T.C.
NECMETTİN ERBAKAN NİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI EĞRİLİK KOŞULLARINA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR

Fatma GAZEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2021
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Fatma GAZEL tarafından hazırlanan “Bazı Eğrilik Koşullarına Sahip Neredeyse Kenmotsu Manifoldlar” adlı tez çalışması 23/02/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Sedat PAK	…………………..
Danışman Prof.Dr.Nesip AKTAN	…………………..
Üye Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL	…………………..

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun …./…/2021 gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Fatma Gazel

Tarih: 23/02/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI EĞRİLİK KOŞULLARINA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR

Fatma GAZEL

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Nesip AKTAN

2021, 40 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Sedat PAK
Prof.Dr. Nesip AKTAN
Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konuya giriş yapılmış ve konunun tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılmıştır. Riemann manifoldlar,hemen hemen değme manifoldlar, Kenmotsu manifoldlar ve neredeyse Kenmotsu manifoldlar, $\eta-$Einstein manifoldlardan bahsedilip bunlara ilişkin bazı sonuçlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, strict şartını sağlayan neredeyse Kenmotsu manifoldlara ait eğrilik koşulları incelenmiş ve orijinal sonuçlara ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: $\eta-$Einstein Kenmotsu manifold, Değme manifold, Kenmotsu manifold, Strict neredeyse Kenmotsu manifold.

ABSTRACT

MS THESIS

SOME CURVATURE CONDITIONS ON NEARLY KENMOTSU MANIFOLDS

Fatma GAZEL

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof.Dr.Nesip AKTAN

2021, 40 Pages

Jury
Doç. Dr. Sedat PAK
Prof.Dr.Nesip AKTAN
Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL

ThisThesis consists of three chapters. In the first chapter, the subject is introduced, and the histrical development of the subject is mentioned. In the second chapter, some basic comcepts that will be used in other chapters are introduced. Information about Riemann manifolds, almost contact manifolds, Kenmotsu manifolds, nearly Kenmotsu manifolds and η −Einstein Kenmotsu manifolds some results are given. In the third chapter, some curvature conditions on nearly Kenmotsu manifolds has been studied and some original results have been reached on the strict η −Einstein nearly Kenmotsu manifolds.

Keywords: η −Einstein Kenmotsu manifold, Contact manifold, Kenmotsu manifold, strict nearly Kenmotsu manifold.

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde bana yol gösteren ve değerli bilgilerini benimle paylaşan, tezin her aşamasında desteklerini her zaman gördüğüm değerli danışman hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a sonsuz teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren ve destek olan sevgili eşim ve tüm aileme teşekkür ederim.

Fatma GAZEL
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
M	: Manifold
g	: Metrik tensör
φ	: Tensör alanı
η	: $1-$form
ξ	: Vektör alanı
C^{∞}	: Diferensiyellenebilir
$[,]$	: Lie parantez operatörü
T_pM	: p noktasındaki teğet uzay
$\chi(M)$	: M nin teğet vektör alanlarının uzayı
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
K	: Kesit eğriliği
r	: Skaler eğrilik
R	: Riemann eğrilik tensörü
S	: Ricci tensörü
Q	: Ricci operatörü
W	: Weyl eğrilik tensörü
N	: Nijenhuis tensörü
Φ	: Temel $2-$form
$\wedge$	: Dış çarpım
$\otimes$	: Tensör çarpımı
$B \times F$	: Çarpım manifoldu
$B \times {}_f F$	: Katlı çarpım manifoldu

1.GİRİŞ

Değme geometri iki yüzyıl önce, Huygens, Hamilton ve Jakobi'nin geometrik optikler üzerinde çalışmalarıyla doğmuştur. Sophus Lie, Elie Carton, Darboux gibi önemli matematikçilerin bu alanda çalışmaları olmuştur. Değme geometrinin köklerine 1872'de rastlamak mümkündür. Lie'nin değme transformasyonu diferensiyel denklem sitemleri çalışmalarında geometrik bir araç olarak kullanmıştır. Değme geometri optik, termodinamik, mekanikte uygululamalarına rastlanmaktadır (Küpeli, 2010).

1940'larda, Ehresmann ve Hopf hemen hemen değme manifoldları ortaya koymuştur; bunlar her bir tanjant uzaydaki düzgün lineer kompleks yapılar ile donanımlı çift boyutlu manifoldlardır.

Hemen hemen değme manifoldlar, simplektik manifoldlar ve birçok matematik ve fizik uygulaması ile yakından ilişkilidir (Blair, 2002). Diğer taraftan, tek boyutlularda, nearly değme manifoldlar Boothby ve Wong tarafından 1950'lerde ortaya konmuştur.

1969 yılında S. Tanno (Tanno, 1969), otomorfizm grupları maksimum boyuta sahip olan, bağlantılı, hemen hemen değme metrik manifoldları üç sınıfa ayrılmıştır. Bu durumda c sabit φ $-$kesitsel eğriliği olmak üzere;

Eğer c>0 ise; Riemann manifoldunun sabit φ $-$kesitsel eğriliğine sahip bir

homojen Sasakian manifoldu olduğunu,

c = 0 ise ; Riemann manifoldunun sabit φ $-$kesitsel eğriliğe sahip Kaehler

manifoldu ile bir çemberin yada bir doğrunun çarpım manifoldu olduğunu,

c<0 ise ; Riemann manifoldunun reel eksen ile kompleks düzlemin

katlı çarpımından oluştuğunu göstermiştir.

Kenmotsu (Kenmotsu, 1972) çalışmalarında Tanno'nun bu ayrımlarını tüm yönleriyle inceleyerek, hemen hemen değme metrik manifold olan bir Kenmotsu manifoldu tanımlamıştır.

M^{2m+1}, diferensiyellenebilir bir manifold ve $\varphi: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$, (1, 1) tensör alanı, ξ vektör alanı, η 1-form ve g metrik tensör olmak üzere;

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \eta(\xi) = 1$$

şartlarını sağlayan hemen hemen değme yapısı

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \qquad \forall\, X, Y \in \xi(M)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

şartlarını sağlıyorsa $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna hemen hemen değme metrik manifold denir (Kenmotsu, 1972).

Eğer bir $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ değme manifoldu

$$(\nabla_x \varphi)Y = -g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X$$

şartını sağlıyorsa M^{2m+1} ye Kenmotsu manifold denir (Kenmotsu, 1972).

$(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldu,

$$(\nabla_x \varphi)Y + (\nabla_y \varphi)X = -\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y$$

koşulunu sağlıyorsa bu manifolda neredeyse Kenmotsu manifoldtur denir (Kenmotsu, 1972). Buradaki ∇, Levi-Civita konneksiyonudur. Açıkça görülür ki her Kenmotsu manifold bir nearly Kenmotsu manifoldtur, ancak tersi doğru değildir. Eğer neredeyse Kenmotsu manifold bir Kenmotsu manifold değil ise buna strict neredeyse Kenmotsu manifoldu denir (Najafi, 2013).

Kenmotsu manifoldları ve neredeyse Kenmotsu manifoldları birçok şekilde incelenmiştir. Şimdi bunların birkaçından bahsedelim.

Neredeyse Kaehler manifoldları 1970'de Gray çalışmıştı (Gray, 1970). Neredeyse Kaehler ile neredeyse Kenmotsu manifoldalrı arası ilişkiyi Heidari ve diğerleri çalışmış (Heidari, 2017). Kenmotsu manifoldların pek çok özelliği George Pitiş tarafından 'Geometry of Kenmotsu Manifolds' kitabında incelenmiştir.(Pitiş, 2007) Kenmotsu manifoldlar ile ilgili Avik De tarafından incelemeler mevcuttur (De, 2010). Aynı zamanda pek çok tezde de incelenmiştir, örneğin Kamil Sağlam, Aslı Başarı yüksek lisans tezleri bulunmaktadır.(Sağlam, 2008)(Başarı, 2008)

Neredeyse Kenmotsu manifoldaları ile ilgili (Najafi, 2013), (Küpeli, 2015) çalışmaları mevcuttur. Einstein manifodlar ile ilgili (Singh, 2010) çalışmaları incelenmiştir.

