



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BİRİNCİ MERTEBEDEN BULANIK FARK
DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Süleyman Akif ÇOLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim-2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Süleyman Akif ÇOLAK

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2022, 49 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; “Asymptotic behavior of two dimensional rational system of difference equations” başlıklı makale ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde; $A, B, C, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$ ve $s \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$t_{n+1} = \frac{At_n}{B + Ct_n^s}, n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık denklemi tanımlanmış ve bu denklemin çözümleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise; sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık fark denklemi, Çözümlerin varlığı ve tekliği, Sınırlılık, Yakınsama.

ABSTRACT

MS THESIS

A STUDY ON THE FIRST-ORDER FUZZY DIFFERENCE EQUATIONS

Süleyman Akif ÇOLAK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2022, 49 Pages

Jury

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Assist. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

This study consists of five sections.

In the first section; basic definitions and theorems are given.

In the second section; informations about some of the studies are given.

In the third section; the article entitled “Asymptotic behavior of two dimensional rational system of difference equations” is discussed.

In the fourth section; we define the fuzzy equation

$$t_{n+1} = \frac{At_n}{B + Ct_n^s}, n \in \mathbb{N}_0$$

where $A, B, C, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$ and $s \in \mathbb{Z}^+$. Also, solutions of this equation are investigated.

In the fifth section, conclusions and suggestions are given.

Keywords: Fuzzy difference equation, Existence and uniqueness of solutions, Boundedness, Convergence.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA danışmanlığında hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmam boyunca yardımları ile bana her zaman destek olmuş ve yön göstermiş olan saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU'ya ve her zaman beni motive edip desteğini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Süleyman Akif ÇOLAK
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE LİSTESİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
1.1.Bulanık Sayılar	1
1.2. Fark Denklemleri	6
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	15
3. $\omega_{n+1} = a_1\omega_n / (a_2 + a_3\gamma_n^r)$, $\gamma_{n+1} = b_1\gamma_n / (b_2 + b_3\omega_n^r)$ FARK DENKLEM SİSTEMİ ...	18
4. $t_{n+1} = \frac{At_n}{B + Ct_n^s}$ BULANIK FARK DENKLEMİ.....	24
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	47
KAYNAKLAR	48

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$\mathbb{N}_0$	:	Sıfırdan başlayan tam sayılar
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tam sayılar
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar
$\mathbb{R}_F$	:	Bulanık sayılar
$\mathbb{R}_F^+$	:	Pozitif bulanık sayılar
$=$	:	Eşittir
$\neq$	:	Eşit değildir
$>$	:	Büyüktür
$<$	:	Küçüktür
$\geq$	:	Büyük eşit
$\leq$	:	Küçük eşit
$\exists$	:	Bazı
$\forall$	:	Her
$\in$	:	Elemanıdır
$\notin$	:	Elemanı değildir
$\Rightarrow$	:	Gerek şart
$\Leftarrow$	:	Yeter şart
J_F	:	F fonksiyonunun Jakobiyen matrisi
$\bar{x}$	:	Denge noktası

1. GİRİŞ

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

1.1. Bulanık Sayılar

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ ve $A \subset X$ ise

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (1.1.1)$$

olmak üzere, $\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonuna A nın üyelik fonksiyonu adı verilir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.2. $X \neq \emptyset$ ve $I = [0,1]$ ise $\mu_A : X \rightarrow I$ olmak üzere,

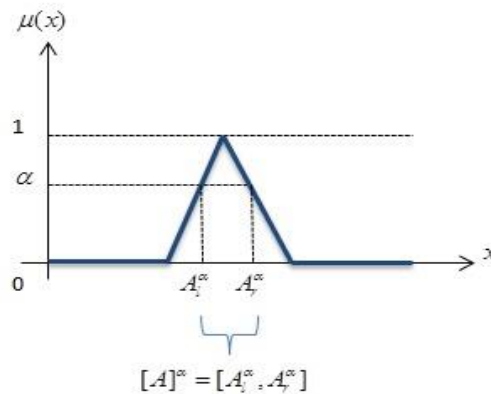
$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \quad (1.1.2)$$

kümesine X de bir bulanık küme denir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.3. X de tanımlı bir A bulanık kümesinin α – kesimi

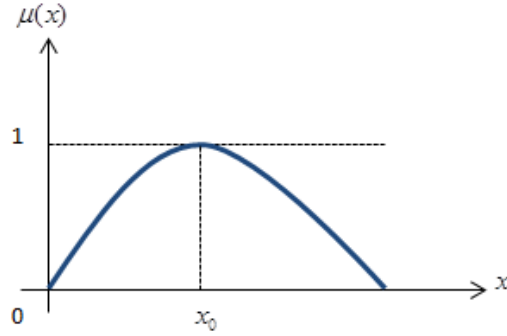
$$[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1] \quad (1.1.3)$$

ile tanımlanır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).



Şekil 1.1.1. A bulanık kümesinin α -kesimi

Tanım 1.1.4. X de tanımlı bir A bulanık kümesi verilsin. $\exists x_0 \in X$ için $\mu_A(x_0) = 1$ ise A normaldir denir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).



Şekil 1.1.2. A normal bulanık kümesi

Tanım 1.1.5. X de tanımlı bir A bulanık kümesinin dayanak kümesi

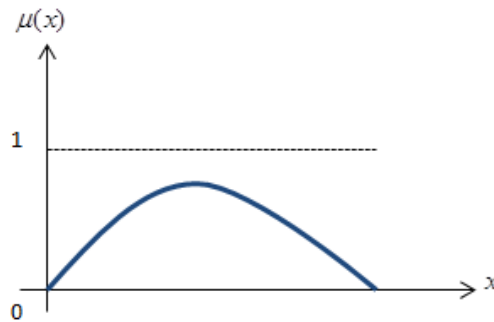
$$\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \quad (1.1.4)$$

ile tanımlanır (Bede, 2013).

Tanım 1.1.6. X de tanımlı bir A bulanık kümesi verilsin. $\forall \lambda \in [0,1]$ ve $\forall x_1, x_2 \in X$ için

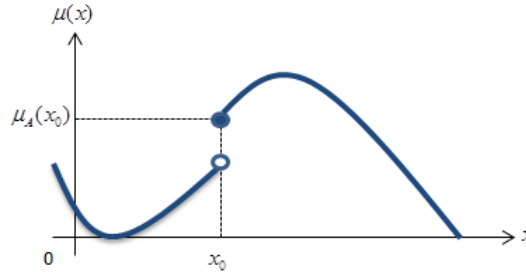
$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \quad (1.1.5)$$

ise A bulanık dışbükeydir denir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.1.3. A bulanık dışbükey kümesi

Tanım 1.1.7. X de tanımlı bir A bulanık kümesi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $\mu_A(x) < \mu_A(x_0) + \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa A kümesi x_0 'da üst-yarı süreklidir.



Şekil 1.1.4. Üst-yarı sürekli

Tanım 1.1.8. $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, μ_A ile karakterize edilen $\mathbb{R}$ de bir A bulanık kümesi;

- (a) A normaldir.
- (b) A bulanık dışbükeydir.
- (c) μ_A üst-yarı süreklidir.
- (d) $\text{supp}(A)$ nın kapanışı kompakttır.

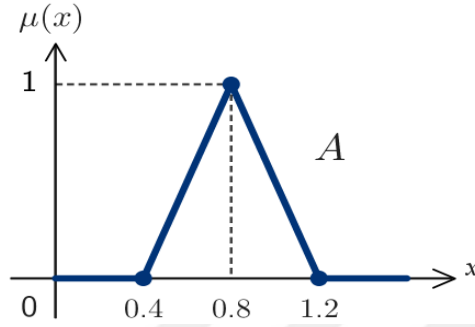
şartlarını sağlıyorsa A ya bir bulanık sayı denir. $\mathbb{R}$ deki bütün bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_F$ ile gösterilir. $\text{supp}(A) \subset (0, \infty)$ ise A pozitifdir denir. Pozitif bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_F^+$ ile gösterilir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002b).

Örnek 1.1.1. $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ olmak üzere,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < 0.4 \\ \frac{5x-2}{2}, & 0.4 \leq x \leq 0.8 \\ \frac{6-5x}{2}, & 0.8 \leq x \leq 1.2 \\ 0, & 1.2 < x \end{cases}$$

ile karakterize edilen A bir bulanık sayıdır.

$\frac{5x-2}{2} = \alpha$ ise $x = \frac{2\alpha+2}{5}$ tir. $\frac{6-5x}{2} = \alpha$ ise $x = \frac{6-2\alpha}{5}$ tir. Böylelikle,
 $[A]^\alpha = [A_l^\alpha, A_r^\alpha] = \left[\frac{2\alpha+2}{5}, \frac{6-2\alpha}{5} \right]$ elde edilir.



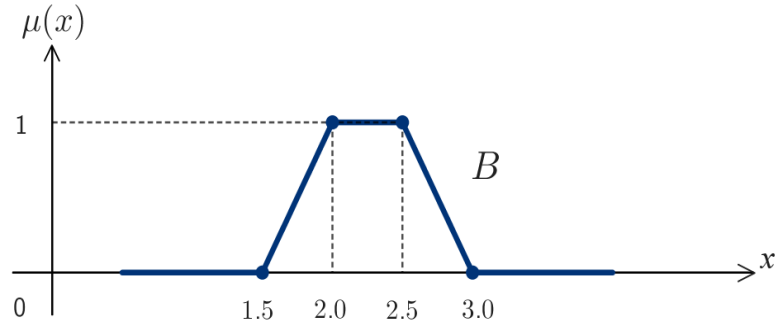
Şekil 1.1.5. A bulanık sayısı

Örnek 1.1.2. $\mu_B : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ olmak üzere,

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x < 1.5 \\ 2x-3, & 1.5 \leq x \leq 2.0 \\ 1, & 2.0 \leq x \leq 2.5 \\ -2x+6, & 2.5 \leq x \leq 3.0 \\ 0, & 3.0 > x \end{cases}$$

ile karakterize edilen B bir bulanık sayıdır.

$2x-3 = \alpha$ ise $x = \frac{\alpha+3}{2}$ tir. $-2x+6 = \alpha$ ise $x = \frac{6-\alpha}{2}$ tir. Böylelikle,
 $[B]^\alpha = [B_l^\alpha, B_r^\alpha] = \left[\frac{\alpha+3}{2}, \frac{6-\alpha}{2} \right]$ elde edilir.



Şekil 1.1.6. B bulanık sayısı

Tanım 1.1.9. $U, V \in \mathbb{R}_F$, $[U]^\alpha = [U_l^\alpha, U_r^\alpha]$ ve $[V]^\alpha = [V_l^\alpha, V_r^\alpha]$ olmak üzere,

(a) U nun boyu, $\forall \alpha \in (0, 1]$ için

$$\|U\| = \sup \left\{ \max \left\{ |U_l^\alpha|, |U_r^\alpha| \right\} \right\} \quad (1.1.6)$$

ile tanımlanır.

