geometrisi adı altında bir makale yayınlamıştır. K- Kontakt manifoldlara bu konuyu 2008 yılında ilk Sharma çalışmıştır. 2013 yılında Ghosh Ricci solitonları kontakt metrik manifoldlarda çalışmış ve aynı zamanlarda Nagarajara ve Premalatha 2012 yılında Kenmotsu manifoldlarda Ricci solitonu çalışmışlardır. 2013 yılında Bagewadi, Ingalahalli ve Ashoka farklı koşullar altında Kenmotsu manifoldlarda Ricci soliton ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Aynı yıl ayrıca Bagewadi ve Ingalahalli trans-Sasakian manifoldlarda Ricci soliton çalışmışlardır.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmuştur.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde konu ile ilgili literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde, manifoldlar ve alt manifoldlar ile ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır. Bu bölüm beş alt başlıktan oluşmaktadır. İlk kısımda, Riemann manifoldlar ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. İkinci kısımda, hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü kısımda, hemen hemen kosimplektik manifoldlar hakkında temel kavramlar tanıtılmıştır. Dördüncü kısımda, hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - uzaylarına ait temel tanım ve özelliklerine yer verilmiştir. Son kısımda ise Ricci solitonlar hakkında temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, temel tensör alanı ve eğrilik özellikleri verilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş  $\varphi$ - tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - uzayları , pseudo-projective  $\varphi$ - tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - uzayları ve concircular  $\varphi$ - tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - uzayları verilmiştir.

Son bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerdeki çalışmalarımız için gerekli olan manifoldlar ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

### 2.1. Riemann Manifoldlar

Bu kısımda, Riemann manifoldların temel kavramlar tanıtılacaktır.

**Tanım 2.1.1.**  $M^n$ ,  $n$ -boyutlu bir  $C^\infty$  manifold olsun.  $M^n$  üzerinde vektör alanlarının uzayı  $\chi(M^n)$  ve reel değerli  $C^\infty$  fonksiyonlarının halkası  $C^\infty(M^n, \mathfrak{R})$  olmak üzere,

$$g : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n, \mathfrak{R})$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir  $g$  dönüşümüne  $M^n$  üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve  $(M^n, g)$  ikilisiyle verilen manifoldda bir Riemann manifoldu denir (O'Neill 1983).  $M^n$  manifoldunun herhangi iki  $p$  ve  $q$  noktası için  $M^n$  üzerinde bu noktalar birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa,  $M^n$  ye bağlantılı manifold adı verilir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.1.2.**  $M^n$  bir  $C^\infty$  manifold olsun.  $M^n$  üzerinde vektör alanlarının uzayı  $\chi(M^n)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M^n) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü,  $\forall f, g \in C^\infty(M^n, \mathfrak{R}), \forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$  için,

$$i) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$\text{ii)} \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

$$\text{iii)} \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y,$$

özellikleri sağlanıyorsa  $\nabla$  ya  $M^n$  üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.1.3.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu ve  $\nabla$  da  $M^n$  üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman,  $\nabla$  dönüşümü;  $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$  için,

$$\text{i)} \quad \nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y] \text{ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),}$$

$$\text{ii)} \quad Xg(Y, Z) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ) \text{ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),}$$

şartlarını sağlıyorsa  $\nabla$  ya  $M^n$  üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya  $M^n$  nin Levi-Civita konneksiyonu denir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.1.4.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu ve  $\nabla$  da  $M^n$  üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} R : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\rightarrow \chi(M^n) \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X, Y]}Z \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

ile tanımlanan  $(1, 3)$ -tipli tensör alanı  $R$  ye  $M^n$  nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca,  $\forall X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$  olmak üzere,  $R$  Riemann eğrilik tensörü

$$\text{i)} \quad R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z,$$

$$\text{ii)} \quad g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V),$$

$$\text{iii)} \quad R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

$$\text{iv)} \quad g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y),$$

özelliklerini sağlar (O'Neill 1983).

**Önerme 2.1.1.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu,  $\nabla$  da  $M^n$  üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve  $E$ ,  $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_x E)Y = \nabla_x EY - E(\nabla_x Y)$$

dır (O'Neill 1983).

**Önerme 2.1.2.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu olsun.  $F$  simetrik bir tensör alan olmak üzere, her  $X, Y, Z$  vektör alanları için,

$$g((\nabla_x F)Y, Z) = g(Y, (\nabla_x F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'Neill 1983).

**Önerme 2.1.3.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu olsun.  $G$  ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her  $X, Y, Z$  vektör alanları için,

$$g((\nabla_x G)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_x G)Z)$$

dır (O'Neill 1983).

**Tanım 2.1.5.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu olsun.  $T_p M$  tanjant uzayının iki boyutlu alt uzay  $\Pi$  ve  $V, W \in \Pi$  vektörleri üzerine kurulan paralel kenarını alan

$$g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2}$$

eşitliğine  $\Pi$  nin kesit eğriliği denir ve  $K(\Pi)$  ile gösterilir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.1.6.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu ve  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$S : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow \mathfrak{R} \quad (2.1.2)$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

şeklinde tanımlı  $(0,2)$ -tipindeki  $S$  tensör alanına  $M^n$  üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrıca,  $(0,2)$ -tipli  $Q$  Ricci operatörü

$$S(X, Y) = g(QX, Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.1.7.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu ve  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i)$$

değerine  $M^n$  nin skalar eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.1.8.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu ve  $M^n$  üzerinde bir pozitif fonksiyon  $\rho$  olsun. Bu durumda,  $g^* = \rho^2 g$  eşitliği  $M^n$  üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer  $\rho$  fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer  $\rho$  fonksiyonu özdeş olarak 1'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer bir  $g$  Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir  $g^*$  Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman,  $M^n$  Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir (Yano ve Kon 1984).

**Teorem 2.1.1.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu olsun.  $M^n$  nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul  $n > 3$  için  $C = 0$  ve  $n = 3$  için  $C = 0$  olmasıdır (Yano ve Kon 1984).

**Teorem 2.1.2.**  $(M^n, g)$  bir sabit  $k$  eğriliklerine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda,  $M^n$  üzerindeki herhangi  $X, Y, Z$  vektör alanlar için,

$$R(X, Y)Z = k[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

dır (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.1.9.**  $k$  sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir.  $n$ -boyutlu bir  $M^n$  uzay formu  $M^n(k)$  ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

**Sonuç 2.1.1.**  $(M^n, g)$  bir sabit  $k$  eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda,  $n \geq 2$  için,

$$M^n(k) = \begin{cases} k = 0 & \text{ise } M^n(k) = E^n \text{ Öklid uzayı,} \\ k = \frac{1}{r^2} & \text{ise } M^n(k) = S^n(r) \text{ küresi,} \\ k = -\frac{1}{r^2} & \text{ise } M^n(k) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay,} \end{cases}$$

dır (O'Neill 1983).