Bu çalışmalar doğrultusunda tezin üçüncü bölümünde η −Einstein neredeyse Kenmotsu manifoldlar ile ilgili orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmanın diğer çalışacak olanlara faydalı olacağı düşülmektedir.

Tezin birinci bölümü giriş kısmı olup konu ile ilgili literatür bilgisine yer verilmiştir.

İkinci bölüm temel kavramlara ayrılmış ve dört alt başlıktan oluşmaktadır.

Birinci alt başlıkta Riemann manifoldları ile ilgili temel kavramlar anlatılmıştır.

İkinci alt başlıkta hemen hemen değme manifoldlara yer verilmiştir.

Üçüncü alt başlıkta Kenmotsu manifoldlara ait temel kavram ve özellikler anlatılmıştır.

Dördüncü alt başlıkta ise neredeyse Kenmotsu manifoldların özelliklerinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde strict özelliği taşıyan η −Einstein neredeyse Kenmotsu manifoldların incelemesi yapılmış ve orijinal sonuçlara ulaşılmıştır.

Son bölüm ise sonuçlara ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1. M^{2m+1} bir diferensiyellenebilir C^{∞} manifold olsun. M^{2m+1} üzerindeki C vektör alanlarının uzayı $\chi(M^{2m+1})$ ve M^{2m+1} den $\mathbb{R}$ ye C fonksiyonların uzayı $C^{\infty}(M^{2m+1},\mathbb{R})$ olmak üzere, M^{2m+1} üzerinde;

$$g:\chi(M^{2m+1})\times\chi(M^{2m+1})\to C^{\infty}(M^{2m+1},\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M^{2m+1} ye bir Riemann manifoldu adı verilir ve (M^{2m+1},g) şeklinde gösterilir (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

M^{2m+1} manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^{2m+1} üzerindeki bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M^{2m+1} ye bağlantılı manifold adı verilir. M^{2m+1} bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyorsa M^{2m+1} ye basit bağlantılıdır denir (O' Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. M^{2m+1} bir manifold olsun. Her $p\in M^{2m+1}$ noktasına T_pM^{2m+1} de bir tanjant vektörünü karşılık getiren dönüşüme M üzerinde bir vektör alanı denir.

M^{2m+1} üzerinde bir vektör alanı

$$X:M^{2m+1}\to\bigcup_{p\in M}T_pM^{2m+1}$$

olarak tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.3. M^{2m+1} bir diferensiyellenebilir manifold ve p de M^{2m+1} in herhangi bir noktası olsun. p nin U ve $U'(U\cap U'=\emptyset)$ komşulukları üzerindeki yerel koordinat sistemleri $\{x^i\}$ ve $\{y^i\}$ olmak üzere $y^i=y^i(x^1,\dots,x^n)$ olarak yazılır. Eğer $det\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]>0$ ise M^{2m+1} ye yönlendirilebilir manifold denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.1.4. M^{2m+1} diferensiyellenebilir bir manifold ve p de M^{2m+1} nin herhangi bir noktası olsun. T_pM^{2m+1} tanjant uzayının duali olan uzaya M^{2m+1} nin p noktasındaki kotanjant uzayı denir ve $T_p^*M^{2m+1}$ ile gösterilir.

$$T_p^*M=\left\{w\,\middle|\,w:T_pM\to\mathbb{R}\right\}$$

Kotanjant uzayının her bir elemanına p noktasındaki kotanjant vektör denir ve her bir kontanjant vektöre de M^{2m+1} üzerinde bir 1-form denir (Yano ve Kon, 1984).

$(x^1, \dots, x^{2m+1})$, $p \in M^{2m+1}$ noktasındaki yerel koordinat sistemini göstermek üzere; $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big| p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{2m+1}}\Big| p\right\}$, T_pM^{2m+1} için bir baz, $\{dx^1|p, \dots, dx^n|p\}$ ise $T_p^*M^{2m+1}$ için bir bazdır. Ayrıca,

$$\frac{d}{dx^i}\left(dx^j\right) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dir. Bir $w \in T_p^*M^{2m+1}$ 1-formu,

$$w = \sum_{i=1}^{2m+1} f_i dx^i, \quad f_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$$

Şeklinde yazılabilir. Eğer f_i ler diferensiyellenbilirse w 1-formuna diferensiyellenebilirdir denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.5. M^{2m+1} bir diferansiyellenebilir manifold ve p de M^{2m+1} üzerinde herhangi bir nokta olsun. $C^\infty(U, \mathbb{R})$, p nin bir U komşuluğunda tanımlanan diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesini ve

$$\tau: [a, b] \subset \mathbb{R} \to M^{2m+1}$$

diferansiyellenebilir bir eğriyi göstermek üzere $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ için

$$Xf = (\frac{df(\tau(t)}{dt})t_0$$

ile tanımlanan X e, $\tau(t_0) = p$ noktasında bir tanjant vektörü denir. $Xf, t = t_0$ noktasında $\tau(t)$ eğrisi doğrultusunda, f fonksiyonun türevini ifade eder.

X aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $X: C^\infty(U, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineer bir dönüşümdür.

2) $X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg), f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$

Eğer; $X(f)(p) = X_pf$ olmak üzere; $Xf: U \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise X e diferensiyellenebilirdir denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.6. M^{2m+1} bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$$

dönüşümü; $\forall f, g \in C(M^{2m+1}, \mathbb{R}), \forall\, X, Y, Z \in \chi(M^{2m+1}) için,$

i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özelliklerini sağlarsa, ∇ ya M^{2m+1} üzerinde bir Afin Konneksiyon adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Bir f fonksiyonunun X e göre kovaryant türevi;

$$\nabla_{Xf} = Xf = X^h \frac{\partial f}{\partial X^h}$$

ile tanımlanır. Burada X^h, X in yerel bileşenleridir.

$(0, s)$ veya $(1, s)$ tipinde herhangi bir tensör alanı S ile gösterildiğinde S in X e göre kovaryant türevi

$$(\nabla_X S)(X_1, \dots, X_n) = \nabla_X\big(S(X_1, \dots, X_n)\big) - \textstyle\sum_{i=1}^{2m+1}\{S(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_n)\} \quad (2.1.1)$$

dır. Eğer $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X S = 0$ ise tensör alanına ∇ konneksiyonuna göre paraleldir denir (Bejancu, 1986)

Tanım 2.1.7. M^{2m+1} diferensiyellenebilir bir manifold ve ∇ da M^{2m+1} üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere;

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.1.2)$$

ile tanımlanan (1,2) tipindeki T tensörüne ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü denir. Burada $[X, Y]$, X ile Y nin Lie parantez operatörüdür ve $\forall f \in C^\infty(M^{2m+1}, \mathbb{R})$ için;

$$[X, Y](f) = X(Y, f) - Y(Xf)$$

ile tanımlanır. Torsiyon tensörü sıfıra eşit olan konneksiyona torsiyonsuz veya simetrik konneksiyon denir (Bejancu, 1986).

