



**T.C.**  
**NECMETTİN ERBAKAN**  
**ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**HOMOJEN FONKSİYONLARLA TANIMLANAN FARK DENKLEMLERİNİN  
ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI**

**Yakup ÇİÇEK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Ağustos-2022**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## HOMOJEN FONKSİYONLARLA TANIMLANAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

**Yakup ÇİÇEK**

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU**

**2022, 42 Sayfa**

**Jüri**

**Prof. Dr. Necati TAŞKARA  
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA  
Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU**

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, fark denklemlerinin önemi hakkında bir giriş verildi.

İkinci bölümde, fark denklemleri üzerine bazı tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı üzerine yapılan bazı çalışmalar hakkında bir literatür araştırması verildi.

Dördüncü bölümde,  $J_{-1}$  ve  $J_0$  başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere, sıfırıncı dereceden homojen  $f$  fonksiyonu ile tanımlanan

$$J_{n+1} = f(J_n, J_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots,$$

genel fark denkleminin çözümlerinin nitel davranışı verildi. Bu bölüm Moaaz ve ark. (2019) tarafından yapılan “Some qualitative behavior of solutions of general class of difference equations” başlıklı makalenin incelemesidir.

Beşinci bölümde, ele alınan makalenin teorik sonuçlarını doğrulamak için bazı örnekler verildi.

Altıncı bölümde, konu üzerine sonuç ve öneriler verildi.

**Anahtar Kelimeler:** Fark denklemi, Global asimptotik kararlılık, Homojen fark denklemi, Periyodik çözüm, Salınımlılık.

## ABSTRACT

## MS THESIS

# BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF DIFFERENCE EQUATIONS DEFINED BY HOMOGENEOUS FUNCTIONS

**Yakup ÇİÇEK**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS**

**Advisor: Asst. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU**

**2022, 42 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Necati TAŞKARA  
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA  
Asst. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU**

This study consists of six sections.

In the first section, an introduction to the importance of difference equations was given.

In the second section, some definitions and theorems on difference equations were given.

In the third section, a literature review on some studies on the behavior of solutions of difference equations was given.

In the fourth section, the qualitative behavior of the solutions of the general difference equation

$$J_{n+1} = f(J_n, J_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots,$$

where  $J_{-1}$  and  $J_0$  are the positive real initial conditions, defined by the homogeneous function  $f$  with degree zero was given. This section is a review of the article “Some qualitative behavior of solutions of general class of difference equations” by Moaaz et al. (2019).

In the fifth section, some examples to confirm the theoretical results of the paper under consideration were given.

In the sixth section, conclusion and recommendations were given.

**Keywords:** Difference equation, Global asymptotic stability, Homogeneous difference equation, Periodic solution, Oscillation.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım zorluklarda yardımını benden esirgemeyen, bilgilerini benimle paylaşan, fikirleriyle ufkumu geliştirip zenginleştiren bilhassa teknik konularda yol gösteren, tezimi titizlikle ve sabırla yöneten saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU'ya teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Yakup ÇİÇEK  
KONYA-2022

## İÇİNDEKİLER

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET .....                                                      | ii  |
| ABSTRACT.....                                                   | iii |
| ÖNSÖZ .....                                                     | iv  |
| İÇİNDEKİLER .....                                               | v   |
| SİMGE LİSTESİ.....                                              | vi  |
| GRAFİK LİSTESİ .....                                            | vii |
| 1. GİRİŞ .....                                                  | 1   |
| 2. FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER .....   | 2   |
| 3. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....                                     | 13  |
| 4. HOMOJEN FONKSİYONLA TANIMLANAN BİR FARK DENKLEM SINIFI ..... | 20  |
| 4.1. Lokal Kararlılık ve Yarı-Döngü Analizi.....                | 20  |
| 4.2. Periyodik Çözümlerin Varlığı.....                          | 27  |
| 5. BAZI UYGULAMALAR .....                                       | 31  |
| 6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                       | 39  |
| KAYNAKLAR .....                                                 | 40  |

## SİMGE LİSTESİ

|                |   |                               |
|----------------|---|-------------------------------|
| $\mathbb{N}$   | : | Doğal sayılar                 |
| $\mathbb{N}_0$ | : | Sıfırdan başlayan tam sayılar |
| $\mathbb{Z}$   | : | Tam sayılar                   |
| $\mathbb{Z}^+$ | : | Pozitif tam sayılar           |
| $\mathbb{R}$   | : | Reel sayılar                  |
| $\mathbb{R}^+$ | : | Pozitif reel sayılar          |
| $=$            | : | Eşittir                       |
| $\neq$         | : | Eşit değildir                 |
| $>$            | : | Büyüktür                      |
| $<$            | : | Küçüktür                      |
| $\geq$         | : | Büyük eşit                    |
| $\leq$         | : | Küçük eşit                    |
| $\exists$      | : | Bazı                          |
| $\forall$      | : | Her                           |
| $\in$          | : | Elemanıdır                    |
| $\Rightarrow$  | : | Gerek koşul                   |
| $\Leftarrow$   | : | Yeter koşul                   |
| $J^*$          | : | $J$ denge noktası             |
| $\bar{x}$      | : | $x$ denge noktası             |
| $\Delta$       | : | İleri fark operatörü          |
| $J_F$          | : | $F$ nin jakobiyeni            |

## GRAFİK LİSTESİ

|                | <u>Sayfa</u> |
|----------------|--------------|
| Grafik 1 ..... | 9            |
| Grafik 2 ..... | 33           |
| Grafik 3 ..... | 35           |
| Grafik 4 ..... | 35           |
| Grafik 5 ..... | 36           |
| Grafik 6 ..... | 37           |

## 1. GİRİŞ

Son yıllarda lineer ve lineer olmayan fark denklemleri, matematik ve diğer bilim dallarındaki uygulamaları sayesinde popüler bir çalışma alanı haline gelmiştir. Fark denklemleri, âdi diferansiyel denklemler ve kısmî diferansiyel denklemler gibi gerçek hayattaki problemlerin modellenmesinde etkili bir şekilde kullanılmaktadır.

Fark denklemleri, bağımsız değişkeni doğal sayılar olan denklemler olup bilinmeyen fonksiyonun farklarını veya ötelemelerini ihtiva ederler. Çözümlerinin diziler olduğu bu denklemler, bir büyüklüğün kendisinden önceki büyüklük değerlerine bağlı olduğu fiziksel, kimyasal, biyolojik vs problemlerde matematiksel modeller olarak oldukça sık kullanılırlar. Bilgisayarlarda kolaylıkla programlanabilmeleri sayesinde, çözümlerinin istenen kısmı kolayca elde edilebilmesi de bu denklemlerin önemli bir avantajıdır.

Matematik dışındaki bilim dallarında da uygulama alanı bulması sebebiyle fark denklemleri, diğer bilim dallarında çalışan birçok araştırmacının da ilgisini çekmiştir.

Bu çalışmanın konusu olan fark denklemi Moaaz ve arkadaşları (2019) tarafından ele alınan, bugüne kadar bu alanda yapılmış birçok çalışmanın sonuçlarını genelleyen, homojen fonksiyonlarla oluşturulan genel bir fark denklemdir. Bu yönüyle Moaaz ve arkadaşlarının (2019) çalışmalarındaki sonuçlar da daha genel olma niteliğindedir.

## 2. FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, fark denklemlerine dair bazı tanımlar ve teoremler verildi.

**Tanım 2.1.**  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n$  bağımsız değişken ve  $x$  bağımlı değişken olmak üzere,

$$F(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.1)$$

denklemini bir “*fark denklemi*” olarak adlandırılır (Soykan ve ark., 2017).

**Tanım 2.2.**  $\mathbb{N}_0$  üzerinde tanımlı bir  $x_n$  fonksiyonu her  $n \in \mathbb{N}_0$  için (2.1) denklemini gerçekliyorsa, bu fonksiyona  $\mathbb{N}_0$  üzerinde (2.1) denkleminin bir “*çözümü*” denir.  $k$  ıncı mertebeden bir fark denkleminin,  $\phi$  ve  $\psi$  birer fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(n, x_n, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0 \quad (2.2)$$

veya

$$x_n = \psi(n, c_1, c_2, \dots, c_k) \quad (2.3)$$

şeklinde  $k$  tane  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  keyfi sabit içeren çözümüne (2.1) denkleminin “*genel çözümü*” denir.  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  sabitlerine özel değerler verilerek (2.2) den (veya (2.3) ten) elde edilen çözümlere “*özel çözüm*” denir (Soykan ve ark., 2017).

**Tanım 2.3.** Bir fark denkleminde bağımlı değişkenin en büyük ve en küçük indislerinin farkına o denklemin “*mertebesi*” denir (Soykan ve ark., 2017).

**Örnek 2.1.**  $n \in \mathbb{N}_0$  için

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}} \quad (2.4)$$

$$x_n x_{n-1} + x_{n+1} x_n - x_{n-3} = 0 \quad (2.5)$$

$$x_n = x_{n-1} + e^{x_{n-3}} \quad (2.6)$$

birer fark denklemi olup mertebeleri sırasıyla 2, 4 ve 3 tür.