**Tanım 2.1.10.**  $M^n$  bir  $C^\infty$  manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi : R \times M^n &\rightarrow M^n \\ (t, p) &\rightarrow \varphi_t(p) \end{aligned}$$

dönüşümü

- i)  $\forall t \in R$  için,  $\varphi_t : P \rightarrow \varphi_t(P)$  diffeomorfizm,
- ii)  $\forall t, s \in R$  ve  $P \in M^n$  için,  $\varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$

şartlarını sağlıyorsa  $\varphi$  ye  $M^n$  nin diferensiyellenebilir bir 1-parametrel grubu denir (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.1.11.**  $M^n$  bir  $C^\infty$  manifold ve  $M^n$  üzerindeki bir vektör alanı  $X$  olmak üzere,  $X$  ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametrel grup  $\varphi_t$  olsun. O zaman,  $K$  bir tensör alanı ve  $p \in M^n$  için,

$$(L_X K)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [K_p - (\varphi_t K)_p]$$

şeklinde tanımlanan  $L_X K$  dönüşümüne  $X$  yönünde  $K$  nın Lie türevi denir ve  $L_X K$  ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

**Önerme 2.1.4.**  $M^n$  bir  $C^\infty$  manifold ve  $M^n$  üzerindeki bir  $X$  vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

$$i) \quad L_X(Y \otimes Z) = (L_X Y) \otimes Z + Y \otimes (L_X Z) \quad (Y, Z \text{ herhangi tensör alanlar})$$

$$ii) \quad L_X f = X(f) \quad (f, K \text{ cismi üzerinde bir fonksiyon})$$

$$iii) \quad L_X V = [X, V], \quad V \in \chi(M^n)$$

özellikleri geçerlidir (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.1.12.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu olsun. Her  $X$  vektör alanı için,  $L_X g = 0$  ise  $X$  vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Yano ve Kon 1984).

## 2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

**Tanım 2.2.1.**  $M^{2n+1}$ ,  $(2n+1)$ -boyutlu bir manifold,  $\varphi, \xi, \eta$  da  $M^{2n+1}$  üzerinde, sırasıyla,  $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alan ve 1-form olsunlar. Eğer  $\varphi, \xi, \eta$  için,  $M^{2n+1}$  üzerinde herhangi bir vektör alanı  $X$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1 \\ \varphi^2 X &= -X + \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman,  $(\varphi, \xi, \eta)$  üçlüsüne  $M^{2n+1}$  üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte  $M^{2n+1}$  ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.2.2.**  $M^{2n+1}$ ,  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen değme yapısı ile verilsin.  $M^{2n+1}$  üzerinde bir  $g$  Riemann metriği,

$$\begin{aligned}\eta(X) &= g(X, \xi) \\ g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

şartlarını sağlıyorsa  $g$  metriğine  $M^{2n+1}$  üzerinde hemen hemen değme metrik,  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  yapısı ile  $M^{2n+1}$  ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon 1984).

**Sonuç 2.2.1.**  $M^{2n+1}$ ,  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y)\tag{2.2.3}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.2.3.**  $M^{2n+1}$  üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  olmak üzere,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)\tag{2.2.4}$$

şeklinde tanımlı  $\Phi$  dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2 – formu denir (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.2.4.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifold ve  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $M^n$  nin lokal koordinatları olsun.  $w = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$  ve  $g(x) > 0$  ise  $w$  ye  $M^n$  üzerindeki bir hacim form denir. Burada  $dx_i$ ,  $M^n$  üzerindeki kotanjant uzayda 1 – formlar ve  $|g|$ ,  $M^n$  üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

**Tanım 2.2.5.**  $(M^n, g)$  bir Riemann manifoldu olsun.  $M^n$  üzerinde bir hacim form mevcut ise  $M^n$  ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot, Hulin, Lafontaine 2004).

**Sonuç 2.2.2.**  $\Phi$  temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla  $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$  dır. Böylece Tanım 2.1.2.5. gereğince  $(M^n, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Gonzalez 1990).

**Tanım 2.2.6.**  $M^n$  bir  $C^\infty$  manifold olsun. Eğer  $w$  1-form ise, keyfi  $X, Y$  vektör alanları için,

$$2dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X, Y]$$

dır. Eğer  $w$ , 2-form ise,

$$3dw(X, Y, Z) = X(w(Y, Z)) + Y(w(Z, Y)) + Z(w(X, Y)) \\ - w([X, Y], Z) - w([Y, Z], X) - w([Z, X], Y)$$

dır (Yano ve Kon 1984).

**Önerme 2.2.1.**  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir hemen hemen değme metrik manifold ve  $\nabla$  Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi  $X, Y, Z$  vektör alanları için,

$$i) \quad (\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \varphi)Z)$$

$$ii) \quad (\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\varphi Y, \varphi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\varphi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\varphi Z$$

$$iii) \quad (\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \varphi Y)$$

$$iv) \quad 2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$$

$$v) \quad 3d\Phi(X, Y, Z) = \bigoplus_{X, Y, Z} (\nabla_X \Phi)(Y, Z)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada  $\oplus_{X,Y,Z}$ ,  $X, Y, Z$  vektör alanları üzerinden alınan devirli toplam göstermektedir.

Ayrıca,  $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$   $i=1, 2, \dots, n$  olmak üzere,  $M^{2n+1}$  nin açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman,  $\delta$  operatörü

$$\delta\eta = - \sum_{i=1}^n \left\{ (\nabla_{X_i} \eta) X_i + (\nabla_{\phi X_i} \eta) \phi X_i \right\}$$

şeklinde elde edilir (Gonzalez 1990).

**Tanım 2.2.7.**  $M^n$  bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer  $M^n$  nin her  $p$  noktası için  $J^2 = -I$  olacak şekilde  $T_p M$  tanjant uzayının bir  $J$  endomorfizması mevcut ise, o zaman  $M^n$  üzerindeki  $J$  tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir  $J$  hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifoldta bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

$M$  üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı  $(\phi, \xi, \eta, g)$  ile verilsin. O zaman,  $M \times \mathfrak{R}$  üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left( X, f \frac{d}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $X$ ,  $M$  manifolduna teğet bir vektör alan;  $t$ ,  $\mathfrak{R}$  nin bir koordinat ve  $f$ ,  $M \times \mathfrak{R}$  üzerinde bir  $C^\infty$  fonksiyondur.

$M$  üzerinde  $(\phi, \xi, \eta, g)$  bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece  $M \times \mathfrak{R}$  üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = \left( \phi X - f \cdot \xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca  $J^2 = -I$  elde edilir (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.2.8.**  $M^n$  bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere,  $M^n$  üzerinde (1,1)–  
tipli bir tensör alanı  $F$  olsun.  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için,

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı  $N_F$  tensör alana  $F$  tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü  
denir (Yano ve Kon 1984).

$J$ ,  $M^n$  üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8 yardımıyla  $M^n$   
üzerinde  $J$  tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \end{aligned}$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.2.9.**  $(M^{2n}, J)$  hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman,  $N_J = 0$  ise  
 $J$  dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.2.10.** Eğer  $M^{2n} \times \mathfrak{R}$  üzerindeki bir  $J$  hemen hemen kompleks yapısı  
integrallenebilir ise  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve  
Kon 1984).

