



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**k – FİBONACCİ SAYILARININ GRAF
ÜZERİNDEKİ İNCELEMELERİ**

Gürce BEYAZİT BARDAKÇI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

HAZİRAN-2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Gürci BEYAZİT BARDAKÇI

Tarih: 21.06.2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k – FİBONACCİ SAYILARININ GRAF ÜZERİNDEKİ İNCELEMELERİ

Gürce BEYAZİT BARDAKÇI

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2023, 61 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Dr. Öğr. Üyesi Yaşar NACAROĞLU

Graf Teori uygulamalı matematiğin kullanışlı bir alanını oluşturmaktadır. Graf Teori öncelikle çözümü aranan problemi veya çözümü aranan işi en etkili şekilde ifade edilmesine, düzenlenmesine ve çözülmesine yardımcı olmaktadır. Bundan dolayı da gerçek problemler, graf yapısına dönüştürülüp, problemin ortadan kaldırılmasına yönelik en pratik ve en ekonomik çözümü bulmaya yardımcı olur.

Bu çalışmada, Graf Teorisi ve k – Fibonacci sayısının tanımları verilmiştir, k – Fibonacci sayısının graf üzerindeki özellikleri incelenmiştir.

Tez, 5 ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Graf teorisinin temel kavramları, bazı özel graflar ve Omega invaryantı ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, Graf ve k – Fibonacci sayıları üzerine literatür taraması yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, Fibonacci, k – Fibonacci ve Pell sayılarının tanımları, özdeşlikleri ve teoremlerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, k – Fibonacci grafın tanımı ve teoremleri verilmiştir. Bazı parametreleri elde edilerek uygulamaları yapılmıştır.

Beşinci bölümde elde edilmiş olan sonuçlar ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Graf, Fibonacci Sayıları, Graf, k – Fibonacci Graf, k – Fibonacci Sayıları, Omega İnvaryantı, Pell Graf, Pell Sayıları.

ABSTRACT

MS THESIS

ANALYSIS OF THE k – FIBONACCI NUMBERS ON GRAPHS

Gürce BEYAZİT BARDAKÇI

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2023, 61 Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Asst. Prof. Dr. Yaşar NACAROĞLU

Graph Theory is a useful area of applied mathematics. Graph Theory primarily helps to express, organize and solve the problem for which the solution is sought or the work for which the solution is sought, in the most effective way. Therefore, real problems are transformed into a graph structure, and it helps to find the most practical and economical solution to eliminate the problem.

In this study, the definitions of Graph Theory and k -Fibonacci number are given, the properties of the k -Fibonacci number on the graph are examined.

The thesis consists of 5 main parts.

In the first chapter, basic concepts of graph theory, some special graphs and basic information about Omega invariant are given.

In the second part, a literature review on Graph and k -Fibonacci numbers was made.

In the third chapter, definitions, identities and theorems of Fibonacci, k -Fibonacci and Pell numbers are given.

In the fourth chapter, the definition and theorems of the k -Fibonacci graph are given. Some parameters were obtained and their applications were made.

In the fifth chapter, the results and recommendations are presented.

Keywords: Fibonacci Graph, Fibonacci Numbers, Graph, k – Fibonacci Graph, k – Fibonacci Numbers, Omega Invariant, Pell Graph, Pell Numbers.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın bütün süreci boyunca kıymetli bilgilerini benimle paylaşan saygıdeğer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ'e teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini benden eksik etmeyen annem, babam ve kardeşlerime teşekkür ederim.

Tez çalışmamı hazırlarken her aşamasında bana yardımcı olan eşim Muhammet BARDAKÇI ve oğlum Kerem Zahid'e teşekkür ederim.

Gürci BEYAZİT BARDAKÇI
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
TABLolar DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Graf Tanımı ve Yapısı	2
1.2. Derece ve Uzaklık	4
1.3. Alt Graf	8
1.4. Yürüme ve Yol Kavramı.....	9
1.5. Uzaklık ve Bağlantılılık	10
1.6. Graf Çeşitleri.....	10
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	14
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	16
3.1. Sayı Dizileri	16
3.1.1. Fibonacci Sayı Dizisi	16
3.1.2. Pell Sayı Dizisi.....	18
3.1.3. k –Fibonacci Sayı Dizisi.....	19
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA	21
4.1. 1 Mertebeli k –Fibonacci Grafları	23
4.2. 2 Mertebeli k –Fibonacci Grafları	24
4.3. 3 Mertebeli k –Fibonacci Grafları	26
4.4. 4 Mertebeli k –Fibonacci Grafları	32
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	47
5.1 Sonuçlar	47
5.2 Öneriler	47
6. KAYNAKLAR	48

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

n	: Köşe sayısı
m	: Kenar sayısı
$V(G)$	: G grafinin köşe kümesi
$E(G)$	: G grafinin kenar kümesi
$G = (V, E)$	: G Graf
$ V(G) $	: G grafinin mertebesi
$ E(G) $	: G grafinin boyutu
(u, v)	: G grafinin komşu noktaları
$d_G(v_n)$	: G grafinin derecesi
$\Delta(G)$	: G grafinin maksimum derecesi
$\delta(G)$	: G grafinin minimum derecesi
$\bar{G}$	: G grafinin tümleyeni
N_n	: n köşeli boş graf
P_n	: n köşeli yol graf
C_n	: n köşeli çevre graf
K_n	: n köşeli tam graf
$K_{n,m}$	: İki parçalı tam graf
S_n	: n köşeli yıldız graf
W_n	: n köşeli tekerlek graf
F_n	: n Fibonacci Sayısı
$F_{k,n}$	: n k –Fibonacci sayısı
P_n	: n Pell sayısı
$F_n^{(k)}$	: k - Fibonacci Sayısının Yeni Ailesinin n . Sayısı
$\{F_n\}$	: Fibonacci Dizisi
$\{F_{k,n}\}$	: k – Fibonacci Dizisi
$\{F_n^{(k)}\}$	: k –Fibonacci Sayılarının Yeni Ailesinin Dizisi
D	: Derece dizisi
$\Delta(G, v_1, v_2, \dots, v_k)$	: $v_1, v_2, \dots, v_k$ köşelerini silmenin omegaya etkisi
$\Delta(G, e_1, e_2, \dots, e_t)$	: $e_1, e_2, \dots, e_t$ kenarlarını silmenin omegaya etkisi
a_i	: Derece dizisinde d_i derecesinin katlılığı
$\Omega(G)$	: G grafinin omega değeri
$\Omega(D)$	: D derece dizisinin omega değeri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Pregel Nehri ve Königsberg Köprüsü.....	1
Şekil 1. 1. Graf Örneği.....	2
Şekil 1. 2. Çoklu Graf Örneği.....	3
Şekil 1. 3. Basit graf.....	3
Şekil 1. 4. Yönlendirilmiş Graf.....	4
Şekil 1. 5. Köşeli Graf ve Derece Dizisi.....	5
Şekil 1. 6. Bir Graf ve Alt Graf.....	8
Şekil 1. 7. Bir Graf ve İndüklenmiş Alt Grafı	8
Şekil 1. 8. Bir G Grafı.....	9
Şekil 1. 9. Bağlantılı ve Bağlantısız Graf	10
Şekil 1. 10. Boş Graf Örneği.....	10
Şekil 1. 11. Tam Graf Örnekleri	11
Şekil 1. 12. Tamamlayıcı Graf.....	11
Şekil 1. 13. 4 –Düzgün ve 5 –Düzgün Graflara Örnek.....	11
Şekil 1. 14. Çevre Graf	12
Şekil 1. 15. Yol Graf.....	12
Şekil 1. 16. İki Parçalı Graf	12
Şekil 1. 17. Ağaç Graf Örnekleri	13
Şekil 1. 18. Yıldız Graf Örnekleri.....	13
Şekil 1. 19. Tekerlek Graf.....	13
Şekil 4. 1. Bazı L_q Grafları	21
Şekil 4. 2. Bazı $B_{r,s}$ Grafları	21
Şekil 4. 3. $T_{5,8,6}$ Grafları	22
Şekil 4. 4. $Q_{10,8,11,9}$ Grafları.....	22
Şekil 4. 5. $B_{2[3],1}$ Grafı.....	23
Şekil 4. 6. $B_{2[3,1],1}$ Grafı	23
Şekil 4. 7. $B_{2[3;1],1}$ Grafı	23
Şekil 4. 8. Köşe dereceleri F_1 ve F_2 olan k –Fibonacci grafı.....	26
Şekil 4. 9. Köşe dereceleri F_4 ve F_5 olan k –Fibonacci grafı.....	26
Şekil 4. 10. $D_1 = \{F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}\}$,nin Bağlantılı Gerçekleştirilmesi.....	27
Şekil 4. 11. $D_1 = \{F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}\}$,nin Bağlantısız Gerçekleştirilmesi.....	27
Şekil 4. 12. $T_{6,8,5}$ Bağlantılı Graf.....	28
Şekil 4. 13. $B_{6[7],5}$ Bağlantılı Graf.....	28
Şekil 4. 14. $B_{6,5[7]}$ Bağlantılı Graf.....	28
Şekil 4. 15. $B_{6,5} \cup L_8$ Bağlantısız Graf.....	29
Şekil 4. 16. $D = \{F_5^{(1)}, F_6^{(1)}, F_7^{(1)}\}$,nin Bağlantılı Gerçekleştirilmesi	30
Şekil 4. 17. $D = \{F_5^{(1)}, F_6^{(1)}, F_7^{(1)}\}$,nin Bağlantılı Gerçekleştirilmesi	30
Şekil 4. 18. $T_{9,8,5}$ Bağlantılı Graf.....	30
Şekil 4. 19. $B_{9[7],5}$ Bağlantılı Graf	31
Şekil 4. 20. $B_{9,5[7]}$ Bağlantılı Graf	31
Şekil 4. 21. $B_{9,5} \cup L_8$ Bağlantısız Graf.....	32
Şekil 4. 22. $Q_{10,8,11,9}$ Bağlantılı Graf.....	33
Şekil 4. 23. $Q_{10,11,8,9}$ Bağlantılı Graf.....	33
Şekil 4. 24. $B_{10[10],9[7]}$ Bağlantılı Graf	34

Şekil 4. 25. $B_{10[7],9[10]}$ Bağlantılı Graf	34
Şekil 4. 26. $B_{10[10,7],9}$ Bağlantılı Graf.....	34
Şekil 4. 27. $B_{10,9[10,7]}$ Bağlantılı Graf.....	34
Şekil 4. 28. $B_{10[7[10]],9}$ Bağlantılı Graf	35
Şekil 4. 29. $B_{10[10[7]],9}$ Bağlantılı Graf	35
Şekil 4. 30. $B_{10,9[10[7]]}$ Bağlantılı Graf	35
Şekil 4. 31. $B_{10,9[7[10]]}$ Bağlantılı Graf	35
Şekil 4. 32. $T_{10[7],11,9}$ Bağlantılı Graf	36
Şekil 4. 33. $T_{10,11,9[7]}$ Bağlantılı Graf	36
Şekil 4. 34. $T_{10[10],8,9}$ Bağlantılı Graf	36
Şekil 4. 35. $T_{10,8,9[10]}$ Bağlantılı Graf	36
Şekil 4. 36. $T_{10,8[10],9}$ Bağlantılı Graf	37
Şekil 4. 37. $T_{10,11[7],9}$ Bağlantılı Graf	37
Şekil 4. 38. $B_{10,9} \cup L_{11} \cup L_8$ Bağlantısız Graf.....	37
Şekil 4. 39. $B_{10,9} \cup L_{11[7]}$ Bağlantısız Graf	37
Şekil 4. 40. $B_{10,9[7]} \cup L_{11}$ Bağlantısız Graf	38
Şekil 4. 41. $B_{10,9[11]} \cup L_8$ Bağlantısız Graf	38
Şekil 4. 42. $B_{10[7],9} \cup L_{11}$ Bağlantısız Graf	38
Şekil 4. 43. $B_{10[11],9} \cup L_8$ Bağlantısız Graf	38
Şekil 4. 44. $T_{10,8,9} \cup L_{11}$ Bağlantısız Graf	39
Şekil 4. 45. $T_{10,11,9} \cup L_8$ Bağlantısız Graf	39
Şekil 4. 46. $Q_{8,6,9,5}$ Bağlantılı Graf	40
Şekil 4. 47. $Q_{8,9,6,5}$ Bağlantılı Graf	40
Şekil 4. 48. $B_{8[5],5[8]}$ Bağlantılı Graf	41
Şekil 4. 49. $B_{8[8],5[5]}$ Bağlantılı Graf	41
Şekil 4. 50. $B_{8[8,5],5}$ Bağlantılı Graf.....	41
Şekil 4. 51. $B_{8,5[8,5]}$ Bağlantılı Graf.....	41
Şekil 4. 52. $B_{8[5[8]],5}$ Bağlantılı Graf	42
Şekil 4. 53. $B_{8[8[5]],5}$ Bağlantılı Graf	42
Şekil 4. 54. $B_{8,5[8[5]]}$ Bağlantılı Graf	42
Şekil 4. 55. $B_{8,5[5[8]]}$ Bağlantılı Graf	42
Şekil 4. 56. $T_{8[5],9,5}$ Bağlantılı Graf	43
Şekil 4. 57. $T_{8,9,5[5]}$ Bağlantılı Graf	43
Şekil 4. 58. $T_{8[8],6,5}$ Bağlantılı Graf	43
Şekil 4. 59. $T_{8,6,5[8]}$ Bağlantılı Graf	43
Şekil 4. 60. $T_{8,6[8],5}$ Bağlantılı Graf	44
Şekil 4. 61. $T_{8,9[5],5}$ Bağlantılı Graf	44
Şekil 4. 62. $B_{8,5} \cup L_6 \cup L_9$ Bağlantısız Graf.....	44
Şekil 4. 63. $B_{8,5} \cup L_{9[5]}$ Bağlantısız Graf	44
Şekil 4. 64. $B_{8,5[5]} \cup L_9$ Bağlantısız Graf	45
Şekil 4. 65. $B_{8,5[8]} \cup L_6$ Bağlantısız Graf	45
Şekil 4. 66. $B_{8[5],5} \cup L_9$ Bağlantısız Graf	45
Şekil 4. 67. $B_{8[8],5} \cup L_6$ Bağlantısız Graf	45
Şekil 4. 68. $T_{8,6,5} \cup L_9$ Bağlantısız Graf	46

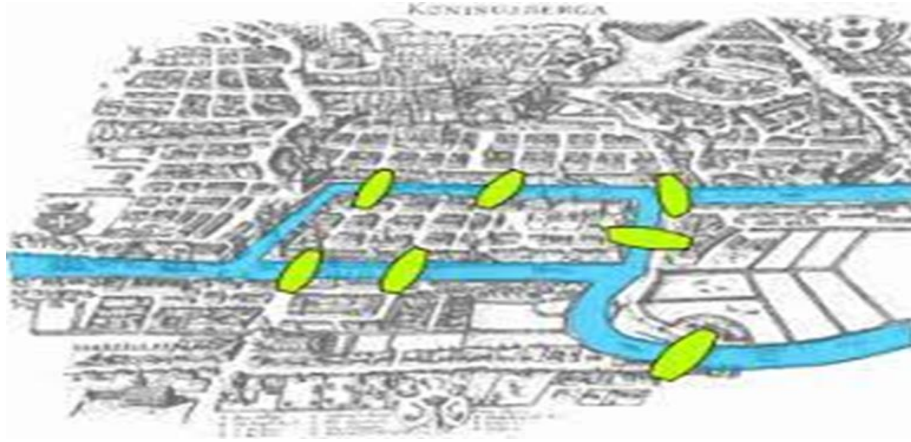
Şekil 4. 69. $T_{8,9,5} \cup L_6$ Bağlantısız Graf	46
--	----

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Fibonacci Sayı Dizisi ve Tavşan Problemi.....	17
Tablo 2. $n = 0,1,2, \dots$ için Fibonacci Sayı Dizilerinin Terimleri	17
Tablo 3. $n = 0,1,2, \dots$ için Fibonacci Sayı Dizilerinin Negatif Terimleri	18
Tablo 4. $n = 0,1,2, \dots$ için Pell Sayı Dizilerinin Terimleri	18
Tablo 5. $n = 0, \dots, 10$ için k –Fibonacci Dizilerinin Teklik ve Çiftlik Terimleri	19
Tablo 6. $k = 0, \dots, 10$ ve $n = 0, \dots, 10$ için k –Fibonacci Dizilerinin Terimler.....	20

1. GİRİŞ

Graf Teori uygulamalı matematiğin çok kullanışlı bir alanını oluşturmaktadır. Graf Teori öncelikle çözümü aranan bir problemi veya çözümü aranan bir işi en etkili şekilde ifade edilmesine, düzenlenmesine ve çözülmesine yardımcı olmaktadır. Bunun için de gerçek problemler, graf yapısına dönüştürülüp, problemin tüm amaçlarını yerine getirmeye çalışan en hızlı ve en masrafsız çözümü bulmaya yardımcı olur. Leonhard Euler graf teorisini keşfederek literatüre yeni bir alanın girmesini sağlamıştır. Euler, Königsberg şehrinin içinde bulunan Pregel nehrinin üstündeki yedi köprüden birinden yola çıkarak tüm köprülerden yalnız bir kez geçerek şehri tamamının dolaşamayacağını grafla ispatlamaya çalışmıştır.