**Tanım 2.4.**  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$  ve  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  olmak üzere  $k$  ıncı mertebeden bir fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözüm ile alakalı

$$x(n_0 + i) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad (2.7)$$

veya

$$\Delta^i x(n_0) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad (2.8)$$

formunda ilk  $k$  tane ardışık değerin belirtilmesi gereklidir. (2.7) ya da (2.8) koşullarına “başlangıç koşulları” adı verilir.  $k$  ıncı mertebeden bir fark denklemi ve (2.7) ya da (2.8) başlangıç koşullarından oluşan probleme ise bir “başlangıç değer problemi” denir (Soykan ve ark., 2017).

İkinci mertebeden

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.9)$$

genel fark denklemi verilsin. Aşağıda (2.9) denkleminin nitel davranışına dair bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

**Teorem 2.1.**  $I$  reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere,  $f : I \times I \rightarrow I$  sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her  $x_{-1}, x_0 \in I$  başlangıç koşulu için, (2.9) denklemi bir tek  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümüne sahiptir (Kulenović ve Ladas, 2001).

**Tanım 2.5.** Eğer  $\bar{x}$  noktası  $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$  denkleminin bir çözümü ise  $\bar{x}$  ye, (2.9) denkleminin “denge noktası” denir (Kulenović ve Ladas, 2001).

**Örnek 2.2.**  $a$  bir reel sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a^2 + 2x_n x_{n-1}}{2x_{n-2} + x_{n-3}}$$

denkleminin denge noktalarını bulalım. Denge noktası tanımından,  $\bar{x} = \frac{a^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{x}}{2\bar{x} + \bar{x}}$  olmalıdır. Bu denklemin çözümleri  $\bar{x} = a$  ve  $\bar{x} = -a$  olup verilen denklemin denge noktalarıdır.

**Örnek 2.3.**  $a$  ve  $b$  reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

denge noktası tanımından  $\bar{x} = \frac{a + b\bar{x}}{\bar{x} - \bar{x}}$  olup bu denklemin paydası sıfır olacağından verilen fark denkleminin denge noktası yoktur.

**Tanım 2.6.**  $\bar{x}$ , (2.9) denkleminin denge noktası olmak üzere,

- a. Eğer  $x_{-1}, x_0 \in J$  olmak üzere  $\forall \varepsilon > 0$  için,  $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$  iken  $\forall n \geq 0$  için,  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\exists \delta > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası “*lokal kararlıdır*” denir.
- b. Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve  $x_{-1}, x_0 \in J$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  olacak şekilde,  $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$  şartını sağlayan  $\gamma > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktası “*lokal asimptotik kararlıdır*” denir.
- c. Eğer  $\forall x_{-1}, x_0 \in J$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  ise  $\bar{x}$  denge noktası “*global çekimlidir*” denir.

- d. Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve global çekimli ise  $\bar{x}$  denge noktası “*global asimptotik kararlıdır*” denir.
- e. Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı değil ise  $\bar{x}$  denge noktası “*kararsızdır*” denir.
- f. Eğer  $\forall x_{-1}, x_0 \in J$  iken  $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < r$  ve bazı  $N \geq -1$  sayıları için  $|x_N - \bar{x}| \geq r$  olacak şekilde  $\exists r > 0$  sayısı varsa  $\bar{x}$  denge noktasına “*repeller*” denir (Kulenović ve Ladas, 2001).

(2.9) da verilen  $f$  fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyonun kısmi türevlerinin  $(\bar{x}, \bar{x})$  noktasındaki değerleri

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{x}) \quad \text{ve} \quad q = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{x}) \quad (2.10)$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = py_n + qy_{n-1} \quad (2.11)$$

denklemine (2.9) fark denkleminin “ $\bar{x}$  denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi” denir. (2.11) in karakteristik denklemi

$$\omega^2 - p\omega - q = 0 \quad (2.12)$$

denklemdir (Kulenović ve Ladas, 2001).

### **Teorem 2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)**

- a. Eğer (2.12) nin iki kökünün de mutlak değeri 1 den küçük ise (2.9) un  $\bar{x}$  denge noktası “*lokal asimptotik kararlı*”dır.
- b. Eğer (2.12) nin en az bir kökünün mutlak değeri 1 den büyük ise (2.9) un  $\bar{x}$  denge noktası “*kararsız*”dır.
- c. (2.12) nin köklerinin mutlak değerlerinin 1 den küçük olması için gerek ve yeter koşul  $|p| < 1 - q < 2$  eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda (2.9) un  $\bar{x}$

denge noktası “*lokal asimptotik kararlı*”dır. Bu durumda lokal asimptotik kararlı  $\bar{x}$  denge noktası “*batış noktası*” olarak adlandırılır.

- d. (2.12) nin köklerinin mutlak değerlerinin 1 den büyük olması için gerek ve yeter koşul  $|q| > 1$  ve  $|p| < |1 - q|$  eşitsizliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda (2.9) un  $\bar{x}$  denge noktası “*repellerdir*”.
- e. (2.12) nin köklerinden birinin mutlak değeri 1 den büyük, diğerinin mutlak değeri 1 den küçük olması için gerek ve yeter koşul  $p^2 + 4q > 0$  ve  $|p| > |1 - q|$  eşitsizliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda (2.9) un  $\bar{x}$  denge noktası “*kararsız*”dır.
- f. (2.12) nin bir kökünün mutlak değerinin bire eşit olması için gerek ve yeter koşul  $|p| = |1 - q|$  veya  $q = -1$  ve  $|p| \leq 2$  olmasıdır. Bu durumda (2.9) un  $\bar{x}$  denge noktasına “*hiperbolik olmayan nokta*” denir (Kulenović ve Ladas, 2001).

**Tanım 2.7.**  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisi verilsin. Her  $n$  için  $m \leq x_n \leq M$  olacak şekilde  $m, M \in \mathbb{R}$  sayıları varsa,  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisi “*sınırlıdır*” denir (Camouzis ve Ladas, 2007).

**Örnek 2.4.** Pozitif başlangıç değerleri için

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 2x_{n-1}}{2x_n + x_{n-1}}$$

rasyonel fark denkleminin her pozitif çözümü sınırlıdır. Gerçekten,

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 2x_{n-1}}{2x_n + x_{n-1}} = \frac{3x_n}{2x_n + x_{n-1}} + \frac{2x_{n-1}}{2x_n + x_{n-1}} \leq \frac{3x_n}{2x_n} + \frac{2x_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{7}{2}$$

bulunur.  $x_n = \frac{1}{y_n}$  dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{\frac{3}{y_n} + \frac{2}{y_{n-1}}}{\frac{2}{y_n} + \frac{1}{y_{n-1}}} = \frac{3y_{n-1} + 2y_n}{2y_{n-1} + y_n} \Rightarrow y_{n+1} = \frac{2y_{n-1} + y_n}{3y_{n-1} + 2y_n}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemden de

$$y_{n+1} = \frac{2y_{n-1} + y_n}{3y_{n-1} + 2y_n} = \frac{2y_{n-1}}{3y_{n-1} + 2y_n} + \frac{y_n}{3y_{n-1} + 2y_n} \leq \frac{2y_{n-1}}{3y_{n-1}} + \frac{y_n}{2y_n} = \frac{7}{6}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{x_{n+1}} = y_{n+1} \leq \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{6}{7} \leq x_{n+1}$$

olur. Sonuç olarak verilen denklemin her çözümünün  $n \geq 1$  için sınırlı olduğunu gösteren

$$\frac{6}{7} \leq x_n \leq \frac{7}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Tanım 2.8.**  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisi (2.9) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer  $\forall n \geq -1$  tam sayıları için  $x_{n+p} = x_n$  oluyorsa,  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümü “ $p$  periyotludur” denir. Bu şartı sağlayan en küçük  $p$  pozitif tam sayısına dizinin esas periyodu denir (Kulenović ve Ladas, 2001).

**Örnek 2.5.** Sıfırdan farklı  $x_{-1}$  ve  $x_{-2}$  başlangıç koşulları için

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1}x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

denkleminin her çözümünün 3 periyotlu olduğunu gösterelim. Verilen denklemden

$$x_{n-1} = \frac{1}{x_{n-2}x_{n-3}}$$

olduğu görülür. Böylece  $n \in \mathbb{N}$  için

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1}x_{n-2}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n-2}x_{n-3}}x_{n-2}} = x_{n-3}$$

bulunur.  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n = x_{n-3}$  olduğundan, verilen denklemin her çözümünün 3 periyotlu olduğu görülür.

**Tanım 2.9.**  $\bar{x}$ , (2.9) un bir denge noktası ve  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisi bir çözümü olsun.  $l \geq -1$  ve  $m \leq \infty$  olmak üzere,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından büyük veya ona eşit,  $x_{l-1} < \bar{x}$  ve  $x_{m+1} < \bar{x}$  ise  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisinin bir pozitif yarı döngüsü denir. Benzer şekilde,  $l \geq -k$ ,  $m \leq \infty$  olmak üzere,  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisinin her elemanı  $\bar{x}$  denge noktasından küçük,  $x_{l-1} \geq \bar{x}$  ve  $x_{m+1} \geq \bar{x}$  ise  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  dizisine  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisinin bir negatif yarı döngüsü denir (Camouzis ve Ladas, 2007).