**Önerme 2.2.2.**  $M^{2n+1}$  üzerinde  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen değme yapısının normal olması  
için gerek ve yeter koşul

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada  $N_\varphi$ ,  $\varphi$  tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon  
tensörüdür (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 2.2.11.**  $(M^{2n}, J)$  hemen hemen kompleks manifold olsun.  $M^{2n}$  üzerinde her  
 $X, Y$  vektör alanları için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen  $g$  Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

**Tanım 2.2.12.**  $(M^{2n}, J, g)$  bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her  $X, Y$  vektör alanları için,

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan  $\Omega$  2–formuna hemen hemen Hermit yapının temel 2–formu denir. Eğer  $d\Omega = 0$  ise  $(J, g)$  yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul  $\nabla J = 0$  eşitliğinin sağlanmasıdır (Blair 2002).

**Tanım 2.2.13.**  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ , bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı

$$d\Phi = 0 \text{ } (\Phi, \text{kapalıdır}), \quad d\eta = 0 \text{ } (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa  $M^{2n+1}$  manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Olszak 1981).

**Teorem 2.2.1.**  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ , bir hemen hemen değme metrik manifold olsun.  $M^{2n+1}$  manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul  $\nabla\Phi$  ve  $\nabla\eta$  kovaryant türevlerinin sifıra eşit olmasıdır (Olszak 1981).

**Yardımcı Teorem 2.2.1.**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer  $\Phi$  2–formu kapalı ise,

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\phi X} \Phi)(\phi Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(Y, Z) - \eta(X) [d\eta(\phi Y, Z) + d\eta(Y, \phi Z)] \\ & + \eta(Y) [d\eta(\phi Z, X) - \frac{1}{2}(\mathbf{L}_\xi g)(Z, \phi X)] + \eta(Z) [d\eta(X, \phi Y) - d\eta(\phi X, Y)] = 0 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (Olszak 1981).

**Yardımcı Teorem 2.2.2.** Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde

$$(\nabla_{\phi X} \phi)(\phi Y) + (\nabla_X \phi)(Y) - \eta(Y) \nabla_{\phi X} \xi = 0$$

eşitliği geçerlidir (Olszak 1981).

**Örnek 2.2.1.**  $(M, J, G)$  bir hemen hemen Kaehler manifoldu olsun. O zaman,  $M$ ,  $(2n)$ –boyutlu bir manifold,  $J$  bir hemen hemen kompleks yapı ve  $M^{2n}$  üzerindeki Riemann metriği  $G$  olmak üzere,

$$J^2 = -I, \quad G(X, Y) = G(JX, JY)$$

eşitlikleri geçerlidir.  $M^{2n}$  üzerindeki temel 2–form

$$\Omega(X, Y) = G(X, JY)$$

şeklinde tanımlı olup,  $d\Omega = 0$  dır.

$\mathfrak{R}$  reel doğru ve  $g_0$  bir Riemann metriği olsun.  $\mathfrak{R}$  üzerinde  $\xi_0$  sıfırdan farklı bir vektör alanı ve  $\eta_0$

$$g_0(X, \xi_0) = \eta_0(X)$$

olacak şekilde bir 1–form olsun. Böylece  $M' = M^{2n} \times \mathfrak{R}$  çarpımı manifoldu tanımlıdır.  $(X_1, X_2)$ ,  $V$  üzerinde tanımlı vektör alanları olsunlar. Burada  $X_1, V$  çarpım manifolduna dik olan vektör ve  $X_2$  ise  $\mathfrak{R}$  doğrusuna dik olan vektördür.  $\phi$  (1,1)–tipli bir tensör alanı  $\xi$  bir vektör alanı ( $\xi \neq 0$ ) ve  $\eta$  1–formunu

$$\phi(X_1, X_2) = (JX_1, 0), \quad \xi = (0, \xi_0), \quad \eta(X_1, X_2) = \eta_0(X_2)$$

şeklinde seçelim. Ayrıca,  $M'$  üzerinde tanımlı  $g$  metriği

$$g = G + g_0$$

şeklinindedir. Böylece  $(M', \phi, \xi, \eta, g)$  bir hemen hemen kosimplektik manifoldu elde edilir (Olszak 1981).

**Örnek 2.2.2.**  $E^4$  Kaehler manifoldunun 3–boyutlu bir reel hiperküresi  $S^3$  olsun.  $E^4$  de  $S^3$  bir birim normal  $C$  olmak üzere  $E^4$  ün hemen hemen kompleks tensör alanı  $J$

$$J : E^4 \rightarrow E^4$$

$$JC = -\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman  $\xi$ ,  $S^3$  üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani  $\xi \in \mathcal{X}(S^3)$  dir.  $S^3$  e teğet her bir  $X$  vektör alanı için  $\eta(X) = g(X, \xi)$  olmak üzere  $\eta$  1–formu iyi tanımlıdır. Üstelik  $\eta(\xi) = 1$  dir. Diğer yandan,

$$JX = \phi X + \eta(X)C$$

eşitliği ile  $\phi$  lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre  $\forall p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$  için;

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p)) = J(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-p_3, -p_4, p_1, p_2) = -\xi$$

elde edilir. Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi  $g(X, \xi)\xi$  için;

$$g(X, \xi)\xi = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$g(X, \xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X, \xi) = \lambda \xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X) = J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$= J \left( \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \right) - g(JX - \eta(X)C, \xi)C$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2] p_1 \\ -\lambda p_4 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2] p_2 \\ -\lambda p_1 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2] p_3 \\ -\lambda p_2 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2] p_4 \end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X) = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi = J\xi - \eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\eta(\phi X) = g(\phi X, \xi)$$

$$= g(JX - \eta(X)C, \xi) = 0$$

olduğu da açıkça görülür.

Sonuç olarak  $(\phi, \xi, \eta, g)$  yapısı  $S^3$  üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur (Blair 2002).

### 2.3. Hemen Hemen Kosimplektik Manifoldlar

Bu kısımda öncelikle hemen hemen kosimplektik yapılar tanıtılarak, gerekli literatür bilgisi verilmiştir.

**Tanım 2.3.1.**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$ ,  $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Herhangi vektör alanlar için,  $M^{2n+1}$  üzerinde

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa  $M^{2n+1}$  ye hemen hemen kosimplektik manifold denir.(Blair 1970).

**Yardımcı Teorem 2.3.1.**  $M^{2n+1}$  manifoldunun bir  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z, \varphi X)) \\ + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \quad (2.3.1)$$

dir. Burada  $N^{(1)}, N^{(2)}$  tensör alanları, sırasıyla,

$$N^{(1)}(X, Y) = N_\varphi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi \quad (2.3.2)$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X \quad (2.3.3)$$

dir (Blair 2002).

**Önerme 2.3.1.**  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ , bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, her  $X, Y$  vektör alanları için,

$$hX = \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)X \quad , \quad h(\xi) = 0 \quad (2.3.4)$$

$$\nabla_\xi \xi = 0 \quad , \quad \nabla_\xi \varphi = 0 \quad (2.3.5)$$

$$(\varphi \circ h)X + (h \circ \varphi)X = 0 \quad (2.3.6)$$

$$\dot{I}_Z(h) = 0 \quad (2.3.7)$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi = 0$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

**Önerme 2.3.2.**  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ , bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, her  $X, Y$  vektör alanları için,

$$\nabla_X \xi = -\varphi hX \quad (2.3.8)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = g(\varphi Y, hX) \quad (2.3.9)$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi = 0 \quad (2.3.10)$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

**İspat:** (Pastore ve Dileo 2007) ve (Kim ve Pak 2005) deki işlem adımları takip edilerek sonuçlar kolaylıkla bulunabilir.