(b) U ile V arasındaki uzaklık

$$D(U, V) = \sup \left\{ \max \left\{ |U_l^\alpha - V_l^\alpha|, |U_r^\alpha - V_r^\alpha| \right\} \right\} \quad (1.1.7)$$

ile tanımlanır.

(c) (t_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi ve $t \in \mathbb{R}_F$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = t$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} D(t_n, t) = 0$ olmasıdır (Diamond ve Kloeden, 1994).

Tanım 1.1.10. $U, V \in \mathbb{R}_F$, $[U]^\alpha = [U_l^\alpha, U_r^\alpha]$ ve $[V]^\alpha = [V_l^\alpha, V_r^\alpha]$ olmak üzere,

$$MIN(U, V) = \left[\min \{U_l^\alpha, V_l^\alpha\}, \min \{U_r^\alpha, V_r^\alpha\} \right] \quad (1.1.8)$$

ve

$$MAX(U, V) = \left[\max \{U_l^\alpha, V_l^\alpha\}, \max \{U_r^\alpha, V_r^\alpha\} \right] \quad (1.1.9)$$

ile tanımlanır (Klir ve Yuan, 1995).

Tanım 1.1.11.

- (a) $\forall n \geq n_0$ için $MIN(t_n, U) = U$ ve $MAX(t_n, V) = V$ olacak şekilde $U, V \in \mathbb{R}_F$ varsa (t_n) bulanık sayı dizisi sınırlı ve dirençlidir.
- (b) $n \in \mathbb{N}_0$ için $\|t_n\|$ sınırsız bir dizi ise (t_n) bulanık sayı dizisi sınırsızdır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

Tanım 1.1.12. (t_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi ve $t \in \mathbb{R}_F$ olsun. $\forall n \geq n_0$ için

$$MIN(t_m, t) = t_m \text{ ve } MIN(t_s, t) = t \quad (1.1.10)$$

veya

$$MIN(t_m, t) = t \text{ ve } MIN(t_s, t) = t_s \quad (1.1.11)$$

olacak şekilde $s, m \geq n_0$ şartını sağlayan $s, m \in \mathbb{N}_0$ varsa (t_n) dizisi t civarında salınımlıdır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

Lemma 1.1.1. $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \dots \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon ve $C_0, C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}_F$ ise

$$[f(C_0, C_1, \dots, C_k)]^\alpha = f([C_0]^\alpha, [C_1]^\alpha, \dots, [C_k]^\alpha) \quad (1.1.12)$$

dır (Papaschinopoulos ve Stefanidou, 2003).

1.2. Fark Denklemleri

Tanım 1.2.1. $n \in \mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve ω bağımlı değişken olmak üzere,

$$F(n, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+k}) = 0 \quad (1.2.1)$$

veya

$$\omega_{n+k} = f(n, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+k-1}) \quad (1.2.2)$$

denklemin fark denklemi denir. ω_n fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_0$ için (1.2.1) denklemini sağlıyor ise ω_n e (1.2.1) denkleminin bir çözümü denir (Soykan ve ark., 2017).

Teorem 1.2.1. $I \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $f : I^{k+1} \rightarrow I$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise

$$\omega_{n+1} = f(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.2.3)$$

denkleminin bir tek $\{\omega_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.2.2. (1.2.3) denkleminde $\bar{\omega} = f(\bar{\omega}, \bar{\omega}, \dots, \bar{\omega})$ ise $\bar{\omega}$ noktasına (1.2.3) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Örnek 1.2.1. $\omega_{n+1} = 2\omega_n(1 - \omega_n)$ fark denkleminin denge noktalarını elde edelim.

Tanım 1.2.2'den $\bar{\omega} = 2\bar{\omega}(1 - \bar{\omega})$ veya $\bar{\omega}(1 - 2(1 - \bar{\omega})) = 0$ olur. Bu denklemin çözümleri $\bar{\omega} = 0$ ve $\bar{\omega} = \frac{1}{2}$ olur ki bunlar bu verilen fark denkleminin denge noktalarıdır.

Tanım 1.2.3. (1.2.3) denkleminin bir denge noktası $\bar{\omega}$ olsun.

- (a) $\omega_0, \dots, \omega_{-k} \in I$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $|\omega_0 - \bar{\omega}| + \dots + |\omega_{-k} - \bar{\omega}| < \delta$ iken $n \geq 1$ için $|\omega_n - \bar{\omega}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise $\bar{\omega}$ kararlıdır.
- (b) $\bar{\omega}$ kararlı, $\omega_0, \dots, \omega_{-k} \in I$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \bar{\omega}$ olacak şekilde $|\omega_0 - \bar{\omega}| + \dots + |\omega_{-k} - \bar{\omega}| < \gamma$ şartını gerçekleyen $\gamma > 0$ var ise $\bar{\omega}$ lokal asimptotik kararlıdır.
- (c) $\omega_0, \dots, \omega_{-k} \in I$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \bar{\omega}$ ise $\bar{\omega}$ çekim noktasıdır.
- (d) $\bar{\omega}$ kararlı ve çekim noktası ise $\bar{\omega}$ global asimptotik kararlıdır.
- (e) $\bar{\omega}$ kararlı değil ise kararsızdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.2.4. $I \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $i = 0, 1, \dots, k$ ve $f : I^{k+1} \rightarrow I$ fonksiyonunun ω_i lere göre kısmi türevlerinin $\bar{\omega}$ deki değerleri

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial \omega_{n-i}}(\bar{\omega}, \bar{\omega}, \dots, \bar{\omega}) \quad (1.2.4)$$

olmak üzere,

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^k q_i z_{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.2.5)$$

denklemine (1.2.3) denkleminin $\bar{\omega}$ civarındaki lineerleştirilmiş denklemi adı verilir. Bu denklemden elde edilen

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k q_i \lambda^{k-i} = 0 \quad (1.2.6)$$

denklemine ise (1.2.3) denkleminin $\bar{\omega}$ deki karakteristik denklemi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 1.2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

- (a) (1.2.6) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{\omega}$ lokal asimptotik kararlıdır.
- (b) (1.2.6) denkleminin mutlak değerce 1'den büyük bir kökü var ise $\bar{\omega}$ kararsızdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Örnek 1.2.2. $\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, a, p \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere,

$$\omega_{n+1} = \frac{a\omega_{n-1}}{1 + \omega_{n-2}^p} \quad (1.2.7)$$

lineer olmayan fark denklemini ele alalım. Bu denklemin denge noktalarını elde edip, çözümlerin davranışlarını inceleyelim. Denge noktası tanımından; $\bar{\omega} = \frac{a\bar{\omega}}{1 + \bar{\omega}^p}$ olup, bu denklemin çözümleri $\bar{\omega}_1 = 0$ ve $\bar{\omega}_2 = (a-1)^{1/p}$ ($a > 1$) olur ki bunlar (1.2.7) denkleminin denge noktalarıdır.

Şimdi, lineer olmayan

$$\omega_{n+1} = \frac{a\omega_{n-1}}{1 + \omega_{n-2}^p} = f(\omega_n, \omega_{n-1}, \omega_{n-2})$$

fark denklemini lineerleştirelim:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_n} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \omega_{n-1}} = \frac{a}{1 + \omega_{n-2}^p}, \quad \frac{\partial f}{\partial \omega_{n-2}} = \frac{-pa\omega_{n-1}\omega_{n-2}^{p-1}}{(1 + \omega_{n-2}^p)^2}$$

olduğundan,

$$q_0 = \frac{\partial f}{\partial \omega_n}(\bar{\omega}, \bar{\omega}, \bar{\omega}) = 0, \quad q_1 = \frac{\partial f}{\partial \omega_{n-1}}(\bar{\omega}, \bar{\omega}, \bar{\omega}) = \frac{a}{1 + \bar{\omega}^p}, \quad q_2 = \frac{\partial f}{\partial \omega_{n-2}}(\bar{\omega}, \bar{\omega}, \bar{\omega}) = \frac{-pa\bar{\omega}^p}{(1 + \bar{\omega}^p)^2}$$

elde edilir. Bu durumda, $\bar{\omega}_1 = 0$ noktası civarındaki lineer denklem $q_0 = 0, q_1 = a, q_2 = 0$ olduğundan

$$z_{n+1} = 0.z_n + a.z_{n-1} + 0.z_{n-2}$$

şeklinde olup, bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - a.\lambda = 0$$

şeklinde. $a < 1$ için karakteristik denklemin kökleri mutlak değerce 1 den küçük olacağından, $\bar{\omega}_1 = 0$ denge noktası $a < 1$ için lokal asimptotik kararlıdır.

$\bar{\omega}_2 = (a-1)^{1/p}$ ($a > 1$) denge noktası civarındaki lineer denklem:

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = \frac{-p(a-1)}{a} \text{ olduğundan}$$

$$z_{n+1} = 0.z_n + 1.z_{n-1} + \left(\frac{-p(a-1)}{a} \right).z_{n-2}$$

şeklinde olup, bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - \lambda + \frac{p(a-1)}{a} = 0$$

şeklinde. Karakteristik denklemin köklerinden biri -1 den küçük olduğundan, $\bar{\omega}_2 = (a-1)^{1/p}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 1.2.5. (1.2.3) denkleminin bir denge noktası $\bar{\omega}$ olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ için $\{\omega_l, \omega_{l+1}, \dots, \omega_m\}$ kümesinin tüm elemanları $\bar{\omega}$ den büyük veya eşit, $\omega_{l-1} < \bar{\omega}$ ve $\omega_{m+1} < \bar{\omega}$ ise $\{\omega_l, \omega_{l+1}, \dots, \omega_m\}$ kümesine $\{\omega_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün pozitif yarı-dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -k$, $m \leq \infty$ için $\{\omega_l, \omega_{l+1}, \dots, \omega_m\}$ kümesinin tüm elemanları $\bar{\omega}$ den küçük, $\omega_{l-1} \geq \bar{\omega}$ ve $\omega_{m+1} \geq \bar{\omega}$ ise $\{\omega_l, \omega_{l+1}, \dots, \omega_m\}$ kümesine $\{\omega_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün negatif yarı-dönmesi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.2.6. Her $n \in \mathbb{N}$ için $L \leq \omega_n \leq R$ olacak şekilde $L, R \in \mathbb{R}$ sayıları var ise $\{\omega_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Örnek 1.2.3. $\omega_{-1}, \omega_0 \in \mathbb{R}^+$ için

$$\omega_{n+1} = \frac{3\omega_n + 2\omega_{n-1}}{2\omega_n + \omega_{n-1}}$$

rasyonel fark denkleminin her pozitif çözümü sınırlıdır. Gerçekten,

$$\omega_{n+1} = \frac{3\omega_n + 2\omega_{n-1}}{2\omega_n + \omega_{n-1}} = \frac{3\omega_n}{2\omega_n + \omega_{n-1}} + \frac{2\omega_{n-1}}{2\omega_n + \omega_{n-1}} \leq \frac{3\omega_n}{2\omega_n} + \frac{2\omega_{n-1}}{\omega_{n-1}} = \frac{7}{2}$$

bulunur. $\omega_n = \frac{1}{\gamma_n}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{1}{\gamma_{n+1}} = \frac{\frac{3}{\gamma_n} + \frac{2}{\gamma_{n-1}}}{\frac{2}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_{n-1}}} = \frac{3\gamma_{n-1} + 2\gamma_n}{2\gamma_{n-1} + \gamma_n} \Rightarrow \gamma_{n+1} = \frac{2\gamma_{n-1} + \gamma_n}{3\gamma_{n-1} + 2\gamma_n}$$

denklemini elde edilir.