Tanım2.1.8. (M^{2m+1}, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^{2m+1} üzerinde tanımlanan bir afin konneksiyon olsun. $T = 0$ ve $\nabla \mathrm{g} = 0$ şartlarını sağlayan konneksiyona Levi-Civita konneksiyonu denir ve şöyle ifade edilir;

$$2\mathrm{g}(\nabla_X Y, Z) = X\big(g(Y,Z)\big) - Y\big(g(Z,X)\big) - Z\big(g(X,Y)\big) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Y,Z],X) \qquad (2.1.3)$$

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için verilen bu özdeşliğe Kozsul özdeşliği denir (Hacısalihoğlu, 2003)

Tanım 2.1.9. M^{2m+1} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\chi(M^{2m+1})$, M^{2m+1} üzerinde tanımlı vektör alanların kümesi, $\chi(M^{2m+1})^*$ de $\chi(M^{2m+1})$ nin dualini göstersin;

$$T: \underbrace{\chi(M) \times \chi(M) \times \ldots \times \chi(M)}_{r\ tane} \times \underbrace{\chi(M)^* \times \chi(M)^* \times \ldots \times \chi(M)^*}_{s\ tane} \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bütün lineer dönüşümlerin kümesi T_s^r ile gösterilirse; T_s^r bir k elemanına r. dereceden kovaryant, s. dereceden kovaryant tensör alanı denir. Tensör alnı tipi (r, s) tipinde gösterilir. $T_0^r = T^r, T_0^s = T_s$ ve $T_0^0 = C^\infty(M, \mathbb{R})$ dir. r.dereceden kovaryant tensör alanına r −from denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.10. M^{2m+1} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M^{2m+1} üzerindeki r −formların uzayı $\wedge^r (M^{2m+1})$ olsun.

$$d{:}\wedge^r (M^{2m+1}) \longrightarrow \wedge^{r+1} (M^{2m+1})$$

operatörü eğer;

i) $f \in C^\infty(M^{2m+1}, \mathbb{R})$ için $df(X) = X(f)$

ii) $\theta \in \wedge^r (M^{2m+1})$ ve $w \in \wedge^s (M^{2m+1})$ ise $d(\theta \wedge w) = d\theta \wedge w + (-1)^r \theta \wedge dw$

iii) $d^2 = 0$

şartlarını sağlıyorsa d dönüşümüne dış türev denir (Hacısalihoğlu, 2003)

Tanım 2.1.11. (M^{2m+1}, g) bir Riemann manifoldu, ∇ de M^{2m+1} üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M^{2m+1} üzerinde bir $(1,3)$ $-$tensör alanıdır ve M^{2m+1} nin eğrilik tensörü olarak adlandırılır.

Ayrıca

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

tensörüne M^{2m+1} nin Reimann eğrilik tensör alanı adı verilir.

Her $X,Y,Z,V,W \in \chi(M^{2m+1})$ için Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özelliklere sahiptir (O'Neill, 1983);

i) $R(X,Y,U,V) = -R(Y,X,U,V)$,

ii) $R(X,Y,U,V) = -R(X,Y,V,U)$,

iii) $R(X,Y,U,V) = R(U,V,X,Y)$,

iv) $R(X,Y,U,V) + R(Y,U,X,V) + R(U,X,Y,V) = 0$, (1. Bianchi Özdeşliği)

v) $(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0$, (2. Bianchi Özdeşliği)

dır (Bejancu, 1986).

Tanım 2.1.12. M^{2m+1} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\forall p \in M^{2m+1}$ için T_pM^{2m+1} de M^{2m+1} nin p noktasındaki tanjant uzay olsun. T_pM^{2m+1} tanjant uzayında $\{X_1, X_2\}$ vektörlerinin gerdiği P düzlemi için

$$K(p) = \frac{g(R(X_1,X_2)X_2,X_1)}{g(X_1,X_1)g(X_2,X_2) - g(X_1,X_2)^2} \tag{2.1.4}$$

ile tanımlanan $K(p)$ ye P düzleminin kesitsel eğriliği denir (Yano ve Kon, 1964).

T_pM tanjant uzayında, her P düzlemi ve $\forall p \in M^{2m+1}$ için, $K(p)$ sabit ise M^{2m+1} manifolduna sabit eğrilikli uzay denir.

Bir sabit eğrilikli Riemann manifolduna da bir uzay form denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.1.1. $M^{2m+1}(c)$, sabit eğriliği c olan bir uzay form olsun. $,\forall\, X,Y,Z \in \chi(M^{2m+1})$ için $M^{2m+1}(c)$ nin eğrilik tensörü;

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \tag{2.1.5}$$

dir (Carmo, 1992).

Tanım 2.1.13. M^{2m+1} bir diferensiyellenebilir manifold ve $\{e_i\}$, T_pM^{2m+1} nin ortonormal bazı olmak üzere;

$$S: \chi(M \times \chi(M) \to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

$$(X,Y) \to S(X,Y) = \sum_{i=1}^{2m+1} g(R(e_i,X)Y,e_i)$$

ile tanımlanan (0,2) tipli tensör alanına M^{2m+1} nin Ricci eğrilik tensörü denir (Carmo,1992).

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

ile tanımlanan (1,1) tipindeki Q tensör alanına M^{2m+1} nin Ricci operatörü adı verilir (Carmo, 1992).

Tanım 2.1.14. (M^{2m+1},g), $2m+1 \geq 2$ boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $,\forall\, X,Y \in \chi(M^{2m+1})$için;

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y)$$

şeklinde bir $\lambda: M^{2m+1} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa, M^{2m+1} ye Einstein manifoldu denir (Bejancu, 1986)

Tanım 2.1.15. (M^{2m+1},g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_i\}$, $\chi(M^{2m+1})$ nin ortonormal bazı olmak üzere

$$r = \textstyle\sum_{i=1}^{2m+1} S(e_i,e_i) \tag{2.1.6}$$

değerine M^{2m+1} nin skaler eğrilik fonksiyonu denir (Chen, 1973)

Tanım 2.1.16. M^{2m+1} manifold olsun. M^{2m+1} üzerinde bir vektör alanı X olsun. φ_t ise X ile genelleştirlirmiş yerel dönüşümlü bir $1-$parametreli grubu olmak üzere

$$(L_X K)_x = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[K_X - (\varphi_t K)_x]$$

ifadesine K tensör alanının X yönünde $L_X K$ Lie türevi denir (Kobayashi, Nomizu, 1963)

Lie türevi aşağıdaki eşitlikleri sağlar (Hacısalihoğlu, 2003);

i) $L_X f = Xf, \quad \forall f \in C(M^{2m+1}, \mathbb{R}), \quad X \in \chi(M)$

ii) $L_X Y = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \chi(M^{2m+1})$

iii) $L_X(fY) = X(f)Y + fL_X Y$

iv) $L_{[X,Y]} = [L_X L_Y] = L_X L_Y - L_Y L_X$

v) $L_X(df) = d(X[f])$

vi) $(L_X W)(Y) = X\big(W(Y)\big) - W([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \chi(M^{2m+1}), \; W \in \chi(M^{2m+1})^*$

vii) $(L_X g)(Y, Z) = X\big(g(Y, Z)\big) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$.

Tanım 2.1.17. M^{2m+1}, Riemann metriği g olan bir Riemann manifoldu olsun ve M^{2m+1} üzerinde bir vektör alanı X verilsin.

X in $1-$parametreli dönüşüm grubu altında g invaryant ise X e g nin bir Killing vektör alanı denir. $\forall\, X \in \chi(M^{2m+1})$ için;

$$L_X g = 0$$

olur. Eğer X bir vektör alanı ise $\forall Y, Z \in \chi(M^{2m+1})$ için,

$$(L_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.18. (M^{2m+1}, g) Riemann manifoldu ve $X, Y \in \chi(M^{2m+1})$ olsun. $R(X, Y)R = 0$ şartını sağlayan M^{2m+1} manifolduna semi-simetrik manifold denir (Jun, De ve Pathak, 2005)

Burada $R(X, Y)$ lineer endomorfizması R tensörüne koveryant türev olarak etki eder,yani,

$\forall X, Y, W, U, V \in \chi(M^{2m+1})$ için

$(R(X,Y)R)(U,V,W) = R(X,Y)R(U,V)W - R(R(X,Y)U,V)W - R(U,R(X,Y)V)W -$
$R(U,V)R(X,Y)W$ (2.1.7)

olur. $R(X,Y)R = 0$ şartına Nomizu şartı da denir.

Bunun yanında, S Ricci tensörü belirtsin ve $R(X,Y)S = 0$ şartını sağlayan manifolda Ricci semi-simetrik manifold denir (Jun, De ve Pathak, 2005). Benzer tanım C Weyl konformal eğrilik tensörü için de yazılabilir.