**Tanım 2.10.**  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisinin terimleri ne tamamen pozitif ne de tamamen negatif ise bu diziye sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde diziye salınımsızdır denir (Camouzis ve Ladas, 2007).

**Tanım 2.11.**  $\{x_n - \bar{x}\}$  dizisi salınımlı ise  $\{x_n\}$  dizisi  $\bar{x}$  civarında salınımlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2007).

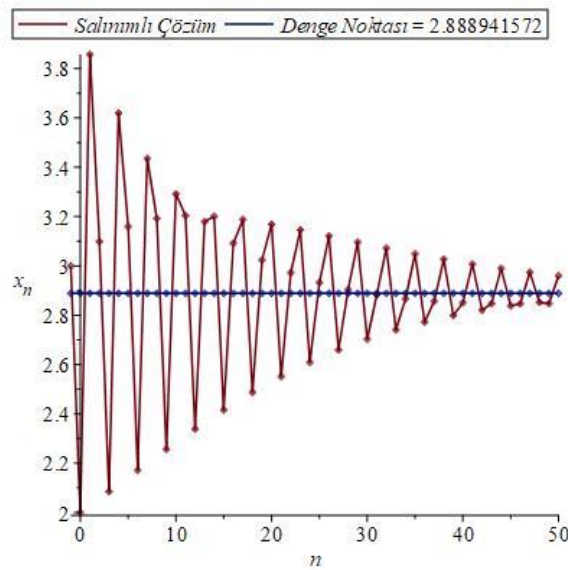
**Örnek 2.6.**  $x_{-1}, x_0$  negatif olmayan reel başlangıç koşulları ve  $a$  pozitif bir reel sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a}{1 + x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklemini düşünelim. Bu denklemin her çözümü pozitiftir.  $a=27$  için denge noktası  $\bar{x} = 2.888941572$  olur. Bu durumda  $x_{-1} = 3, x_0 = 2$  başlangıç koşulları için çözümün salınımlı olduğu Tablo 1 ve Grafik 1'den görülebilir.

**Tablo 1:** Çözümün Salınımlılığı

| $n$ | $x_n$    | $x_n - \bar{x}$ | $n$ | $x_n$    | $x_n - \bar{x}$ |
|-----|----------|-----------------|-----|----------|-----------------|
| 0   | 2        | -0.88894        | 11  | 3.203786 | 0.314844        |
| 1   | 3.857143 | 0.968201        | 12  | 2.338574 | -0.55037        |
| 2   | 3.098361 | 0.209419        | 13  | 3.179354 | 0.290412        |
| 3   | 2.08481  | -0.80413        | 14  | 3.20089  | 0.311948        |
| 4   | 3.619549 | 0.730607        | 15  | 2.415727 | -0.47321        |
| 5   | 3.159346 | 0.270405        | 16  | 3.091907 | 0.202966        |
| 6   | 2.17122  | -0.71772        | 17  | 3.188021 | 0.29908         |
| 7   | 3.435274 | 0.546333        | 18  | 2.48686  | -0.40208        |
| 8   | 3.191967 | 0.303025        | 19  | 3.024139 | 0.135197        |
| 9   | 2.256529 | -0.63241        | 20  | 3.168788 | 0.279846        |
| 10  | 3.291573 | 0.402632        |     |          |                 |



**Grafik 1:**  $x_{-1} = 3, x_0 = 2, a = 27$ .

**Tanım 2.12.**  $h:(0,+\infty)^2 \rightarrow (0,+\infty)$  fonksiyonu  $\forall \lambda > 0$  reel sayısı için

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m h(x, y)$$

şartını sağlıyorsa,  $h$  fonksiyonuna  $m$ . dereceden homojendir denir. Burada  $m \in \mathbb{R}$  dir (Border, 2011).

**Örnek 2.7.**  $h_1(x, y) = 1 + \frac{x}{y}$ ,  $h_2(x, y) = \frac{x^3 y}{3x - y}$ ,  $h_3(x, y) = 5 + xy$  fonksiyonlarının

homojen olup olmadıklarını araştıralım.  $x$  ve  $y$  yerine sırasıyla  $\lambda x$  ve  $\lambda y$  konulur ki bu durumda

$$h_1(\lambda x, \lambda y) = 1 + \frac{\lambda x}{\lambda y} = 1 + \frac{x}{y} = \lambda^0 \left( 1 + \frac{x}{y} \right) = \lambda^0 h_1(x, y)$$

olduğundan  $h_1$  fonksiyonu sıfırıncı dereceden homojendir. Benzer şekilde

$$h_2(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^3 \lambda y}{3\lambda x - \lambda y} = \lambda^3 \frac{x^3 y}{3x - y} = \lambda^3 h_2(x, y)$$

olduğundan  $h_2$  fonksiyonu üçüncü dereceden homojendir. Son olarak

$$h_3(\lambda x, \lambda y) = 5 + \lambda x \lambda y \neq \lambda^m h_3(x, y)$$

olduğundan  $h_3$  fonksiyonu homojen değildir.

**Teorem 2.3.** Birinci mertebeden sürekli türevlere sahip bir  $h:(0,+\infty)^2 \rightarrow (0,+\infty)$  fonksiyonu verilsin. Bu durumda

- 1)  $h$  fonksiyonu  $m$ . dereceden homojen olması için gerek ve yeter koşul

$$x \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = mh(x, y) \quad (2.13)$$

olmasıdır.

- 2) Eğer  $h$  fonksiyonu  $m$ . dereceden homojen ise bu durumda  $\frac{\partial h}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial h}{\partial y}$  kısmi türevleri  $(m-1)$ . dereceden homojendir (Border, 2011).

Teorem 2.3. genellikle Euler'in homojen fonksiyon teoremi olarak bilinir.

**Örnek 2.8.**  $f(x, y) = \frac{xy^2}{2x+3y}$  fonksiyonu verilsin.  $f$  fonksiyonunun ikinci dereceden homojen olduğu açıktır.  $x$  ve  $y$  ye göre kısmi türevlerin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3y^3}{(2x+3y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{4x^2y+3xy^2}{(2x+3y)^2}$$

olduğu kolayca görülür. Kısmi türevler (2.13) özdeşliğine uygulanırsa,

$$x \frac{3y^3}{(2x+3y)^2} + y \frac{4x^2y+3xy^2}{(2x+3y)^2} = 2 \frac{xy^2(2x+3y)}{(2x+3y)^2} = 2f(x, y)$$

olur Buradan  $f$  fonksiyonu 2. dereceden homojen fonksiyon olduğu görülür. Kısmi türevler de 1. dereceden homojen fonksiyonlardır. Gerçekten de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) = \frac{3(\lambda y)^3}{(2\lambda x+3\lambda y)^2} = \lambda \frac{3y^3}{(2x+3y)^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = \frac{4(\lambda x)^2 \lambda y + 3\lambda x(\lambda y)^2}{(2\lambda x+3\lambda y)^2} = \lambda \frac{4x^2y+3xy^2}{(2x+3y)^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

olduğu açıktır.

**Örnek 2.9.**  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  fonksiyonu verilsin.  $f$  fonksiyonunun sıfırıncı dereceden homojen olduğu açıktır.  $x$  ve  $y$  ye göre kısmi türevler

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}$$

olarak bulunur. Homojen fonksiyon tanımından

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) = -\frac{\lambda y}{(\lambda x)^2} = -\lambda^{-1} \frac{y}{x^2} = -\lambda^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda x} = \lambda^{-1} \frac{1}{x} = \lambda^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

olup buradan kısmi türevler, derecesi  $-1$  olan homojen fonksiyonlardır.

### 3. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, bazı fark denklemlerinin çözümlerinin periyodikliği, salınımlılığı, sınırlılığı ve global asimptotik kararlılığı ile ilgili literatürde yer alan bazı makaleler hakkında bilgiler verildi.

**Papanicolaou (1996),**

$$x_{k+1} = \alpha x_k + f(x_{k-n}),$$

lineer fark denklemlerinin asimptotik kararlılığı üzerine çalışmıştır. Burada  $x_k$  bir hayvan popülasyonunun  $k$ . periyottaki (dönem, yıl vs.) hayvan sayısıdır.  $\alpha$  hayatta kalma katsayısını ve  $f(x_{k-n})$   $n$  dönemlik bir gecikmeyle meydana gelen üremeyi temsil eder.

**Papaschinopoulos ve Schinas (1998),**  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  için lineer olmayan

$$x_{n+1} = A + \frac{y_n}{x_{n-p}}, \quad y_{n+1} = A + \frac{x_n}{y_{n-q}}$$

denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığını, sınırlılığını ve pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını araştırdılar.

**Amleh ve ark. (1999),**  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar ve  $\alpha$  negatif olmayan bir reel sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini ve global kararlılığını incelediler.

**Abu-Saris ve Devault (2003)**,  $y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_0, A \in (0, \infty)$  ve  $k \in \{2, 3, \dots\}$  olmak üzere,

$$y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

denkleminin global asimptotik kararlılığını araştırdılar.