Bu denklemden de

$$\gamma_{n+1} = \frac{2\gamma_{n-1} + \gamma_n}{3\gamma_{n-1} + 2\gamma_n} = \frac{2\gamma_{n-1}}{3\gamma_{n-1} + 2\gamma_n} + \frac{\gamma_n}{3\gamma_{n-1} + 2\gamma_n} \leq \frac{2\gamma_{n-1}}{3\gamma_{n-1}} + \frac{\gamma_n}{2\gamma_n} = \frac{7}{6}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{\omega_{n+1}} = \gamma_{n+1} \leq \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{6}{7} \leq \omega_{n+1}$$

olur. Sonuç olarak, verilen denklemin her çözümünün $n \geq 1$ için sınırlı olduğunu gösteren

$$\frac{6}{7} \leq \omega_n \leq \frac{7}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 1.2.3. $I, J \subset \mathbb{R}$, $f : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I$ ve $g : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow J$ sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise her $(\omega_{-i}, \gamma_{-i}) \in I \times J$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= f(\omega_n, \dots, \omega_{n-k}, \gamma_n, \dots, \gamma_{n-k}) \\ \gamma_{n+1} &= g(\omega_n, \dots, \omega_{n-k}, \gamma_n, \dots, \gamma_{n-k}) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

sisteminin bir tek $\{(\omega_n, \gamma_n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Kocic ve Ladas, 1993).

Tanım 1.2.7. (1.2.8) sisteminde

$$\bar{\omega} = f(\bar{\omega}, \dots, \bar{\omega}, \bar{\gamma}, \dots, \bar{\gamma}), \quad \bar{\gamma} = g(\bar{\omega}, \dots, \bar{\omega}, \bar{\gamma}, \dots, \bar{\gamma}) \quad (1.2.9)$$

ise $(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ sıralı ikilisine (1.2.8) sisteminin denge noktası adı verilir.

(1.2.8) sistemi, $\Omega_n = (\omega_n, \dots, \omega_{n-k}, \gamma_n, \dots, \gamma_{n-k})^T$ ve $\omega_n = u_n^{(0)}, \omega_{n-1} = u_n^{(1)}, \dots, \omega_{n-k} = u_n^{(k)},$

$\gamma_n = v_n^{(0)}, \gamma_{n-1} = v_n^{(1)}, \dots, \gamma_{n-k} = v_n^{(k)}$ değişken değiştirmeleri ile $F : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I^{k+1} \times J^{k+1}$

için

$$F \begin{pmatrix} u_n^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n^{(k)} \\ v_n^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u_n^{(0)}, \dots, u_n^{(k)}, v_n^{(0)}, \dots, v_n^{(k)}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n^{(k-1)} \\ g(u_n^{(0)}, \dots, u_n^{(k)}, v_n^{(0)}, \dots, v_n^{(k)}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (1.2.10)$$

olmak üzere,

$$\Omega_{n+1} = F(\Omega_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.2.11)$$

vektörel formda yazılabilir. (1.2.8) sistemi $(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ denge noktasına sahip ise (1.2.11) sisteminin denge noktası $\bar{\Omega} = (\bar{\omega}, \dots, \bar{\omega}, \bar{\gamma}, \dots, \bar{\gamma})^T$ şeklindedir (Kocic ve Ladas, 1993).

Bu çalışmada, bir vektörün veya matrisin normu $\|\dots\|$ ile ve (1.2.11) sisteminin bir başlangıç koşulu $\Omega_0 \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 1.2.8. (1.2.11) sisteminin bir denge noktası $\bar{\Omega}$ olsun.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\|\Omega_0 - \bar{\Omega}\| < \delta$ ve $n \geq 1$ için $\|\Omega_n - \bar{\Omega}\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise $\bar{\Omega}$ kararlıdır. Aksi halde kararsızdır.

(b) $\bar{\Omega}$ kararlı ve $n \rightarrow \infty$ iken $\Omega_n \rightarrow \bar{\Omega}$ olacak şekilde $\|\Omega_0 - \bar{\Omega}\| < \gamma$ şartını gerçekleyen $\gamma > 0$ var ise $\bar{\Omega}$ lokal asimptotik kararlıdır.

(c) $n \rightarrow \infty$ iken $\Omega_n \rightarrow \bar{\Omega}$ ise $\bar{\Omega}$ çekim noktasıdır.

(d) $\bar{\Omega}$ hem lokal asimptotik kararlı hem de çekim noktası ise global asimptotik kararlıdır (Kocic ve Ladas, 1993).

(1.2.11) sisteminin $\bar{\Omega}$ deki lineerleştirilmiş sistemi; F dönüşümünün $\bar{\Omega}$ deki Jacobian matrisi J_F ise

$$Z_{n+1} = J_F Z_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.2.12)$$

şeklindedir. (1.2.11) sisteminin $\bar{\Omega}$ civarındaki karakteristik polinomu $a_0 > 0$ için

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^{2(k+1)} + a_1^{2k+1} \lambda + \cdots + a_{2k+1} \lambda + a_{2(k+1)} \quad (1.2.13)$$

şeklindedir (Kocic ve Ladas, 1993).

Teorem 1.2.4. (1.2.11) sisteminin bir denge noktası $\bar{\Omega}$ olsun. J_F Jacobian matrisinin tüm öz değerleri $\bar{\Omega}$ denge noktası için mutlak değerce 1 den küçük ise $\bar{\Omega}$ lokal asimptotik kararlıdır. Mutlak değerce 1 den büyük bir öz değer var ise $\bar{\Omega}$ kararsızdır (Kocic ve Ladas, 1993).

Teorem 1.2.5. $I \subseteq \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $F = (f, g)$ fonksiyonu I açık aralığında tanımlı sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve $F = (f, g)$ nin, I açık aralığındaki bir denge noktası $(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (a) $J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ Jakobiye matrisinin tüm öz değerleri mutlak değerce 1 den küçük ise $(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ denge noktası asimptotik kararlıdır.
- (b) $J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ Jakobiye matrisinin en az bir öz değerinin mutlak değeri 1 den büyük ise $(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ denge noktası kararsızdır.
- (c) $F = (f, g)$ nin bir $(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 - \text{tr} J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma}) \lambda + \det J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma}) = 0 \quad (1.2.14)$$

karakteristik denkleminin her çözümünün $|\lambda| < 1$ birim diskin içinde olması, yani

$$|\text{tr} J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma})| < 1 + \det J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma}) < 2 \quad (1.2.15)$$

olmasıdır.

(d) (1.2.14) karakteristik denkleminin bir kökü $|\lambda| < 1$ birim diskinin içinde, diğeri dışında ise $(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ denge noktası bir semer (eyer) noktasıdır.

(e) (1.2.14) karakteristik denkleminin bir kökünün $|\lambda| < 1$ birim diskinin içinde, diğerrinin de dışarda olması için gerek ve yeter şart

$$|tr J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma})| > |1 + \det J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma})| \quad \text{ve} \quad (tr J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma}))^2 - 4 \det J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma}) > 0 \quad (1.2.16)$$

olmasıdır.

(f) $J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ Jakobiyen matrisinin en az bir öz değerrinin mutlak değeri 1 ise $(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ denge noktası non-hiperboliktir.

(g) (1.2.14) karakteristik denkleminin birim disk üzerinde ($|\lambda| = 1$) en az bir kökünün olması için gerek ve yeter şart

$$|tr J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma})| = |1 + \det J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma})| \quad \text{veya;} \quad \det J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma}) = 1 \quad \text{ve} \quad tr J_F(\bar{\omega}, \bar{\gamma}) \leq 2 \quad (1.2.17)$$

olmasıdır (Elabbasy ve Eleissawy, 2013).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Khastan; $p, q, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_n = pt_{n-1} + q$$

denkleminin çözümlerini incelemiştir (Khastan, 2017).

Wang ve arkadaşları; $A, B, C, D, t_{-4}, t_{-3}, t_{-2}, t_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \frac{At_{n-1}t_{n-2}}{D + Bt_{n-3} + Ct_{n-4}}$$

denkleminin çözümlerini incelemiştir (Wang ve ark., 2017).

Khastan; $\beta, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \beta t_n (1 - t_n)$$

denkleminin çözümlerini incelemiştir (Khastan, 2018).

Lavanya ve Lovenia; $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, $p_i \in \mathbb{R}^+$, $A_i, B_i, t_{-k}, t_{-k+1}, \dots, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \sum_{i=0}^k \frac{A_i t_n + t_{n-i}}{B_i t_{n-i}^{p_i}}$$

denkleminin çözümlerini incelemiştir (Lavanya ve Lovenia, 2018).

Rahman ve arkadaşları; $A, B, t_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-1}}{A + Bt_{n-1}t_n}$$

denkleminin çözümlerini incelemiştir (Rahman ve ark., 2018).

Sun ve arkadaşları; $d = \max\{m, r\}$, $t_{-d}, t_{-d+1}, \dots, t_{-1} \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_n = \max \left\{ \frac{1}{t_{n-m}}, \frac{\alpha_n}{t_{n-r}} \right\}$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Sun ve ark., 2018).

Wang ve Zhang; $A, B, C, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = A + Bt_n e^{-Ct_n}$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Wang ve Zhang, 2018).

Wang ve arkadaşları; $k \in \mathbb{Z}^+$, $A, t_{-k}, t_{-k+1}, \dots, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \max \left\{ \frac{A}{t_n}, \frac{A}{t_{n-1}}, \dots, \frac{A}{t_{n-(k-1)}}, t_{n-k} \right\}$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Wang ve ark., 2019).

Han ve arkadaşları; $m, k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}(-m-k, -1)$, $C, t_i \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_n = \max \left\{ C, \frac{t_{n-m-k}}{t_{n-m}} \right\}$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Han ve ark., 2020).

Sun ve arkadaşları; $k \in \mathbb{N}_1$, $t_{-k}, t_{-k+1}, \dots, t_{-1} \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_n = F(t_{n-1}, t_{n-k})$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Sun ve ark., 2020).