Tanım 2.1.19. M^{2m+1} bir Riemann manifoldu ve R, M^{2m+1} nin eğrilik tensörü olsun. Eğer $\nabla R = 0$ ise M^{2m+1} ye lokal simetrik denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.20. (B, g_B) ve (F, g_F) iki Riemann manifoldu olsun. f, B üzerinde tanımlı bir C^∞ fonksiyonu olsun. $B \times F$ manifo89ldu üzerinde Riemann metriği;

$$g = g_B + f^2 g_f$$

şeklinde tanımlansın. $(B \times F, g)$ ye warped çarpım manifoldu denir. $M = B \times {}_f F$ ile gösterilir (Bishop, 1969).

Tanım 2.1.21. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olsun. O halde

$$\alpha: I \longrightarrow E^n$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna eğri denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.1.22. M^{2m+1}, bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M^{2m+1})$ için;

$$W(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2m}(S(Y,Z)X - S(X,Z)Y) \qquad (2.1.8)$$

şeklinde tanımlanan tensör alanına M^{2m+1} manifoldunun Weyl projektif eğrilik tensör alanı denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.23. M^{2m+1}, bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M^{2m+1})$ için;

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{2m+1}[S(X,Y)Z - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX] -$$
$$\frac{r}{2m(2m-1)}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X] \qquad (2.1.9)$$

şeklinde tanımlı tensör alanına M^{2m+1} manifoldunun Weyl konformal eğrilik tensörü denir (Yano ve Kon, 1984)

$C = 0$ ise M^{2m+1} manifolduna konformal flat denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.24. M^{2m+1}, bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M^{2m+1})$ için W^* tensör alanı;

$$W^*(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z} = \mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z} - \frac{1}{4m}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \tag{2.1.10}$$

ve

$$W^*(X,Y,Z,U) = g(W^*(X,Y)Z,U) = W^*(Z,U,X,Y)$$

ile tanımlanan W^* tensör alanına m −projektif eğrilik tensörü denir (Chaubey, 2000).

2.2. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldları

Tanım 2.2.1. M^{2m+1}, bir manifold ve (φ, ξ, η) da M^{2m+1} üzerinde, sırası ile, (1,1) tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer (φ, ξ, η) için;

$$\eta(\xi) = 1 \tag{2.2.1}$$

ve

$$\varphi^2 = -I + \eta(\xi) \tag{2.2.2}$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (φ, ξ, η)'ya M^{2m+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapısı denir. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta)$ manifolduna hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

ξ ye M^{2m+1} nin reeb vektör alanı, karakteristik vektör alanı veya temel vektör alanı denir.

Önerme 2.2.1. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen değme manifold olsun. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için;

i) $\varphi\xi = 0$ (2.2.3)

ii) $\eta(\varphi X) = 0$ (2.2.4)

iii) $\varphi^3 = -\varphi$ (2.2.5)

iv) $rank\ \varphi = 2m$ (2.2.6)

eşitlikleri geçerlidir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.2.2. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen değme manifoldu olsun. M^{2m+1} üzerinde bir g Riemann metriği;

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.2.7}$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.2.8}$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M^{2m+1} üzerinde hemen hemen değme metriktir denir. (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik yapısı, (φ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2m+1} manifolduna da hemen hemen değme metrik manifoldu denir (Yano ve Kon, 1984).

Sonuç 2.2.1 M^{2m+1} bir hemen hemen değme metrik manifoldu ile hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) verilsin. Böylece,

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{2.2.9}$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.2.3. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen değme manifoldu olsun. M^{2m+1} nin tanjant demetinin yapı grubu $U(n) \times 1$ e indirgenebilir. Tersi de doğrudur (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.2.4. Her hemen hemen değme manifold yönlendirilebilirdir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.2 $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen değme manifoldu olsun. Her η 1-formu M^{2m+1} üzerinde

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

şartını sağlıyor ise M^{2m+1} ye değme manifold, η ya da değme form denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.2.1. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta)$ bir değme manifold ise

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y) \tag{2.2.10}$$

şeklinde bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme yapısı mevcuttur (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.3. M^{2m+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) için;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{2.2.11}$$

şeklinde tanımlanan Φ dönüşümüne hemen hemene değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g)'nın 2.temel formu denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.4. M^{2m+1}, değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) olan bir değme metrik manifoldu olsun. $\forall p \in M^{2m+1}$, T_pM^{2m+1} de ξ ye ortogonal bir X birim vektör alındığında $\{X, \varphi X\}$, T_pM^{2m+1} deki bir düzlem kesitinin bir ortonormal bazı oluyorsa, bu düzlem kesitine φ −kesiti denir (Yano ve Kon, 1984).

$$K(X, \varphi X) = g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) \tag{2.2.12}$$

Kesit eğriliğine de φ −kesit eğriliği denir, bu $H(X)$ ile gösterilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.5. M^{2m+1}, (φ, ξ, η, g) değme metrik yapısı olan bir değme metrik manifoldu olsun. Eğer M^{2m+1} nin Ricci tensörü $\forall X, Y \in \chi(M^{2m+1})$ için;

a, b: $M^{2m+1} \to R$ fonksiyonu olmak üzere

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y) \tag{2.2.13}$$

formunda ise M^{2m+1} ye bir η −Einstein Kenmotsu manifold denir (Blair, 1976).

Önerme 2.2.5. M^{2m+1}, (φ, ξ, η, g) değme metrik yapısı olan hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. M^{2m+1} nin her bir noktası etrafındaki her bir yerel komşulukta

$$\{X_1, \ldots, X_n, X_{1^*} = \varphi X_1, X_{2^*} = \varphi X_2, \ldots, X_{n^*} = \varphi X_n, \xi\}$$

şeklinde bir ortonormal bazı vardır (Pitiş, 2007).

Tanım 2.2.6. Önerme 2.2.5 de verilen $\{X_i, X_{i^*}, \xi\}$ $(i \in 1, \ldots, n)$, bazına hemen hemen değme yapının φ −bazı denir (Pitiş, 2007).

2.3. Kenmotsu Manifoldlar

Tanım 2.3.1. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme Riemann manifoldu aşağıdaki şartları sağlıyorsa;

$$d\eta = 0 \qquad d\Phi = 2\eta \wedge \Phi \tag{2.3.1}$$

M^{2m+1} ye hemen hemen Kenmotsu manifold denir (Pitiş, 2007).

Tanım 2.3.2. Herhangi bir hemen hemen Kenmotsu manifold normal ise Kenmotsu manifoldtur (Pitiş, 2007).

Teorem 2.3.1. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme Riemann manifoldu Kenmotsu manifolddur $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \varphi = -\eta(Y)\varphi X - g(X, \varphi Y)\xi \tag{2.3.2}$$

olmalıdır (Janssens ve Vanheck, 1981).

Önerme 2.3.1. Bir M^{2m+1} Kenmotsu manifold için

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \tag{2.3.3}$$

sağlanır (Pitiş, 2007).

İspat. ξ, birim vektör ve bundan dolayı

$$g(\xi, \xi) = 1$$

$$X\, g(\xi, \xi) = 0$$

$$2g(\nabla_X \xi, \xi) = 0$$

eşitlikleri elde edilir, yani

$$g(\nabla_X \xi, \xi) = 0 \tag{2.3.4}$$

sağlanır. (2.3.2) de $Y = \xi$ alınarak ve (2.3.4) den yararlanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.2. F, Kaehler manifold olsun. c sıfırdan farklı sabit olsun ve $f(t) = ce^t$ bir L doğrusu üzerinde fonksiyon belirtsin. O halde $M = L \times\, _fF$ warped çarpım uzayı, bir Kenmotsu yapı belirtir (Kenmotsu, 1972)

Tersi için aşağıdaki teorem söylenebilir.

Teorem 2.3.3. M^{2m+1} Kenmotsu manifold olsun. $\forall p \in M^{2m+1}$ nin bazı $U(p)$ komşulukları $(-\xi, \xi) \times\, _fV$ warped çarpım uzayı ile tanımlansın, öyle ki $(-\xi, \xi)$ bir açık aralık,

$f(t) = ce^t$ ve V bir Kaehler manifolddur (Kenmotsu, 1972).