**Yardımcı Teorem 2.3.2.**  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir hemen hemen değme manifold olsun. O zaman, her  $X$  vektör alanı için,

$$(\nabla_\xi h) \circ \varphi + \varphi \circ (\nabla_\xi h) = 0$$

eşitliği geçerlidir (Blair 2002).

**Önerme 2.3.3.**  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ , bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman,  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_{\varphi X} \varphi)\varphi Y = -\eta(Y)hX \quad (2.3.11)$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca, (2.3.11) eşitliği kullanılarak

$$\varphi(\nabla_{\varphi X} \varphi)Y - (\nabla_X \varphi)Y = -g(hX, Y)\xi \quad (2.3.12)$$

elde edilir (Kim ve Pak 2005).

**Önerme 2.3.4.**  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ , bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman,  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için,

$$g(R_{\xi X} Y, Z) - g(R_{\xi X} \varphi Y, \varphi Z) + g(R_{\xi \varphi X} Y, \varphi Z) + g(R_{\xi \varphi X} \varphi Y, Z) = 2(\nabla_{hX} \Phi)(Y, Z) \quad (2.3.13)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** R Riemann eğrilik tensörü simetrik olduğundan  $g(R_{\xi X} Y, Z) = g(X, R_{YZ} \xi)$  dir.

$$R(X, Y)\xi = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y$$

eşitliğinin kullanılmasıyla (2.3.13) ifadesinin sol tarafı

$$B(X, Y, Z) - B(X, Z, Y) \quad (2.3.14)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$B(X, Y, Z) = g(X, -(\nabla_Y \varphi h)Z + \varphi(\nabla_Y \varphi h)\varphi Z) + g(X, (\nabla_{\varphi Y} \varphi h)\varphi Z) - g(\varphi X, (\nabla_{\varphi Y} \varphi h)Z) \quad (2.3.15)$$

dir. Bu eşitlikle birlikte

$$\varphi((\nabla_Y \varphi h)\varphi Z) - (\nabla_Y \varphi h)Z = -(\nabla_Y \varphi)hZ + h((\nabla_Y \varphi)Z) \quad (2.3.16)$$

bulunur.  $g$  metrik tensör alanı yardımıyla

$$\begin{aligned} & g(X, (\nabla_{\varphi Y} \varphi h)\varphi Z) - g(\varphi X, (\nabla_{\varphi Y} \varphi h)Z) \\ &= g(\varphi X, \varphi(\nabla_{\varphi Y} \varphi h)\varphi Z) + \eta(Z)\eta((\nabla_{\varphi Y} \varphi h)\varphi Z) - g(\varphi X, (\nabla_{\varphi Y} \varphi h)Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denkleme (2.3.16) uygulanarak

$$g(hZ, hY) = \eta\left(\left(\nabla_{\phi Y} \phi h\right)\phi Z\right) \quad (2.3.17)$$

eşitliği elde edilir. (2.3.17) ve (2.3.12) ifadeleri göz önüne alınarak

$$B(X, Y, Z) = 2g(hX, (\nabla_Y \phi)Z) \quad (2.3.18)$$

ifadesi bulunur. Ayrıca

$$3d\Phi(Y, Z, hX) = (\nabla_Y \Phi)(Z, hX) + (\nabla_Z \Phi)(hX, Y) + (\nabla_{hX} \Phi)(Y, Z)$$

Eşitliği kullanılarak (2.3.18) eşitliği (2.3.14) ifadesinde Y ve Z vektör alanlarının yer değiştirilmesiyle istenen sonuca ulaşılır.

#### 2.4. Hemen Hemen Kosimplektik $(\kappa, \mu)$ - Uzayları

Bu kısımda, hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - uzayları incelenerek gerekli literatür bilgisi verilecektir.

**Tanım 2.4.1.** Bir  $M$  hemen hemen kosimplektik manifoldu  $\varphi, \xi, \eta, g$  tensör yapı alanları yardımıyla verilen belli bir eğrilik koşulu olan

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)(\kappa I + \mu h)X - \eta(X)(\kappa I + \mu h)Y \quad (2.4.1)$$

eşitliğini sağlıyorsa  $M$  ye bir hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - uzayı denir ve  $(\varphi, \xi, \eta, g)$ - yapısında hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - yapı olarak adlandırılır.

Burada  $h = \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)$ ,  $\kappa, \mu \in R_n(M)$  ve  $\kappa \leq 0$  dır.

(Olszak ve Dacko 2005) de hemen hemen kosimplektik manifoldlar üzerinde aşağıdaki sonuçlar verilmiştir.

**Önerme 2.4.1.** Bir  $(2n + 1)$ - boyutlu hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - uzayları her  $X, Y$  vektör alanları için,

$$(i) \quad l = -\kappa\varphi^2 + \mu h \quad (2.4.2)$$

$$(ii) \quad l\varphi - \varphi l = 2\mu h\varphi \quad (2.4.3)$$

$$(iii) \quad h^2 = \kappa\varphi^2 \quad (2.4.4)$$

$$(iv) \quad (\nabla_{\xi} h) = -\mu\varphi h \quad (2.4.5)$$

$$(v) \quad R(\xi, X)Y = \kappa(g(Y, X)\xi - \eta(Y)X) + \mu(g(hY, X)\xi - \eta(Y)hX) \quad (2.4.6)$$

$$(vi) \quad Q\xi = 2n\kappa\xi \quad (2.4.7)$$

$$(vii) \quad (\nabla_X \varphi)Y = g(hX, Y)\xi - \eta(Y)(hX) \quad (2.4.8)$$

$$(viii) \quad (\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X = \kappa(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y + 2g(\varphi X, Y)\xi) \\ + \mu(\eta(Y)\varphi hX - \eta(X)\varphi hY) \quad (2.4.9)$$

$$(ix) \quad Q\varphi - \varphi Q = 2\mu h\varphi \quad (2.4.10)$$

eşitlikleri geçerlidir.

**İspat :**

(i) (2.4.1) eşitliğinden

$$lX = R(X, \xi)\xi = \kappa(X - \eta(X)\xi) + \mu hX \quad (2.4.11)$$

elde edilir.

(ii) (2.4.11) eşitliğinde  $X$  yerine  $\varphi X$  yazılırsa

$$l\varphi X = \kappa\varphi X + \mu\varphi hX$$

$$l\varphi X - \varphi lX = \mu(h\varphi X - \varphi hX)$$

bulunur. Ayrıca, (2.4.11) eşitliğinin her iki tarafına  $\varphi$  tensörü uygulanırsa

$$\varphi lX = -\varphi\kappa\varphi^2 X + \varphi\mu hX$$

olur. Böylece bu son iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa

$$l\varphi X - \varphi lX = \mu(h\varphi X - \varphi hX)$$

dır. Burada (ii) şıkkı ispat edilmiş olur.