Wang ve Li; $A, t_{-2}, t_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \max \left\{ \frac{A}{t_n}, \frac{A}{t_{n-1}}, t_{n-2} \right\}$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Wang ve Li, 2020).

Wang ve arkadaşları; $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $A, B, C, t_{-m}, t_{-m+1}, \dots, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \frac{At_{n-m}}{B + C \prod_{i=0}^m t_{n-i}}$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Wang ve ark., 2021).

Yalçinkaya ve arkadaşları; $C, t_{-2}, t_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-2}}{C + t_{n-2}t_{n-1}t_n}$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Yalçinkaya ve ark., 2021).

Jia ve arkadaşları; $A, B, C, D, t_{-4}, t_{-3}, t_{-2}, t_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \frac{At_{n-1}t_{n-2} + Bt_{n-3}}{D + Ct_{n-4}}$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Jia ve ark., 2022).

Yalçinkaya ve arkadaşları; $p \in \mathbb{Z}^+$, $A, t_{-2}, t_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}_F^+$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$t_{n+1} = \frac{At_{n-1}}{1 + t_{n-2}^p}$$

denkleminin çözümlerini incelemişlerdir (Yalçinkaya ve ark., 2022).

3. $\omega_{n+1} = a_1\omega_n / (a_2 + a_3\gamma_n^r)$, $\gamma_{n+1} = b_1\gamma_n / (b_2 + b_3\omega_n^r)$ SİSTEMİ

Bu bölümde; Elabbasy ve Eleissawy'nin 2013 yılında yayımlanmış olan “Asymptotic behavior of two dimensional rational system of difference equations” başlıklı makale incelenmiştir.

Bu çalışmada; $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, r \in (0, \infty)$ ve $\omega_0, \gamma_0 \in (0, \infty)$ için

$$\omega_{n+1} = \frac{a_1\omega_n}{a_2 + a_3\gamma_n^r}, \quad \gamma_{n+1} = \frac{b_1\gamma_n}{b_2 + b_3\omega_n^r}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.1)$$

sisteminin çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

$a = \frac{a_1}{a_3}$, $b = \frac{a_2}{a_3}$, $c = \frac{b_1}{b_3}$, $d = \frac{b_2}{b_3}$ değişken değiştirmeleri ile (3.1) sistemi

$$\omega_{n+1} = \frac{a\omega_n}{b + \gamma_n^r}, \quad \gamma_{n+1} = \frac{c\gamma_n}{d + \omega_n^r}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.2)$$

şeklini alır.

Öncelikle sistemin denge noktalarını bulalım. Bunun için

$$\bar{\omega} = \frac{a\bar{\omega}}{b + \bar{\omega}^r}, \quad \bar{\gamma} = \frac{c\bar{\gamma}}{d + \bar{\omega}^r} \quad (3.3)$$

sistemini çözmeliyiz. Kolaylıkla görülür ki, $(\bar{\omega}_1, \bar{\gamma}_1) = (0, 0)$ daima sistemin bir denge noktasıdır. Ayrıca, $a > b$ ve $c > d$ iken bu sistemin tek pozitif denge noktası $(\bar{\omega}_2, \bar{\gamma}_2) = ((c-d)^{1/r}, (a-b)^{1/r})$ dır.

Teorem 3.1.

(a) $a < b$ ve $c < d$ ise $(\bar{\omega}_1, \bar{\gamma}_1) = (0, 0)$ lokal asimptotik kararlıdır.

(b) $(a > b$ ve $c < d)$ veya $(a < b$ ve $c > d)$ ise $(\bar{\omega}_1, \bar{\gamma}_1) = (0, 0)$ bir semer (eyer) noktasıdır.

(c) $a = b$ ve $c = d$ ise $(\bar{\omega}_1, \bar{\gamma}_1) = (0, 0)$ non-hiperboliktir.

İspat. (3.2) sistemi $\Omega_n = (\omega_n, \gamma_n)^T$ ve $\omega_n = u_n^{(0)}$, $\gamma_n = v_n^{(0)}$ değişken değiştirmeleri ile F dönüşümü

$$F\left(\begin{pmatrix} u_n^{(0)} \\ v_n^{(0)} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{au_n^{(0)}}{b + (v_n^{(0)})^r} \\ \frac{cv_n^{(0)}}{d + (u_n^{(0)})^r} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

olmak üzere, $\Omega_{n+1} = F(\Omega_n)$ vektör formunda yazılır. Bu sistemin denge noktaları $\bar{\Omega}_1 = (0, 0)^T$ ve $\bar{\Omega}_2 = ((c-d)^{1/r}, (a-b)^{1/r})^T$ dir. Sistemin Jakobiyen matrisi

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{a}{b + (v_n^{(0)})^r} & \frac{-aru_n^{(0)}(v_n^{(0)})^{r-1}}{(b + (v_n^{(0)})^r)^2} \\ \frac{-crv_n^{(0)}(u_n^{(0)})^{r-1}}{(d + (u_n^{(0)})^r)^2} & \frac{c}{d + (u_n^{(0)})^r} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ve bu matrisin $\bar{\Omega}_1$ denge noktasındaki değeri

$$J_F(\bar{\Omega}_1) = \begin{pmatrix} a/b & 0 \\ 0 & c/d \end{pmatrix}$$

olup, $\bar{\Omega}_1$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş sistem $\Omega_{n+1} = J_F(\bar{\Omega}_1)\Omega_n$ olarak bulunur.

$$p_1 = \text{tr} J_F(\bar{\Omega}_1) = \frac{ad + cb}{bd} \quad \text{ve} \quad q_1 = \det J_F(\bar{\Omega}_1) = \frac{ac}{bd} \quad \text{olmak üzere,}$$

$J_F(\bar{\Omega}_1)$ matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - p_1\lambda + q_1 = 0$$

şeklindedir.

$$(a) \quad |p_1| - (1 + q_1) = \frac{ad + cb}{bd} - \left(1 + \frac{ac}{bd}\right) = \frac{ad + cb - bd - ac}{bd} = \frac{(a-b)(d-c)}{bd} < 0$$

ve

$$q_1 = \frac{ac}{bd} < \frac{bc}{bd} < 1$$

olduğundan Teorem 1.2.5 (c) gereği (3.2) sisteminin $(\bar{\omega}_1, \bar{\gamma}_1) = (0, 0)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

$$(b) \quad |p_1| - |1 + q_1| = \frac{(a-b)(d-c)}{bd} > 0$$

ve

$$p_1^2 - 4q_1 = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)^2 - \frac{4ac}{bd} = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 > 0$$

olduğundan Teorem 1.2.5 (d) ve (e) gereği (3.2) sisteminin $(\bar{\omega}_1, \bar{\gamma}_1) = (0, 0)$ denge noktası bir semer (eyer) noktasıdır.

$$(c) \quad |p_1| = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 2$$

ve

$$|1 + q_1| = 1 + \frac{ac}{bd} = 2$$

olduğundan Teorem 1.2.5 (f) ve (g) gereği (3.2) sisteminin $(\bar{\omega}_1, \bar{\gamma}_1) = (0, 0)$ denge noktası non-hiperboliktir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2. $a > b$ ve $c > d$ ise (3.2) sisteminin tek pozitif denge noktası olan $(\bar{\omega}_2, \bar{\gamma}_2)$

noktası bir eyer noktasıdır.

İspat. J_F Jakobiyeen matrisinin $\bar{\Omega}_2 = ((c-d)^{1/r}, (a-b)^{1/r})^T$ denge noktasındaki değeri

$$J_F(\bar{\Omega}_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-r(c-d)^{1/r}(a-b)^{(r-1)/r}}{a} \\ \frac{-r(a-b)^{1/r}(c-d)^{(r-1)/r}}{c} & 1 \end{pmatrix}$$

olup, $J_F(\bar{\Omega}_2)$ matrisinin karakteristik denklemi

$$p_2 = \text{tr} J_F(\bar{\omega}_2, \bar{\gamma}_2) = 2 \quad \text{ve} \quad q_2 = \det J_F(\bar{\omega}_2, \bar{\gamma}_2) = 1 - \frac{r^2(a-b)(c-d)}{ac}$$

olmak üzere,

$$\lambda^2 - p_2\lambda + q_2 = 0$$

şeklindedir. Şimdi, $a > b$ ve $c > d$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |p_2| > |1 + q_2| &\Leftrightarrow |2| > \left| 2 - \frac{r^2(a-b)(c-d)}{ac} \right| \\ &\Leftrightarrow |2| > \left| 2 - \frac{r^2(a-b)(c-d)}{ac} \right| \\ &\Leftrightarrow 0 > -\frac{r^2(a-b)(c-d)}{ac} \end{aligned}$$

ve

$$p_1^2 - 4q_1 = 4 - 4 \left(1 - \frac{r^2(a-b)(c-d)}{ac} \right) = \frac{4r^2(a-b)(c-d)}{ac} > 0$$

elde edilir. Teorem 1.2.5 (iv) gereği (3.2) sisteminin $(\bar{\omega}_2, \bar{\gamma}_2) = ((c-d)^{1/r}, (a-b)^{1/r})$ denge noktası bir semer (eyer) noktasıdır.

Teorem 3.3. $a < b$ ve $c < d$ ise (3.2) sisteminin $(\bar{\omega}_1, \bar{\gamma}_1) = (0, 0)$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 3.1 (a) dan $(\bar{\omega}_1, \bar{\gamma}_1) = (0, 0)$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu biliyoruz. Bu nedenle ispatı tamamlamak için $\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n, \gamma_n) = (0, 0)$ olduğunu göstermek yeterlidir. (3.2) sisteminin bir çözümü (ω_n, γ_n) olsun.

Bu durumda,

$$0 \leq \omega_{n+1} = \frac{a\omega_n}{b + \gamma_n^r} \leq \frac{a}{b} \omega_n < \omega_n \quad (3.6)$$

ve

$$0 \leq \gamma_{n+1} = \frac{c\gamma_n}{d + \omega_n^r} \leq \frac{c}{d} \gamma_n < \gamma_n \quad (3.7)$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty}(\omega_n) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty}(\gamma_n) = 0$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4. $a < b$ ve $c < d$ ise (3.2) sisteminin her pozitif çözümü sınırlı ve dirençlidir.

İspat. Teorem 3.3'ün ispatından (3.6) ve (3.7) eşitsizlikleri biliniyor. Tümevarımla her pozitif n tam sayısı için, $0 < \omega_n < \omega_0$ ve $0 < \gamma_n < \gamma_0$ olduğu elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 3.5. $a > b$ ve $c > d$ olmak üzere, (3.2) sisteminin bir çözümü olan (ω_n, γ_n)

$$(a) \quad \omega_0 \geq \bar{\omega}_2, \quad \gamma_0 < \bar{\gamma}_2$$

ya da

$$(b) \quad \omega_0 < \bar{\omega}_2, \quad \gamma_0 \geq \bar{\gamma}_2$$

özelliğini sağlıyorsa (ω_n, γ_n) çözümü $(\bar{\omega}_2, \bar{\gamma}_2)$ denge noktası civarında salınımlı değildir.