Tanım 2.3.3. $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ Kenmotsu manifold olsun. $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\varphi^2\big((\nabla_W R)(X,Y)Z\big)=A(W)R(X,Y)Z \tag{2.3.5}$$

şeklinde bir sıfırdan farklı A $1-$formu bulunabiliyorsa M^{2m+1} ye $\varphi-$rekürent denir (De, Yıldız ve Yalınız, 2009).

Eğer $X,Y,Z,W;\xi$ ye ortogonal ise M^{2m+1} yerel $\varphi-$reküренttir (De, Yıldız ve Yalınız, 2009).

Tanım 2.3.4. $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ Kenmotsu manifold olsun. Eğer

$$\varphi^2\big((\nabla_W R)(X,Y)Z\big)=0 \tag{2.3.6}$$

şartı $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M^{2m+1})$ için sağlanıyor ise M^{2m+1} ye $\varphi-$simetrik denir (De, 2008).

Eğer $X,Y,Z,W;\xi$ ye ortogonal ise M^{2m+1} yerel $\varphi-$simetriktir (De, 2008).

Tanım2.3.5. $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ Kenmotsu manifold olsun. Q, M^{2m+1} nin Ricci operatörü olsun. Eğer

$$\varphi^2(\nabla_W Q)Y=0 \tag{2.3.7}$$

eşitliği $\forall X,Y\in\chi(M^{2m+1})$ için sağlanıyorsa M^{2m+1}ye $\varphi-$Ricci simetrik denir (Shukla ve Shukla, 2009).

Eğer $X,Y;\xi$ ye ortogonal ise M^{2m+1} yerel $\varphi-$simetriktir (Shukla ve Shukla, 2009).

Tanım 2.3.6. $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ Kenmotsu manifold olsun. S, M^{2m+1} nin Ricci tensörü olsun.Eğer

$$(\nabla_X S)(\varphi Y,\varphi Z)=0 \tag{2.3.8}$$

eşitliği $\forall X,Y\in\chi(M^{2m+1})$ için sağlanıyorsa M^{2m+1}, $\eta-$paralel Kenmotsu manifolddur (Calin, 2003).

Tanım 2.3.7. $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ Kenmotsu manifold olsun. R, M^{2m+1} nin Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$\varphi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = A(W)\varphi^2(R(X,Y)Z) +$$
$$B(X)\varphi^2(R(W,Y)Z) + B(Y)\varphi^2 R(X,W)Z + D(Z)\varphi^2(R(X,Y)W) +$$
$$g(R(X,Y)Z,W)\varphi^2\rho \quad (2.3.9)$$

eşitliği $\forall X, Y \in \chi(M^{2m+1})$ için sağlanıyorsa M^{2m+1} weakly $\varphi -$simetriktir. (Burada A, B ve D;aynı anda sıfır olmayan $1 -$formlar ve $D(Z) = g(Z,\rho)$ belirtir.) (Hui, 2012)

Tanım 2.3.8. $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ Kenmotsu manifold olsun. Q, M^{2m+1} nin Ricci operatörü olsun. Eğer

$$\varphi^2[(\nabla_X Q)(Y)] = A(X)\varphi^2(Q(Y)) + B(Y)\varphi^2(Q(X)) + S(X,Y)\varphi^2(\rho)$$

(2.3.10)

eşitliği $\forall X, Y \in \chi(M^{2m+1})$ için sağlanıyorsa M^{2m+1} weakly $\varphi -$Ricci simetrik Kenmmotsu manifolddur. (Burada A, B ve D;aynı anda sıfır olmayan $1 -$formlar ve $D(Z) = g(Z,\rho)$ belirtir.) (Hui, 2012)

2.4. Neredeyse Kenmotsu Manifoldlar

Tanım 2.4.1. (N,J,G),hemen hemen Hermityen manifold ve $c \in (0,\infty)$ için $f(t) = e^{ct}$ eğrisi olsun. $R \times {}_f N$ warped çarpımı üzerinde g metriği $X', Y' \in \chi(N)$, $X = (a\frac{d}{dt}, X')$ ve $Y = (b\frac{d}{dt}, Y')$ olmak üzere

$$g(X,Y) = ab + e^{2ct}G(X',Y')$$

şeklinde verilsin. Eğer

$$\varphi(X) = (0, JX'),\ \xi = \left(\frac{d}{dt}, 0\right),\ \eta = dt$$

eşitlikleri (φ,ξ,η,g), $R \times {}_f N$ manifoldunda mevcutsa hemen hemen değme Riemann yapı oluşturur (Pitiş, 2007).

Önerme 2.4.1. $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ diferensiyellenebilir bir manifold;

$\varphi: \chi(M^{2m+1}) \to \chi(M^{2m+1})$, (1, 1) tensör alanı, ξ vektör alanı, η 1-form ve g metrik tensör olmak üzere;

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \quad (2.4.1)$$

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi\,\xi = 0, \qquad \eta(\varphi X) = 0 \tag{2.4.2}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \qquad \forall\, X, Y \in \xi(M) \tag{2.4.3}$$

$$g(X, \varphi Y) = -g(\varphi X, Y) \text{ ve } \eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.4.4}$$

şartlarını sağlayan hemen hemen değme metrik manifoldu

$$(\nabla_x \varphi)Y + (\nabla_y \varphi)X = -\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y \tag{2.4.5}$$

koşulunu da sağlıyorsa M^{2m+1} ye neredeyse Kenmotsu manifold denir (Mobin, 2011)(Najafi, 2013).

M^{2m+1} manifoldu neredeyse Kenmotsu manifoldu

$$(\nabla_x \eta)Y = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.4.6}$$

eşitliğini sağlar.

Önerme 2.4.2. Herhangi bir Kenmotsu manifold, neredeyse Kenmotsu manifolddur (Pitiş, 2007).

Teorem 2.4.1. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir nerdeyse Kenmotsu manifold ise

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \tag{2.4.7}$$

eşitliği sağlanır (Kim, Liu, Triphati, 2004)

Teorem 2.4.2. Bir normal neredeyse Kenmotsu manifold, Kenmotsu manifolddur (Prasad, 2009).

Önerme 2.4.3. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir neredeyse Kenmotsu manifold olsun. R, eğrilik tensörü için;

i) $$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{2.4.8}$$

ii) $$R(\xi, X)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \tag{2.4.9}$$

iii) $$\eta(R(X, Y)Z) = g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X) \tag{2.4.10}$$

iv) $$(\nabla_W R)(X, Y)\xi = g(X, W)Y - g(Y, W)X - R(X, Y)W \tag{2.4.11}$$

eşitlikleri geçerlidir (Najafi, 2013).

İspat. Basit hesaplamalarla görülebilir.

Önerme 2.4.5. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ neredeyse Kenmotsu manifold olsun. S, M^{2m+1} nin Ricci tensörünü belirtsin. O halde

i) $S(X, \xi) = -2m\eta(X)$ (2.4.12)

ii) $S(\varphi X, \varphi Y) = S(X, Y) + 2m\eta(X)\eta(Y)$ (2.4.13)

eşitlikleri sağlanır (Najafi, 2013).

Tanım 2.4.2. . $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ strict neredeyse Kenmotsu manifoldu ise aşağıdaki özellikleri sağlar (Najafi, 2018);

$$\nabla_\xi \varphi = 0$$

$$\nabla \xi = I - \eta \otimes \xi$$

Teorem 2.4.3 . $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir strict neredeyse Kenmotsu manifoldu olsun. O halde (M^{2m+1}, g) bir Einstein manifoldu olamaz.(Najafi, 2018)

3. BAZI EĞRİLİK KOŞULLARINA SAHİP NEREDEYSE KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölümde neredeyse Kenmotsu manifoldları bazı eğrilik şartları altında incelenecektir. Bu bölümde elde edilen bütün sonuçlar orijinaldir.

Önerme 3.1. M^{2m+1}, strict neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Eğer M^{2m+1}, η −Einstein ise bu durumda $a, b: M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlardır.