(iii) (2.4.11) eşitliğinden

$$\varphi l\varphi X = \varphi\kappa\varphi X + \varphi\mu\varphi hX \quad (2.4.12)$$

elde edilir. (2.4.11) ve (2.4.12) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$lX - \varphi l\varphi X = -2\kappa\varphi^2 X$$

denklemini elde edilir. Burada (3.2.6) eşitliği kullanılarak

$$-2\kappa\varphi^2 X = -2h^2 X$$

elde edilir. Bu son eşitlikte  $h^2$  tensör alanı çekilirse

$$\kappa\varphi^2 X = h^2 X$$

dır. Böylece (iii) şıkkı ispatlanmış olur.

(iv)  $\nabla_{\xi} h$  kovaryant türev eşitliği (2.4.4) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\xi} h)X &= -\phi X - \phi h^2 X \\
&= -\kappa \phi X - \mu \phi h X + \kappa \phi X
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik sadeleştirilirse

$$(\nabla_{\xi} h)X = -\mu \phi h X$$

denklemini elde edilir.

(v)  $g(R(\xi, X)Y, Z) = g(R(Y, Z)\xi, X)$  olduğundan (2.4.1) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
g(R(Y, Z)\xi, X) &= \kappa(\eta(Z)g(Y, X) - \eta(Y)g(Z, X)) + \mu(\eta(Z)g(hY, X) - \eta(Y)g(hZ, X)) \\
&\quad - \eta(Y)g(\phi h Z, X)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklemden  $Z$  vektör alanı çekilirse (v) şıkkı ispatlanmış olur.

(vi)  $\{E_{1, \dots, E_{2n}}, \xi\}$  tanjant uzayının herhangi bir noktasındaki bir ortonormal baz olsun.

Bu durumda,  $1 \leq i \leq 2n + 1$  olmak üzere, (2.4.6) eşitliğinde  $X = Y = E_i$  alınır ve Ricci tensörünün tanımı kullanılarak her  $Z$  vektör alanı için,

$$\begin{aligned}
S(\xi, Z) &= \sum_{i=1}^{2n+1} g(R(\xi, E_i)E_i, Z) \\
&= \sum_{i=1}^{2n+1} \kappa [g(E_i, E_i)\eta(Z) - \eta(E_i)g(E_i, Z)] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2n+1} \mu [g(hE_i, E_i)\eta(Z) - \eta(E_i)g(hE_i, Z)]
\end{aligned}$$

$$= 2n\kappa\eta(Z)$$

elde edilir. Ricci operatörünün tanımından (2.4.7) eşitliği bulunur.

(vii) (2.4.1) eşitliğinden

$$g(R_{\xi X} Y, Z) = \kappa[g(X, Y)\eta(Z) - \eta(Y)g(X, Z)] + \mu[g(hX, Y)\eta(Z) - \eta(Y)g(hX, Z)]$$

elde edilir. Buna göre, (2.3.13) eşitliğinin sol tarafındaki ifadeler yukarıdaki eşitlik yardımıyla toplanırsa

$$-2\kappa[\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)]$$

ifadesi bulunmuş olur. O halde (2.3.13) eşitliği

$$-2\kappa[\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)] = 2(\nabla_{hX}\varphi)(Y, Z)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemden  $(\nabla_{hX}\varphi)$  ifadesi çekilerek

$$-(\nabla_{hX}\varphi)(Y, Z) = \kappa[\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)] \quad (2.4.13)$$

elde edilir. (2.4.13) eşitliğinde  $X$  yerine  $hX$  alınır ve (2.4.4) ile  $(\nabla_X\varphi)(Y, Z) = g((\nabla_X\varphi)Z, Y)$  eşitlikleri göz önüne alındığında

$$0 = \kappa[g((\nabla_X\varphi)Z, Y)] - [\eta(Y)g(hX, Z) - \eta(Z)g(hX, Y)]$$

bulunur. Bu son denklemden  $(\nabla_X\varphi)Z$  ifadesi çekilirse

$$(\nabla_X\varphi)Z = g(hX, Z)\xi - \eta(Z)hX$$

elde edilir. Burada  $Z$  yerine  $Y$  alınır ve yukarıdaki eşitlik düzenlenirse (vii) şıkkının ispatı bulunur.

(viii) Önerme 2.1.1.1 yardımıyla

$$(\nabla_X \phi h)Y - (\nabla_Y \phi h)X = (\nabla_X \phi)hY - (\nabla_Y \phi)hX + \phi((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X)$$

dır. (2.4.1) eşitliği kullanılarak  $((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X)$  ifadesi çekilirse (viii) şıkkı ispat edilmiş olur.

(ix) (3.1.2) eşitliği her  $X$  vektör alanı için,

$$Q\phi - \phi Q = l\phi - \phi l$$

dır. Bu eşitlik düzenlenirse

$$Q\phi - \phi Q = 2\mu h\phi$$

bulunur. Böylece (ix) şıkkı ispat edilmiş olur.

## 2.5. Ricci Soliton

**Tanım 2.5.1.**  $(M, g)$  bir Riemann manifold,  $V$  bir vektör alanı,  $S$  de  $M$  üzerinde bir Ricci tensör,  $\lambda$  sabit bir değer,  $g$  bir Riemann metrik ve  $L_V$  Lie türev operatörü olsun.  $g$  metriği

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (2.5.1)$$

şartını sağlıyorsa  $(g, V, \lambda)$  üçlüsüne Ricci soliton olarak tanımlanır. Ricci solitona,

i)  $\lambda < 0$  ise büzüşen,

ii)  $\lambda = 0$  ise durağan,

iii)  $\lambda > 0$  ise genişleyen  
denir(Nagaraja and Premalatha 2012).

**Sonuç 2.5.1.**  $(g, V, \lambda)$  üçlüsü M üzerinde hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - uzayında bir ricci soliton olsun. (2.5.1) denkleminde  $V = \xi$  yazılırsa

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) \quad (2.5.2)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemden yararlanarak

$$QX = \lambda X \quad (2.5.3)$$

$$r = -\lambda(2n + 1) \quad (2.5.4)$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca kovaryant türevinin tanımlanmasıyla

$$(\nabla_w S)(Y, \xi) = \nabla_w S(Y, \xi) - S(\nabla_w Y, \xi) - S(Y, \nabla_w \xi) \quad (2.5.5)$$

denklemini bulunur.

### 3. $\varphi$ -TEKRARLAYAN HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK $(\kappa, \mu)$ -UZAYLARI

Bu bölüm tez çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Riemann eğrilik tensör alanının bazı spesifik durumları olan genelleştirilmiş, pseudo- projective, concircular hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ - uzaylarındaki ricci solitonlar çalışılmıştır.

#### 3.1. Tensör Alanı Özellikleri

Bu kısımda belli tensör koşullarını sağlayan  $A$  ve  $h$  tensör alanları incelenmiştir. Şimdi, bundan sonraki bölümlerde kullanacağımız temel eşitlikleri verelim.