**Camouzis ve Devault (2003)**,  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar ve  $p \leq -1$  olmak üzere,

$$x_{n+1} = p + \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

denkleminin sıfıra yakınsayan bir çözümünün var olduğunu gösterdiler ve yasaklı kümesini araştırdılar

**Kalabusić ve Kulenović (2003)**, pozitif başlangıç koşulları ve pozitif parametreler için,

$$x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-1} + \delta x_{n-2}}{C x_{n-1} + D x_{n-2}}$$

denkleminin çözümlerinin yarı döngülerini, periyodikliğini ve tek pozitif denge noktasının global kararlılığını incelediler.

**Camouzis ve Papaschinopoulos (2004)**,  $-m \leq i \leq 0$ ,  $(m \in \mathbb{Z}^+)$ ,  $x_i, y_i \in \mathbb{R}^+$  başlangıç koşulları için,

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-m}}, \quad y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}}$$

sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve global davranışını araştırdılar.

**Kulenović ve ark. (2004)**,  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar ve  $p_n$  iki periyotlu pozitif terimli bir dizi olmak üzere,

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini, sınırlılığını ve global kararlılığını araştırdılar.

**Papaschinopoulos ve Schinas (2005)**,  $k$  tek tam sayı ve  $p_n$   $k+1$  periyotlu, pozitif terimli bir dizi olmak üzere,

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-k}}{x_n}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini, sınırlılığını ve çekimliliğini araştırdılar. Dahası, bu denklemin  $k=3$  için global asimptotik kararlılık sonuçlarını elde ettiler.

**Saleh ve Aloqeili (2005)**,  $y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_0, A \in \mathbb{R}^+$  ve  $k \geq 2$  tam sayısı için,

$$y_{n+1} = A + \frac{y_{n-k}}{y_n}$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini, yarı döngülerini ve  $\bar{y} = A+1$  denge noktasının global asimptotik kararlılığını araştırdılar.

**Hamza (2006)**,  $\alpha, x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}^-$  olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, salınım karakterini ve global kararlılığını inceledi.

**Berenhaut ve Stević (2006),**

$$x_n = A + \left( \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} \right)^p, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelediler. Burada  $A, p \in (0, \infty)$ ,  $p \neq 1$  ve başlangıç koşulları  $x_{-2}, x_{-1} \in (0, \infty)$ ,  $p \leq \min \left\{ 1, \frac{(A+1)}{2} \right\}$  olduğunda tüm çözümlerin  $\bar{x} = A+1$  tek denge noktasına yakınsadığını,  $\frac{(A+1)}{2} < p < 1$  olduğunda tüm çözümlerin iki periyotlu çözümlere yakınsadığını ve  $p > 1$  olduğunda sınırsız çözümlerin var olduğunu gösterdiler.

**Sun ve Xi (2007),**  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin tek pozitif denge noktasına yakınsadığını gösterdiler.

**Stević (2007),**  $A, p \in (0, \infty)$  olmak üzere,

$$x_{n+1} = A + \left( \frac{x_n}{x_{n-1}} \right)^p$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini, sınırlılığını ve global çekiciliğini inceledi.

**Elabbasy ve ark. (2008),**  $l, k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha, \beta, A, B, x_{-p}, x_{-p+1}, \dots, x_0 \in \mathbb{R}^+$ ,

$p = \max\{l, k\}$  olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-l} + \beta x_{n-k}}{Ax_{n-l} + Bx_{n-k}}$$

yüksek mertebeli fark denkleminin global yakınsaklığını, çözümlerinin sınırlılığını ve periyodikliğini araştırdılar.

**Elabbasy ve Elsayed (2008)**,  $p \in \mathbb{N}$  ve  $a, b, c, d, x_{-p}, x_{-p+1}, \dots, x_0 \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^p + b \prod_{r=1}^p x_{n-r}}{cx_n^p + d \prod_{r=1}^p x_{n-r}}$$

yüksek mertebeli fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını ve global yakınsaklığını araştırdılar.

**Elsayed (2015)**,  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  parametreleri pozitif reel sayılar ve  $x_{-1}, x_0$  başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha + \beta \frac{x_n}{x_{n-1}} + \gamma \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

fark denkleminin iki ve üç periyotlu çözümlerini elde etmek için yeni bir yöntem geliştirdi. Ayrıca bu denklemin global yakınsamasını ve sınırlılığını araştırdı.

**Moazz (2017)**, yukarıda verilen rasyonel fark denkleminin iki ve üç periyotlu çözümleri için Elsayed'in (2015) sonuçlarını tartışmıştır. Ayrıca, bazı fark denklemlerinin periyodik çözümlerinin varlığını eski ve yeni yöntemi kullanarak karşılaştırmalı olarak inceledi. Elde ettiği sonuçlar Elsayed'in sonuçlarını iyileştirmektedir.

**Moazz (2018)**,  $f$  sürekli, reel ve derecesi  $\alpha \in \mathbb{R}$  olan homojen bir fonksiyon olmak üzere,

$$x_{n+1} = f(x_{n-l}, x_{n-k})$$

fark denklemini ele aldı. Burada  $k, l \in \mathbb{Z}^+$  ve başlangıç koşulları reel sayılardır.

**Abdelrahman ve ark. (2018)**,  $k, l$  negatif olmayan tam sayılar,  $a, b$  negatif olmayan reel sayılar,  $x_{-s}, x_{-s+1}, \dots, x_0$ , ( $s = \max\{l, k\}$ ), başlangıç koşulları pozitif reel sayılar ve  $f: (0, \infty)^2 \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu sıfır dereceli homojen ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$x_{n+1} = ax_{n-l} + bx_{n-k} + f(x_{n-l}, x_{n-k})$$

fark denklemi sınıfının çözümlerinin kararlılığını, asimptotik davranışını, sınırlılığını ve periyodikliğini incelediler.

**Moazz ve ark. (2019)**,  $f$  sürekli, reel ve sıfıncı dereceden homojen bir fonksiyon olmak üzere,

$$J_{n+1} = f(J_n, J_{n-1})$$

genel fark denklemini çalıştılar. Bu çalışmada denklemin tek pozitif denge noktasının kararlılığını, çözümlerinin yarı döngülerini, iki ve üç periyotlu çözümleri için  $f$  fonksiyonu üzerine gerek ve yeter koşulları belirlediler.

**Boulouh ve ark. (2021)**,  $f_1, f_2, g_1$  ve  $g_2$  reel fonksiyonları sürekli ve sıfıncı dereceden homojen olmak üzere,

$$x_{n+1} = f_1(x_n, x_{n-1}) + f_2(y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = g_1(x_n, x_{n-1}) + g_2(y_n, y_{n-1})$$

sistemini ele aldılar. (Moaaz ve ark. 2019) ile (Boulouh ve ark. 2021) çalışmaları paralelinde daha genel sonuçlar elde ettiler.

**Moaaz ve ark. (2021)**, başlangıç koşulları reel sayılar ve  $a, b_i$  reel parametreler olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + \sum_{i=0}^k (-1)^{\frac{1}{2}(1-\delta)i} b_i \frac{x_{n-i}}{x_{n-(i+1)}}, \quad (\delta=1 \text{ veya } \delta=-1),$$

fark denklemini çalıştılar. Böylece (Moaaz 2017) tarafından elde edilen sonuçları genişlettiler.

**Touafek (2021)**,  $f$  ve  $g$  reel fonksiyonları sürekli ve sıfırıncı dereceden homojen olmak üzere,

$$x_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1})$$

sistemini ele aldı ve (Moaaz ve ark. 2019) sonuçlarını genelleştirdi.

**Touafek ve ark. (2021)**,  $f, g$  ve  $h$  reel fonksiyonları sürekli ve sıfırıncı dereceden homojen olmak üzere,

$$x_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = g(z_n, z_{n-1}), \quad z_{n+1} = h(x_n, x_{n-1})$$

üç boyutlu fark denklem sistemini ele aldılar. Bu çalışma ile Moaaz ve arkadaşlarının (2019) çalışmalarını üç boyuta genişleterek daha genel sonuçlar elde ettiler.

#### 4. HOMOJEN FONKSİYONLA TANIMLANAN BİR FARK DENKLEM SINIFI

$f$  sürekli, reel ve sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyon olmak üzere,

$$J_{n+1} = f(J_n, J_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.1)$$

genel fark denkleminin çözümlerinin nitel davranışını ele alır. Bu bölüm (Moaaz ve ark., 2019) tarafından yapılan “Some qualitative behavior of solutions of general class of difference equations” başlıklı makalenin incelenmesidir. Dolayısıyla bu bölümdeki bütün sonuçlar Moaaz ve ark. (2019) tarafından elde edilmiştir.