Şekil 1. Pregel Nehri ve Königsberg Köprüsü

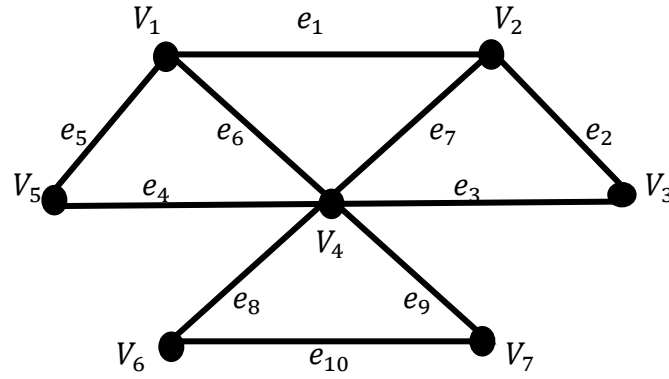
Graf Teori matematiğin uygulama alanına yeni uygulamalar getirerek matematik dışındaki alanlarda da birçok bilim insanının ilgisini çekmiştir ve bu alanda çalışmalar yapmaya yöneltmiştir. G. R. Kirchhoff 1847 yılında ağaç teorisinin oluşturduğu elektrik devrelerinde, A. Cayley doymuş hidrokarbon izomerlerinin sınıflandırılmasında, Thomas Guthrie 1852’ de meşhur dört renk problemlerinde grafla ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bunlar dışında da ulaşım ağlarında meydana gelen optimizasyon, yol, bilgi ulaşımı, elektrik devrelerinde meydana gelen şebeke kavramı, haberleşme ağları, istatistiksel ve matematiksel formüller, mekanik, kimyasal ifade ve formüller, bilgisayar kuramı (Bilgisayar ağları, dosya dizinleri, web sayfaları, internet veri tabanı, bilgisayar oyunları), toplumsal bilimler, coğrafya, mimarlık, fizik, biyoloji, bulmaca, soyağacı, konuma bağlı uygulamalar, gökbilimi vb. alanda kullanılmaktadır.

Bu bölümde graf ile ilgili yapılan tanımlar Gross ve Yellen (Gross ve Yellen, 2004), (Buckley ve Harary 1990), Harris ve arkadaşları (Harris ve ark., 2008) nın kitaplarından ve (Akgüneş, 2013) doktora tezinden, Omega invaryantı ile ilgili tanımları da (Delen, 2019), doktora tezinden alınmıştır.

1.1. Graf Tanımı ve Yapısı

Tanım.1.1.1 V , elemanları köşe olan boştan farklı bir küme, E de elemanları kenar olan aynı zamanda köşeyi birleştiren bir küme olsun. Bu şekilde tanımlanan $G = (V, E)$ ikilisine graf denir.

Örnek 1.1.1 Örnekte köşe noktaların kümesi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ve kenar noktaların kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ şeklinde verilen bir $G = (V, G)$ grafının şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 1. 1. Graf Örneği

Tanım 1.1.2 Bir G grafında bir köşeyi yine kendisiyle birleştiren kenara ilmek denir.

Tanım 1.1.3 Bir G grafında bağlantı yönü yok ise yönsüz graf denilir.

Tanım 1.1.4 Kenarların hepsi bir ya da iki köşeye bağlanırsa, bu bağlanan köşelere bitiş noktaları denilir.

Tanım 1.1.5 Bir G grafının her bir köşesi arasında bir kenar oluyorsa bu grafa bağlı graf denilir.

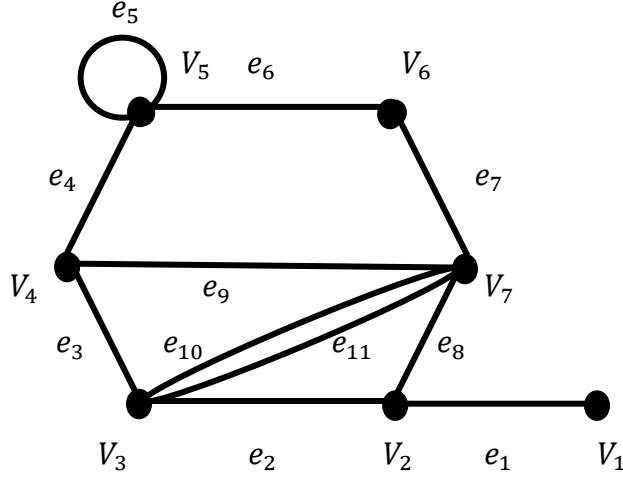
Tanım 1.1.6 Sonlu bir grafın köşe kümesi ve kenar kümesi sonlu olmalıdır. Sonlu bir grafta köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olup $|V(G)| = n$ sayısına grafın mertebesi denilir, kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olup $|E(G)| = m$ sayısına grafın boyutu denilir.

Tanım 1.1.7 G grafında u ve v köşeleri kenar ile birleşiyorsa u köşesi ve v köşesi komşu köşeler diye adlandırılır.

Tanım 1.1.8 Bir G grafın da iki kenarın bitiş noktaları aynı ise komşu kenar denilir.

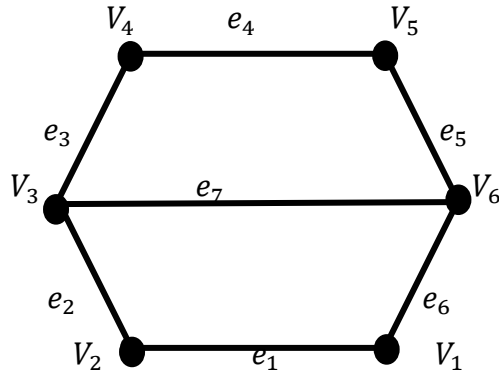
Tanım 1.1.9 G grafinda köşeleri birbirine bağlayan tam bir kenar oluyorsa buna basit komşuluk denilir.

Tanım 1.1.10 Grafta iki veya daha fazla düğüm ile arasında çok fazla oluşan bir hat varsa bu tür graflara çoklu aynı zamanda multi graf denilir. Multi graflar aynı zamanda yönsüz ile çevrimsiz olurlar.



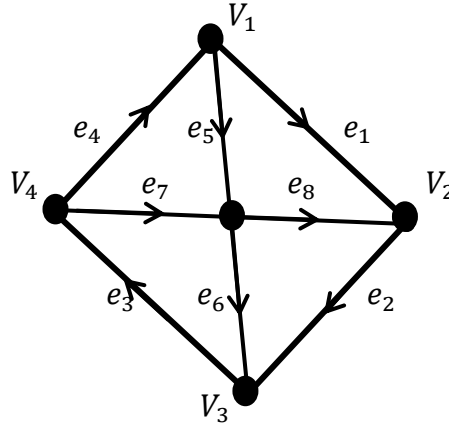
Şekil 1. 2. Çoklu Graf Örneği

Tanım 1.1.11 Grafta benzer iki düğümün sadece bir hat ile bağlandığı düşünelim, böylelikle oluşan bir düğümü kendisine bağladığı bir çevrim olmadığını yani bu hattın sadece bir değer almayacağı ve bu hatların yönün tanımlamayacağı, düğümleri ve hatları sınıflandırılmayacağı graflara kısaca basit graf denilir. Bu nedenle altta verilmiş olan graf basit bir graf örneğidir.



Şekil 1. 3. Basit graf

Tanım 1.1.12 Bir G grafında kenarları doğrultulu veya sıralanmış olan graflara yönlendirilmiş graf denilir. Kısaca eğer bir graftaki hatlar yön bilgisine sahip ise yönlü graf olur. Burada herhangi oluşan bu iki köşe olan v_i, v_j arasındaki olan kenar noktaları $e = v_1 v_j$ için $v_i v_j, \neq v_j v_i$ olur. Burada köşeleri bağlı kenarlar olarak alırsak köşe noktalarından dışarıya doğru oluşan köşeye başlangıç noktası, bu köşeye doğru giriyorsa da bu köşeye final noktası denilir.



Şekil 1. 4. Yönlendirilmiş Graf

1.2. Derece ve Uzaklık

Graf Teorisinde iki temel kavram sıklıkla kullanılmaktadır. Bunlardan biri köşe derecesi bir diğeri ise iki köşenin arasında oluşan uzaklıktır.

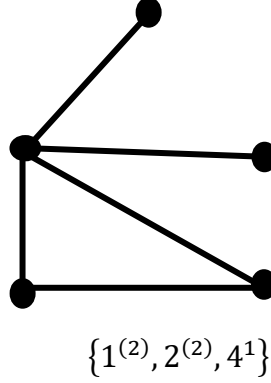
Tanım.1.2.1 Bir G grafında bir köşeye komşu olan köşelerin sayısına o köşenin derecesi denilir ve $d_G(v_i)$ ifade edilir. G grafında köşeye komşu olan her bir köşeye bir derece, ilmek ise köşe kendisine de komşu olduğundan dolayı köşeye iki derece kazandırmaktadır. Bir grafta derecesi 1 olana köşeye uç, derecesi 0 olan köşeye izole denilir. Derecesi tek sayı ise köşeye tek nokta, derecesi çift sayı ise köşeye çift nokta olarak isimlendirilir.

Tanım 1.2.2 Bir G grafında en az derecesi olan köşeye minimum dereceli denilir. Böyle $\delta(G)$ gösterilir. En çok dereceli köşesine sahip ise maksimum dereceli denilir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir. Şekil 1.2'deki çoklu graf örneğinde $\delta(G) = 1$ ve $\Delta(G) = 5$ tir.

Tanım 1.2.3 Bir G grafının köşe derecelerinin oluşturduğu kümeye grafın derece dizisi denilir. Grafın derece dizisi $0 \leq i \leq \Delta$ için $a_i \geq 0$ olduğundan

$$D = \{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\},$$

şeklinde olmaktadır.



Şekil 1. 5. Köşeli Graf ve Derece Dizisi

Tanım 1.2.4 $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ bir derece dizisi G grafına sahip olsun. Bir G grafının Omega invaryantı $\Omega(G)$ ile ifade edilir ve

$$\begin{aligned} \Omega(G) &= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 \\ &= \sum_{i=1}^{\Delta} (i - 2)a_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. (Delen, 2019)

Teorem 1.1.1 (Gross ve Yellen, 2004) $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ köşe kümesi ve $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesi olsun. Bir G grafında aşağıdaki durum mevcuttur.

$$\sum \text{derv}_i = 2m$$

Buradan bir G grafının köşe derecelerinin toplamı kenarının iki katına eşittir.

İspat: Bir G grafı n mertebeli ve m boyutlu olsun. Buradan alınan her kenar, iki köşeye komşu diyebiliriz. Bu sebeple köşe dereceleri toplanırken alınan her kenar iki köşeyi temsil etmektedir. Bundan dolayı her köşenin toplamı, kenarın iki katına denktir. Kısaca $2m$ olur.

Sonuç 1.1.1 (Gross ve Yellen, 2004) Rastgele seçilen bir G grafında bulunan köşelerin hepsinin derecelerinin toplamı çifttir.

İspat: Teorem 1.1.1'den görüldüğü üzere bir G grafının köşelerinin derecelerinin toplamı kenarın iki katı olmaktadır. Dolayısıyla bir çift sayı oluşturmaktadır.

Teorem 1.1.2 Bir G grafı, $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bağlantılı olsun. Burada G grafının kapalı bölgesi (devir veya yüz sayısı)

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$$

dir.

İspat: Euler karakteristiği sebebiyle $n - m + r = 1$ olacağından verilen bir D derece dizisi için $n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ ve $2m = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + \Delta a_\Delta$ olacağı bilinmekte ve verilen değer ifadeler yukarıdaki denklem kısmında yerine konulduğunda $r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$ ifadesi elde edilir.

Bir G grafının bağlantısız olmasından dolayı Omega'nın toplamsallık özelliği gereği aşağıda genel bir sonuç verilmiştir:

Sonuç 1.1.1 Bir G grafını $D = \{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip olsun. Bu c tane bileşene sahip bağlantısız bir graftır. Aşağıdaki verilen eşitlik sağlamaktadır:

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$

İspat: $\Omega(G)$ toplamsal özelliğinden dolayı ve c sabit bir sayı, r de toplamsal olmaktadır. Buradan $i = 1, 2, 3, \dots, c$ için

$$r(G_i) = \frac{\Omega(G_i)}{2} + 1$$

olduğu söylenebilir.

Teorem 1.1.3 Bir G grafi m tane kenar ile n tane köşeye sahip

$$\Omega(G) = 2(m - n)$$

bağıntısı sağlanmaktadır.

İspat: El sıkışma teoremi gereğince

$$\begin{aligned} 2m &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + \Delta a_\Delta \\ &= (a_3 + 2a_4 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1) + 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ olduğundan

$$2m = \Omega(G) + 2n$$

ve buradan da

$$\Omega(G) = 2(m - n)$$

olur.

Teorem 1.1.4 G grafi c tane $G_1, G_2, G_3, \dots, G_c$ bileşenine sahip bağlantısız bir graf olsun.

$$\Omega(G) = \sum_{i=1}^c \Omega(G_i)$$

Bu şekilde ifade edilir. Başka bir ifadeyle Ω toplamsal bir fonksiyon olmaktadır.

İspat: Bir G grafinin bileşenleri $G_1, G_2, G_3, \dots, G_c$ olsun. $D(G)$ kümesi, $D(G_i)$ kümelerinin birleşmesiyle oluşmaktadır. Omega'nın tanımıyla da sonuç daha rahat görülmektedir.