İspat. M^{2m+1}, η −Einstein strict neredeyse Kenmotsu manifold olsun. (2.1.16) kullanılarak skaler eğriliğinin türevi alınırsa

$$\nabla_Y r = 2\sum_{i=1}^{2m+1} g((\nabla e_i Q)Y, e_i) \tag{3.1}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.13. ve (2.2.13) bağıntısı kullanılarak

$$g(QX, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)g(Y, \xi) \tag{3.2}$$

veya

$$QX = aX + b\eta(X)\xi \tag{3.3}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$(\nabla_Y Q)X = \nabla_Y QX - Q\nabla_Y X \tag{3.4}$$

olduğu göz önüne alınır ve (3.3) ifadesi (3.4) de yerine yazılırsa

$$(\nabla_Y Q)X = \nabla_Y(aX + b\eta(X)\xi) - a\nabla_Y X - b\eta(\nabla_Y X)\xi \tag{3.5}$$

bulunur. (3.5) ifadesi düzenlenerek

$$(\nabla_Y Q)X = Y(a)X + Y(b)\eta(X)\xi + b\eta(\nabla_Y X)\xi + bg(X, \nabla_Y \xi)\xi + b\eta(X)\nabla_Y \xi - b\eta(\nabla_Y X)\xi \tag{3.6}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$(\nabla_Y Q)X = Y(a)X + Y(b)\eta(X)\xi + bg(X, \nabla_Y \xi)\xi + b\eta(X)\nabla_Y \xi \tag{3.7}$$

sonucuna ulaşılır. (3.7) ifadesinde Y üzerinden iz alınırsa

$X(r) = 2\sum_{i=1}^{2m+1}[ge_i(a)g(X,e_i) + e_i(b)\eta(X)\eta(e_i) + bg\big(X,\nabla_{e_i}\xi\big)\eta(e_i) +$

$b\eta(X)g(\nabla_{e_i}\xi,\xi)]$ (3.8)

veya

$$X(r) = 2\xi(b)\eta(X) + 2\sum_{i=1}^{2m+1}[e_i(a)g(X,e_i) + b\eta(X)g\big(\nabla_{e_i}\xi,\xi\big)] \quad (3.9)$$

bulunur. Yöne göre türevden $e_i(a)g(X,e_i) = X(a)$ oluşu dikkate alınarak (3.9) eşitliği

$$X(r) = 2\xi(b)\eta(X) + 2X(a) + 2(2m+1)b\eta(X) \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Öte yandan (3.2) den

$$r = (2(2m+1)+1)a + b$$

yazılabilir. Bu son ifadeden, X yönünde türev alınarak

$$X(r) = 2(2m+1)X(a) + X(a) + X(b) \quad (3.11)$$

bulunur. $a + b = -2m$ olduğundan $X(a) + X(b) = 0$ olacaktır. Dolayısı ile (3.11) ifadesi

$$X(r) = 2(2m+1)X(a) \quad (3.12)$$

olarak bulunur. (3.11) ve (3.12) birlikte ele alınırsa

$$(2m+1)X(a) = \xi(b)\eta(X) + X(a) + 2(2m+1)(b)\eta(X) \quad (3.13)$$

yazılabilir. (3.13) ifadesinde $X = \xi$ alınırsa $\xi(a) = 2b$ bulunur. Bu değer (3.13)'de yerine yazılırsa $\xi(b) = -2b$ elde edilir. Bu değer (3.13)'de tekrar kullanılarak

$$X(b) + 2b\eta(X) = 0 \quad (3.14)$$

bulunur. Elde edilmiş olan (3.14) ifadesinden b sabit ise $b = 0$ ve a sabit ise $b = 0$ olarak bulunur. Yani a ve b fonksiyon olmalıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1. M^{2m+1}, η −Einstein strict neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Eğer a veya b fonksiyonlarından herhangi biri sabit ise manifold Einstein'dır.

Teorem 3.1. $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ Ricci tensörü $\eta-$ paralel olan strict neredeyse Kenmotsu manifold olsun. $R(X,Y).P = 0$ koşulunu sağlayan $\eta-$Einstein strict neredeyse Kenmotsu manifold yoktur.

İspat. M^{2m+1} , $\eta-$Einstein strict neredeyse Kenmotsu manifold olsun. Hipotezden

$$R(X,Y)P = 0) \Rightarrow (R(X,Y)P)(U,V)W = 0 \tag{3.15}$$

dır. P eğrilik tensörünün (2.1.8) ile verilen ifadesinde, S Ricci tensörünün (2.2.13) bağıntısı kullanılarak

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2m}[(ag(Y,Z) + b\eta(Y)\eta(Z)X - \big(ag(X,Z) - b\eta(X)\eta(Z)\big)Y] \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) ifadesi düzenlenirse

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2m}[ag(Y,Z)X - ag(X,Z)Y + b\eta(Y)\eta(Z)X - b\eta(X)\eta(Z)Y] \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilir. (3.17) ifadesinden

$$g(P(X,Y)Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) - \tfrac{1}{2m}[ag(Y,Z)g(X,W) - ag(X,Z)g(Y,W) +$$

$$b\eta(Y)\eta(Z)g(X,W) - b\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)] \tag{3.18}$$

yazılabilir. (3.18) ifadesinde $W = \xi$ alınırsa

$$\eta(P(X,Y)Z) = R(X,Y,Z,\xi) - \frac{1}{2m}[ag(Y,Z)\eta(X) - ag(X,Z)\eta(Y) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)$$

$$- b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)$$

elde edilir. (2.4.8) eşitliği kullanılarak

$$\eta(P(X,Y)Z) = \eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z) - \frac{1}{2m}[ag(Y,Z)\eta(X) - ag(X,Z)\eta(Y)$$

$$+ b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) - b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)]$$

elde edilir. Bu ifadede gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\eta(P(X,Y)Z) = \left(1+\frac{a}{2m}\right)[\eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z)] \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.19) ifadesinde X yerine ξ alınırsa

$$\eta(P(\xi,Y)Z) = \left(1+\frac{a}{2m}\right)[\eta(Y)\eta(Z) - g(Y,Z)] \tag{3.20}$$

bulunur. Aynı şekilde (3.19) ifadesinde Z yerine ξ alınırsa

$$\eta(P(X,Y)\xi) = 0 \tag{3.21}$$

bulunur. (3.15) ifadesinden

$$R(X,Y)P(U,V)W = R(X,Y)P(U,V)W - P(R(X,Y)U,V)W - P(U,R(X,Y)V)W -$$
$$P(U,V)R(X,Y)W = 0$$

olup bu ifade ξ ile iç çarpılırsa

$$R(X,Y,P(U,V)W,\xi) - P(R(X,Y)U,V,W,\xi) - P(U,R(X,Y)V,W,\xi) -$$
$$P(U,V,R(X,Y)W,\xi) = 0 \tag{3.22}$$

yazılabilir. (2.4.8) ifadesi kullanılırsa

$$\eta(Y)P(U,V,W,X) - \eta(X)P(U,V,W,Y)$$
$$-\left(1+\frac{a}{2m}\right)[g(R(X,Y)U,W)\eta(V) - g(V,W)\eta(R(X,Y)U)] = 0$$

bulunur. (2.1.8) ifadesi kullanılırsa

$$-(1+\frac{a}{2m})[g(U,W)\eta(R(X,Y)V) - g(R(X,Y)V,W)\eta(U)] - (1$$
$$+\frac{a}{2m})[g(U,R(X,Y)W)\eta(V) - g(V,R(X,Y)W)\eta(U)] = 0$$

yazılabilir. Bu ifadede $Y = \xi$ alınırsa

$$P(U,V,W,X)-\eta(X)\eta(P(U,V)W)-(1$$
$$+\frac{a}{2m})\,[-g(R(\xi,X)U,W)\eta V+g(V,W)\eta(R(\xi,X)U)]-(1$$
$$+\frac{a}{2m})[-g(U,W)\eta(R(\xi,X)V)+g(R(\xi,X)V,W)\eta(U)]-(1$$
$$+\frac{a}{2m})[-g(U,R(\xi,X)W)\eta(V)+g(V,R(\xi,X)W\eta(U)]=0$$