##### 4.1. Lokal Kararlılık ve Yarı Döngü Analizi

Burada (4.1) denkleminin asimptotik kararlılığı incelenecektir.  $f$  fonksiyonunun sıfırıncı dereceden homojenliği ile (4.1) denkleminin denge noktası

$$J^* = f(1,1)$$

şeklindedir. (4.1) denkleminin  $J^*$  civarındaki lineerleştirilmiş denklemi

$$\omega_{n+1} - f_u(J^*, J^*)\omega_n - f_v(J^*, J^*)\omega_{n-1} = 0 \quad (4.2)$$

şeklindedir.  $f$  fonksiyonu sıfırıncı dereceden homojen olduğundan, Teorem 2.3 ün birinci şıkkı gereğince

$$uf_u + vf_v = 0$$

olup bundan

$$f_u(J^*, J^*) = -f_v(J^*, J^*)$$

elde edilir. Teorem 2.3 ün ikinci şıkkından  $f_u$  ve  $f_v$  kısmi türevleri, derecesi  $-1$  olan homojen fonksiyonlardır. Bu durumda (4.2) denklemi

$$\omega_{n+1} - \mu\omega_n + \mu\omega_{n-1} = 0 \quad (4.3)$$

halini alır. Burada

$$\mu = \frac{f_u(1,1)}{f(1,1)}$$

şeklindedir.

Sonraki teoremler, (4.1) in asimptotik kararlılığını inceler.

**Teorem 4.1.** (4.1) denkleminin denge noktası  $J^*$  olsun. Bu durumda (4.1) denkleminin lokal asimptotik kararlılığı için aşağıdakiler doğrudur:

1.  $\mu \in (0,1)$  ise  $J^*$  lokal asimptotik kararlıdır ve batış noktasıdır.
2.  $\mu > 1$  ise  $J^*$  kararsızdır ve repellerdir.
3.  $\mu \in (-1/2, 0)$  ise  $J^*$  asimptotik olarak kararlıdır ve batış noktasıdır.
4.  $\mu < -1/2$  ise  $J^*$  kararsız bir eyer noktasıdır.
5.  $\mu = 1$  ise  $J^*$  hiperbolik olmayan bir noktadır.

**İspat.** (4.3) ün karakteristik denklemi

$$\gamma^2 - \mu\gamma + \mu = 0 \quad (4.4)$$

şeklindedir.  $\mu > 0$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 2.2 den  $J^*$  in lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşulun  $\mu < 1$  olduğu görülür. Aksi halde, yani eğer  $\mu > 1$  ise o zaman  $J^*$  kararsızdır ve

$$|\mu| > 1 \text{ ve } |\mu| < |1 + \mu|,$$

eşitsizlikleri sağlanır. Öte yandan,  $\mu < 0$  olduğunu kabul edelim.  $\mu = -\delta < 0$  olsun. Şu halde (4.4) karakteristik denkleminin kökleri

$$\gamma_{\pm} = \frac{\delta}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\delta}} \right)$$

şeklinde bulunur. Aşağıdaki fonksiyonları dikkate alalım.

$$g(s) = \frac{s}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4}{s}} \right), \quad (4.5)$$

$$h(s) = \frac{s}{2} \left( -1 - \sqrt{1 + \frac{4}{s}} \right). \quad (4.6)$$

Şimdi  $\delta > \frac{1}{2}$  olsun.  $h(s)$  fonksiyonunun tanımından,  $s > 0$  için  $h'(s) < 0$  olur.  $h(s)$

azalan ve  $h(1/2) = -1$  olduğundan  $s > 1/2$  için  $h(s) < -1$  ve böylece  $|\gamma_-| > 1$  olur.

Dolayısıyla,  $\delta > \frac{1}{2} \left( \Leftrightarrow \mu < -\frac{1}{2} \right)$  ise  $J^*$  kararsızdır. Ayrıca,  $\mu < -\frac{1}{2}$  için

$$\mu^2 - 4\mu > \frac{1}{4} + 4 \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{4} > 0$$

ve

$$|\mu| > |1 + \mu|$$

olur. Böylece Teorem 2.2-(e) den  $J^*$  kararsız bir eyer noktasıdır.  $0 < \delta < 1/2$  olsun. (4.5) den

$$g'(s) = \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{s+2}{\sqrt{s^2+4s}} \right)$$

elde edilir.  $(s+2)^2 > (s^2+4s)$  olduğundan  $\frac{s+2}{\sqrt{s^2+4s}} > 1$  olur. Dolayısıyla,  $g'(s) > 0$  dır. Böylece  $s \in (0, 1/2)$  için  $0 < g(s) < 1/2$  ve  $|\gamma_+| < 1$  olur. Ek olarak (4.6) dan görülür ki  $s \in (0, 1/2)$  için  $h(s)$  azalan ve  $-1 < h(s) < 0$  ve  $|\gamma_-| < 1$  olur. Böylece,  $|\gamma_{\pm}| < 1$  olduğu görülür. Dolayısıyla,  $0 < \delta < 1/2$  ise  $J^*$  lokal asimptotik kararlıdır ve batış noktasıdır.

Son olarak, eğer  $\mu = -1/2$  ise  $|\mu| = |1 + \mu|$  sağlanır. Eğer  $\mu = 1$  ise  $-\mu = -1$  ve  $|\mu| < 2$  sağlanır. Böylece, Teorem 2.2-(f) den  $J^*$  hiperbolik olmayan bir noktadır. Bu da ispatı tamamlar.

**Uyarı 4.1.** Teorem 4.1 den görülür ki (4.1) denkleminin  $J^*$  denge noktası

$$0 < \mu < 1 \text{ veya } -\frac{1}{2} < \mu < 0$$

olduğunda lokal asimptotik kararlı ve

$$\mu > 1 \text{ veya } \mu < -\frac{1}{2}$$

ise kararsızdır.

Sonraki teorem (4.1) denkleminin yarı döngüleri hakkında sonuçları verir.

**Teorem 4.2.**  $f \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  ve (4.1) denkleminin bir pozitif denge noktası  $J^*$  olsun. (4.1) denkleminin çözümlerinin yarı döngüleri için aşağıdakiler doğrudur:

- 1) Muhtemel ilk yarı döngü hariç, (4.1) denkleminin her çözümü bir uzunluktaki yarı döngülere sahiptir.

- 2) Muhtemel ilk yarı döngü hariç, (4.1) denkleminin her salınımlı çözümü en az iki uzunlukta yarı döngülere sahiptir.

**İspat.**  $f : (0, \infty)^2 \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu sıfır dereceli homojen fonksiyon olduğundan, Euler'in homojen fonksiyon teoreminden,

$$\frac{f_u}{f_v} = -\frac{v}{u} < 0$$

bulunur. Böylece

$$(i) \ f_u < 0 \text{ ve } f_v > 0 \quad (4.7)$$

durumu veya

$$(ii) \ f_u > 0 \text{ ve } f_v < 0. \quad (4.8)$$

durumu elde edilir.

(i) durumu için, eğer  $\{J_n\}_{n=-1}^{\infty}$  (4.1) denkleminin en az iki yarı döngülü bir çözümü ise o zaman  $J_{m-1} < J^* \leq J_m$  veya  $J_{m-1} \geq J^* > J_m$  olacak şekilde bir  $m$  pozitif tam sayısı vardır.  $J_{m-1} < J^* \leq J_m$  olsun. Bu durumda (4.7) den

$$J_{m+1} = f(J_m, J_{m-1}) < f(J^*, J_{m-1}) < f(J^*, J^*) = f(1, 1) = J^*$$

ve

$$J_{m+2} = f(J_{m+1}, J_m) > f(J^*, J^*) = J^*$$

elde edilir. Böylece, tümevarımla tüm  $s = 0, 1, 2, \dots$  için,

$$J_{m+2s-1} < J^* < J_{m+2s}$$

olur.  $J_{m-1} \geq J^* > J_m$  eşitsizliğinin sağlandığı durumda ispat benzerdir.  $\{J_n\}_{n=-1}^{\infty}$  bir uzunluğunda yarı döngülere sahiptir.

(ii) durumu için, eğer  $\{J_n\}_{n=-1}^{\infty}$  (4.1) denkleminin  $J_{m-1} < J^* \leq J_m$  şartını sağlayan salınımlı bir çözümü ise o zaman

$$J_{m+1} = f(J_m, J_{m-1}) > f(J^*, J^*) = J^*$$

elde edilir. Böylece  $J_{m+1}$  terimi de pozitif yarı döngüye aittir ve dolayısıyla,  $\{J_n\}_{n=-1}^{\infty}$  en az iki uzunluklu yarı döngülere sahiptir.  $J_{m-1} \geq J^* > J_m$  şartını sağlayan durum benzer şekilde ispatlanabilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.3.**  $f \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ ,  $J^*$  (4.1) denkleminin bir pozitif denge noktası ve  $f_u > 0$ ,  $f_v < 0$  olsun. Eğer  $\forall v \in (J^*, u)$  için

$$f(u, v) < u \tag{4.9}$$

ise bu durumda, (4.1) denkleminin her salınımlı çözümü, muhtemel bir uzunluğuna sahip olabilen ilk yarı döngü hariç, iki veya üç uzunluğunda yarı döngülere sahiptir. Halbuki eğer  $\forall v \in (J^*, u)$  için

$$f(u, v) > u \tag{4.10}$$

ise bu durumda (4.1) denkleminin her çözümü  $J_0 > J_{-1} > J^*$  olacak şekilde artandır.