Teorem 1.1.5 Çizilebilir bir $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisi olsun. Burada herhangi verilen bir G grafinin maksimum bileşen sayısı

$$c_{max} = \sum_{d_i \text{ çift}} a_i + \frac{1}{2} \sum_{d_i \text{ tek}} a_i$$

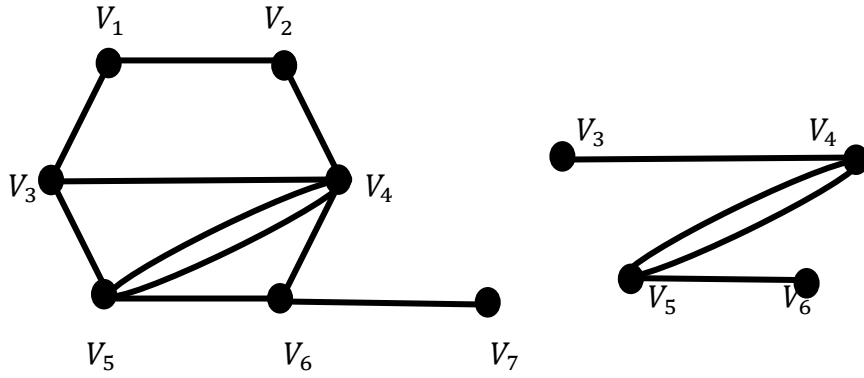
dir.

İspat: Maksimum bileşen sayısını bulmak için alınacak bütün bileşenler olduğunca küçük alınmalıdır. Bakıldığında öncelikle G grafinin köşe sayıları olan n 'in doğal bir üst

sınıırı olmaktadır. $2q$ biçiminde verilen bütün çift köşe derecelerinin, tek bir köşeye sahip bir L_q bileşeni alınsın. Böylece çift dereceli köşelerden oluşan $\sum a_{2i}$ tane bileşen vardır. Daha sonra, bir köşeye sahip tek dereceli olduğunda kendi başına bir bileşen yapamaz. Çünkü böyle olması durumunda, oluşan bileşen kendi başına bir graf olacağından el sıkışma teoremi gereğince köşe derecelerinin çift olması gerekirken bu durumda toplamları tek olur. Böylelikle bir köşeye sahip olan tek dereceli en küçük bileşen, $B_{r,s}$ olmaktadır. Dolayısıyla bileşenin maksimum sayısı da $\frac{1}{2} \sum a_{2i-1}$ olacaktır.

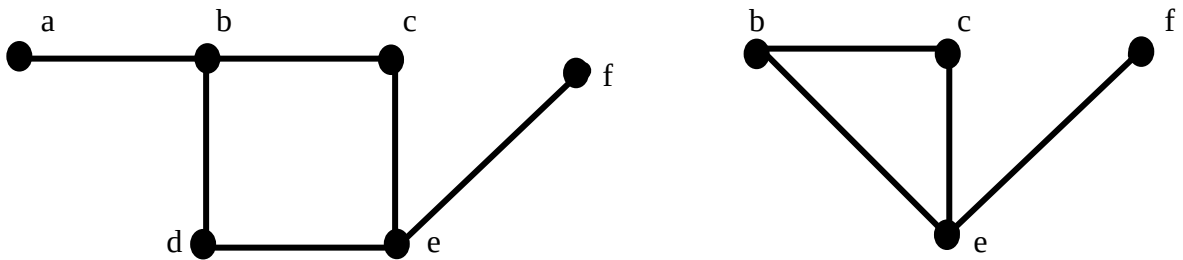
1.3. Alt Graf

Tanım 1.3.1. $G = (V_1, E_1)$ ve $H = (V_2, E_2)$ iki tane graf olarak alalım. Buradan $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ şartı oluyorsa, buna H grafi G grafının alt grafıdır denilir.



Şekil 1. 6. Bir Graf ve Alt Graf

Tanım 1.3.2. G bir graf olsun. G grafının nokta kümesinden oluşan boştan farklı olan alt kümesi S olsun. Burada S köşe kümesi olan aynı zamanda kenar kümesi de G grafının S deki köşe çiftlerine komşu olan bütün kenarı olan bu alt grafa G nin indüklenmiş alt grafi denilir, $\langle S \rangle$ ile gösterilmektedir.



Şekil 1. 7. Bir Graf ve İndüklenmiş Alt Grafi

1.4. Yürüme ve Yol Kavramı

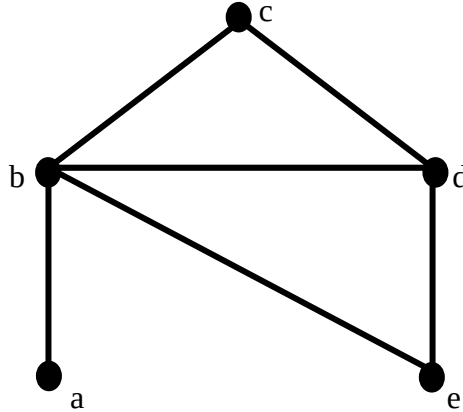
Tanım 1.4.1 Bir G grafının köşe kümesi $V = \{a, b, c, \dots, y, z\}$ olsun. Hepsi birbiriyle sırasıyla köşelerle bağlanıyorsa bu dizilişe yürüme denilmektedir. G deki $ab, bc, \dots, yz$ şeklinde oluşan yürümenin uzunluğu, n kenarın hepsinin olmasıyla bu yürümenin uzunluğu n olur, $abc \dots yz$ şeklinde ifade edilir. Bunu a ve z arasında oluşan bir yürüme denilebilir.

Tanım 1.4.2 Başlangıç köşeleri ile bitiş köşeleri aynı olduğunda buna kapalı yürüme denilmektedir.

Tanım 1.4.3 Bir yürümenin her bir köşesinden yalnız bir defa geçebiliyorsak, bu yürümeye yol denilmektedir.

Tanım 1.4.4 Bir yürüme gerçekleştirilirken tüm kenarlar farklı oluyorsa bu oluşan yürüme olayına gezi denilmektedir.

Tanım 1.4.5 Başlangıç noktası ile bitiş noktası haricinde olan bütün köşelerin ile bütün kenarların aynı değilse buna devir denilmektedir.



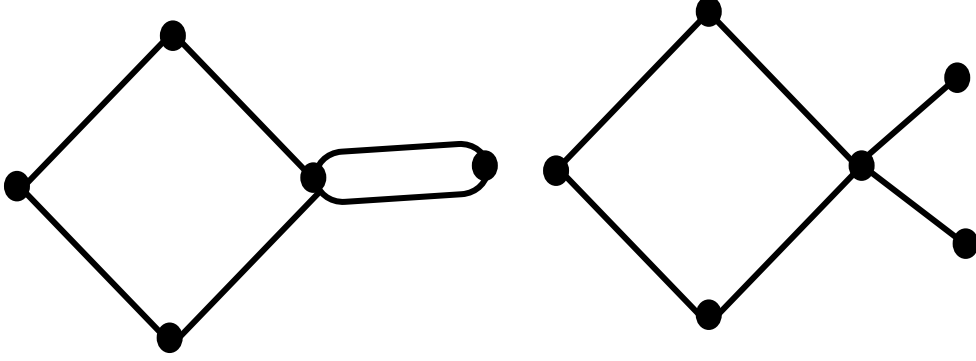
Şekil 1. 8. Bir G Grafı

Yukarıdaki G grafında $abdbc$ 4 uzunluğunda bir yürüme olmaktadır ancak bir gezi olmamaktadır. Buradaki $abcdbe$ bir gezidir fakat bir yol olmamaktadır. Ayrıca $abcde$ bir yol olup ve $bdeb$ bir devir oluşturmaktadır.

1.5. Uzaklık ve Bağlantılılık

Tanım 1.5.1 Bir G grafında alınan iki köşe ile aralarındaki uzaklık bu iki köşenin arasında oluşabilecek en kısa yürüyüş uzunluğu denilir, $d(x, y)$ ile ifade edilir.

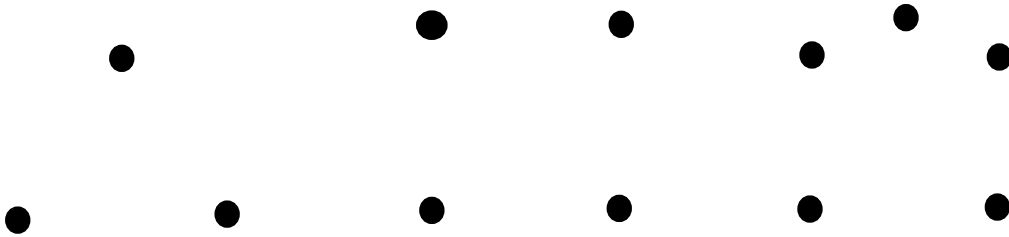
Tanım 1.5.2 Bir G grafında iki köşe arasında bir yürüyüş oluşuyorsa buna bağlantılı graf denir. İki köşe arasında bir yürüyüş oluşmuyorsa buna da bağlantısız graf denilir.



Şekil 1. 9. Bağlantılı ve Bağlantısız Graf

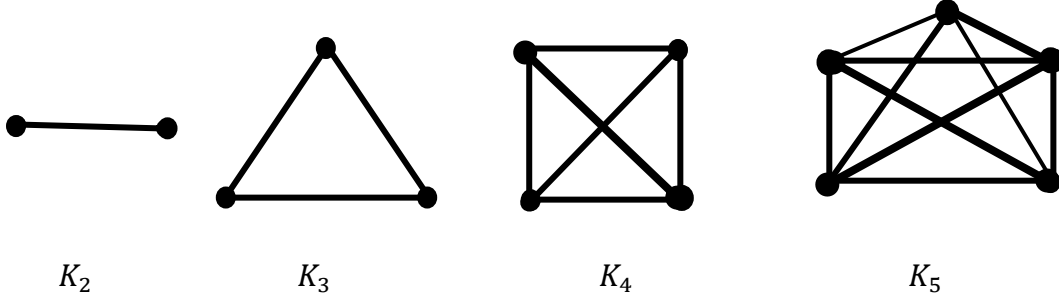
1.6. Graf Çeşitleri

Tanım 1.6.1 Bir G grafının köşe ile kenar kümesi boş küme oluyorsa, bu grafa boş graf denilir, N_n ile ifade edilir.



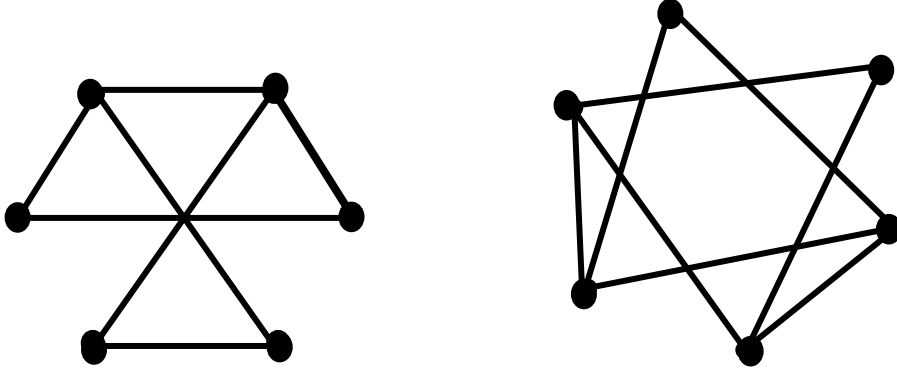
Şekil 1. 10. Boş Graf Örneği

Tanım 1.6.2 Bir G grafında bulunan bütün köşe çifti birbiriyle komşu oluyorsa buna tam graf denilir, K_n ile gösterilmektedir. n köşeye sahip tam grafın kenar sayısı $\frac{n(n+1)}{2}$ ile köşenin dereceleri $(n - 1)$ olmaktadır.



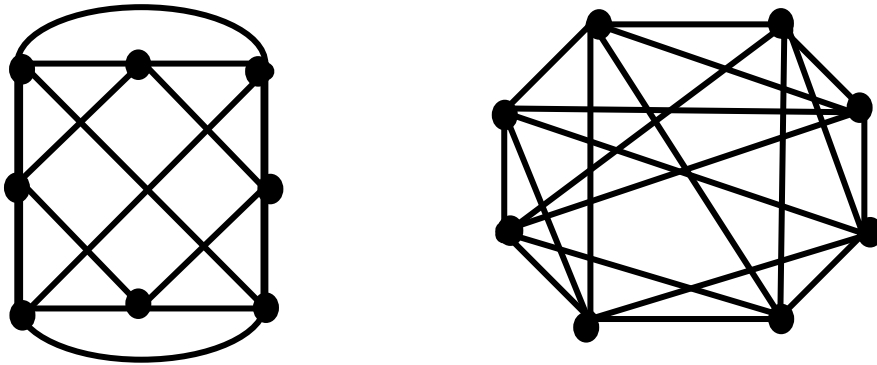
Şekil 1. 11. Tam Graf Örnekleri

Tanım 1.6.3 Bir G grafında köşe kümesi ile nokta kümesi aynı olduğunda, kenar kümesi G de olmayan kenarlardan oluşuyorsa ve komşu olmayan köşeleri birbirine komşu yapılan grafa tümleyen aynı zamanda tamamlayıcı graf denilmektedir. G grafın tümleyeni $\bar{G}$ ile gösterilmektedir.



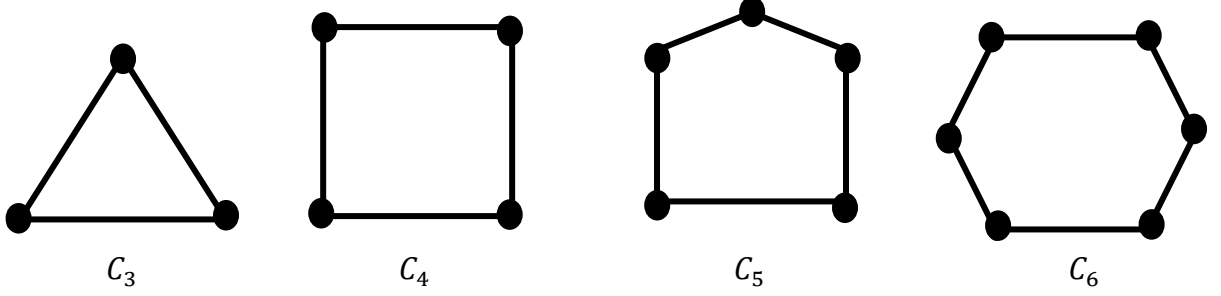
Şekil 1. 12. Tamamlayıcı Graf

Tanım 1.6.4 Bütün köşeleri aynı derece olan graflara düzgün graf denilmektedir. Bütün köşelerin derecesi r ise bu tarz graflara r –düzgün graf denilmektedir. n köşeli bir tam grafın bütün köşelerinin dereceleri $n - 1$ olacağından $n - 1$ dereceli düzgün graf olmaktadır.



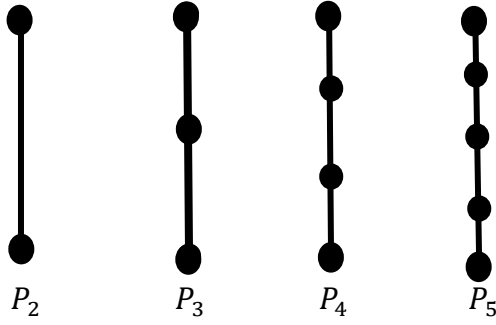
Şekil 1. 13. 4 –Düzgün ve 5 –Düzgün Graflara Örnek

Tanım 1.6.5 Bir G grafında başlangıç noktaları ile bitiş noktaları aynı olduğunda ve bütün köşelerin derecesi iki olduğundan bu grafa devir ya da çevre graf denilmektedir, C_n ile gösterilir.