olur. (2.1.8) ve (2.4.10) ifadelerinden

$$P(U,V,W,X)-\eta(X)[A(g(U,W)\eta(V)-g(V,W)\eta(U)]+(1$$
$$+\frac{a}{2m})\big[g(-g(X,U)\xi+\eta(U)X,W)\eta(V)$$
$$-g(V,W)[\eta(X)\eta(U)-g(X,U)]\big]+(1$$
$$+\frac{a}{2m})[g\big(U,W\big(\eta(X)\eta(V)-g(X,V)\big)$$
$$-g(-g(X,V)\xi+\eta(V)X,W)\eta(U)\big]+(1$$
$$+\frac{a}{2m})[g(-g(X,W)\xi+\eta(W)X,U)\eta(V)$$
$$-g(-g(X,W)\xi+\eta(W)X,V)\eta(U)]=0$$

eşitliği yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$P(U,V,W,X)-(1+\frac{a}{2m})g(U,W)\eta(X)\eta(V)+(1+\frac{a}{2m})g(V,W)\eta(U)\eta(X)-(1$$
$$+\frac{a}{2m})g(X,U)\eta(W)\eta(V)+(1+\frac{a}{2m})g(X,W)\eta(U)\eta(V)-(1$$
$$+\frac{a}{2m})g(V,W)\eta(X)\eta(U)+(1+\frac{a}{2m})g(V,W)g(X,U)+(1$$
$$+\frac{a}{2m})g(U,W)\eta(X)\eta(V)-(1+\frac{a}{2m})g(U,W)g(X,V)+(1$$
$$+\frac{a}{2m})g(X,V)\eta(W)\eta(U)-(1+\frac{a}{2m})g(X,W)\eta(V)\eta(U)-(1$$
$$+\frac{a}{2m})g(X,W)\eta(U)\eta(V)+(1+\frac{a}{2m})g(X,U)\eta(W)\eta(V)+(1$$
$$+\frac{a}{2m})g(X,W)\eta(V)\eta(U)-(1+\frac{a}{2m})g(X,V)\eta(W)\eta(U)=0$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$P(U,V,W,X) = (1+\frac{a}{2m})[g(U,W)g(X,V) - g(V,W)g(X,U)]$

sonucu elde edilir.

(2.1.8) ifadesinde de bu sonuç yazılırsa

$$R(U,V,W,X) - \frac{1}{2m}[S(V,W)g(U,X) - S(U,W)g(V,X)]$$

$$= (1+\frac{a}{2m})[g(U,W)g(X,V) - g(V,W)g(X,U)]$$

olur. Son denklemde $U = X = \xi$ alınırsa

$$R(\xi,V,W,\xi) - \frac{1}{2m}[S(V,W)g(\xi,\xi) - S(\xi,W)g(V,\xi)]$$

$$= (1+\frac{a}{2m})[\eta(W)\eta(V)) - g(V,W)]$$

bulunur. (2.4.8) ifadesi kullanılarak bu son ifadeden

$$\eta(W)\eta(V) - g(V,W) - \frac{1}{2m}[S(V,W) - S(\xi,W)\eta(V)]$$

$$= (1+\frac{a}{2m})[\eta(W)\eta(V) - g(V,W)]$$

olur. Düzenlemeler yapılırsa

$$-\frac{1}{2m}[S(V,W) - S(\xi,W)\eta(V)] = ((1+\frac{a}{2m}) - 1)[\eta(W)\eta(V) - g(V,W)]$$

$$S(V,W) - S(\xi,W)\eta(V) = -2m((1+\frac{a}{2m}) - 1)[\eta(W)\eta(V) - g(V,W)]$$

$$S(V,W) = -2m\left(1+\frac{a}{2m} - 1\right)[\eta(W)\eta(V) - g(V,W)] + S(\xi,W)\eta(V)$$

elde edilir. $S(X,\xi) = -2m\eta(X)$ olduğu göz önüne alınarak

$$S(V,W) = -a[\eta(W)\eta(V) - g(V,W) - 2m\eta(W)\eta(V)$$

$$S(V,W) = -(a+2m)\eta(V)\eta(W) + ag(V,W) \qquad (3.23)$$

bulunur. Teorem 2.4.3'de strict ise Einstein olamayacağı belirtilmişti. O halde $R(X,Y)P = 0$ koşulunu sağlayan strict η Einstein neredeyse Kenmotsu manifold bulunmamaktadır.

Teorem 3.2. Projektif flat strict neredeyse Kenmotsu manifold yoktur.

İspat. M^{2m+1}, projektif flat strict neredeyse Kenmotsu manifold manifoldu olsun. (2.1.8) den

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2m}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y] = 0$$

ve

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{2m}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y]$$

yazılabilir. Bu ifade de $X = \xi$ alınırsa

$$R(\xi,Y)Z = \tfrac{1}{2m}[S(Y,Z)\xi - S(\xi,Z)Y] \tag{3.24}$$

eşitliği yazılabilir. (2.4.9) ve (2.4.12) den

$$-g(Y,Z)\xi + \eta(Z)Y = \tfrac{1}{2m}[S(Y,Z)\xi + (2m)\eta(Z)Y] \tag{3.25}$$

olur, yani

$$(2m)[-g(Y,Z)\xi + \eta(Z)Y] = S(Y,Z)\xi + (2m)\eta(Z)\eta(Y) \tag{3.26}$$

dir. Bu ifade ξ ile çarpılırsa

$$S(Y,Z) = -(2m)g(Y,Z) \tag{3.27}$$

sonucuna ulaşılır. Teorem 2.4.3'den bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3. η −paralel Ricci tensörüne sahip $\eta-$ Einstein strict neredeyse Kenmotsu manifoldu yoktur.

İspat. M^{2m+1}, manifoldu $\eta-$ Einstein strict neredeyse Kenmotsu manifoldu olsun. S Ricci tensörü η −paralel ise $\forall\, X,Y,U \in \chi(M^{2m+1})$ için

$$(\nabla_U S)(X,Y) = \nabla_U S(X,Y) - S(\nabla_U X,Y) - S(X,\nabla_U Y) \tag{3.28}$$

dır. (2.2.13) den

$$(\nabla_U S)(X,Y) = \nabla_U[ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y)] - ag(\nabla_U X, Y) - b\eta(\nabla_U X)\eta(Y)$$
$$- ag(X, \nabla_U Y) - b\eta(X)\eta(\nabla_U Y)$$

elde edilir. Ayrıca

$$(\nabla_X \eta)Y = \nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) \tag{3.29}$$

ifadesi, (2.4.6) ve (3.28) eşitlikleri kullanılarak

$$(\nabla_U S)(X,Y) = U(a)g((X,Y) + U(b)\eta(X)\eta(Y) + b(X, \nabla_U \xi)\eta(Y) + b\eta(X)g(Y, \nabla_U \xi)$$

ve buradan

$$(\nabla_U S)(X,Y) = U(a)g(X,Y) + U(b)\eta(X)\eta(Y) + bg(\varphi X, \varphi U)\eta(Y) +$$
$$b\eta(X)g(\varphi Y, \varphi U) \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30)'de $X = \varphi X, Y = \varphi Y$ alınır ve (2.4.2) den $\eta(\varphi X) = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$(\nabla_U S)(\varphi X, \varphi Y) = U(a)g(\varphi X, \varphi Y) \tag{3.31}$$

sonucu elde edilir. Ricci tensörü η-paralel olduğundan $\nabla S = 0$ dır. O halde

$$U(a)g(\varphi X, \varphi Y) = 0 \tag{3.32}$$

olur. Bu

$$U(a) = 0 \tag{3.33}$$

olduğu anlamına gelmektedir. (3.33) ifadesinden a'nin sabit fonksiyon olduğu sonucuna ulaşılır. Önerme 3.1'den dolayı bu bir çelişkidir. O halde Ricci tensörü η −paralel olan η −Einstein strict neredeyse Kenmotsu manifold yoktur.