**Yardımcı Teorem 3.1.1.**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$  bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun.  $M^{2n+1}$  üzerinde (1,1)-tipli  $A$  ve  $h$  tensör alanları, sırasıyla,  $A = -\nabla \xi$  ve  $h = \frac{1}{2} \mathbf{L}_\xi \phi$  şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her  $X, Y$  vektör alanları için,

i)  $A$  ve  $h$  simetriktir,

ii)  $A\phi + \phi A = 0$ ,

iii)  $\eta \circ A = 0$ ,  $\eta \circ h = 0$ ,

iv)  $h = A \circ \phi$ ,

v)  $hA + Ah = 0$ ,

vi)  $\dot{I}z(A) = 0$

vii)  $\dot{I}z(\phi A) = 0$

eşitlikleri sağlanır (Olzsak ve Dacko 1998).

**İspat.**

i)  $M^{2n+1}$  üzerinde herhangi  $X, Y$  vektör alanları için,

$$\begin{aligned} g(AX, Y) &= g(\phi hX, Y) \\ &= -g(X, h\phi Y) \\ &= g(\phi hY, X) \\ &= g(AY, X) \end{aligned}$$

dır. Böylece  $A$  simetriktir. Özel olarak,  $X = \xi$  için  $A\xi = \phi h\xi = 0$  elde edilir. Benzer olarak, tensör alanının simetrik olduğu kolayca elde edilir.

ii)  $A$  tensör alanının özellikleri göz önüne alındığında  $A\phi = (\phi h)\phi$  ve  $\phi A = \phi(\phi h)$  eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa  $A\phi + \phi A = 0$  eşitliği bulunur.

iii)  $A$  tensör alanının tanımından

$$\begin{aligned} (\eta \circ A)X &= \eta(AX) \\ &= g(-\nabla_X \xi, \xi) \\ &= g(X, \nabla_\xi \xi) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,  $\eta \circ h = 0$  eşitliği  $\mathbf{L}$  Lie türev operatörünün tanımı kullanılarak elde edilir.

iv) (2.3.3) eşitliğinden  $A\phi = h$  dır.

v)  $hA$  ve  $Ah$  bileşke tensör alanları

$$hA = h\phi h, Ah = \phi h^2$$

şeklinde bulunur. Böylece yukarıdaki iki eşitlik taraf tarafa toplanarak  $hA + Ah = 0$  elde edilir.

(vi)- (vii)  $A$  ve  $\phi A$  tensör alanlarının izleri alınır ve (2.3.6) eşitliği kullanılırsa (vi) ve (vii) şıkları elde edilir.

**Önerme 3.1.1.** Bir hemen hemen kosimplektik manifoldun  $\mathbf{D}$  dağılımının integral alt manifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter koşul her  $X, Y$  vektör alanları için,

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(\phi AX, Y)\xi + \eta(Y)\phi AX \quad (3.1.1)$$

dır. Burada  $AX = \phi hX$  olarak alınmıştır (Olszak ve Dacko 1998).

**Önerme 3.1.2.**  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$ ,  $(2n+1)$ -boyutlu integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Bu durumda ,

$$Q\phi - \phi Q = l\phi - \phi l + (\eta \circ Q\phi)\xi - \eta \circ (\phi Q\xi) \quad (3.1.2)$$

eşitliği sağlanır.

### 3.2. Eğrilik Özellikleri

Bu kısımda, Riemann eğrilik tensörü yardımıyla bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir.

**Önerme 3.2.1.**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ , bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman,  $M^{2n+1}$  üzerinde herhangi vektör alanları  $X, Y$  için,

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \\ &= (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

eşitliği sağlanır (Olszak ve Dacko 1998).

**İspat.**  $R$  Riemann eğrilik tensörü tanımı ve (2.3.9) eşitliği göz önüne alınır,

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi \\
&= \nabla_X(-\phi h Y) - \nabla_Y(-\phi h X) \\
&\quad + (\phi h[X, Y]) \\
&= -\nabla_X \phi h Y + \nabla_Y \phi h X + \phi h[X, Y]
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Önerme 3.2.2.**  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ , bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

$$R(X, \xi)\xi = \phi(\nabla_\xi h)X - h^2 X \quad (3.2.2)$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi R(X, \xi)\xi - \phi h^2 X \quad (3.2.3)$$

$$R(X, \xi)\xi - \phi R(\phi X, \xi)\xi = -2h^2 X \quad (3.2.4)$$

$$S(X, \xi) = -\operatorname{div}(\phi h)X \quad (3.2.5)$$

$$S(\xi, \xi) = -\operatorname{trace}(h^2) \quad (3.2.6)$$

eşitlikleri geçerlidir (Öztürk, Aktan ve Murathan 2010).

**İspat.**  $\nabla_\xi \phi = 0$  ve (2.3.17) ifadeleri kullanılarak (3.2.2) denklemi bulunur. (3.2.2) eşitliğine  $\phi$  uygulanır ve  $g((\nabla_\xi h)X, \xi) = 0$  olduğu göz önüne alınarak (3.2.3) ifadesi elde edilir. (3.2.4) ifadesi (3.2.2) ifadesinden kolayca bulunur.

Öz değerleri  $\{\mu_0 = 0, \mu_i, -\mu_i\}$  olan  $h$  nın öz vektörlerinden oluşan  $\{E_0 = \xi, E_i, E_{n+i} = \phi E_i\}$  yerel ortonormal bir  $\phi$ -bazı alınabilir. (2.3.18) eşitliğinden,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(R(E_i, Y)\xi, E_i) = -\sum_{i=1}^{2n+1} g((\nabla_{E_i} \phi h)Y, E_i) \quad (3.2.7)$$

yazılabilir. Bu sonuç (3.2.5) ifadesini verir. Son olarak, (3.2.5) eşitliğinde  $Y = \xi$  alınarak, (3.2.6) denklemi elde edilir.

**Tanım 3.2.1.**  $M$ ,  $R$  eğrilik tensörüne sahip bir değme manifold olsun.  $\alpha$ ,  $T_p M$  tanjant uzayında 2–boyutlu bir düzlem olmak üzere,  $\phi$ –holomorfik kesit eğriliği  $K(\alpha, P) = R(X, \phi X, \phi X, X)$  şeklinde tanımlanır.

### 3.3. Genelleştirilmiş $\phi$ -Tekrarlayan Hemen Hemen Kosimplektik $(\kappa, \mu)$ -Uzayları

**Tanım 3.3.1.** Eğer eğrilik tensörü  $R$ , sıradaki (3.3.1) eşitliğini sağlıyorsa hemen hemen kosimplektik bir manifoldta genelleştirilmiş  $\phi$ –tekrarlayan manifold denir.

$$\varphi^2((\nabla_w R)(X, Y)Z) = A(W)R(X, Y)Z + B(W)\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}. \quad (3.3.1)$$

Burada  $A$  ve  $B$  sıfırdan farklı 1-formlar olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır,

$$A(W) = g(W, \rho_1), \quad B(W) = g(W, \rho_2),$$

$\rho_1$  ve  $\rho_2$  sırasıyla  $A$  ve  $B$  nin birim vektör alanlarıdır.

$M^{2n+1}$ , genelleştirilmiş  $\phi$ –tekrarlayan hemen hemen kosimplektik manifold olsun.