**İspat.** (4.1) denkleminin salınımlı bir çözümü  $\{J_n\}_{n=-1}^{\infty}$  olsun. Teorem 4.2 den  $\{J_n\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümünün en az iki uzunluklu yarı döngülere sahiptir. O halde öyle bir  $m$  pozitif tam sayısı vardır ki, ya

$$J_{m-1} < J^* < J_{m+1} < J_m \quad (4.11)$$

ya da

$$J_{m-1} < J^* < J_m < J_{m+1} \quad (4.12)$$

olur. (4.9) sağlansın. Eğer (4.11) sağlanırsa, o zaman  $\{J_n\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümünün iki uzunluklu yarı döngülere sahip olduğunu gösteren

$$J_{m+2} = f(J_{m+1}, J_m) < f(J_m, J_m) = f(1, 1) = J^*$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan, eğer (4.12) sağlanırsa

$$J_{m+2} = f(J_{m+1}, J_m) > f(J_m, J_m) = f(1, 1) = J^*$$

ve (4.9) dan

$$J_{m+2} = f(J_{m+1}, J_m) < J_{m+1}$$

bulunur. O zaman  $\{J_n\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümünün üç uzunluklu yarı döngülere sahip olduğunu gösteren

$$J_{m+3} = f(J_{m+2}, J_{m+1}) < f(J_{m+1}, J_{m+1}) = f(1, 1) = J^*$$

sonucu gelir. Şimdi (4.10) sağlansın. Bu durumda,

$$J_1 = f(J_0, J_{-1}) > J_0$$

ve

$$J_2 = f(J_1, J_0) > J_1$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

#### 4.2. Periyodik Çözümlerin Varlığı

Bu kısımda, (4.1) denkleminin her pozitif çözümünün iki ya da üç periyotlu olması için  $f$  fonksiyonu üzerine gerek ve yeter koşulları elde edilir.

**Teorem 4.4.** (4.1) denklemi

$$J_n = \begin{cases} \rho, & n \text{ tek ise} \\ \sigma, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olacak şekilde iki esas periyotlu bir  $\{J_n\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümüne sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$f(1, \tau) = \tau f(\tau, 1) \quad (4.13)$$

olmasıdır. Burada  $\tau = \rho/\sigma$  dır.

**İspat.** (4.1) denkleminin

$$..., \rho, \sigma, \rho, \sigma, ...$$

olacak şekilde iki esas periyotlu bir çözüme sahip olduğunu kabul edelim. (4.1) denkleminde

$$\rho = f(\sigma, \rho) = f\left(1, \frac{\rho}{\sigma}\right)$$

ve

$$\sigma = f(\rho, \sigma) = f\left(\frac{\rho}{\sigma}, 1\right)$$

elde edilir. Böylece,  $\tau = \rho/\sigma$  olmak üzere

$$0 = \rho - \tau\sigma = f(1, \tau) - \tau f(\tau, 1)$$

yazılabilir. (4.13) eşitliğinin sağlandığını varsayarsak, tüm  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  için

$$J_{-1} = f(1, \tau) \text{ ve } J_0 = f(\tau, 1)$$

seçeriz. Bu durumda, görülür ki

$$J_1 = f(J_0, J_{-1}) = f(f(\tau, 1), f(1, \tau))$$

olur. Son ifade (4.13) ile birlikte

$$J_1 = f(f(\tau, 1), \tau f(1, \tau)) = f(1, \tau)$$

olur. Benzer şekilde,  $J_2 = f(\tau, 1)$  olduğu da gösterilebilir. Böylece, tümevarım ile istenilen sonuç elde edilebilir. Yani,  $\forall n \geq 0$  için

$$J_{2n-1} = f(1, \tau) \text{ ve } J_{2n} = f(\tau, 1)$$

olur. Sonuç olarak, (4.1) denklemini iki esas periyotlu bir çözüme sahiptir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 4.5.** (4.1) denklemi

$$J_n = \begin{cases} \alpha, & n = 3r - 1 \text{ ise} \\ \beta, & n = 3r \text{ ise} \\ \gamma, & n = 3r + 1 \text{ ise} \end{cases}, \quad r = 0, 1, \dots$$

olacak şekilde üç asal periyotlu çözümlere sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$f(1, s) = tf(s, t), \quad f(t, 1) = sf(s, t) \quad (4.14)$$

olmasıdır. Burada  $t = \beta/\alpha$  ve  $s = \gamma/\alpha$  dır.

**İspat.** (4.1) denkleminin

$$..., \alpha, \beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma, ...$$

üç esas periyotlu bir çözümü olduğunu varsayalım. (4.1) denkleminde

$$\gamma = f(\beta, \alpha), \quad \alpha = f(\gamma, \beta), \quad \beta = f(\alpha, \gamma)$$

yazılabilir ve bunlardan da

$$\begin{aligned} \gamma &= f\left(\frac{\beta}{\alpha}, 1\right) = f(t, 1); \\ \alpha &= f\left(1, \frac{\beta}{\gamma}\right) = f\left(1, \frac{t}{s}\right) = f(s, t); \\ \beta &= f\left(1, \frac{\gamma}{\alpha}\right) = f(1, s). \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliklerden

$$t = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f(1, s)}{f(s, t)} \quad \text{ve} \quad s = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{f(t, 1)}{f(s, t)},$$

ifadelerini ve bunlardan da

$$f(1, s) = tf(s, t), \quad f(t, 1) = sf(s, t) \quad (4.15)$$

bulunur. Eğer (4.15) sağlanırsa,  $\forall t, s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  için

$$J_{-1} = f(s, t) \text{ ve } J_0 = f(1, s)$$

dir. Böylece, görülür ki

$$J_1 = f(J_0, J_{-1}) = f(f(1, s), f(s, t)) = f(tf(s, t), f(s, t)) = f(t, 1)$$

olur. Benzer şekilde,  $J_2 = f(s, t)$  ve  $J_3 = f(1, s)$  olduğu gösterilebilir. Bundan sonra tümevarımla  $\forall n \geq 0$  için

$$J_{3n-1} = f(s, t), \quad J_{3n} = f(1, s) \text{ ve } J_{3n+1} = f(t, 1)$$

olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak, (4.1) denkleminin üç esas periyotlu bir çözümünün var olduğu gösterilmiş olur ki bu da ispatı tamamlar.

## 5. BAZI UYGULAMALAR

Bu bölümde; önceki bölümde elde edilen sonuçlar somut fark denklemleriyle açıklanacak ve bu denklemlerin çözümlerinin bazı kısımları grafiklerle gösterilecektir. Buradaki örnekler ve sonuçlar Moaaz ve ark. (2019) tarafından verilmiştir.

**Örnek 5.1.**  $a$  bir reel sayı olmak üzere,

$$J_{n+1} = a + \frac{J_{n-1}}{J_n} \quad (5.1)$$

fark denklemini ele alalım. Burada

$$f(u, v) = a + \frac{v}{u}$$

olup (5.1) denkleminin denge noktası  $J^* = f(1, 1) = a + 1$  dir. Ayrıca,

$$\mu = \frac{f_u(1, 1)}{f(1, 1)} = \frac{-1}{a + 1}$$

olur. Teorem 4.1 i uygulayalım. Eğer  $\mu > 0$  ise ( $a < -1$  olduğunda) o zaman  $J^*$  denge noktasının lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul  $a < -2$  olmasıdır. Ek olarak  $\mu < 0$  ( $a > -1$  olduğunda) olsun. Bu durumda,  $a > 1$  ise  $J^*$  lokal asimptotik kararlı ve  $-1 < a < 1$  ise kararsızdır. Böylece (5.1) denkleminin tek pozitif denge noktasının  $a \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$  olduğunda lokal asimptotik kararlı ve  $a \in (-2, 1)$  olduğunda kararsız olduğu söylenebilir (Moaaz ve ark. 2019).

**Uyarı 5.1.** (5.1) denklemini  $a \geq 0$  için Amleh ve ark. (1999) tarafından ve  $a < 0$  için Hamza (2006) tarafından çalışıldı. Yukarıdaki sonuç bu makalelerin sonuçlarıyla uyumludur (Moaaz ve ark. 2019).

**Örnek 5.2.**  $\alpha, \beta, \gamma$  pozitif reel sayılar olmak üzere

$$J_{n+1} = \alpha + \beta \frac{J_n}{J_{n-1}} + \gamma \frac{J_{n-1}}{J_n} \quad (5.2)$$

fark denklemini ele alalım. Burada

$$f(u, v) = \alpha + \beta \frac{u}{v} + \gamma \frac{v}{u}$$

olup (5.2) denkleminin denge noktası  $J^* = f(1, 1) = \alpha + \beta + \gamma$  dir. Ayrıca

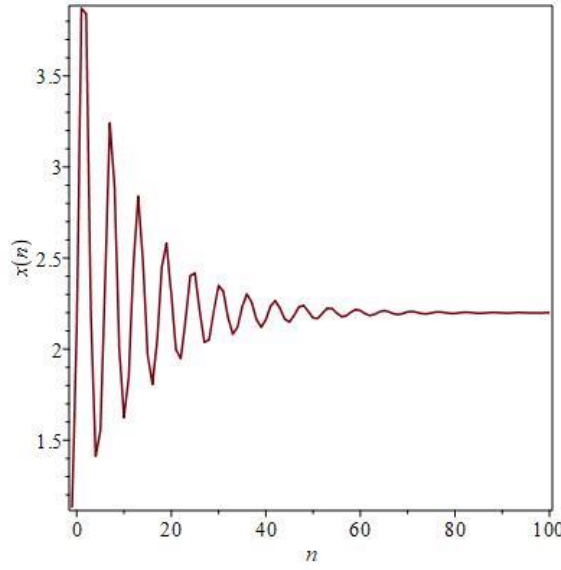
$$\mu = \frac{f_u(1, 1)}{f(1, 1)} = \frac{\beta - \gamma}{\alpha + \beta + \gamma},$$

olur. Teorem 4.1 i uygulayalım. Bu durumda (5.2) denkleminin  $J^*$  denge noktasının  $\beta > \gamma$  veya  $\beta < \gamma < \alpha + 3\beta$  durumunda lokal asimptotik kararlı ve  $\gamma > \alpha + 3\beta$  olduğunda kararsız olduğu görülür (Moaaz ve ark. 2019).