İspat. (a) da verilenlerin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, iterasyon ile

$$\omega_1 = \frac{a\omega_0}{b + (\gamma_0)^r} \geq \frac{a\bar{\omega}_2}{b + (\bar{\gamma}_2)^r} = \bar{\omega}_2, \quad \gamma_1 = \frac{c\gamma_0}{d + (\omega_0)^r} < \frac{c\bar{\gamma}_2}{d + (\bar{\omega}_2)^r} = \bar{\gamma}_2,$$

$$\omega_2 = \frac{a\omega_1}{b+(\gamma_1)^r} \geq \frac{a\bar{\omega}_2}{b+(\bar{\gamma}_2)^r} = \bar{\omega}_2, \quad \gamma_2 = \frac{c\gamma_1}{d+(\omega_1)^r} < \frac{c\bar{\gamma}_2}{d+(\bar{\omega}_2)^r} = \bar{\gamma}_2,$$

·
·
·

$$\omega_{n-1} = \frac{a\omega_{n-2}}{b+(\gamma_{n-2})^r} \geq \frac{a\bar{\omega}_2}{b+(\bar{\gamma}_2)^r} = \bar{\omega}_2, \quad \gamma_{n-1} = \frac{c\gamma_{n-2}}{d+(\omega_{n-2})^r} < \frac{c\bar{\gamma}_2}{d+(\bar{\omega}_2)^r} = \bar{\gamma}_2,$$

$$\omega_n = \frac{a\omega_{n-1}}{b+(\gamma_{n-1})^r} \geq \frac{a\bar{\omega}_2}{b+(\bar{\gamma}_2)^r} = \bar{\omega}_2, \quad \gamma_n = \frac{c\gamma_{n-1}}{d+(\omega_{n-1})^r} < \frac{c\bar{\gamma}_2}{d+(\bar{\omega}_2)^r} = \bar{\gamma}_2$$

yazılabilir ki böylece ispat tamamlanır ((b) için de benzer şekilde ispat yapılabilir.).

Teorem 3.6. $a > b$ ve $c > d$ olmak üzere,

(a) $(\omega_0, \gamma_0) \in (0, \bar{\omega}_2) \times (\bar{\gamma}_2, \infty)$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty}(\omega_n) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty}(\gamma_n) = \infty$ dur.

(b) $(\omega_0, \gamma_0) \in (\bar{\omega}_2, \infty) \times (0, \bar{\gamma}_2)$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty}(\omega_n) = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty}(\gamma_n) = 0$ dır.

İspat. Teorem 3.5 ile genelliği bozmadan, her $n \in \mathbb{N}_0$ için $\omega_n < \bar{\omega}_2$ ve $\gamma_n > \bar{\gamma}_2$ olacak şekilde, (ω_n, γ_n) nin (3.2) sisteminin çözümü olduğunu varsayabiliriz. O zaman,

$$\omega_{n+1} = \frac{a\omega_n}{b+\gamma_n^r} < \frac{a\omega_n}{b+\bar{\gamma}_2^r} = \omega_n, \quad \gamma_{n+1} = \frac{c\gamma_n}{d+\omega_n^r} > \frac{c\gamma_n}{d+\bar{\omega}_2^r} = \gamma_n$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty}(\omega_n) = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty}(\gamma_n) = \infty$$

elde edilir ki böylece (a) nın ispatı tamamlanır ((b) için de benzer şekilde ispat yapılabilir.).

4. $t_{n+1} = \frac{At_n}{B+Ct_n^s}$ BULANIK FARK DENKLEMİ

Bu bölümde; $t_0, A, B, C \in \mathbb{R}_F^+$ için,

$$t_{n+1} = \frac{At_n}{B+Ct_n^s}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad s \in \mathbb{Z}^+ \quad (4.1)$$

bulanık fark denklemi tanımlanmış ve bu denkleme ait pozitif çözümlerin varlığı, tekliği, sınırlılığı ve yakınsaklığı üzerine çalışılmıştır.

Teorem 4.1. $t_0, A, B, C \in \mathbb{R}_F^+$ ise (4.1) denkleminin yalnızca bir pozitif (t_n) çözümü vardır.

İspat. $t_0 \in \mathbb{R}_F^+$ başlangıç koşulu ile (4.1) denklemini sağlayan bir (t_n) bulanık sayı dizisi olduğunu varsayalım. Bütün $\alpha \in (0,1]$ değerleri için,

$$[t_n]^\alpha = [P_n^\alpha, Q_n^\alpha], \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.2)$$

ve

$$\begin{aligned} [A]^\alpha &= [A_l^\alpha, A_r^\alpha], \\ [B]^\alpha &= [B_l^\alpha, B_r^\alpha], \\ [C]^\alpha &= [C_l^\alpha, C_r^\alpha] \end{aligned} \quad (4.3)$$

olsun. Böylece, (4.1) - (4.3) ve Lemma 1.1.1 ile aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} [t_{n+1}]^\alpha &= [P_{n+1}^\alpha, Q_{n+1}^\alpha] = \left[\frac{At_n}{B+Ct_n^s} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha [t_n]^\alpha}{[B]^\alpha + [C]^\alpha [t_n^s]^\alpha} = \frac{[A_l^\alpha, A_r^\alpha][P_n^\alpha, Q_n^\alpha]}{[B_l^\alpha, B_r^\alpha] + [C_l^\alpha, C_r^\alpha][P_n^\alpha, Q_n^\alpha]^s} \\ &= \frac{[A_l^\alpha P_n^\alpha, A_r^\alpha Q_n^\alpha]}{[B_l^\alpha + C_l^\alpha (P_n^\alpha)^s, B_r^\alpha + C_r^\alpha (Q_n^\alpha)^s]} \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{A_l^\alpha P_n^\alpha}{B_r^\alpha + C_r^\alpha (Q_n^\alpha)^s}, \frac{A_r^\alpha Q_n^\alpha}{B_l^\alpha + C_l^\alpha (P_n^\alpha)^s} \right]$$

Böylelikle, $\alpha \in (0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\begin{aligned} P_{n+1}^\alpha &= \frac{A_l^\alpha P_n^\alpha}{B_r^\alpha + C_r^\alpha (Q_n^\alpha)^s} \\ Q_{n+1}^\alpha &= \frac{A_r^\alpha Q_n^\alpha}{B_l^\alpha + C_l^\alpha (P_n^\alpha)^s} \end{aligned} \quad (4.4)$$

sistemine ulaşılır. Kolaylıkla görülebilir ki; $\alpha \in (0,1]$ ve her (P_0^α, Q_0^α) başlangıç koşulu için bu sistemin bir tek (P_n^α, Q_n^α) çözümü vardır.

(P_0^α, Q_0^α) başlangıç koşulu ile (P_n^α, Q_n^α) , (4.4) sisteminin çözümü olsun.

Amacımız,

$$[t_n]^\alpha = [P_n^\alpha, Q_n^\alpha], \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha \in (0,1] \quad (4.5)$$

olacak şekilde $[P_n^\alpha, Q_n^\alpha]$ nın t_0 başlangıç koşulu ile birlikte, (4.1) denklemini sağlayan bir (t_n) çözümü belirlediğini kanıtlamaktır.

$t_0, A, B, C \in \mathbb{R}_F^+$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ için, $\alpha_2 \geq \alpha_1$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} 0 &< A_l^{\alpha_1} \leq A_l^{\alpha_2} \leq A_r^{\alpha_2} \leq A_r^{\alpha_1} \\ 0 &< B_l^{\alpha_1} \leq B_l^{\alpha_2} \leq B_r^{\alpha_2} \leq B_r^{\alpha_1} \\ 0 &< C_l^{\alpha_1} \leq C_l^{\alpha_2} \leq C_r^{\alpha_2} \leq C_r^{\alpha_1} \\ 0 &< P_0^{\alpha_1} \leq P_0^{\alpha_2} \leq Q_0^{\alpha_2} \leq Q_0^{\alpha_1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tümevarım ile aşağıdaki önermenin her $n \in \mathbb{N}_0$ için doğruluğu gösterilebilir:

$$0 < P_n^{\alpha_1} \leq P_n^{\alpha_2} \leq Q_n^{\alpha_2} \leq Q_n^{\alpha_1} \quad (4.7)$$

Bu eşitsizliğin $n=0$ için doğruluğu (4.6) dan biliniyor. $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, (4.7)'nin $n=k$ için doğru olduğunu varsayalım ve $n=k+1$ için de doğru olacağını gösterelim:

$$0 < P_k^{\alpha_1} \leq P_k^{\alpha_2} \leq Q_k^{\alpha_2} \leq Q_k^{\alpha_1} \quad (4.8)$$

olsun. (4.4), (4.6) ve (4.8) ile aşağıdaki eşitsizliklere ulaşılır:

$$P_{k+1}^{\alpha_1} = \frac{A_l^{\alpha_1} P_k^{\alpha_1}}{B_r^{\alpha_1} + C_r^{\alpha_1} (Q_k^{\alpha_1})^s} \leq \frac{A_l^{\alpha_2} P_k^{\alpha_2}}{B_r^{\alpha_2} + C_r^{\alpha_2} (Q_k^{\alpha_2})^s} = P_{k+1}^{\alpha_2}$$

$$P_{k+1}^{\alpha_2} = \frac{A_l^{\alpha_2} P_k^{\alpha_2}}{B_r^{\alpha_2} + C_r^{\alpha_2} (Q_k^{\alpha_2})^s} \leq \frac{A_r^{\alpha_2} Q_k^{\alpha_2}}{B_l^{\alpha_2} + C_l^{\alpha_2} (P_k^{\alpha_2})^s} = Q_{k+1}^{\alpha_2}$$

$$Q_{k+1}^{\alpha_2} = \frac{A_r^{\alpha_2} Q_k^{\alpha_2}}{B_l^{\alpha_2} + C_l^{\alpha_2} (P_k^{\alpha_2})^s} \leq \frac{A_r^{\alpha_1} Q_k^{\alpha_1}}{B_l^{\alpha_1} + C_l^{\alpha_1} (P_k^{\alpha_1})^s} = Q_{k+1}^{\alpha_1}$$

Yani, $0 < P_{k+1}^{\alpha_1} \leq P_{k+1}^{\alpha_2} \leq Q_{k+1}^{\alpha_2} \leq Q_{k+1}^{\alpha_1}$ olacaktır. Bu da (4.7) kanıtlandı demektir. Bu sayede, bulanık sayı olma şartlarından konvekslik ve normallik şartları sağlanmış olur.