Teorem 3.4. Ricci semi-simetrik η-Einstein strict neredeyse Kenmotsu manifoldu yoktur.

İspat. M^{2m+1} manifoldu Ricci semi-simetrik olsun. Tanım 2.1.18 den, $\forall\, X, Y, U, V \in \chi(M^{2m+1})$ için

$$(R.S)(X,Y,U,V) = S(R(X,Y)U, V) + S(U, R(X,Y)V) = 0 \tag{3.34}$$

dır. (3.35) eşitliğinde $U = \xi$ alınırsa

$$S(R(X,Y)\xi, V) + S(\xi, R(X,Y)V) = 0 \tag{3.35}$$

yazılır. (2.4.8) ve (2.4.12) den

$$S(\eta(X)Y - \eta(Y)X, V) + (-2m)\eta(R(X,Y)V) = 0 \tag{3.36}$$

elde edilir. Burada $\eta(R(X,Y)V)$, (2.4.10)'a göre düzenlenirse

$$\eta(X)S(Y,V) - \eta(Y)S(X,V) - 2m\eta(Y)g(X,V) + 2m\eta(X)g(Y,V) = 0 \tag{3.37}$$

denklemine ulaşılır. (3.37) de $X = \xi$ için

$$S(Y,V) - \eta(Y)S(V,\xi) - 2m\eta(Y)\eta(V) + 2mg(Y,V) = 0 \tag{3.38}$$

yazılabilir. (2.4.12)'den yazılır ve sadeleştirmeler yapılırsa

$$S(Y,V) + 2m\eta(Y)\eta(V) - 2m\eta(Y)\eta(V) + 2mg(Y,V) = 0 \tag{3.39}$$

yani

$$S(Y,V) = -2mg(Y,V) \tag{3.40}$$

denklemi elde edilir. Önerme 3.1'den bu bir çelişkidir. Bu ise ispatı tamamlar.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezin birinci bölümü girişe ayrılarak konunun tarihsel gelişimi verilmiştir.

Tezin ikinci bölümü temel kavramlara ayrılmıştır. Riemann manifoldları, hemen hemen değme manifoldlar, Kenmotsu manifoldlar ve neredeyse Kenmotsu manifoldlar ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. Bu bölümde ayrıca strict tanımından bahsedilip η −Einstein Kenmotsu manifold tanımıda yapılmştır.

Tezin üçüncü bölümünde bazı eğrilik koşullarına sahip neredeyse Kenmotsu manifoldlar başlığı altında, strict η −Einstein olması durumunda Ricci eğriliği ve Ricci tensörü incelenip η −Einstein tanımında var olan a ve b değerlerinin fonksiyon olması gerektiği sonucuna varılmıştır. Ayrıca strict η −Einstein olması durumunda $R(X,Y).P=0$ koşulunu sağlayan neredeyse Kenmotsu manifold bulunmadığı ispatlanmıştır. Aynı şartlar altında, η − paralel strict η −Einstein bir manifold olmadığı ve Ricci semi-simetrik strict η −Einstein neredeyse Kenmotsu manifold bulunmadığı ile ilgili orijinal sonuçlara ulaşılmıştır.

Benzer sonuçlar neredeyse kosimplektik ve neredeyse Sasakian manifoldlarında da incelenebilir.

KAYNAKLAR

Başarı A., 2008, Kenmotsu Manifoldları Üzerinde Bazı Eğrilik Şartları, Yüksek Lisans Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa.

Bejancu A., 1986, Geometry Of CR-Submanifolds, *D.Reidel Publ. Co*.

Blair, D. E. , 2002, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics, 203. *Birkhauser Boston, Inc*. , Boston, MA.

Calin C., 2003, Kenmotsu ManifoldsWith h-parallel Ricci Tensor, *Bull. Soc. Math. Banja Luka*, Vol. 10, 10-15.

Carmo M.D., 1992, Riemannian Geometry, *Birkhauser*, Boston.

Chaubey S.K., Ojha R.H., 2000, On The m-projective Curvature Tensor Of A Kenmotsu Manifold, *Balkan Society of Geometers*, Vol. 12, 52-60.

Chen B.Y., 1973, Geometry Of Submanifolds, *Pure and Applied Mathematics Vol. 22*, M. Dekker.

De A., 2010, On Kenmotsu Manifold, *Bulletin of Matehematical Analysis and Applications*, Volume 2, 1-6.

De U.C., 2008, On j-symmetric Kenmotsu Manifolds, *International Electronics Journal of Geometry*, Vol. 1, No. 1, 33-38.

De U.C., Yıldız A., Yalınız A.F., 2009, On j-recurrent Kenmotsu Manifolds, *Turkish J. Math*. 33, 17-25.

Gray A., 1970, Nearly Kaehler manifolds, *J. Differential Geometry 4*, 283-309.

Hacısalihoğlu H.H., 1994,Diferensiyel Geometri II, *Ankara University Press*, Ankara.

Hacısalihoğlu H.H., 2003, Tensör Geometri, *Ankara University Press*, Ankara.

Heidari N., Kashani N. H. P., Najhafi B., 2017, Nearly Kaehler and Nearly Kenmotsu Manifolds, *Turk J. Math.*, 201.

Hui S.K., 2012, OnWeakly j-symmetric Kenmotsu Manifolds, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, *Facultas Rerum Naturalium, Mathematica*, Vol. 51.

Janssens D., Vanhecke L., 1981, Almost Contact Structures And Curvature Tensors, *Kadal Math. J. 4*, 1-27.

Jun J.B., De U.C., Pathak G., 2005, On Kenmotsu Manifolds, *J. Korean Math. Soc. 42*, No.3 435-445.

Kenmotsu K., 1972, A Class of Contact Riemann Manifolds, *Tohoku Math Journal (2) 24*, 93-103.

Kim, J.S., Liu, X., Tripathi, M.M., 2004, On semi-invariant submanifolds of nearly trans-Sasakian manifolds. *Int. J. Pure & Appl. Math. Sci.* 1, 15-34.

Kobayashi S., Nomizu K., 1963, Foundation Of Differential Geometry, Vol. I, *Interscience Publishers*, New York.

Küpeli Erken İ., Dacko P., Murathan C., 2015, On the Existence of Proper Nearly Kenmotsu Manifolds, Mediterranean Journal of Mathematics, Mayıs.

Küpeli Erken, İ., 2010, Paradeğme manifoldlar, Yüksek lisans tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa.

Mobin, A., Jun, J.B., 2011, On semi-invariant submanifolds of a nearly Kenmotsu manifold with a quarter symmetric non-metric connection. J. *Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math.* 18, 1, 1-11 .

Najafi B., Kashani N.H., 2013, On Nearly Kenmotsu Manifolds, *Turkish Journal of Mathematics*, Vol. 37.

O'Neill B., 1983, Semi Riemannian Geometry, *Academic Press*, New York.

Pitiş G., 2007, Geometry Of Kenmotsu Manifolds, *Publishing House of Transilvania University of Braşov*, Braşov.

Sağlam K., 2008, Kenmotsu Manifoldlar, Yüksek Lisans Tezi, *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Kütahya.

Sai Prasad K.L., 2009, Certain Classes Of Almost Contact Riemannian Manifolds, *International Mathematical Forum*, 4, No. 16, pp.773 - 778.

Shukla S.S., Shukla M.K., 2009, On j-ricci Symmetric Kenmotsu Manifolds, *Novi Sad J. Math.*, Vol. 39, No. 2, 89-95.

Singh G. P., Srivastava S.K., 2016, On Einstein Nearly Kenmotsu Manifolds, *International Journal of Mathematics Research,* Volume 8, Number 1, 19-24.

Tanno S., 1969, The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds, *Tôhoku Math. J*. 2. 21-38.

Yano K., Kon M., 1984, Structers On Manifolds, Series in Pure Mathematics, *World Scientific Publishing Co.,* Singapure.