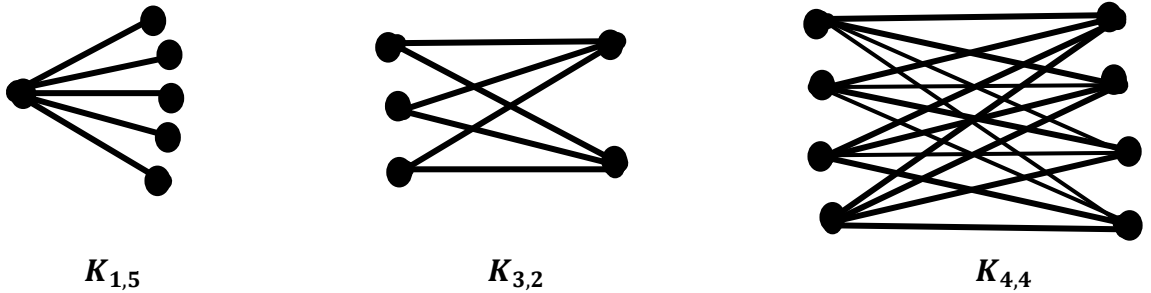
Şekil 1. 14. Çevre Graf

Tanım 1.6.6 Başlangıç köşeleri ile bitiş köşeleri 1 dereceye, diğer tüm köşelerin 2 dereceye sahip grafa yol graf denilir. n köşeye sahip bir yol graf P_n ile gösterilmektedir.



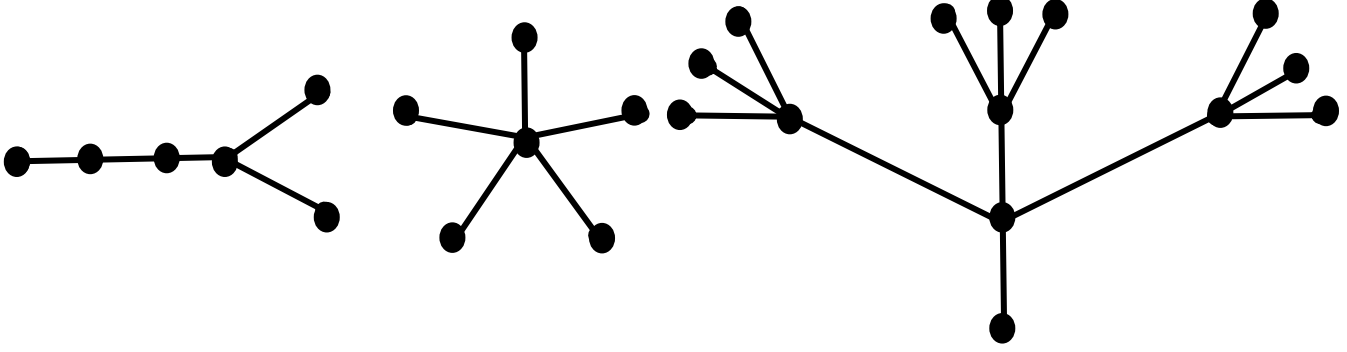
Şekil 1. 15. Yol Graf

Tanım 1.6.7 Bir grafa sahip köşe kümesi V_1 ve V_2 iki küme şeklinde ayrılmış olsun. Bir kenarı V_1 'in köşesiyle V_2 'nin köşesiyle birleşiyorsa, bu grafa iki parçalı graf denilmektedir. Buradan $|V_1| = m$ ve $|V_2| = n$ olan iki parçalı bir graf $K_{m,n}$, ifade edilir. V_1 ve V_2 deki bütün köşeler kendi içinde birbirleriyle birleşiyorsa bu grafa iki parçalı tam graf denilir.



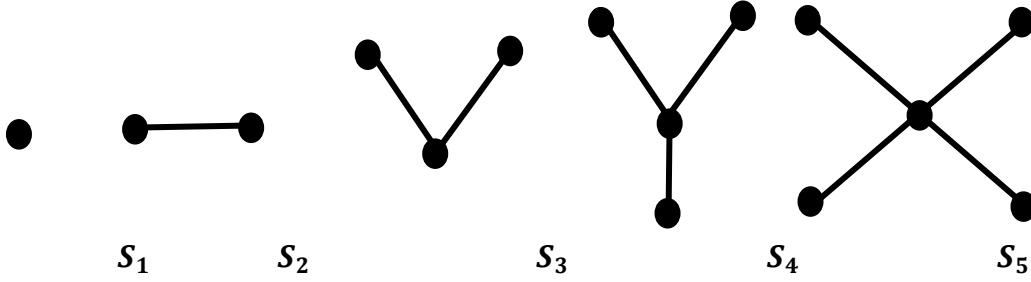
Şekil 1. 16. İki Parçalı Graf

Tanım 1.6.8 Bir G grafının bağlantılı bir grafi kendi içinde devir bulundurmuyorsa bu oluşan grafa ağaç graf denilmektedir. T_n ile gösterilmektedir.



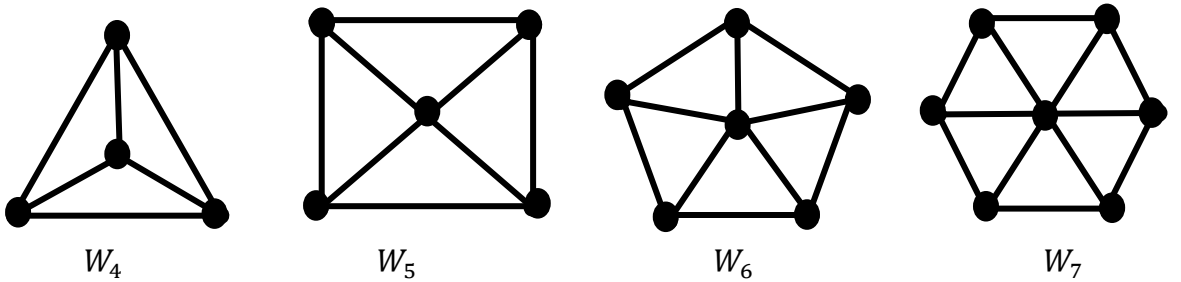
Şekil 1. 17. Ağaç Graf Örnekleri

Tanım 1.6.9 n köşeli bir ağaç grafi olsun. Köşe derecesinin biri $n - 1$, diğer köşelerinin hepsinin derecesi 1 olduğunda oluşan bu grafa yıldız grafi denilir. Yıldız grafi aynı zamanda iki parçalı tam grafta denilmektedir. İki parçalı grafları $m = 1$ olarak alınırsa $K_{1,n}$ grafi elde edilir ve bu bir yıldız grafi olmaktadır. S_n ifade edilmektedir.



Şekil 1. 18. Yıldız Graf Örnekleri

Tanım 1.6.10 n köşeli bir C_n çevre grafa sahip ve tüm köşe noktaların tek olacak bir kenarla komşuluğu ile olan yeni oluşan köşe noktalarının daha eklenmesi ile sonuçlanan grafa aynı zamanda tekerlek aynı zamanda wheel grafi denilir ve W_n ile gösterilmektedir.



Şekil 1. 19. Tekerlek Graf

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde çoğu araştırmacının çalışma alanı olan Graf Teorisi ve k – Fibonacci Sayılarının literatürde bulunan bazı çalışmaları ele alınmıştır.

Erdős ve ark. (1989), “Radius, diameter and minimum degree” adlı çalışmalarında Radius ve diameterle ilgili yani grafın uzaklığı ve yarıçapıyla ilgili sadece köşe sayısı ile minimum derecesini içeren sınırları literatüre katmışlardır.

Vajda (1989), “Fibonacci&Lucas Numbers and Golden Section” adlı çalışmasında Fibonacci sayısının tanım ve teoremini vermiştir.

Buckley ve Harary (1990), "Distance in Graphs " adlı çalışmalarında graf teorisinin temel tanım ve özelliklerini ayrıntılı bir şekilde vermişlerdir.

Bollobas (1998), "Modern Graph Theory" adlı çalışmada graf bilgisi detaylı verilmiştir.

Dankelmann ve ark. (2000), “Average distance, minimum degree and spanning trees” adlı çalışmasında grafın köşe sayısı ile bir grafın ortalama uzaklığının minimum derecesini ispat etmiş ve bu ispat tekniği birçok araştırmacıya kolaylık sağlamıştır.

Koshy (2001), “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications” adlı çalışmasında Fibonacci sayıları ile ilgili tanım, teorem ve sonuçlar detaylı bir şekilde verilmiştir.

Gross ve Yellen (2004), “Handbook of Graph Theory” adlı kitabında grafın temel tanımını açıklamış ve grafın genel özelliklerini vermiştir.

Falco’n ve Plaza (2007), “On the Fibonacci k –Numbers “isimli önemli çalışmalarında Fibonacci sayı ailesinin bir genellemesi olan k -Fibonacci sayılarını tanımlamışlardır.

Civciv, H., (2007), “Complex Factorization of the k -fibonacci and k -lucas Numbers”adlı çalışmasında Fibonacci dizisi ile lucas dizisini tanımlamıştır.

Startek, M., Włoch, A., Włoch, I., (2009), “Fibonacci Numbers and Lucas Numbers In Graphs” adlı çalışmalarında Fibonacci Sayıları ve Lucas Sayıları ile graflardaki bağımsız kümelerin sayısının uç değerlerini incelemişlerdir.

Akgüneş (2012), "Analyzing special parameters over zero-divisor graphs" adlı çalışmasında p ile q farklı asal sayıları olarak $\Gamma \times (p, q)$ sıfır bölen graflarının çeşitli parametrelerini sadece p ile q ya bağlı olarak keşfetmiştir.

Akgüneş (2013), "Graf Parametleri ve Cebirsel Yapılara Grafsal Yaklaşımlar" adlı doktora tezi çalışmasında bir grafin yarıçapını alarak düzensizlik indeksi kullanılarak kuvvetli bir sınır oluşturmuştur.

Delen (2019), "Omega İnvaryant" isimli doktora tezinde bir grafin çizilebilir bir derece dizisiyle mümkün olduğunu omega invaryantı olarak tanımlamıştır. Bu omega invaryantının özelliklerini vermiş ve uygulamalarını göstermiştir.

Yurttas, Delen, Demirci, Çevik, Cangul (2020), "Fibonacci Graphs" isimli çalışmalarında n . Fibonacci sayısından oluşan derece dizisine sahip Fibonacci grafini tanımlamışlardır.

Demirci, Özbek, Albayrak, Cangul (2021), "Lucas Graphs" isimli çalışmalarında ardışık n . Lucas sayısından oluşan derece dizisine sahip Lucas grafini tanımlamışlardır.

Demirci, Delen, Çevik, Cangul (2021), "Omega Index of line and total graphs" adlı çalışmalarında bazı graf sınıflarının omega değerleri ve çizginin yüz sayısı ve toplam grafları hesaplamışlardır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Sayı Dizileri

Bu bölümde, literatürde geniş yer kaplayan ve birçok matematikçinin üzerinde çalıştığı ve uygulama alanı oluşturduğu sayı dizilerinden Fibonacci, Pell ve k – Fibonacci sayılarının temel tanım ve özellikleri verilecektir. Bu bölümde yapılan bütün tanımlar Koshy (2001), Vajda (1989) ve Falcon ve Plaza (2007)) nın kitabından alınmıştır.

3.1.1. Fibonacci Sayı Dizisi

Leonardo Fibonacci İtalya da yaşamış bir matematikçidir. İtalya'nın Pisa şehrinde doğmuştur. Babasının işi sebebiyle Cezayir de çocukluğunu geçirmiştir. Matematiğe dair ilk bilgilerini Müslüman hocalardan almış ve küçük yaşında onluk Arap sayılarını kavramıştır. İtalya'da kullanılan Roma rakamlarıyla birlikte Arap sisteminin daha iyi olduğunu farkına varan Fibonacci 1201 yılında bilinen ilk ve en iyi kitabı olan "Liber Abaci" adlı kitabını kaleme almıştır. Bu kitapta ticaret ile ilgili Aritmetik ve Cebir konuları ve Arap sayı sistem tanıtmıştır. İlk zamanlarda tüccarların üzerinde kitabın etkisi az olsa da zamanla etkisi artmış ve Batı Avrupa'ya kadar girilmesinde büyük bir önem oluşturmıştır. Fibonacci için, "Matematiği Araplardan alıp, Avrupa'ya aktaran kişi" denilebilir.

Leonardo Fibonacci çağımız matematikçileri tarafından, Liber Abaci adlı kitabında bulunan bir tavşan problemi sonucunda oluşan bir sayı dizisi sebebiyle bilinmektedir. Kitapta bu problem aşağıdaki gibidir: Bir adam, dört tarafı duvarla kaplı bir alana bir çift tavşan koymuştur. Bir ay içinde her bir çift tavşanın yeni bir çift tavşanı olmuştur, her yeni çift tavşanında olgunlaşması için bir ay gibi bir süre gereklidir. Olan tavşanların hepsinin ölmediği değerlendirilirse, bu alanda 100 ayın sonunda kaç çift tavşan olabilir? Tavşan problemi olarak da bilinen bu problem Koshy (2001) kitabında aşağıdaki şekilde incelemiştir.

Yeni doğmuş biri dişi, biri erkek iki tavşan olduğunu varsayarsak.

- 1) Olan çiftlerin hepsinin olgunlaşması için zaman olarak bir ay gerektiği,
- 2) 2.aydan itibaren her ay her çiftin bir çift tavşan doğurduğunu,
- 3) Bir yılda tavşanların hiçbirinin ölmediğini, bu koşullara göre düşünersek 1 Ocak'ta ilk tavşan çiftinin doğduğunu varsayalım. Bu tavşan çiftinin erginleşmesi için bir aylık zaman gerekir. Böylece halen 1 Şubat'ta sadece bir çift tavşan bulunmaktadır. Bu

tavşan çifti 1 Mart'ta iki aylık olur ve bunlar tekrardan yeni bir çift tavşanlar doğururlar. Bunun sonucunda iki çift tavşan bulunur. Böyle devam edilirse, 1 Nisan'da 3 çift tavşan, 1 Mayıs'ta 5 çift tavşan bulunur. Bu durum aşağıda tablo halinde verilmiştir.

Tablo 1. Fibonacci Sayı Dizisi ve Tavşan Problemi

Tavşan Çiftlerin sayısı	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz
Yavru tavşanlar	1	0	1	1	2	3	5
Yetişkin tavşanlar	0	1	1	2	3	5	8
Toplam	1	1	2	3	5	8	13

Böylelikle,

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots\}$$

bir sayı dizisi oluşmaktadır. Diziliş dikkatle incelendiğinde, ilk iki terim haricindeki her bir terimin, kendinden önceki ardışık iki terimin toplamı olduğu görülmektedir. Bu sayı dizisi istenildiği kadar genişletilebilir ve sonsuz bir sayı dizisi elde edilebilir.

Tanım 3.1.1.1 F_n , n . Fibonacci sayısını göstermek üzere, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 1$ tam sayı için,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (3.1)$$

bağıntısına **Fibonacci sayı dizisi** denilmektedir (Vajda 1989; Koshy 2001). Aşağıda Fibonacci sayıları

Tablo 2. $n = 0, 1, 2, \dots$ için Fibonacci Sayı Dizilerinin Terimleri

n	0	1	2	3	4	5	6	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	...

Tablo 2. de gösterilir (Vajda 1989). Ayrıca Fibonacci sayıları negatif indisliği $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ olmak üzere,

Tablo 3. $n = 0, 1, 2, \dots$ için Fibonacci Sayı Dizilerinin Negatif Terimleri

n	0	1	2	3	4	5	6	...
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	...

Tablo 3. te gösterilir (Vajda 1989).

Teorem 3.1 (Koshy 2001) İlk n Fibonacci sayılarının toplamı aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1,$$

Bu teoremin bazı bariz sonuçları aşağıdadır:

Sonuç 3.1 (i) $F_n + F_{n+1} + \dots + F_k = F_{k+2} - F_{n+1}$

(ii) $F_{n+3} - F_n = 2F_{n+1}$

3.1.2. Pell Sayı Dizisi

$P_0 = 0, P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \quad n \geq 0 \quad (3.2)$$

bağıntısına **Pell sayı dizisi** denilmektedir. Aşağıda Pell sayıları aşağıda Tablo 4. de gösterildi.