$\alpha \in (0,1]$ olmak üzere (4.4) sistemi kullanılarak

$$P_1^\alpha = \frac{A_l^\alpha P_0^\alpha}{B_r^\alpha + C_r^\alpha (Q_0^\alpha)^s}, \quad Q_1^\alpha = \frac{A_r^\alpha Q_0^\alpha}{B_l^\alpha + C_l^\alpha (P_0^\alpha)^s} \quad (4.9)$$

eşitliklerine ulaşılabilir. $t_0, A, B, C \in \mathbb{R}_F^+$ olması nedeniyle üst yarı süreklidirler. Böylece $P_0^\alpha, Q_0^\alpha, A_l^\alpha, A_r^\alpha, B_l^\alpha, B_r^\alpha, C_l^\alpha, C_r^\alpha$ sol süreklidir. (4.9) ile P_1^α ve Q_1^α nın da sol sürekli olduğu sonucuna ulaşılır. İteratif bir şekilde devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}_0$ için P_n^α, Q_n^α nın da sol sürekli olduğu elde edilebilir. Bu da t_n nin üst yarı sürekli olması demektir. Böylece üst yarı süreklilik şartı sağlanmış olur.

$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [P_n^\alpha, Q_n^\alpha]}$ kümesinin kompakt olduğunu göstermek için $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [P_n^\alpha, Q_n^\alpha]$ nın sınırlı küme olduğunu kanıtlamak yeterli olacaktır.

$t_0, A, B, C \in \mathbb{R}_F^+$ olması nedeniyle,

$$\begin{aligned} [A_l^\alpha, A_r^\alpha] &\subset [m_A, M_A] \\ [B_l^\alpha, B_r^\alpha] &\subset [m_B, M_B] \\ [C_l^\alpha, C_r^\alpha] &\subset [m_C, M_C] \\ [P_0^\alpha, Q_0^\alpha] &\subset [m_0, M_0], \quad \alpha \in (0,1] \end{aligned} \quad (4.10)$$

özelliklerini sağlayacak şekilde $m_A, M_A, m_B, M_B, m_C, M_C, m_0, M_0 > 0$ reel sayıları vardır.

$n=1$ olsun. (4.9) ve (4.10) ile $\alpha \in (0,1]$ için

$$[P_1^\alpha, Q_1^\alpha] \subset \left[\frac{m_A m_0}{M_B + M_C M_0^s}, \frac{M_A M_0}{m_B + m_C m_0^s} \right] \quad (4.11)$$

olur ve buradan

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [P_1^\alpha, Q_1^\alpha] \subset \left[\frac{m_A m_0}{M_B + M_C M_0^s}, \frac{M_A M_0}{m_B + m_C m_0^s} \right] \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) den $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [P_1^\alpha, Q_1^\alpha]}$ kompakt ve $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [P_1^\alpha, Q_1^\alpha]} \subset (0, \infty)$ dur.

İndüksiyon ile her $n \in \mathbb{N}_1$ için

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [P_n^\alpha, Q_n^\alpha]} \text{ kompakt ve } \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [P_n^\alpha, Q_n^\alpha]} \subset (0, \infty) \quad (4.13)$$

özellikleri kanıtlanabilir. Böylelikle, (4.7), (4.13) ve P_n^α, Q_n^α sol süreklidir bilgilerine ulaştık. O zaman $[P_n^\alpha, Q_n^\alpha]$, (4.5) sağlanacak şekilde bir (t_n) pozitif bulanık sayı dizisi belirler.

t_0 başlangıç koşulu için (t_n) dizisi, (4.1) denklemini sağlar:

$$[t_{n+1}]^\alpha = [P_{n+1}^\alpha, Q_{n+1}^\alpha] = \left[\frac{A_l^\alpha P_n^\alpha}{B_r^\alpha + C_r^\alpha (Q_n^\alpha)^s}, \frac{A_r^\alpha Q_n^\alpha}{B_l^\alpha + C_l^\alpha (P_n^\alpha)^s} \right] = \left[\frac{A t_n}{B + C t_n^s} \right]^\alpha, \quad \alpha \in (0,1]$$

olduğundan, (t_n) dizisi t_0 ile birlikte (4.1) in çözümüdür. Varsayalım ki (4.1) denklemini, t_0 başlangıç koşulu için (t_n) den farklı bir $(\hat{t}_n)$ çözümüne de sahip olsun. Yukarıdaki süreç bu çözüm için tekrarlanırsa, $\alpha \in (0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$[\hat{t}_n]^\alpha = [P_n^\alpha, Q_n^\alpha] \quad (4.14)$$

olacaktır. (4.5), (4.14) ve $[t_n]^\alpha = [\hat{t}_n]^\alpha$ neticesinde $(t_n) = (\hat{t}_n)$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2 $A_l^{\bar{\alpha}} > B_r^{\bar{\alpha}}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\bar{\alpha} \in (0,1]$ var ise (4.1) denklemini sınırsız çözümlere sahiptir.

İspat. $A_l^{\bar{\alpha}} > B_r^{\bar{\alpha}}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $A_l^{\bar{\alpha}} \geq A_l^{\bar{\alpha}} > B_r^{\bar{\alpha}} \geq B_l^{\bar{\alpha}}$ eşitsizliği doğrudur. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$P_n^{\bar{\alpha}} = \omega_n, \quad Q_n^{\bar{\alpha}} = \gamma_n, \quad \frac{A_l^{\bar{\alpha}}}{C_r^{\bar{\alpha}}} = a, \quad \frac{B_r^{\bar{\alpha}}}{C_r^{\bar{\alpha}}} = b, \quad \frac{A_r^{\bar{\alpha}}}{C_l^{\bar{\alpha}}} = c, \quad \frac{B_l^{\bar{\alpha}}}{C_l^{\bar{\alpha}}} = d$$

olduğunu kabul edelim. Böylece, Teorem 3.6'yı (4.4) sistemi için kullanabiliriz. $A_l^{\bar{\alpha}} > B_r^{\bar{\alpha}}$ yani $a > b$ olduğundan $\alpha = \bar{\alpha}$ için (4.4) sisteminin (ω_0, γ_0) başlangıç koşulu ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n) = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n) = \infty \quad (4.15)$$

özelliklerini doğrulayan bir (ω_n, γ_n) çözümü vardır. Ayrıca, $\omega_0 < \gamma_0$ olduğunda

$$\begin{aligned} [t_0]^\alpha &= [P_0^\alpha, Q_0^\alpha], \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ [t_0]^\alpha &= [P_0^{\bar{\alpha}}, Q_0^{\bar{\alpha}}] = [\omega_0, \gamma_0] \end{aligned} \quad (4.16)$$

özelliklerini doğrulayan bir t_0 pozitif bulanık sayısı elde edilebilir.

$0 < \alpha \leq 1$ için $[t_n]^\alpha = [P_n^\alpha, Q_n^\alpha]$ olmak kaydıyla (t_n) , başlangıç koşulu olan t_0 ile (4.1) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. (4.16) eşitlikleri doğru ve (P_n^α, Q_n^α) , (4.4) sisteminin çözümü olsun. O zaman,

$$[t_n]^{\bar{\alpha}} = [P_n^{\bar{\alpha}}, Q_n^{\bar{\alpha}}] = [\omega_n, \gamma_n] \quad (4.17)$$

olduğu söylenebilir. (4.15) ile (4.17) den hareketle ve supremum tüm $0 < \alpha \leq 1$ için alınmak üzere,

$$\|t_n\| = \sup \max \left\{ |P_n^\alpha|, |Q_n^\alpha| \right\} \geq \max \left\{ |P_n^{\bar{\alpha}}|, |Q_n^{\bar{\alpha}}| \right\} = Q_n^{\bar{\alpha}} \quad (4.18)$$

olduğundan (t_n) çözümü sınırsızdır.

Örnek 4.1. (4.1) bulanık fark denklemi için $s = 2$ ve

$$A = \begin{cases} x-3, & 3 \leq x \leq 4, \\ 5-x, & 4 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 4x-1, & 0.25 \leq x \leq 0.50, \\ 3-4x, & 0.50 \leq x \leq 0.75, \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} x-2, & 2 \leq x \leq 3, \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

ile

$$t_0 = \begin{cases} 10x-1, & 0.10 \leq x \leq 0.20, \\ 3-10x, & 0.20 \leq x \leq 0.30 \end{cases}$$

şeklinde olsun. Bu durumda,

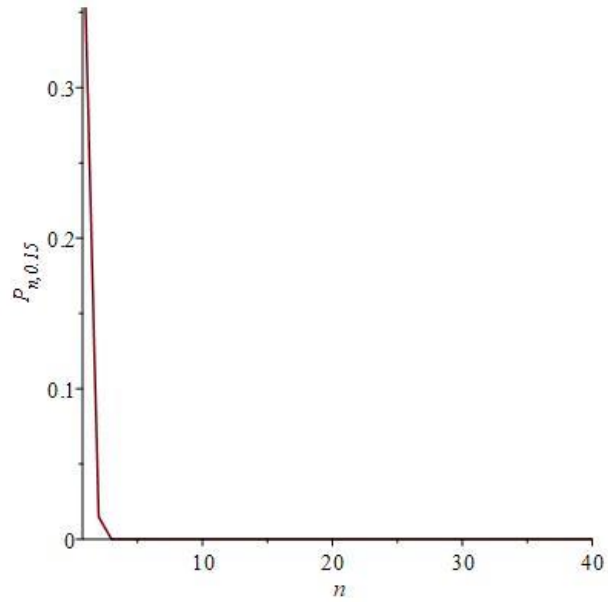
$$[A]^\alpha = [\alpha+3, 5-\alpha] \text{ ve } [B]^\alpha = \left[\frac{\alpha+1}{4}, \frac{3-\alpha}{4} \right] \text{ elde edilir.}$$

Her $\alpha \in (0,1]$ için $A_1^\alpha > B_1^\alpha$ olup, Teorem 4.2'ye ait koşulun sağlandığı görülmektedir.