**Uyarı 5.2.** (5.2) denklemi Elsayed (2015) tarafından önerildi ve incelendi. Elsayed, çalışmasında (5.2) denkleminin tek pozitif denge noktasının

$$2|\beta - \alpha| < \alpha + \beta + \gamma \quad (5.3)$$

durumunda lokal asimptotik kararlı olduğunu gösterdi. Örnek 5.2 deki sonuçlarda  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 2$  ve  $\gamma = 0.1$  seçilirse denklem (5.2) denkleminin  $J^*$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (Bkz. Grafik 2). Ancak  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  parametrelerinin yukarıda verilen değerleri (5.3) koşulunu sağlamamaktadır. Bu nedenle, (5.2) denklemi üzerine burada elde edilen sonuçlar Elsayed'in sonuçlarını genişletmekte ve iyileştirmektedir (Moaaz ve ark. 2019).



**Grafik 2:** (5.2) denkleminin kararlı bir çözümü

**Uyarı 5.3.** Teorem 4.1 i kullanarak, Berenhaut (2006), Elabbasy ve ark. (2008), Elsayed (2015), Elsayed (2016) dahil olmak üzere daha önce çalışılmış birçok denklemin lokal asimptotik kararlılığı için yeni gerek ve yeter koşullar verilebilir (Moaaz ve ark. 2019).

**Sonuç 5.1.**  $a$ ,  $b$  ve  $\alpha$  reel sayılar olmak üzere,

$$J_n = a + b \left( \frac{J_n}{J_{n-1}} \right)^\alpha, \quad (5.4)$$

fark denklemini ele alalım. Burada  $a$ ,  $b$  ve  $\alpha$  pozitif reel sayılar ise denklemin iki esas periyotlu çözümü yoktur. Ek olarak (5.4) denklemini iki esas periyotlu çözümlere sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul

- i.  $a/b < -(2\alpha + 1)$  ,  $\alpha > 0$  ve  $J_{-1}J_0 > 0$ ;
- ii.  $a/b > 1$  ,  $\alpha$  ve  $J_{-1}J_0 < 0$ ;
- iii.  $a/b < -1$  ,  $\alpha$  ve  $J_{-1}J_0 < 0$ ;

durumlarından biri sağlanır (Moaaz ve ark. 2019).

**İspat.** Teorem 4.4 ten (5.4) denklemi, ...,  $\rho, \sigma, \rho, \sigma, \dots$  olacak şekilde iki esas periyotlu çözümlere sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{a}{b} = \left( \frac{\tau^{2\alpha+1} - 1}{\tau^\alpha (1 - \tau)} \right) \quad (5.5)$$

koşulu sağlanır.

Tüm  $\tau \in \mathbb{R}^+$  değerleri için  $\frac{\tau^{2\alpha+1} - 1}{\tau^\alpha (1 - \tau)} < 0$  eşitsizliği mevcuttur. O zaman  $a, b$  ve  $\alpha$  pozitif reel sayılar ise denklemin iki esas periyotlu çözümü yoktur. Şimdi

$$H(\tau) = \frac{\tau^{2\alpha+1} - 1}{\tau^\alpha (1 - \tau)}$$

fonksiyonu tanımlansın. Böylece, görülür ki  $\tau \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  ve  $\alpha > 0$  için,

$$H(\tau) < -(2\alpha + 1) \quad (5.6)$$

olur. Böylece,  $a/b < -(2\alpha + 1)$  elde edilir. Öte yandan, eğer  $\tau \in \mathbb{R}^-$  ise bu durumda  $\alpha$  tek tam sayı ise  $H(\tau) < -1$  ve  $\alpha$  çift tam sayı ise  $H(\tau) > 1$  olur. Böylece ispat tamamlanır (Moaaz ve ark. 2019).

**Örnek 5.3.** (5.4) denkleminde

$$a = -7/2, b = 1, \alpha = 1, J_{-1} = -3 \text{ ve } J_0 = -3/2 \text{ (Bkz. Grafik 3);}$$

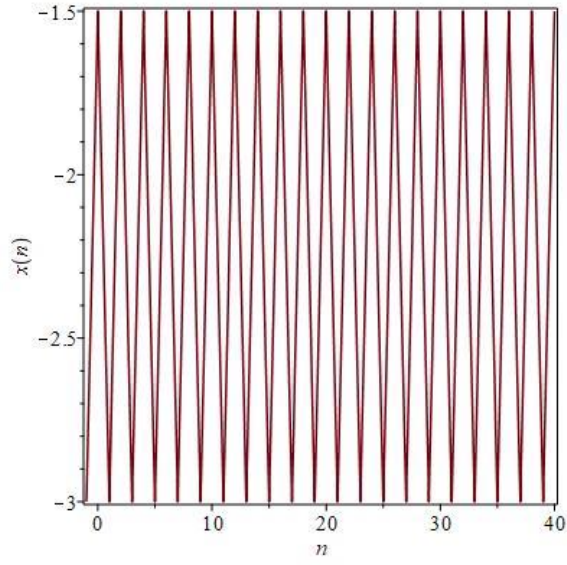
veya

$$a = 43, b = 8, \alpha = 3, J_{-1} = -21 \text{ ve } J_0 = 42 \text{ (Bkz. Grafik 4),}$$

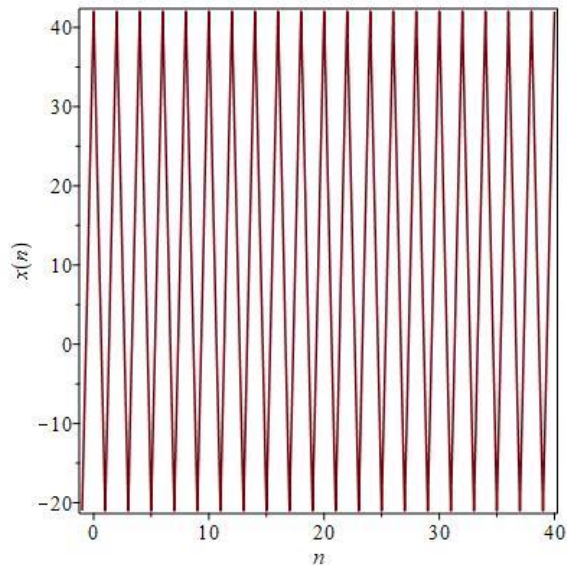
veya

$$a = 61, b = -9, \alpha = 2, J_{-1} = 60 \text{ ve } J_0 = -20 \text{ (Bkz. Grafik 5)}$$

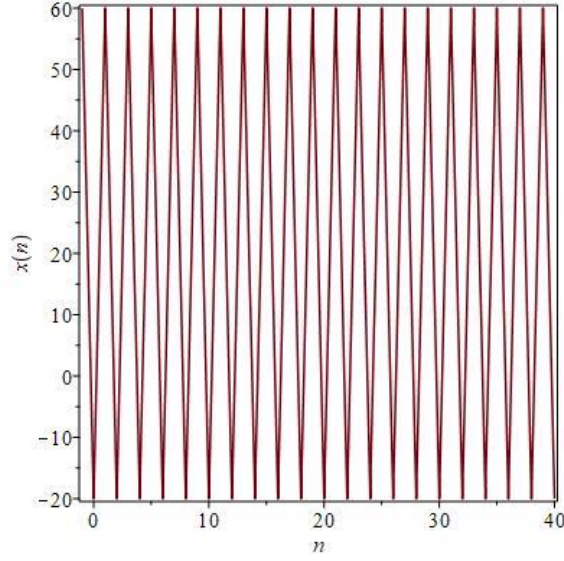
alınırsa o zaman (5.4) denklemi iki esas periyotlu çözümlere sahiptir (Moaaz ve ark. 2019).



**Grafik 3**



**Grafik 4**



Grafik 5

**Uyarı 5.4.** Stević (2007), makalesindeki Teorem 4.1 de  $b=1$  ve  $a, \alpha \in (0, \infty)$  olduğunda (5.4) denkleminin periyodikliğini inceledi ve denklemin iki esas periyotlu pozitif çözümlerinin olmadığını kanıtladı. Böylece, Sonuç 5.1 deki sonuçlar Stević'in (2007) sonuçlarını genişletir ve tamamlar niteliktedir (Moaaz ve ark. 2019).