Tablo 4. $n = 0, 1, 2, \dots$ için Pell Sayı Dizilerinin Terimleri

n	0	1	2	3	4	5	6	...
P_n	0	1	2	5	12	29	70	...

3.1.3. k –Fibonacci Sayı Dizisi

Her $k > 0$ reel sayısı için, $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ olduğundan,

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, \quad n \geq 1 \quad (3.3)$$

bağıntısına **k –Fibonacci sayı dizisi** denilmektedir

k –Fibonacci dizisinin oluşturduğu her elemana k –Fibonacci sayısı denilmektedir. k 'nın aldığı bazı özel değerlere göre k –Fibonacci dizisi bazı tamsayı dizilerine dönüşmektedir.

Burada $\{F_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ k –Fibonacci dizisinde;

$k = 1$ olarak alınırsa $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{0,1,1,2,3,5,8,13,21 \dots\}$ yani Fibonacci dizisi elde edilmiş olur.

$k = 2$ olarak alınırsa $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{0,1,2,5,12,29,70,169 \dots\}$ yani Pell dizisi elde edilmiş olur.

Tablo 5. $n = 0, \dots, 10$ için k –Fibonacci Dizilerinin Teklik ve Çiftlik Terimleri

n	$F_{k,n}$	k tek olsun	k çift olsun
0	0		
1	1		
2	k	T	$\mathcal{C}$
3	$k^2 + 1$	$\mathcal{C}$	T
4	$k^3 + 2k$	T	$\mathcal{C}$
5	$k^4 + 3k^2 + 1$	T	T
6	$k^5 + 4k^3 + 3k$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$
7	$k^6 + 5k^4 + 6k^2 + 1$	T	T
8	$k^7 + 6k^5 + 10k^3 + 4k$	T	$\mathcal{C}$
9	$k^8 + 7k^6 + 15k^4 + 10k^2 + 1$	$\mathcal{C}$	T
10	$k^9 + 8k^7 + 21k^5 + 20k^3 + 5k$	T	$\mathcal{C}$

Buradan

$$F_{n+1} = kF_n + F_{n-1}$$

sonucu elde edilir.

Tablo 6. $k = 0, \dots, 10$ ve $n = 0, \dots, 10$ için k -Fibonacci Dizilerinin Terimler

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-Fibonacci	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2-Fibonacci	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
3-Fibonacci	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837
4-Fibonacci	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209	416020
5-Fibonacci	0	1	5	26	135	701	3640	18901	98145	509626	2646275
6-Fibonacci	0	1	6	37	228	1405	8658	53353	328776	2026009	12484830
7-Fibonacci	0	1	7	50	357	2549	18200	129949	927843	6624850	47301793
8-Fibonacci	0	1	8	65	528	4289	34840	283009	2298912	18674305	151693352
9-Fibonacci	0	1	9	82	747	6805	61992	564733	5144589	46866034	426938895
10-Fibonacci	0	1	10	101	1020	10301	104030	1050601	10610040	1071511001	1082120050

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde yeni tanımlanmış k –Fibonacci grafının tanımını vereceğiz. Daha sonra 1 mertebeli k – Fibonacci Grafi, 2 mertebeli k – Fibonacci Grafi, 3 mertebeli k – Fibonacci Grafi ve 4 mertebeli k – Fibonacci Graflarını, kendi içinde hepsinin teklik ve çiftlik durumlarına göre inceleyeceğiz. Bu grafların teoremlerini ispatlarıyla beraber vereceğiz. Daha sonra uygulamalı olarak örneklerle göstereceğiz.

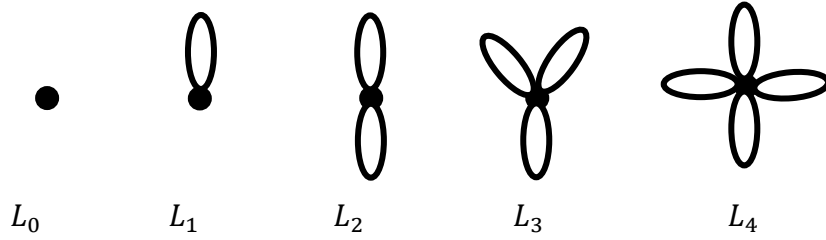
Tanım 4.1 Her $k > 0$ ve $n \geq 1$ sayıları için, $F_{k,0} = 0$, $F_{k,1} = 1$ olmak üzere,

$$F_{k,3n} = kF_{k,3n-1} + F_{k,3n-2} \quad , k \text{ tek}$$

$$F_{k,2n} = kF_{k,2n-1} + F_{k,2n-2} \quad , k \text{ çift}$$

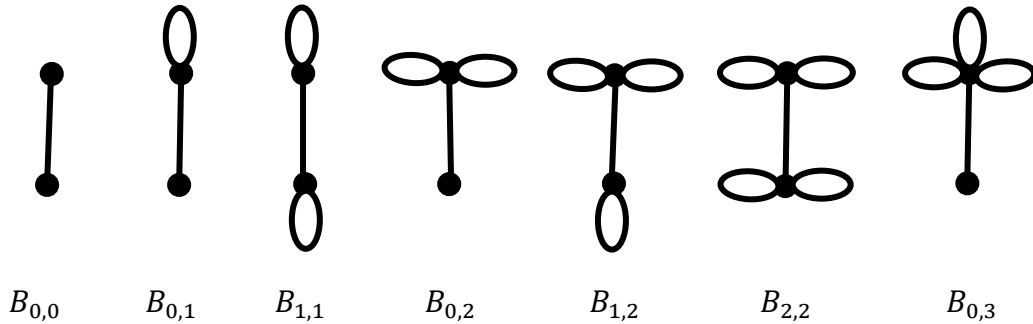
bağıntısına k –Fibonacci Graf denilir.

Tanım 4.2 Tek bir tepe noktasında q döngüleri olan bir graf L_q ile gösterilir. Bazı L_q ’lar aşağıda verilmiştir. (Delen, 2019)



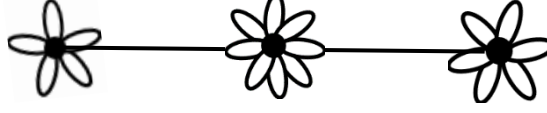
Şekil 4. 1. Bazı L_q Grafları

Tanım 4.3 İki tepe noktasında r, s döngüleri olan graf $B_{r,s}$ ile gösterilir. $B_{r,s}$, bir kenarın bir ucunda r döngüleri ve diğer ucunda s döngüleri olan graftır. Bazı $B_{r,s}$ ’ler aşağıdaki şekilde verilmiştir. (Delen ,2019)



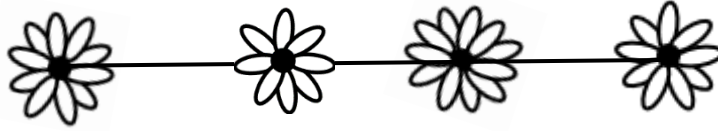
Şekil 4. 2. Bazı $B_{r,s}$ Grafları

Tanım 4.4 Sırasıyla a, b, c tamsayıları olan $2a + 1, 2b + 2, 2c + 1$ derecelerinde u, v, w köşeleri olan bağlı bir graf, $P_3 = \{u, v, w$ yolunda oluşan bir graftır.} a döngüleri u 'ya, b döngüleri v 'ye ve c döngüleri w 'ye gelecek şekilde $T_{a,b,c}$ ile gösterilecektir. (Delen ,2019)



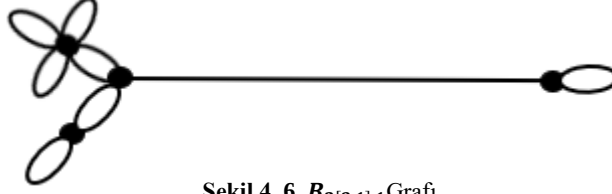
Şekil 4. 3. $T_{5,8,6}$ Grafları

Tanım 4.5 Sırasıyla a, b, c, d tamsayıları olan $2a + 1, 2b + 2, 2c + 2, 2d + 1$ derecelerinde u, v, w, z köşeleri olan bağlı bir graf, $P_4 = \{u, v, w, z$ yolunda oluşan bir graftır.} a döngüleri u 'ya, b döngüleri v 'ye ve c döngüleri w 'ye, d döngüleri z 'ye gelecek şekilde $Q_{a,b,c,d}$ ile gösterilecektir. (Delen ,2019)



Şekil 4. 4. $Q_{10,8,11,9}$ Grafları

Tanım 4.6 Negatif olmayan r ve k tamsayıları için, " $r[k]$ ", diğerlerine rastlayan r döngülerden birinin yeni bir köşesine k döngünün eklendiği anlamına gelir. Negatif olmayan tamsayılar için $r, k_1, k_2, \dots, k_t$ gösterimi " $r[k_1, k_2, \dots, k_t]$ " şu anlama gelir. k_1 ilmekler r dereceli ilmeklerden birine yeni bir tepe noktasında bağlanır, k_2 döngüler başka bir yeni köşede r dereceli başka bir döngüye bağlanır ve bu şekilde devam edilir. k_t döngüler, başka bir yeni tepe noktasında r dereceli döngülerden birine bağlanır. Son olarak notasyon " $r[k_1, k_2, \dots, k_t]$ " şu anlama gelir. k_1 ilmekler r dereceli ilmeklerden birine yeni bir tepe noktasında bağlanır, k_2 ilmekler aynı ilmeğe başka bir yeni köşede eklenir ve bu şekilde devam edilir. k_t döngüler aynı döngüye başka bir yeni tepe noktasında eklenir. Tanımları göstermek için notasyonları aşağıdaki grafiklere karşılık gelir. (Delen ,2019)

Şekil 4. 5. $B_{2[3],1}$ GrafiŞekil 4. 6. $B_{2[3,1],1}$ GrafiŞekil 4. 7. $B_{2[3;1],1}$ Grafi

4.1. 1 Mertebeli k –Fibonacci Grafları

Teorem 4.1: Bir köşeli grafin k –Fibonacci graf olabilmesi için boyutunun;

$$\begin{cases} F_{k, \frac{3n}{2}} & , k \text{ tek} \\ F_{k, \frac{2n}{2}} & , k \text{ çift} \end{cases}$$

olmasıdır.

İspat: G bir köşeli ve boyutu

$$\begin{cases} F_{k, \frac{3n}{2}} & , k \text{ tek} \\ F_{k, \frac{2n}{2}} & , k \text{ çift} \end{cases}$$

olsun. O zaman yalnız bir v köşesi vardır ve bütün kenarların başlangıcı ve bitişi bu v köşesidir. Bu yüzden v 'nin derecesi

$$\begin{cases} F_{k, \frac{3n}{2}} \cdot 2 = F_{k, 3n} & , k \text{ tek} \\ F_{k, \frac{2n}{2}} \cdot 2 = F_{k, 2n} & , k \text{ çift} \end{cases}$$

dir. Bu yüzden k -Fibonacci graftır.

G bir k –Fibonacci graf olsun. O zaman $d_v = F_r$ ‘dir. $\sum derv_i = 2m$ olduğundan dolayı F_r ‘nin çift olması gerekir. k tek iken $F_{k,3n}$ ’ler çift sayıdır. k çift iken $F_{k,2n}$ ’ler çift sayıdır. Bu yüzden boyut;

$$\begin{cases} F_{k,\frac{3n}{2}} & , k \text{ tek} \\ F_{k,\frac{2n}{2}} & , k \text{ çift} \end{cases}$$

dir. Böylece k tek ve k çift olmak kaydıyla oluşan köşeli bu grafın derece dizisi ve Omega invariantı

$$D = \begin{cases} \{F_{k,3n}^{(1)}\} & , k \text{ tek} \\ \{F_{k,2n}^{(1)}\} & , k \text{ çift} \end{cases}$$

$$\Omega(D) = \begin{cases} F_{k,3n-2} & , k \text{ tek} \\ F_{k,2n-2} & , k \text{ çift} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç 4.1 Yukarıda verilen teoremden $k = 1$ ve $k = 2$ olarak alırsak Fibonacci graf ve Pell grafı elde etmiş oluruz. Bu durumda bir grafın Fibonacci graf olabilmesi için boyutunun $F_{k,\frac{3n}{2}}$ olmalıdır. Benzer şekilde bir grafın Pell graf olabilmesi için boyutunun $P_{k,\frac{2n}{2}}$ olmalıdır.

Sonuç 4.2 $k = 1$ için; $\Omega\left(L_{F_{k,\frac{3n}{2}}}\right) = F_{k,3n-2}$ ‘dir.

$k = 2$ için; $\Omega\left(L_{P_{k,\frac{2n}{2}}}\right) = P_{k,2n-2}$ ‘dir.

4.2. 2 Mertebeli k –Fibonacci Grafları

Teorem 4.2: İki mertebeli bir grafın k –Fibonacci graf olması için derece dizisi;

$$D = \begin{cases} \{F_{k,3n+1}, F_{k,3n+2}\} & , k \text{ tek} \\ yok & , k \text{ çift} \end{cases}$$

olmalıdır.

İspat: k tek iken; $\sum derv_i = 2m$ olduğundan dolayı ardışık iki k –Fibonacci sayısının toplamının çift olması gerekir. Bu durumda ardışık tek k –Fibonacci sayılarının toplamı çift olduğu için derece dizisi $\{F_{k,3n+1}, F_{k,3n+2}\}$ şeklindedir.

k çift iken; iki ardışık k –Fibonacci sayısının toplamı çift olamaz. Bu yüzden k çift iken iki mertebeli k –Fibonacci graf olamaz.

$$D = \begin{cases} \{F_{k,3n+1}^{(1)}, F_{k,3n+2}^{(1)}\} & , k \text{ tek} \\ \text{yok} & , k \text{ çift} \end{cases}$$

$$\Omega \left(B \left(F_{k, \frac{3n-1}{2}}, F_{k, \frac{3n-1}{2}} \right) \right) = \sum_{i=1}^{F_{k,3n+2}} (i-2)a_i$$

$$\begin{aligned} &= (F_{k,3n+1} - 2) \cdot 1 + (F_{k,3n+2} - 2) \cdot 1 \\ &= F_{k,3n+1} + F_{k,3n+2} - 4 \quad (F_{k,3n+2} = kF_{k,3n+1} + F_{k,3n}) \\ &= (k+1) \cdot F_{k,3n+1} + F_{k,3n} - 4 \end{aligned}$$

sonucu çifttir, yani D nin çizilebilir olduğunu gerçekleştirile bilinir olduğunu göstermektedir. Burada

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1 \quad (k \text{ tek iken})$$

$$= \frac{F_{k,3n+1} + F_{k,3n+2} - 2}{2}$$

dir.

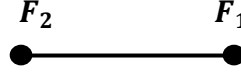
k tek iken;

Eğer 2 mertebeli bir graf k –Fibonacci graf ise o zaman $\frac{F_{k,3n+1} + F_{k,3n+2} - 2}{2}$ tane kapalı bölgesi vardır.

Burada $k = 1$ ve $n = 0$ durumları için F_1 ve F_2 köşe derecelerine sahip olsun. Teorem 1.1.5' e göre olan maksimum bileşen sayısı aşağıdaki gibidir:

$$(k \text{ tek iken}) \quad c_{max} = \sum_{d_i \text{ çift}} a_i + \frac{1}{2} \sum_{d_i \text{ tek}} a_i = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

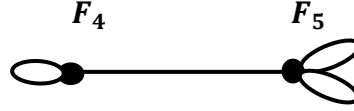
Bu sebeple, yalnızca tek bir bağlantılı graf bulunmaktadır ve aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 8. Köşe dereceleri F_1 ve F_2 olan k -Fibonacci grafi

Bu graf $B_{0,0}$ olup $r = \frac{F_{k,3n+1} + F_{k,3n+2} - 2}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$ tane kapalı bölgesi vardır. Bu da grafın döngüsel olmadığını ifade eder.