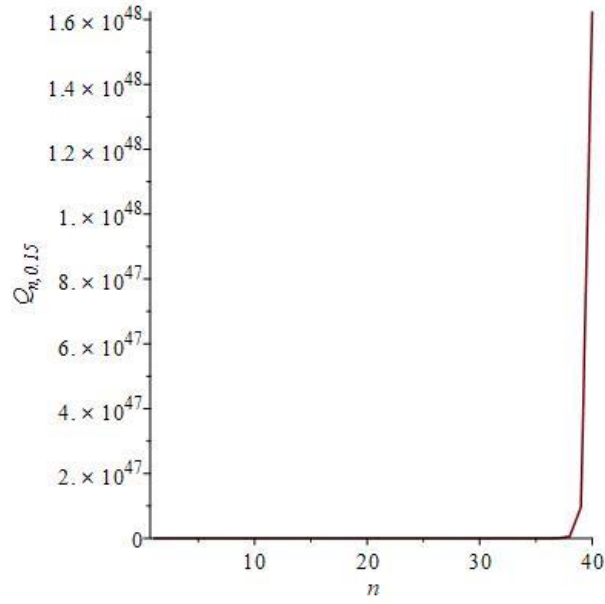
Yani (4.1) bulanık fark denklemi verilen parametreler için sınırsız çözümlere sahiptir.

n	$P_n^{0.15}$	$Q_n^{0.15}$
0	1,15000E-01	2,85000E-01
1	3,53340E-01	4,37513E+00
2	1,49583E-02	3,81694E+01
3	8,39937E-06	6,42826E+02
4	1,66307E-11	1,08442E+04
5	1,15709E-19	1,82937E+05
6	2,82887E-30	3,08606E+06
7	2,43026E-43	5,20606E+07
8	7,33643E-59	8,78239E+08
9	7,78233E-77	1,48155E+10
10	2,90086E-97	2,49931E+11
11	3,79957E-120	4,21623E+12
12	1,74878E-145	7,11260E+13
13	2,82832E-173	1,19986E+15
14	1,60737E-203	2,02412E+16
15	3,20991E-236	3,41460E+17

Şekil 4.1. $\alpha = 0.15$ için P_n ve Q_n değerleri



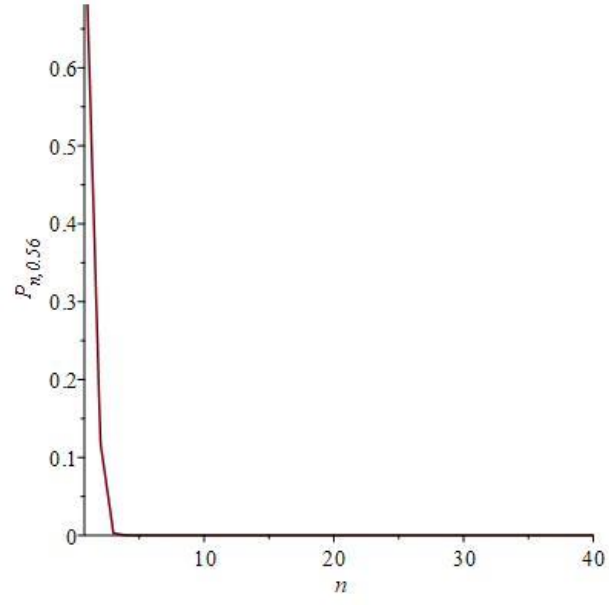
Şekil 4.2. $\alpha = 0.15$ için P_n değerleri



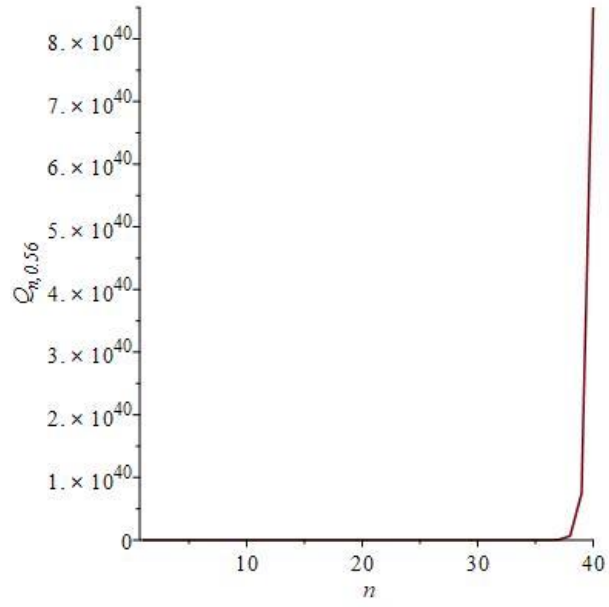
Şekil 4.3. $\alpha = 0.15$ için Q_n değerleri

n	$P_n^{0.56}$	$Q_n^{0.56}$
0	1,56000E-01	2,44000E-01
1	6,81587E-01	2,39522E+00
2	1,19262E-01	6,73396E+00
3	2,71117E-03	7,01172E+01
4	5,70667E-07	7,98219E+02
5	9,26895E-13	9,08741E+03
6	1,16156E-20	1,03457E+05
7	1,12309E-30	1,17782E+06
8	8,37825E-43	1,34090E+07
9	4,82230E-57	1,52656E+08
10	2,14150E-73	1,73793E+09
11	7,33745E-92	1,97857E+10
12	1,93971E-112	2,25252E+11
13	3,95631E-135	2,56441E+12
14	6,22597E-160	2,91948E+13
15	7,55940E-187	3,32372E+14

Şekil 4.4. $\alpha = 0.56$ için P_n ve Q_n değerleri



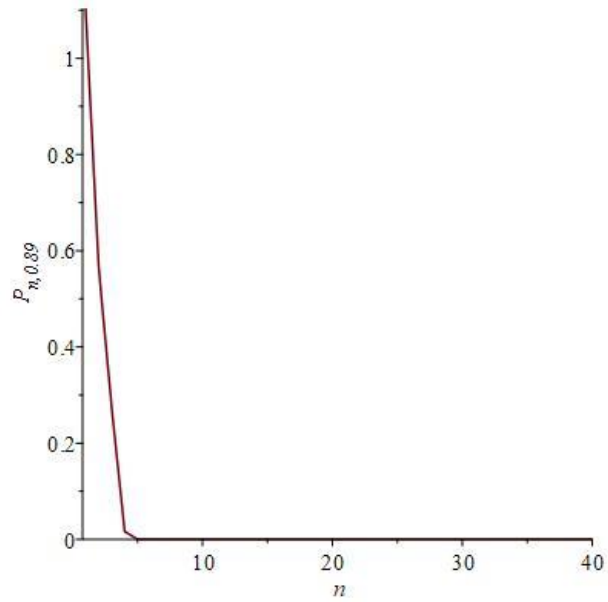
Şekil 4.5. $\alpha = 0.56$ için P_n değerleri



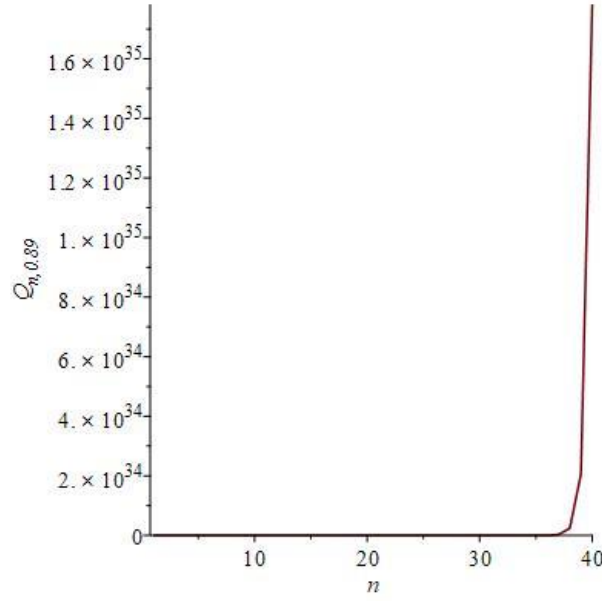
Şekil 4.6. $\alpha = 0.56$ için Q_n değerleri

n	$P_n^{0.89}$	$Q_n^{0.89}$
0	1,89000E-01	2,11000E-01
1	1,10399E+00	1,50627E+00
2	5,66287E-01	1,54971E+00
3	2,75477E-01	4,55190E+00
4	1,64948E-02	2,70424E+01
5	2,82064E-05	2,34835E+02
6	6,39750E-10	2,04269E+03
7	1,91776E-16	1,77682E+04
8	7,59799E-25	1,54555E+05
9	3,97853E-35	1,34438E+06
10	2,75338E-47	1,16940E+07
11	2,51844E-61	1,01719E+08
12	3,04449E-77	8,84795E+08
13	4,86429E-95	7,69631E+09
14	1,02717E-114	6,69457E+10
15	2,86673E-136	5,82321E+11

Şekil 4.7. $\alpha = 0.89$ için P_n ve Q_n değerleri



Şekil 4.8. $\alpha = 0.89$ için P_n değerleri



Şekil 4.9. $\alpha = 0.89$ için Q_n değerleri

Teorem 4.3. Her $\alpha \in (0,1]$ için $B_l^\alpha > A_r^\alpha$ ise (4.1) bulanık fark denkleminin her pozitif çözümü sınırlı ve dirençlidir.

İspat. Her $\alpha \in (0,1]$ için, $A_l^\alpha \leq A_r^\alpha < B_l^\alpha \leq B_r^\alpha$ olduğunu kabul edelim. (t_n) , (4.5)'i sağlayacak şekilde (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. Teorem 3.4'ü (4.4) sistemi için ele alalım. O halde, her $n \in \mathbb{N}_1$ için $0 < P_n^\alpha < P_0^\alpha$ ve $0 < Q_n^\alpha < Q_0^\alpha$ yani

$$[P_n^\alpha, Q_n^\alpha] \subset [0, Q_0^\alpha] \quad (4.19)$$

olduğu görülür. (t_n) pozitif bulanık sayı dizisidir, bu da şu çıkarımı yapmamızı sağlar:

Öyle bir $Q > 0$ sabiti vardır ki her $\alpha \in (0,1]$ için $Q_0^\alpha \leq Q$ özelliğini sağlar. Böylelikle $n \in \mathbb{N}_1$ için

$$[P_n^\alpha, Q_n^\alpha] \subset [0, Q] \quad (4.20)$$

sonucuna ulaşılır ve buradan $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [P_n^\alpha, Q_n^\alpha] \subset [0, Q]$ ve $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [P_n^\alpha, Q_n^\alpha]} \subseteq [0, Q]$ elde edilir.