**Sonuç 5.2.** (5.4) denklemi üç esas periyotlu çözümlere sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$t \left( \frac{s^{2\alpha} - t^{\alpha-1}}{s^{\alpha+1} - t^{2\alpha}} \right) = s^{\alpha} \left( \frac{1-t}{1-s} \right)$$

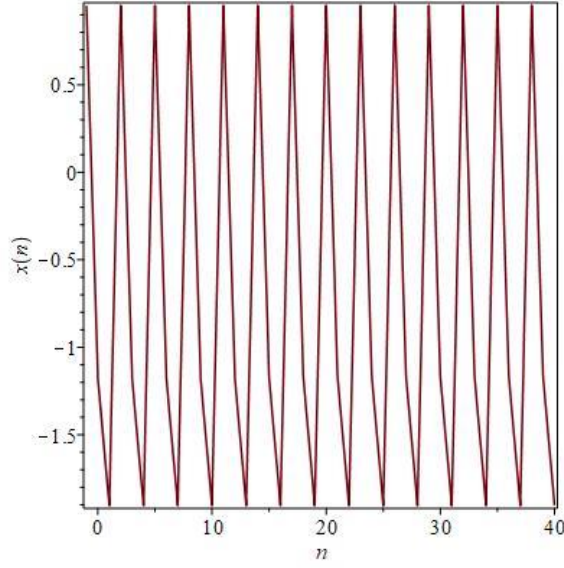
ve

$$a = b \left( \frac{s^{\alpha+1} - t^{2\alpha}}{t^{\alpha} (1-s)} \right),$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada  $t = J_0/J_{-1}$  ve  $s = J_1/J_{-1}$  dir (Moaaz ve ark. 2019).

**İspat.** Teorem 4.5 in ispatından kolayca gelir.

**Örnek 5.4.**  $a = -0,6722$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $J_{-1} = 0,9518$  ve  $J_0 = -1,1722$  alınırsa o zaman (5.4) denkleminin iki esas periyotlu çözümü vardır (Moaaz ve ark. 2019). (Bkz. Grafik6)



**Grafik 6**

**Uyarı 5.5.** Önceki bölümün sonuçları kullanılarak birçok fark denkleminin nitel davranışı incelenebilir. Örneğin

$$x_{n+1} = a + be^{-x_{n-1}/x_n},$$

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{ax_{n-1}}{bx_n + cx_{n-1}}}.$$

fark denklemleri gibi. Ek olarak

$$x_n = \frac{b}{J_{n+1}} - a$$

değişken değiştirmesi ile

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{a + x_{n-1}}$$

fark denklemi

$$J_{n+1} = \frac{bJ_n}{aJ_n + J_{n-1}}$$

denklemine indirgenir. Bu denklem (4.1) denkleminin özel bir durumudur (Moaaz ve ark. 2019).

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada;  $f$  sürekli, reel ve sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyon olmak üzere,

$$J_{n+1} = f(J_n, J_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin çözümlerinin nitel davranışı üzerine genel sonuçların verildiği Moaaz ve ark. (2019) tarafından yapılan “Some qualitative behavior of solutions of general class of difference equations” başlıklı makale incelendi.

Makalede çalışılan genel fark denklemi, bu tezin kaynaklarında ve kaynak araştırmasında görüldüğü gibi Abdelrahman ve ark. (2018); Touafek, (2021); Touafek ve ark., (2021); Boulouh ve ark., (2021) tarafından genelleştirilmiştir. Bu genelleştirmeler dikkate alınarak daha genel fark denklemleri ve fark denklem sistemleri tanımlanıp çalışılabilir. Bu sayede çok daha genel sonuçlar elde edilebilir.

## KAYNAKLAR

- Abdelrahman, M. A. E., Chatzarakis, G. E., Li, T. and Moaaz, O., 2018, On the difference equation  $x_{n+1} = ax_{n-1} + bx_{n-k} + f(x_{n-1}, x_{n-k})$ , *Advances in Difference Equations*, 2018, 431.
- Abu-Saris, R. M. and Devault, R., 2003, Global Stability of  $y_{n+1} = A + y_n/y_{n-k}$ , *Applied Mathematics Letters*, 16, 173–178.
- Amleh, A. M., Grove, E. A., Georgiou, D. A. and Ladas, G., 1999, On the recursive sequence  $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n$ , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 233, 790–798.
- Berenhaut, K. S. and Stević, S., 2006, The behaviour of the positive solutions of the difference equation  $x_{n+1} = A + (x_{n-1}/x_{n-k})^p$ , *Journal of Difference Equations and Applications*, 12, 909–918.
- Border, K. C., *Euler's Theorem for homogeneous functions* [online], <https://mathproblems123.files.wordpress.com/2011/02/eulerhomogeneity.pdf> [Ziyaret Tarihi: 21 Temmuz 2022].
- Boulouh, M., Touafek, N., and Tollu, D. T., 2021, On the behavior of the solutions of an abstract system of difference equations, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1-33.
- Camouzis, E. and De Vault, R., 2003, The forbidden set of  $x_{n+1} = p + x_{n-1}/x_n$ , *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(8), 739-750.
- Camouzis, E. and Papaschinopoulos, G., 2004, Global asymptotic behavior of positive solutions on the system of rational difference equations  $x_{n+1} = 1 + x_n/y_{n-m}$ ,  $y_{n+1} = 1 + y_n/x_{n-m}$ , *Applied Mathematics Letters*, 17(6), 733-737.
- Camouzis, E., and Ladas, G., 2007, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures. *Chapman and Hall/CRC*.
- Elabbasy, E. M., El-Metwally, H. and Elsayed, E. M., 2008, On the difference equation  $x_{n+1} = (\alpha x_{n-l} + \beta x_{n-k}) / (Ax_{n-l} + Bx_{n-k})$ , *Acta Mathematica Vietnamica*, 33, 85-94.
- Elabbasy, E. M. and Elsayed, E. M., 2008, On the global attractivity of difference equation of higher order, *Carpathian Journal of Mathematics*, 24 (2), 45-53.
- Elsayed, E. M., 2015, New Method to obtain Periodic Solutions of Period Two and Three of a Rational Difference Equation, *Nonlinear Dynamics*, 79, 241-250.
- Elsayed, E. M., 2016, Dynamics and behavior of a higher order rational difference equation, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9(4), 1463-1474.

- Hamza, A. E., 2006, On the recursive sequence  $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n$ , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 322, 668–674.
- Kalabusić, S. and Kulenović, M. R. S., 2003, On the recursive sequence  $x_{n+1} = (\gamma x_{n-1} + \delta x_{n-2}) / (Cx_{n-1} + Dx_{n-2})$ , *Journal of Difference Equations and Applications*, 9, 701–720.
- Kulenović, M. R. S. and Ladas, G., 2001, Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures, CRC Press: Boca Raton, FL, USA.
- Kulenović, M. R. S., Ladas, G. and Overdeep, C. B., 2004, On the dynamics of  $x_{n+1} = p_n + x_{n-1}/x_n$  with a period-two coefficient, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10(10), 905-914.
- Moazz, O., 2017, Comment on New method to obtain periodic solutions of period two and three of a rational difference equation [Nonlinear Dyn 79:241250], *Nonlinear Dynamics*, 88, 1043–1049.
- Moazz, O., 2018, Dynamics of difference equation  $x_{n+1} = f(x_{n-1}, x_{n-k})$ , *Advances in Difference Equations*, 447 (2018). <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1896-0>
- Moazz, O., Chalishajar, D. and Bazighifan, O., 2019, Some qualitative behavior of solutions of general class of difference equations, *Mathematics*, 7(7), 585.
- Moazz, O., Elabbasy, E. M., and Mahjoub, H., 2021, Asymptotic behavior of a new class of nonlinear rational difference equations, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 51(5), 1781-1792.
- Papanicolaou, V. G., 1996, On the asymptotic stability of a class of linear difference equations, *Mathematics Magazine*, 69, 34-43.
- Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., 1998, On a system of two nonlinear difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 219(2), 415-426.
- Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., 2005, On a  $(k+1)$ -th order difference equation with a coefficient of period  $k+1$ , *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(3), 215-225.
- Saleh, M. and Aloqeili, M., 2005, On the rational difference equation,  $y_{n+1} = A + y_{n-k}/y_n$ , *Applied Mathematics and Computation*, 171, 862-869.
- Soykan, Y., Göcen, M. and Gümüş, M., 2017, Lineer Fark Denklemleri, *Nobel Akademik Yayıncılık*, Ankara.
- Stević, S., 2007, On the recursive sequence  $x_{n+1} = A + (x_n/x_{n-1})^p$ , *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2007, 34517.

- Sun, T. and Xi, H., 2007, On convergence of the solutions of the difference equation,  $x_{n+1} = 1 + x_{n-1}/x_n$ , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 325(2), 1491-1494.
- Touafek, N., 2021, On a general system of difference equations defined by homogeneous functions, *Mathematica Slovaca*, 71(3), 697-720.
- Touafek, N., Tollu, D. T. and Akrou, Y., 2021, On a general homogeneous three-dimensional system of difference equations, *Electronic Research Archive*, 29(5), 2841.