Burada $k = 1$ ve $n = 1$ durumları için $F_4 = 3$ ve $F_5 = 5$ köşe derecelerine sahip olsun. Sadece bir bağlantılı grafi vardır ve aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 9. Köşe dereceleri F_4 ve F_5 olan k -Fibonacci grafi

Bu graf $B_{1,2}$ olup $r = \frac{F_{k,3n+1} + F_{k,3n+2} - 2}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$ tane kapalı bölgesi vardır. Bu da grafın 3 tane döngüsünün olduğunu gösterir.

Kısaca, $k = 1$ ve $n \geq 2$ olduğunda negatif olmayan her bir n tam sayısı için tek bir bağlantılı gerçekleştirme olur. Bu da $B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$ bir k -Fibonacci grafıdır. Verilen ifadenin bir köşesinde $\frac{F_{k,3n+2}-2}{2}$ diğer köşesinde $\frac{F_{k,3n+1}-2}{2}$ döngüleri ve $\frac{F_{k,3n+3}-2}{2}$ tane kapalı bölgesi vardır.

4.3. 3 Mertebeli k -Fibonacci Grafları

Teorem 4.3:

i —) k tek iken; 3 mertebeli k -Fibonacci grafının olabilmesi için herhangi üç ardışık k -Fibonacci sayısının toplamının çift olması gerekir. Burada 3 farklı olasılık bu durumu sağlamaktadır. Derece dizileri;

$$\{F_{k,3n+1}^{(1)}, F_{k,3n+2}^{(1)}, F_{k,3n+3}^{(1)}\}, \{F_{k,3n+2}^{(1)}, F_{k,3n+3}^{(1)}, F_{k,3n+4}^{(1)}\} \text{ ve} \\ \{F_{k,3n+3}^{(1)}, F_{k,3n+4}^{(1)}, F_{k,3n+5}^{(1)}\}$$

şeklinde olabilir.

ii-) k çift iken; 1 tane olasılık bu durumu sağlamaktadır. Derece dizisi $\{F_{k,2n-1}^{(1)}, F_{k,2n}^{(1)}, F_{k,2n+1}^{(1)}\}$ şeklinde olabilir.

$$(k \text{ tek iken}) \Rightarrow c_{max} = 1 + \frac{1}{2}(1 + 1) = 2$$

$$(k \text{ çift iken}) \Rightarrow c_{max} = 1 + \frac{1}{2}(1 + 1) = 2$$

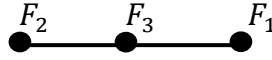
k tek ise;

$$D_1 = \{F_{k,3n+1}^{(1)}, F_{k,3n+2}^{(1)}, F_{k,3n+3}^{(1)}\}$$

$$\begin{aligned} \Omega(D_1) &= F_{k,3n+1} + F_{k,3n+2} + F_{k,3n+3} - 6 \quad (F_{k,3n+3} = kF_{k,3n+2} + F_{k,3n+1}) \\ &= (k + 1)F_{k,3n+2} + 2F_{k,3n+1} - 6 \end{aligned}$$

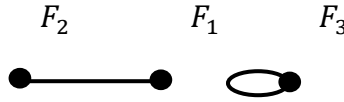
dır.

$\Omega(D_1)$ çift olduğundan dolayı, Teorem 1.1.3' e göre D_1 daima gerçekleştirilebilir. Burada $k = 1$ ve $n = 0$ durumları için $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2$, tek bağlantılı gerçekleştirilmesi aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 10. $D_1 = \{F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}\}$ 'nin Bağlantılı Gerçekleştirilmesi

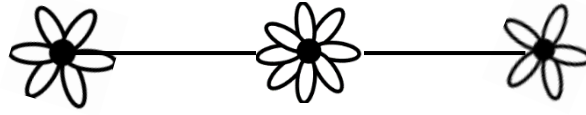
Bu gerçekleştirme de $r = \frac{(k+1)F_2 + 2F_1 - 6}{2} + 1 = 0$ kapalı bölgesi vardır. Aynı zamanda P_3 olan bir yol graftır. D_1 'in bağlantısız gerçekleştirilmesi aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 11. $D_1 = \{F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}\}$ 'nin Bağlantısız Gerçekleştirilmesi

Bu gerçekleştirme de $r = \frac{(k+1)F_2 + 2F_1 - 6}{2} + 2 = 1$ kapalı bölgesi vardır. Aynı zamanda $B_{0,0} \cup L_1$ (veya $P_2 \cup L_1$) olan bir graftır. Yani tek döngülü bir graftır.

Şimdi burada $k = 1$ ve $n \geq 1$ durumları için $D_1 = \{F_{k,3n+1}^{(1)}, F_{k,3n+2}^{(1)}, F_{k,3n+3}^{(1)}\}$ ele alalım, D_1 'in üç bağlantılı gerçekleştirilmesi aşağıda verilmiştir:

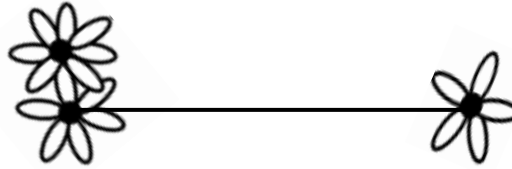
Şekil 4. 12. $T_{6,8,5}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,3n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+3}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+2}-1}{2}}$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,3n+2} + 2F_{k,3n+1} - 6}{2} + 1$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,3n+2} + 2F_{k,3n+1} - 4}{2}$$

tane kapalı bölge vardır.

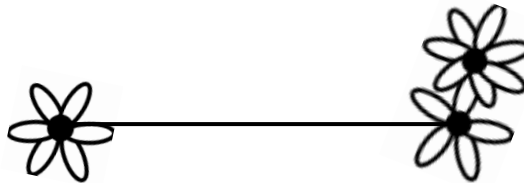
Şekil 4. 13. $B_{6[7],5}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right], \frac{F_{k,3n+2}-1}{2}}$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,3n+2} + 2F_{k,3n+1} - 6}{2} + 1$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,3n+2} + 2F_{k,3n+1} - 4}{2}$$

tane kapalı bölge vardır.

Şekil 4. 14. $B_{6,5[7]}$ Bağlantılı Graf

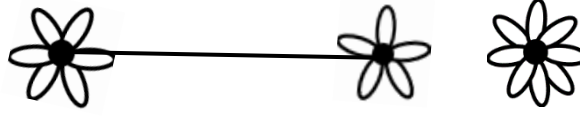
$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right]}$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,3n+2} + 2F_{k,3n+1} - 6}{2} + 1$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,3n+2} + 2F_{k,3n+1} - 4}{2}$$

tane kapalı bölge vardır.

D_1 'in son gerçekleşmesi bağlantısız bir graftır ve aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 15. $B_{6,5} \cup L_8$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,3n+3}}{2}}$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,3n+2} + 2F_{k,3n+1} - 6}{2} + 2$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,3n+2} + 2F_{k,3n+1} - 2}{2}$$

tane kapalı bölge vardır.

* $D_2 = \{F_{k,3n+2}^{(1)}, F_{k,3n+3}^{(1)}, F_{k,3n+4}^{(1)}\}$ ise benzer 4 durum vardır.

* $D_3 = \{F_{k,3n+3}^{(1)}, F_{k,3n+4}^{(1)}, F_{k,3n+5}^{(1)}\}$ ise benzer 4 durum vardır.

k çift ise;

Sadece bu derece dizisi vardır.

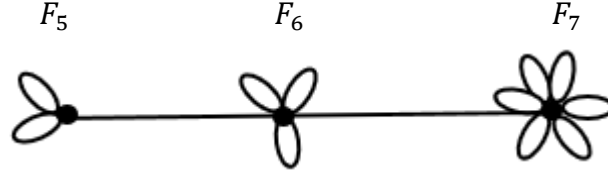
$$D = \{F_{k,2n-1}^{(1)}, F_{k,2n}^{(1)}, F_{k,2n+1}^{(1)}\}$$

$$\Omega(D) = F_{k,2n-1} + F_{k,2n} + F_{k,2n+1} - 6$$

$$= (k+1)F_{k,2n} + 2F_{k,2n-1} - 6$$

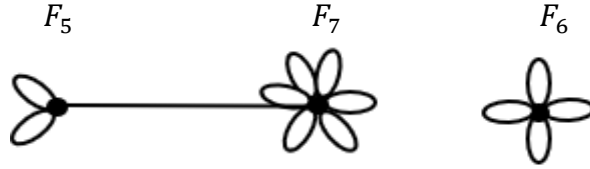
dir.

$\Omega(D)$ çift olduğundan dolayı, Teorem 1.1.3'e göre D daima gerçekleştirilebilir. Burada $k = 2$ ve $n = 3$ durumları için $F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$, tek bağlantılı gerçekleştirilmesi aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 16. $D = \{F_5^{(1)}, F_6^{(1)}, F_7^{(1)}\}$ 'nin Bağlantılı Gerçekleştirilmesi

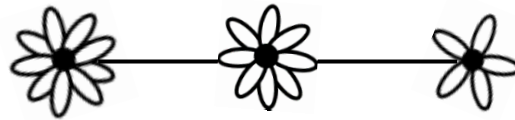
Bu gerçekleştirme de $r = \frac{(k+1)F_6 + 2F_5 - 6}{2} + 1 = 15$ kapalı bölgesi vardır. D_1 'in bağlantısız gerçekleştirilmesi aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 17. $D = \{F_5^{(1)}, F_6^{(1)}, F_7^{(1)}\}$ 'nin Bağlantılı Gerçekleştirilmesi

Bu gerçekleştirme de $r = \frac{(k+1)F_6 + 2F_5 - 6}{2} + 2 = 16$ kapalı bölgesi vardır. Aynı zamanda $B_{2,6} \cup L_4$ olan bir graftır.

Burada $k = 2$ ve $n \geq 1$ durumları için $D = \{F_{k,2n-1}^{(1)}, F_{k,2n}^{(1)}, F_{k,2n+1}^{(1)}\}$ ele alalım, D 'nin üç bağlantılı gerçekleştirilmesi aşağıda verilmiştir:



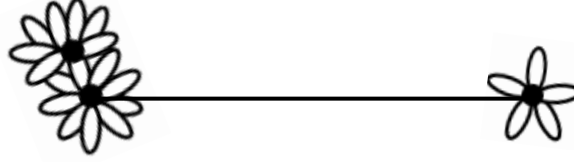
Şekil 4. 18. $T_{9,8,5}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,2n} + 2F_{k,2n-1} - 6}{2} + 1$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,2n} + 2F_{k,2n-1} - 4}{2}$$

tane kapalı bölge vardır.



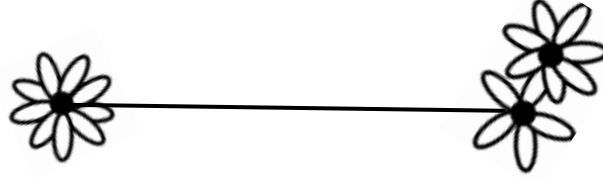
Şekil 4. 19. $B_{9[7],5}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,2n}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \right]}$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,2n} + 2F_{k,2n-1} - 6}{2} + 1$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,2n} + 2F_{k,2n-1} - 4}{2}$$

tane kapalı bölge vardır.



Şekil 4. 20. $B_{9,5[7]}$ Bağlantılı Graf

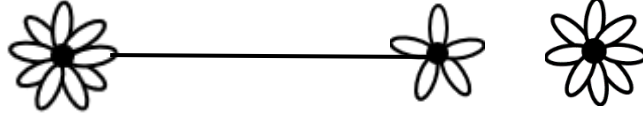
$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,2n}}{2} \right]}$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,2n} + 2F_{k,2n-1} - 6}{2} + 1$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,2n} + 2F_{k,2n-1} - 4}{2}$$

tane kapalı bölge vardır.

D'nin son gerçekleşmesi bağlantısız bir graftır ve aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 21. $B_{9,5} \cup L_8$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,2n}}{2}}$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,2n} + 2F_{k,2n-1} - 6}{2} + 2$$

$$r = \frac{(k+1)F_{k,2n} + 2F_{k,2n-1} - 2}{2}$$

tane kapalı bölge vardır.

Sonuç 4.3 Yukarıda verilen teoremden $k = 1$ ve $k = 2$ alınırsa Fibonacci grafi ve Pell grafi elde edilmiş olur.

4.4. 4 Mertebeli k –Fibonacci Grafları

Teorem 4.4

i –) k tek iken; r 3'ün katı olmak üzere;

$$D = \{F_r, F_{r+1}, F_{r+2}, F_{r+3}\}$$

derece dizisi ile k –Fibonacci graf elde edilir.

İspat: F_r, F_{r+1}, F_{r+2} ve F_{r+3} ardışık dört k –Fibonacci sayısı olsun. Bu sayıların toplamının çift olması gerekir. Bu durum r 'nin 3'ün katı olması ile gerçekleşir.

Eğer r 3'ün katı ise o zaman F_r ve F_{r+3} 3'ün katı olup çifttir. F_{r+1} ve F_{r+2} tektir. Bu dört sayının toplamı çifttir.

Derece dizisi yalnızca;

$$D = \{F_{k,3n}, F_{k,3n+1}, F_{k,3n+2}, F_{k,3n+3}\}$$

dir ve Omega invariantı

$$\Omega(D) = F_{k,3n} + F_{k,3n+1} + F_{k,3n+2} + F_{k,3n+3} - 8$$

dir.

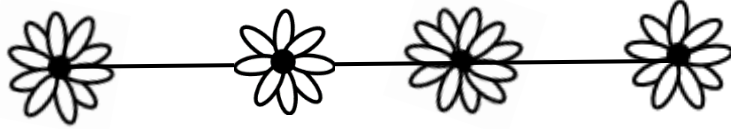
Teorem 1.1.5' e göre olan maksimum bileşen sayısı aşağıdaki gibidir:

$$c_{max} = (1 + 1) + \frac{1}{2}(1 + 1) = 3$$

Yani herhangi bir D 'nin gerçekleşmesi için en fazla üç bileşene sahip olması gerekir.

Burada ardışık k -Fibonacci sayılarını için $k = 1$ ve $n = 1$ olarak alırsak F_3, F_4, F_5 ve F_6 elde ederiz. Bunun sonucunda bir, iki veya üç bileşene sahip gerçekleştirmeler sahip oluruz. Bir bileşene sahip on dört tane bağlantılı gerçekleştirme $Q_{2,0,3,1}$, $Q_{2,3,0,1}$, $B_{2[0],1[3]}$, $B_{2[3],1[0]}$, $B_{2[3,0],1}$, $B_{2,1[3,0]}$, $B_{2[3[0]],1}$, $B_{2,1[3[0]]}$, $T_{2[3],0,1}$, $T_{2,3,1[0]}$, $T_{2[0],3,1}$, $T_{2,0,1[3]}$, $T_{2,3[0],1}$, $T_{2,0[3],1}$ iki bileşene sahip yedi tane bağlantısız gerçekleştirme $B_{2,1} \cup L_{4[0]}$, $B_{2,1[0]} \cup L_4$, $B_{2,1[3]} \cup L_1$, $B_{2[0],1} \cup L_4$, $B_{2[3],1} \cup L_1$, $T_{2,0,1} \cup L_4$, $T_{2,3,1} \cup L_1$ ve üç bileşene sahip bir tane bağlantısız gerçekleştirme $B_{2,1} \cup L_4 \cup L_1$ vardır.