(1.1) nin sonucu, (3.3.1) eşitliği ve Bianchi eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} &A(W)\eta(R(X, Y)Z) + A(X)\eta(R(Y, W)Z) + A(Y)\eta(R(W, X)Z) \\ &+ B(W)\{\eta(X)g(Y, Z) - \eta(Y)g(X, Z)\} \\ &+ B(X)\{\eta(Y)g(W, Z) - \eta(W)g(Y, Z)\} \\ &+ B(Y)\{\eta(W)g(X, Z) - \eta(X)g(W, Z)\} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

eşitliği elde edilir.

(2.4.1) eşitliği ve (3.3.2) denklemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& A(W)[\kappa(\eta(X)g(Y, Z) - \eta(Y)g(X, Z)) + \mu(\eta(X)g(hY, Z) - \eta(Y)g(hX, Z))] \\
& + A(X)[\kappa(\eta(Y)g(W, Z) - \eta(W)g(Y, Z)) + \mu(\eta(Y)g(hW, Z) - \eta(W)g(hY, Z))] \\
& + A(Y)[\kappa(\eta(W)g(X, Z) - \eta(X)g(W, Z)) + \mu(\eta(W)g(hX, Z) - \eta(X)g(hW, Z))] \\
& + B(W)\{\eta(X)g(Y, Z) - \eta(Y)g(X, Z)\} \\
& + B(X)\{\eta(Y)g(W, Z) - \eta(W)g(Y, Z)\} \\
& + B(Y)\{\eta(W)g(X, Z) - \eta(X)g(W, Z)\} = 0
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

elde edilir.

**Teorem 3.3.1.** Genelleştirilmiş  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayının elemanı  $(M_n, g)$ ,  $(n > 2)$  için karakteristik vektör alanı  $\xi$  ile vektör alanı  $\rho_1 + \rho_2$  birbirine diktir.

**İspat 3.3.1**  $\{e_i\}_1 (i = 1, 2, \dots, 2n + 1)$  manifoldda tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki ortonormal bazı olsun. (3.3.3) denkleminde  $Y = Z = e_i$  yazıp  $i$  üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned}
& (n - 1)(\kappa A(W) - B(W))\eta(X) + (n - 1)(\kappa A(X) + B(X))\eta(W) \\
& + \kappa(\eta(W)A(X) - \eta(X)A(W)) + \mu(\eta(W)A(hX) - \eta(X)A(hW)) \\
& + \eta(W)B(X) - \eta(X)B(W) = 0
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

elde edilir. Bütün  $X, W \in \chi(M_n)$  vektör uzayları için sağlanır. (3.3.4) ifadesinde tekrar  $X = W = \xi$  yazıp (1.1) denkleminde kullanırsak,

$$(n - 1)(\kappa A(\xi) + B(\xi)) + (n - 1)(\kappa A(\xi) + B(\xi)) = 0, \tag{3.3.5}$$

$$\eta(\kappa\rho_1 + \rho_2) = 0 \tag{3.3.6}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 3.3.2.** Genelleştirilmiş  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayının  $\kappa\rho_1 + \rho_2$  vektör alanı  $D$  dağılımına aittir.

**İspat 3.3.2** (3.3.3) ifadesinde  $W = X = e_i$  yazıp  $i$  üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} & (n-1)(\kappa A(\xi) - B(\xi)) + (n-1)(\kappa A(\xi) - B(\xi)) \\ & + \kappa(A(\xi) - A(\xi)) + \mu(A(h\xi) - A(h\xi)) \\ & + B(\xi) - B(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

her  $W$  vektör alanı için gerçekleşir. Burada  $A(\xi) = \eta(\rho_1)$  ve  $B(\xi) = \eta(\rho_2)$  dir. Böylece (3.3.7) ifadesindeki denklemden ispat tamamlanmış olur.

### 3.4. Pseudo-Projective $\varphi$ -Tekrarlayan Hemen Hemen Kosimplektik $(\kappa, \mu)$ -Uzayları

**Tanım 3.4.1.**  $\varphi$ - tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayında  $M$  manifoldu üzerinde,  $a$  ve  $b$  sıfırdan farklı birer sabit olmak üzere, pseudo-projective eğrilik tensörü  $\tilde{P}$

$$\tilde{P}(X, Y)Z = aR(X, Y)Z + b[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] - \frac{r}{2n+1} \left( \frac{a}{2n} + b \right) [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

tanımlanır (Prasan 2002).

**Teorem 3.4.1.** Ricci solitonlu pseudo-projective  $\varphi$ - tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayında  $(M, g)$  boş kümeden farklı 1-form  $A$  daralmaz.

**İspat 3.4.1.** Eğer keyfi  $X, Y, Z, W$  vektör alanları için sıfırdan farklı 1-form  $A$  mevcut ise hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayında pseudo-projective  $\varphi$ - tekrarlayan manifold denir öyle ki,

$$\varphi^2((\nabla_W \tilde{P})(X, Y)Z) = A(W)\tilde{P}(X, Y)Z. \quad (3.4.1)$$

Bir pseudo-projective  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayı ele alalım. (1.1) ve (3.4.1) denklemleri yardımıyla,

$$-(\nabla_w \tilde{P})(X, Y)Z + \eta((\nabla_w \tilde{P})(X, Y)Z)\xi = A(W)\tilde{P}(X, Y)Z, \quad (3.4.2)$$

elde edilir. (3.4.2) ifadesine  $U$  ile iç çarpım uygulanırsa,

$$-g((\nabla_w \tilde{P})(X, Y)Z, U) + \eta((\nabla_w \tilde{P})(X, Y)Z)\eta(U) = A(W)g(\tilde{P}(X, Y)Z, U), \quad (3.4.3)$$

sonucu bulunur.  $\{e_i\}, (i=1,2,\dots,2n+1)$  manifoldda tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki ortonormal bazı olsun. (3.4.3) eşitliğinde  $X=U=e_i$  yazıp  $i$  üzerinden toplam alınırsa,

$$(\nabla_w S)(Y, Z) = A(W)\left\{S(Y, Z) - \frac{r}{2n+1}g(Y, Z)\right\}, \quad (3.4.4)$$

elde edilir. (3.4.4) denkleminde  $Y = \xi$  alınır ve (1.1) ile (2.4.3) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\nabla_w S)(Y, \xi) &= -2n\kappa g(Y, \phi hX) + S(Y, \phi hX) \\ &= -A(W)\left[S(Y, \xi) - \frac{r}{2n+1}g(Y, \xi)\right] \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

elde edilir. (3.4.5) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılır ve

$$S(Y, \phi hX) = 2n\kappa g(Y, \phi hX) - A(W)\left[S(Y, \xi) - \frac{r}{2n+1}g(Y, \xi)\right] \quad (3.4.6)$$

elde edilir. (3.4.6) ifadesinde  $Y = \xi$  alınır,

$$-A(W)\left[2n\kappa - \frac{r}{2n+1}\right] = 0 \quad (3.4.7)$$

bulunur ve  $A(W)$  sıfırdan farklı olduğundan

$$\lambda = -2n\kappa \quad (3.4.8)$$

elde edilir. Bu  $\kappa \leq 0$  olduğundan istenilen sonuç ispatlanmış olur.