Eğer $n \geq 2$ olarak alırsak bir bileşene sahip on sekiz tane bağlantılı gerçekleştirme, iki bileşene sahip yedi tane bağlantısız gerçekleştirme, üç bileşene sahip bir tane gerçekleştirme elde ederiz.



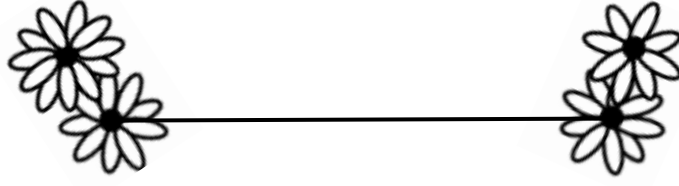
Şekil 4. 22. $Q_{10,8,11,9}$ Bağlantılı Graf

$$Q_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+3}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$$



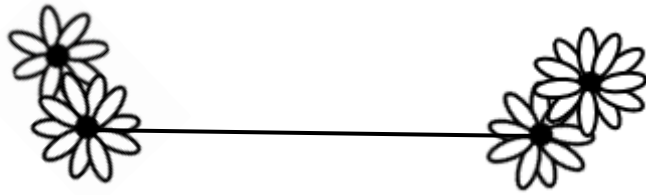
Şekil 4. 23. $Q_{10,11,8,9}$ Bağlantılı Graf

$$Q_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+3}-2}{2}, \frac{F_{k,3n}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$$



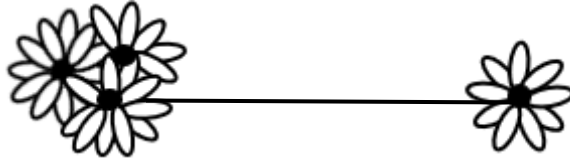
Şekil 4. 24. $B_{10[10],9[7]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor}$$



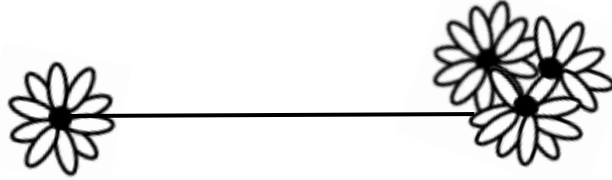
Şekil 4. 25. $B_{10[7],9[10]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right\rfloor}$$



Şekil 4. 26. $B_{10[10,7],9}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n+3}-2}{2}, \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$$



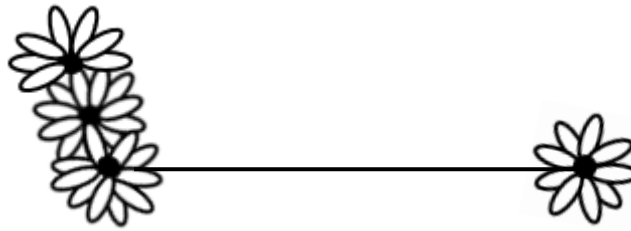
Şekil 4. 27. $B_{10,9[10,7]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n+3}-2}{2}, \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor}$$



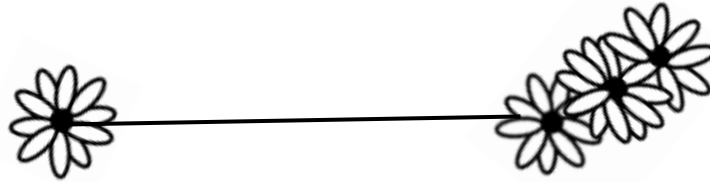
Şekil 4. 28. $B_{10[7[10]],9}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2} \left[\frac{F_{k,3n}-2}{2} \left[\frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right] \right], \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$$



Şekil 4. 29. $B_{10[10[7]],9}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2} \left[\frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \left[\frac{F_{k,3n}-2}{2} \right] \right], \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$$



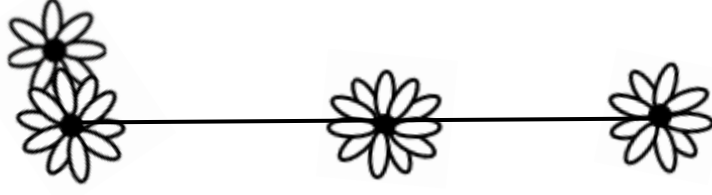
Şekil 4. 30. $B_{10,9[10[7]]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \left[\frac{F_{k,3n}-2}{2} \right] \right]}$$



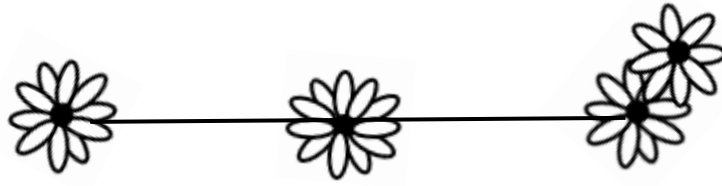
Şekil 4. 31. $B_{10,9[7[10]]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,3n}-2}{2} \left[\frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right] \right]}$$



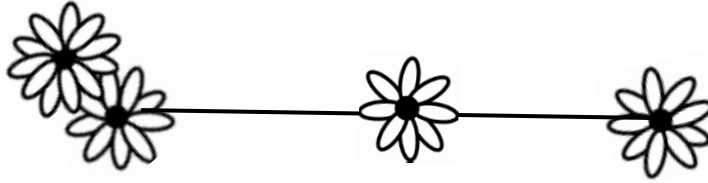
Şekil 4. 32. $T_{10[7],11,9}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,3n+3}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$$



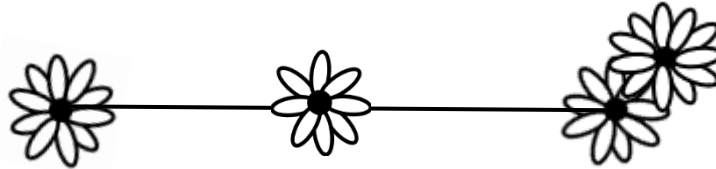
Şekil 4. 33. $T_{10,11,9[7]}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+3}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor}$$



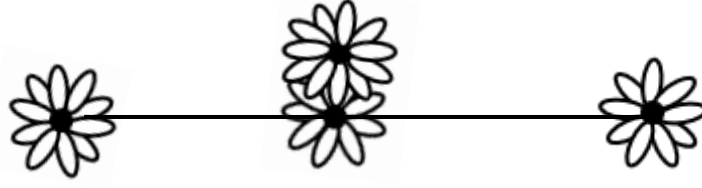
Şekil 4. 34. $T_{10[10],8,9}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,3n}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$$

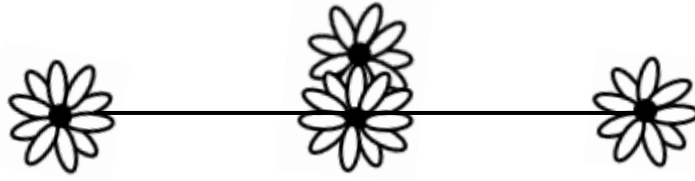


Şekil 4. 35. $T_{10,8,9[10]}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right\rfloor}$$

Şekil 4. 36. $T_{10,8[10],9}$ Bağlantılı Graf

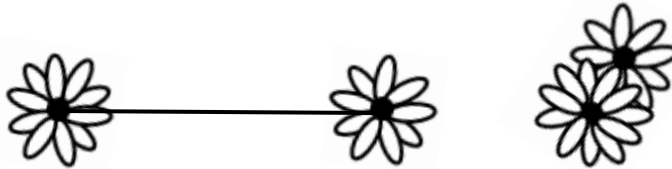
$$T_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n}-2}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$$

Şekil 4. 37. $T_{10,11[7],9}$ Bağlantılı Graf

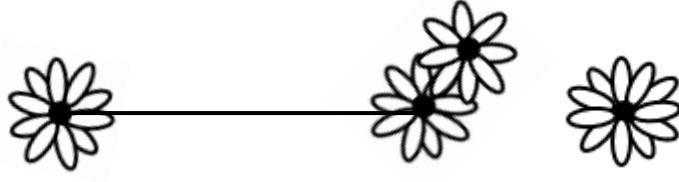
$$T_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}}$$

Şekil 4. 38. $B_{10,9} \cup L_{11} \cup L_8$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,3n+3}}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,3n}}{2}}$$

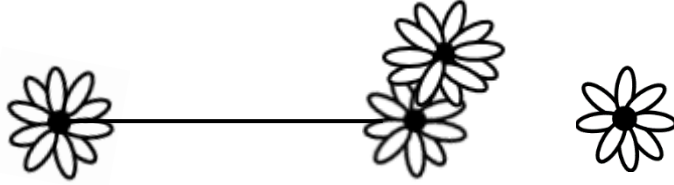
Şekil 4. 39. $B_{10,9} \cup L_{11[7]}$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,3n+3}}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor}$$



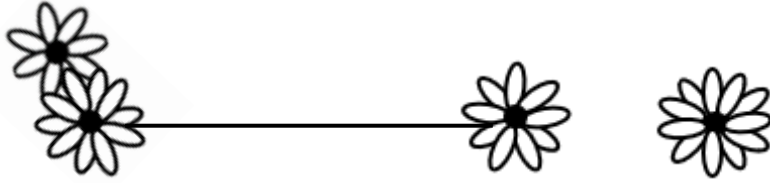
Şekil 4. 40. $B_{10,9[7]} \cup L_{11}$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor} \cup L_{\frac{F_{k,3n+3}}{2}}$$



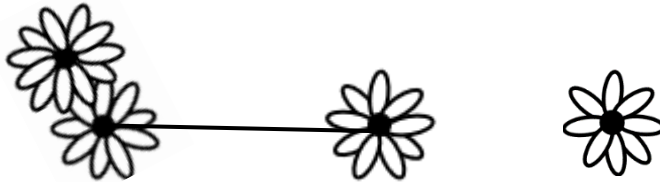
Şekil 4. 41. $B_{10,9[11]} \cup L_8$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right\rfloor} \cup L_{\frac{F_{k,3n}}{2}}$$



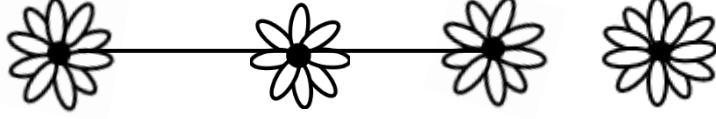
Şekil 4. 42. $B_{10[7],9} \cup L_{11}$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,3n+3}}{2}}$$

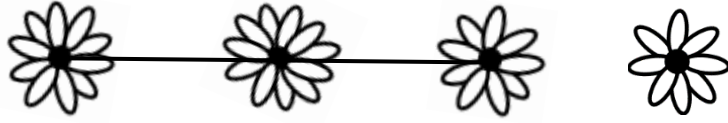


Şekil 4. 43. $B_{10[11],9} \cup L_8$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,3n+3}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,3n}}{2}}$$

Şekil 4. 44. $T_{10,8,9} \cup L_{11}$ Bağlantısız Graf

$$T_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,3n+3}}{2}}$$

Şekil 4. 45. $T_{10,11,9} \cup L_8$ Bağlantısız Graf

$$T_{\frac{F_{k,3n+2}-1}{2}, \frac{F_{k,3n+3}-2}{2}, \frac{F_{k,3n+1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,3n}}{2}}$$

ii–) k çift iken; $D = \{F_r, F_{r+1}, F_{r+2}, F_{r+3}\}$ şeklinde herhangi ardışık k –Fibonacci sayısından oluşan derece dizisi ile k –Fibonacci graf elde edilir.

İspat:

F_r, F_{r+1}, F_{r+2} ve F_{r+3} ardışık dört k –Fibonacci sayısı olsun. Bu sayıların toplamı her zaman çifttir.

Derece dizileri ve Omega in varyantı;

$$D_1 = \{F_{k,2n-1}, F_{k,2n}, F_{k,2n+1}, F_{k,2n+2}\}$$

$$\Omega(D_1) = F_{k,2n-1} + F_{k,2n} + F_{k,2n+1} + F_{k,2n+2} - 8$$

$$D_2 = \{F_{k,2n}, F_{k,2n+1}, F_{k,2n+2}, F_{k,2n+3}\}$$

$$\Omega(D_2) = F_{k,2n} + F_{k,2n+1} + F_{k,2n+2} + F_{k,2n+3} - 8$$

şeklindedir. Teorem 1.1.5' e göre olan maksimum bileşen sayısı aşağıdaki gibidir:

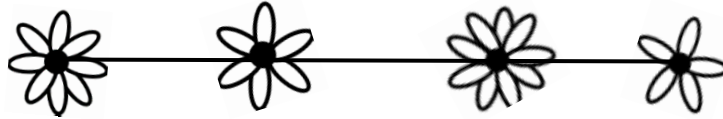
$$c_{max} = \sum_{d_i \text{ çift}} a_i + \frac{1}{2} \sum_{d_i \text{ tek}} a_i = (1 + 1) + \frac{1}{2}(1 + 1) = 3$$

Yani herhangi bir D_1 'in gerçekleşmesi için en fazla üç bileşene sahip olması gerekir.

* $D_1 = \{F_{k,2n-1}, F_{k,2n}, F_{k,2n+1}, F_{k,2n+2}\}$ derece dizisini göz önüne alalım:

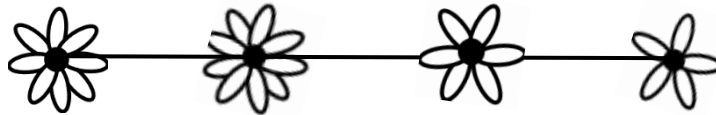
Burada ardışık k –Fibonacci sayılarını için $k = 2$ ve $n = 1$ olarak alırsak F_1, F_2, F_3 ve F_4 elde ederiz. Bunun sonucunda bir, iki veya üç bileşene sahip gerçekleştirmeler sahip oluruz. Bir bileşene sahip on dört tane bağlantılı gerçekleştirme $Q_{0,0,5,2}$, $Q_{0,5,0,2}$, $B_{0[0],2[5]}$, $B_{0[5],2[0]}$, $B_{0[0,5],2}$, $B_{0,2[0,5]}$, $B_{0[5[0]],2}$, $B_{0,2[5[0]]}$, $T_{0[5],0,2}$, $T_{0,5,2[0]}$, $T_{0[0],5,2}$, $T_{0,0,2[5]}$, $T_{0,5[0],2}$, $T_{0,0[5],2}$ iki bileşene sahip yedi tane bağlantısız gerçekleştirme $B_{0,2} \cup L_{6[0]}$, $B_{0,2[0]} \cup L_6$, $B_{0,2[5]} \cup L_2$, $B_{0[0],2} \cup L_6$, $B_{0[5],2} \cup L_2$, $T_{0,0,2} \cup L_6$, $T_{0,5,2} \cup L_2$ ve üç bileşene sahip bir tane bağlantısız gerçekleştirme $B_{0,2} \cup L_6 \cup L_2$ vardır.

Eğer $n \geq 2$ olarak alırsak bir bileşene sahip on sekiz tane bağlantılı gerçekleştirme, iki bileşene sahip yedi tane bağlantısız gerçekleştirme ve üç bileşene sahip bir tane gerçekleştirme elde ederiz.



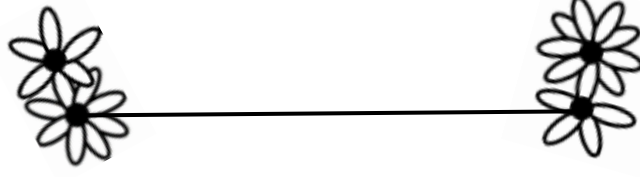
Şekil 4. 46. $Q_{8,6,9,5}$ Bağlantılı Graf

$$Q_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n}-2}{2}, \frac{F_{k,2n+2}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$



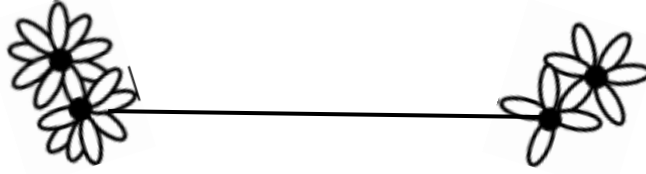
Şekil 4. 47. $Q_{8,9,6,5}$ Bağlantılı Graf

$$Q_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n+2}-2}{2}, \frac{F_{k,2n}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$



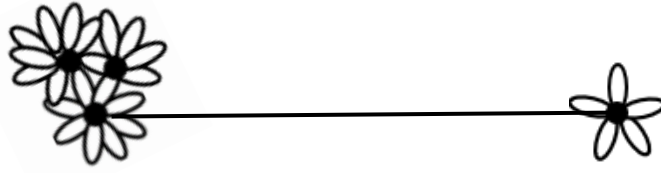
Şekil 4. 48. $B_{8[5],5[8]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \right\rfloor}$$



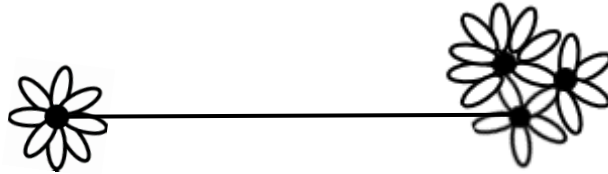
Şekil 4. 49. $B_{8[8],5[5]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n}-2}{2} \right\rfloor}$$



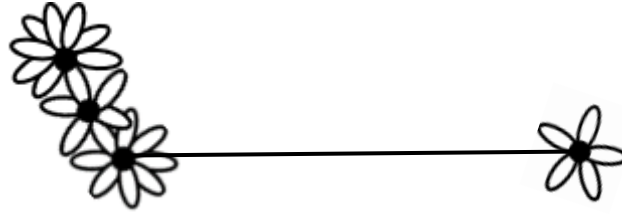
Şekil 4. 50. $B_{8[8,5],5}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n+2}-2}{2}, \frac{F_{k,2n}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$



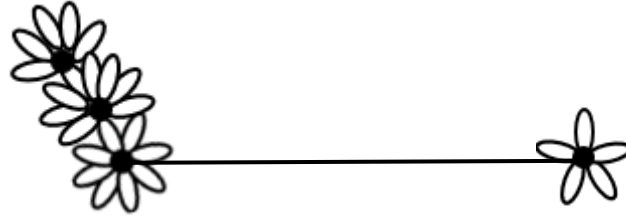
Şekil 4. 51. $B_{8,5[8,5]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n+2}-2}{2}, \frac{F_{k,2n}-2}{2} \right\rfloor}$$



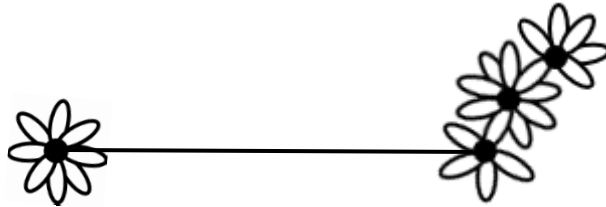
Şekil 4. 52. $B_{8[5[8]],5}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,2n}-2}{2} \left[\frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \right] \right], \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$



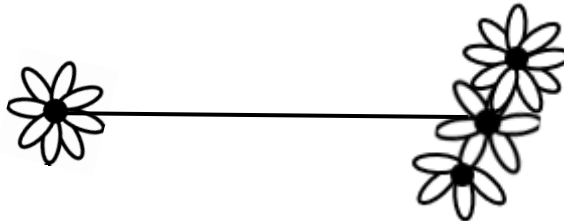
Şekil 4. 53. $B_{8[5],5}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \left[\frac{F_{k,2n}-2}{2} \right] \right], \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$



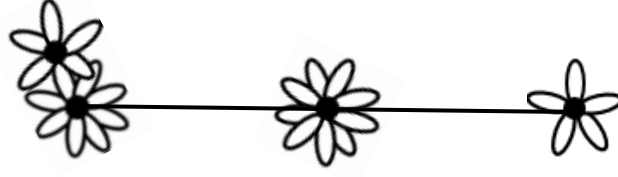
Şekil 4. 54. $B_{8,5[8]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \left[\frac{F_{k,2n}-2}{2} \right] \right]}$$



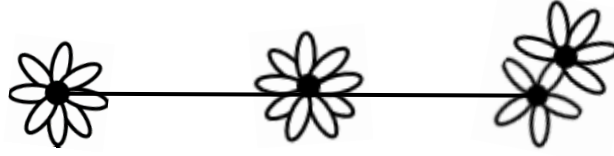
Şekil 4. 55. $B_{8,5[8]}$ Bağlantılı Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left[\frac{F_{k,2n}-2}{2} \left[\frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \right] \right]}$$



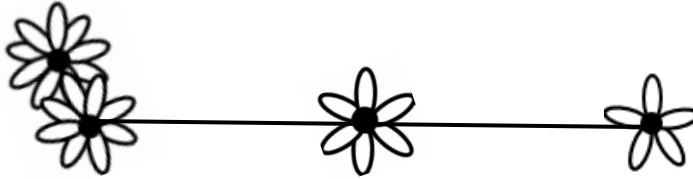
Şekil 4. 56. $T_{8[5],9,5}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,2n+2}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$



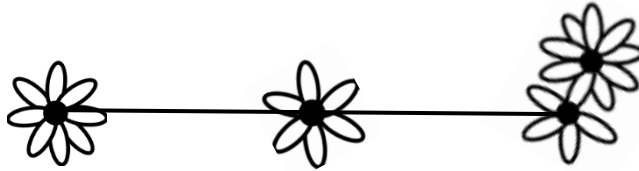
Şekil 4. 57. $T_{8,9,5[5]}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n+2}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n}-2}{2} \right\rfloor}$$



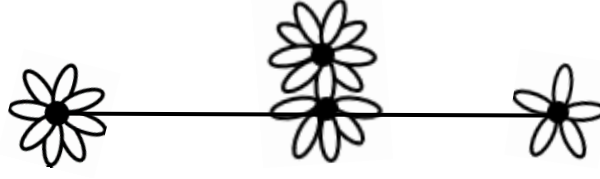
Şekil 4. 58. $T_{8[8],6,5}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,2n}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$



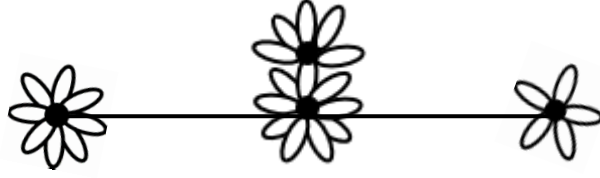
Şekil 4. 59. $T_{8,6,5[8]}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \right\rfloor}$$



Şekil 4. 60. $T_{8,6[8],5}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n}-2}{2} \left[\frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \right], \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$



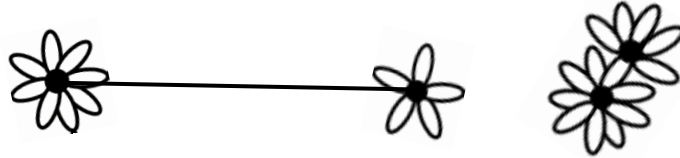
Şekil 4. 61. $T_{8,9[5],5}$ Bağlantılı Graf

$$T_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \left[\frac{F_{k,2n}-2}{2} \right], \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}}$$



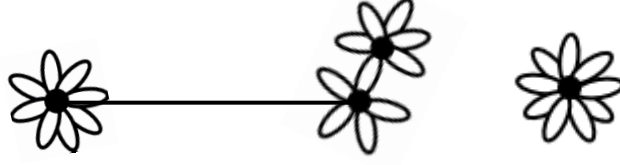
Şekil 4. 62. $B_{8,5} \cup L_6 \cup L_9$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,2n}}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,2n+2}}{2}}$$



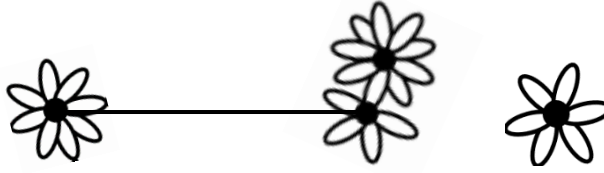
Şekil 4. 63. $B_{8,5} \cup L_{9[5]}$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,2n+2}}{2} \left[\frac{F_{k,2n}-2}{2} \right]}$$



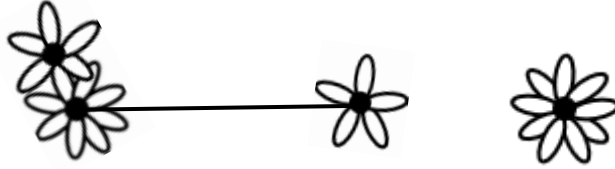
Şekil 4. 64. $B_{8,5[5]} \cup L_9$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n}-2}{2} \right\rfloor} \cup L_{\frac{F_{k,2n+2}}{2}}$$



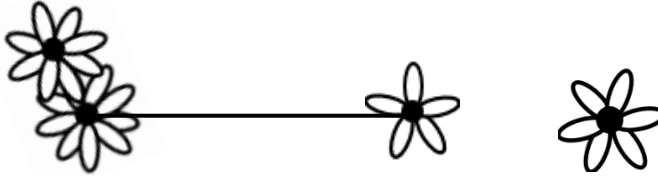
Şekil 4. 65. $B_{8,5[8]} \cup L_6$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \right\rfloor} \cup L_{\frac{F_{k,2n}}{2}}$$



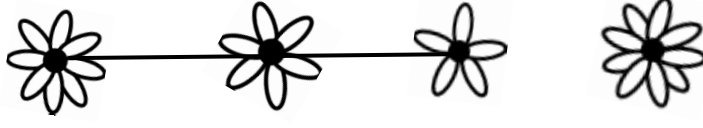
Şekil 4. 66. $B_{8[5],5} \cup L_9$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,2n+2}}{2}}$$



Şekil 4. 67. $B_{8[8],5} \cup L_6$ Bağlantısız Graf

$$B_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2} \left\lfloor \frac{F_{k,2n+2}-2}{2} \right\rfloor, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,2n}}{2}}$$



Şekil 4. 68. $T_{8,6,5} \cup L_9$ Bağlantısız Graf

$$T_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,2n+2}}{2}}$$



Şekil 4. 69. $T_{8,9,5} \cup L_6$ Bağlantısız Graf

$$T_{\frac{F_{k,2n+1}-1}{2}, \frac{F_{k,2n+2}-2}{2}, \frac{F_{k,2n-1}-1}{2}} \cup L_{\frac{F_{k,2n}}{2}}$$

Benzer düşünceyle $D_2 = \{F_{k,2n}, F_{k,2n+1}, F_{k,2n+2}, F_{k,2n+3}\}$ derece dizisi göz önüne alınabilir.

Sonuç 4.4 4 mertebeli k –Fibonacci graflarda $k = 1$ ve $k = 2$ olarak alınırsa Fibonacci grafi ve Pell grafi elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Graf Teori uygulamalı matematiğin çok kullanışlı bir alanını oluşturmaktadır. Graf Teori matematik alanında en fazla diğer disiplinlere uygulanan bir alt dalıdır. Bunlardan bazıları; ulaşım ağlarında meydana gelen optimizasyon, yol, bilgi ulaşımı, elektrik devreleri, haberleşme ağları, istatistiksel ve matematiksel ifade ve formüller, coğrafya, mimarlık, konuma bağlı uygulamalar, gökbilimi vb. alanlarda kullanılmaktadır. Bu açıdan çok fazla sayıda araştırmalar yapılmaktadır.

Fibonacci sayıları geçmişten günümüze kadar birçok yerde kullanılmış ve bugüne kadar bunlarla ilgili pek çok çalışma elde edilmiştir.

Bu tezde önce Graf teori ve Omega invaryantının temel kavramları ve teoremleri açıklanmış daha sonra Fibonacci, Pell ve k –Fibonacci sayıları ile ilgili tanımlar, teoremler ve tablolar verilmiştir. k –Fibonacci sayısını grafla ilişkilendirerek k –Fibonacci Grafları olarak adlandırılan bir kavram ortaya konulmuştur. 1 mertebeli k –Fibonacci grafi, 2 mertebeli k –Fibonacci grafi, 3 mertebeli k –Fibonacci grafi ve 4 mertebeli k –Fibonacci grafları oluşturulmuştur. Kendi içlerinde teklik ve çiftlik durumlarına göre bakılarak graflar oluşturulup çizilmiştir.

5.2 Öneriler

Bu çalışma sonucunda elde ettiğimiz bulgulara bakıldığında, benzer yöntemler kullanılarak farklı sayı dizileri ile de graflar elde edilebileceği ön görülebilir. Bu çalışmamıza benzer olarak Pell ve Pell-Lucas grafları oluşturulabilir.

6. KAYNAKLAR

- Akgüneş, N., 2012, Analyzing Special Parameters Over Zero-Divisor Graphs, In AIP Conference Proceedings Vol. 1479.
- Akgüneş, N., 2013, Graf Parametreleri ve Cebirsel Yapılara Grafsal Yaklaşımlar, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Bollobas, B., 1998, Modern Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, 184, Springer, New York.
- Buckley, F., Harary, F., 1990, Distance in Graphs, Addison Wesley Pub., California.
- Civciv, H., 2007, Complex Factorization of the k-Fibonacci and k-Lucas Numbers, International Journal Mathematical Manuscripts, Vol 1, Number 2.
- Dankelmann, P., Entringer, R.C., 2000, Average distance, minimum degree and spanning trees, J. Graph Theory 33, 1–13.
- Delen, S., 2019, Omega İnvaryant, Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- Demirci, M., Delen, S., Cevik, A. S., Cangul, I. N., 2021, Omega Index of Line and Total Graphs, Journal of Mathematics.
- Demirci, M., Ozbek, A., Albayrak, O., Cangul, I. N., 2021, Lucas Graphs, Journal of Applied Mathematics and Computing, 65 (1), 93-106.
- Erdős, P., Pach, J., Pollack, R., Tuza, Z., 1989, Radius, diameter and minimum degree, J. Combin. Theory B 47, 73–79.
- Falcon, S., Plaza, A., 2007, On the Fibonacci k-Numbers, Chaos, Solitons & Fractals, 32(2), 1615-1624.
- Grimaldi, R., 2012, Fibonacci and Catalan Numbers, John Wiley and Sons, 3-140.
- Gross, J. L., Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory, Chapman Hall, CRC Press.
- Harris, J., Jeffry, L. H., and Michael, J. M., 2008, Combinatorics and graph theory, Springer.
- Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications; John Wiley and Sons: New York, NY, USA.
- Startek, M., Włoch, A., Włoch, I., 2009. Fibonacci Numbers and Lucas Numbers In Graphs, Discrete Applied Mathematics. 157, 864–868.
- Vajda, S., 1989, Fibonacci & Lucas Numbers, and The Golden Section Theory and Applications, Ellis Horwood Limited.

- Yurttaş, Gunes, A., Delen, S., Demirci, M., Cevik, A. S., & Cangul, I. N., 2020, Fibonacci Graphs. *Symmetry*, 12(9), 1383.
- Yücel, N., 2020, Fibonacci Dizisi Üzerinde Tanımlanan Grafların Genelleştirilmesi, Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Nevşehir.