- i)  $\kappa = 0$  için  $\lambda$  büzüşmez,
- ii)  $\kappa < 0$  için  $\lambda$  genişler.

sonucu yazılır.

### 3.5. Conccircular phi-Tekrarlayan Hemen Hemen Kosimplektik $(\kappa, \mu)$ -Uzayları

**Tanım 3.5.1.**  $(M^n, g)$  Riemann manifoldu olsun.  $M^n$  üzerinde,

$$\tilde{C}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{r}{2n(2n+1)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

şeklinde tanımlı eğrilik tensörüne concircular eğrilik tensörü denir (Yano 1940).

**Tanım 3.5.2.**  $\forall X, Y, Z, W \in X(M^n)$

$$\varphi^2((\nabla_W \tilde{C})(X, Y)Z) = A(W)\tilde{C}(X, Y)Z. \quad (3.5.1)$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir A 1-formu var ise hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$  manifolduna concircular  $\varphi$ -tekrarlayan manifold denir.

**Teorem 3.5.1.** Ricci solitonlu concircular  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayında  $M$  manifoldu üzerinde, sıfırdan farklı 1-form  $A$  ( $A(\xi) > 0$ ),  $r$  sabit skaler eğriliği ve  $\kappa \leq 0$  için;

- i)  $r = 0$  ise büzüşmez,
- ii)  $r > 0$  ise genişler.

**İspat 3.5.1.** Conccircular  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayında bir

manifold ele alınsın. (1.1) ve (3.5.1) denklemleri gereğince,

$$-(\nabla_w \tilde{C})(X, Y)Z + \eta((\nabla_w \tilde{C})(X, Y)Z)\xi = A(W)\tilde{C}(X, Y)Z, \quad (3.5.2)$$

elde edilir. (3.5.2) denkleminde  $U$  ile iç çarpım uygulanırsa,

$$-g((\nabla_w \tilde{C})(X, Y)Z, U) + \eta((\nabla_w \tilde{C})(X, Y)Z)\eta(U) = A(W)g(\tilde{C}(X, Y)Z, U) \quad (3.5.3)$$

elde edilir.  $\{e_i\}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, 2n+1)$  manifoldda tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki ortonormal bazı olsun. (3.5.3) ifadesinde  $X = U = e_i$  yazıp  $i$  üzerinden toplam alınırsa,

$$(\nabla_x S)(Y, \xi) = -2n\kappa g(Y, \phi hX) + S(Y, \phi hX) - A(W)\{S(Y, Z) - \frac{r}{2n+1}g(Y, Z)\}, \quad (3.5.4)$$

bulunur. (3.5.4) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılsa;

$$S(Y, \phi hX) = 2n\kappa g(Y, \phi hX) - A(W)\{S(Y, Z) - \frac{r}{2n+1}g(Y, Z)\} \quad (3.5.5)$$

elde edilir. (3.5.5) eşitliğinde  $Z$  yerine  $\xi$  alınıp (1.1) ve (2.4.5) denklemleri kullanılırsa,

$$-A(W)\{2n\kappa - \frac{r}{2n+1}\} = 0 \quad (3.5.6)$$

sıfırdan farklı  $A(W)$  için,

$$r = (2n+1)2n\kappa, \quad (3.5.7)$$

elde edilir ve sonra

$$\lambda = -2n\kappa \geq 0, \quad (3.5.8)$$

sonucuna ulaşılır. Burada

i)  $\kappa = 0$  için  $\lambda$  büzüşmez,

ii)  $\kappa < 0$  için  $\lambda$  genişler.

#### 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayları tanıtılmıştır. Bu manifoldların genelleştirilmiş  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayları, pseudo-projective  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayları ve concircular  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayları üzerinde ricci solitonlar incelenmiştir. Benzer yapılar değme manifoldların çeşitli sınıflarında incelenip aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

**Teorem:** Genelleştirilmiş  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayının elemanı  $(M_n, g)$ ,  $(n > 2)$  için karakteristik vektör alanı  $\xi$  ile vektör alanı  $\rho_1 + \rho_2$  birbirine diktir.

**Teorem:** Genelleştirilmiş  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayının  $\kappa\rho_1 + \rho_2$  vektör alanı  $D$  dağılımına aittir.

**Teorem:** Ricci solitonlu pseudo-projective  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayında  $(M, g)$  boş kümeden farklı 1-form  $A$  daralmaz.

**Teorem:** Ricci solitonlu concircular  $\varphi$ -tekrarlayan hemen hemen kosimplektik  $(\kappa, \mu)$ -uzayında  $M$  manifoldu üzerinde, sıfırdan farklı 1-form  $A$  ( $A(\xi) > 0$ ),  $r$  sabit skaler eğriliği ve  $\kappa \leq 0$  için;

i)  $r = 0$  ise büzüşmez,

ii)  $r > 0$  ise genişler.

ayrıca incelenebilir.

## 5. KAYNAKLAR

Bang-Yen C., *Geometry of submanifolds*, New York, M. Dekker, (1973).

Blair D. E., *Contact manifolds in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York (1970).

Blair D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, 203. Birkhäuser Boston, (2002).

Chinea D., Gonzalez C., *A classification of almost contact metric manifolds*, Annali di Matematica pura ed applicata, 156 (4) (1990) 15-36.

Dileo G., Pastore A. M., *Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 14 (2007) 343-354.

Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., *Riemann Geometry*, 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930, (2004).

Goldberg S. I., Yano K., *Integrability of almost cosymplectic structure*, Pacific J. Math., 31 (1969) 373-382.

Goldberg S. I., *Integrability of almost Kaehler manifolds*, Proceedings of the American Math. Soc., 21(1) (1969) 96-100.

Kim T. W., Pak H. K., *Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures*, Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug., 21(4) (2005) 841-846.

O'Neill B., *Semi Riemannian Geometry*, A. Press, London, (1983).

Olszak Z., *On almost cosymplectic manifolds*, Kodai Math, 4(2) (1981) 239-250.

Olszak Z., *Locally conformal almost cosymplectic manifolds*, Coll. Math., 57 (1989) 73-87.

Olszak Z., Dacko P., *On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, (56) 1 (1998) 89-103.

Öztürk H , Aktan N , Murathan C., *Almost  $\alpha$ -Cosymplectic  $(\kappa, \mu, \nu)$ -Spaces*, arXiv:1007.0527.(2010).

- Prasad B. , A pseudo projective curvature tensor on Riemannian manifold, Bull. Cal. Math.Soc. 94(2002), 163-169
- Sharpe R.W., *Differential Geometry*, Graduate Texts in Math., Springer, (1997).
- Schur F., *Ueber den Zusammenhang der Raume constanten Riemann'schen Kriimmungsmasses mit den projectiven, Raumen*. Math., (3.4.3) (1886) 537-567.
- Spivak M., *Calculus on Manifolds*, Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN: 0805902193, (1965).
- Yano, Concircular geometry-I. Concircular transformations, Proceeding of the Japan Academy 16(1940), 195-200
- Yano K., Kon M., *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corp. Singapore, (1984).