Örnek 4.2. (4.1) bulanık fark denklemi için $s=1$ ve

$$A = \begin{cases} 5x-1, & 0.20 \leq x \leq 0.40, \\ 3-5x, & 0.40 \leq x \leq 0.60, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 5x-\frac{7}{2}, & 0.70 \leq x \leq 0.90, \\ \frac{11}{2}-5x, & 0.90 \leq x \leq 1.10, \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} \frac{10}{3}x-3, & 0.90 \leq x \leq 1.20, \\ 5-\frac{10}{3}x, & 1.20 \leq x \leq 1.50 \end{cases}$$

ile

$$t_0 = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

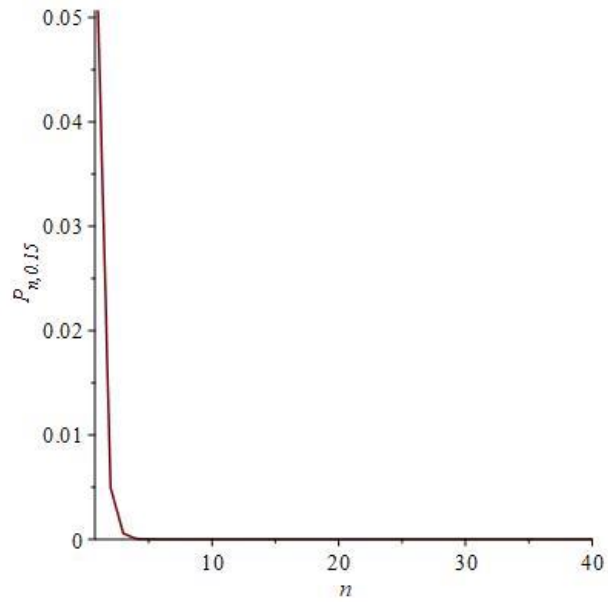
şeklinde olsun. Bu durumda,

$$[A]^\alpha = \left[\frac{\alpha+1}{5}, \frac{3-\alpha}{5} \right] \text{ ve } [B]^\alpha = \left[\frac{2\alpha+7}{10}, \frac{11-2\alpha}{10} \right]$$

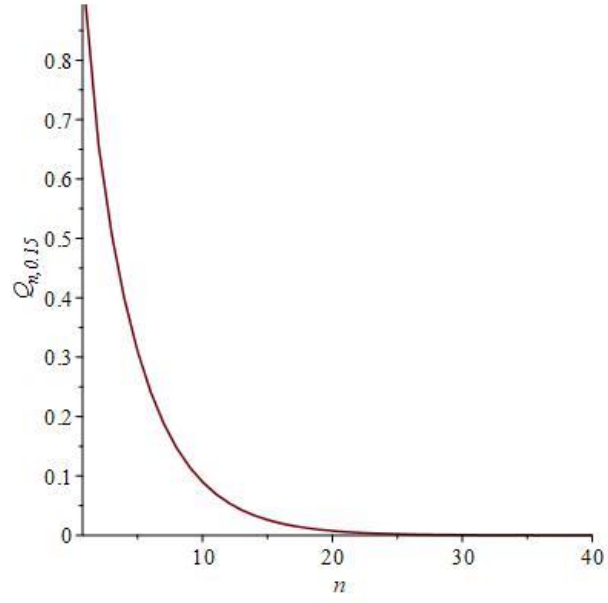
elde edilir. Her $\alpha \in (0,1]$ için $A_i^\alpha < B_i^\alpha$ olup, Teorem 4.3'e ait koşulun sağlandığı görülmektedir. Yani (4.1) bulanık fark denkleminin verilen parametreler için her pozitif çözümü sınırlı ve dirençlidir.

n	$P_n^{0.15}$	$Q_n^{0.15}$
0	1,15000E+00	2,85000E+00
1	5,07021E-02	8,94179E-01
2	4,91832E-03	6,55191E-01
3	5,59092E-04	5,08351E-01
4	7,10585E-05	3,96645E-01
5	9,92246E-06	3,09680E-01
6	1,50085E-06	2,41802E-01
7	2,42784E-07	1,88804E-01
8	4,15258E-08	1,47422E-01
9	7,43554E-09	1,15111E-01
10	1,38197E-09	8,98810E-02
11	2,64707E-10	7,01810E-02
12	5,19426E-11	5,47990E-02
13	1,03909E-11	4,27880E-02
14	2,11076E-12	3,34100E-02
15	4,33997E-13	2,60870E-02

Şekil 4.10. $\alpha = 0.15$ için P_n ve Q_n değerleri



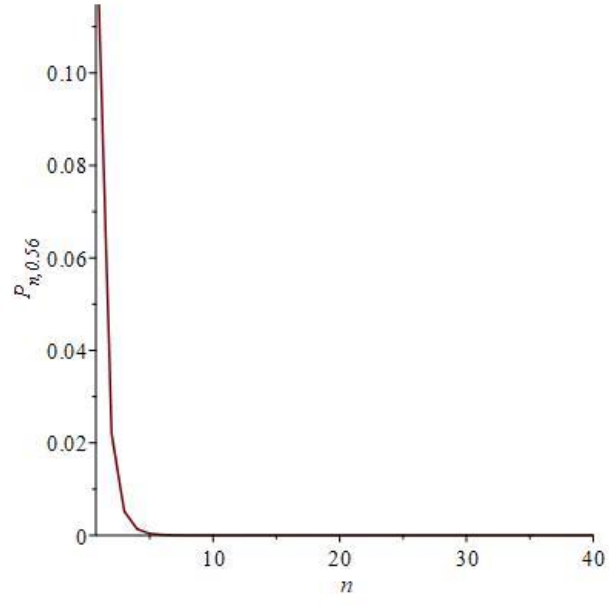
Şekil 4.11. $\alpha = 0.15$ için P_n değerleri



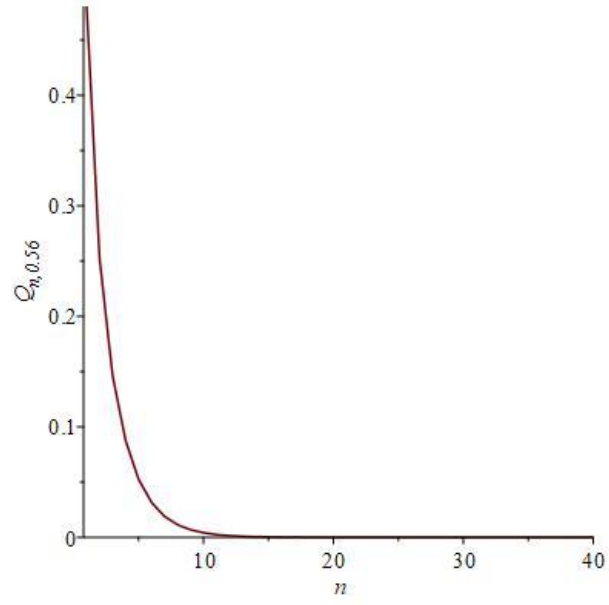
Şekil 4.12. $\alpha = 0.15$ için Q_n değerleri

n	$P_n^{0.56}$	$Q_n^{0.56}$
0	1,56000E+00	2,44000E+00
1	1,14845E-01	4,80501E-01
2	2,20091E-02	2,50878E-01
3	5,19362E-03	1,46532E-01
4	1,36954E-03	8,74660E-02
5	3,86866E-04	5,24710E-02
6	1,14097E-04	3,15190E-02
7	3,45620E-05	1,89390E-02
8	1,06426E-05	1,13820E-02
9	3,31002E-06	6,84000E-03
10	1,03572E-06	4,11100E-03
11	3,25266E-07	2,47100E-03
12	1,02375E-07	1,48500E-03
13	3,22642E-08	8,92000E-04
14	1,01765E-08	5,36000E-04
15	3,21130E-09	3,22000E-04

Şekil 4.13. $\alpha = 0.56$ için P_n ve Q_n değerleri



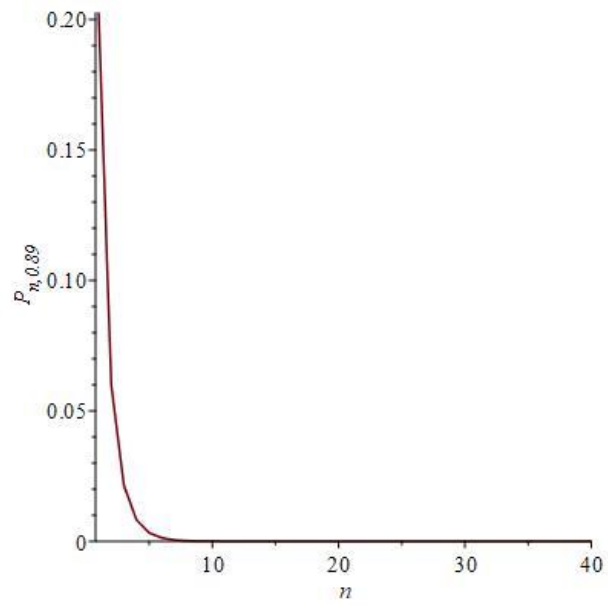
Şekil 4.14. $\alpha = 0.56$ için P_n değerleri



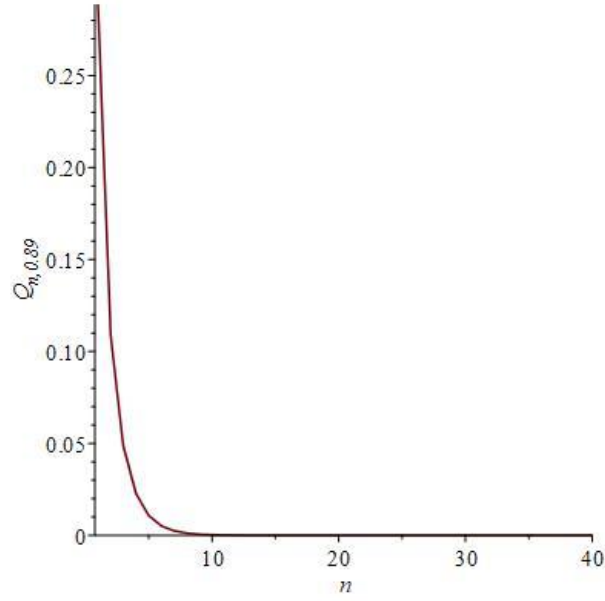
Şekil 4.15. $\alpha = 0.56$ için Q_n değerleri

n	$P_n^{0.89}$	$Q_n^{0.89}$
0	1,89000E+00	2,11000E+00
1	2,02751E-01	2,88757E-01
2	5,99669E-02	1,09326E-01
3	2,14492E-02	4,86670E-02
4	8,25636E-03	2,27430E-02
5	3,28502E-03	1,08120E-02
6	1,32759E-03	5,17400E-03
7	5,40543E-04	2,48300E-03
8	2,20877E-04	1,19200E-03
9	9,04108E-05	5,73000E-04
10	3,70381E-05	2,75000E-04
11	1,51792E-05	1,32000E-04
12	6,22205E-06	6,40000E-05
13	2,55069E-06	3,10000E-05
14	1,04568E-06	1,50000E-05
15	4,28700E-07	7,00000E-06

Şekil 4.16. $\alpha = 0.89$ için P_n ve Q_n değerleri



Şekil 4.17. $\alpha = 0.89$ için P_n değerleri



Şekil 4.18. $\alpha = 0.89$ için Q_n değerleri

Teorem 4.4. Her $\alpha \in (0,1]$ için $B_l^\alpha > A_r^\alpha$ ise (4.1) bulanık fark denkleminin her pozitif çözümü sıfıra yakınsar.

İspat. Herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ için $A_r^\alpha < B_l^\alpha$ olmak üzere (t_n) , (4.2) yi doğrulayacak şekilde (4.1) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. $A_l^\alpha \leq A_r^\alpha < B_l^\alpha \leq B_r^\alpha$ olduğu açıktır. Teorem 3.3'ü, (4.4) sistemi için kullanabiliriz. O zaman,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^\alpha = 0 \quad (4.21)$$

sonucuna ulaşılır. (4.21) kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(t_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \max \left\{ |P_n^\alpha - 0|, |Q_n^\alpha - 0| \right\} \right\} = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir.

Örnek 4.3. (4.1) bulanık fark denklemi için $s = 3$ ve

$$A = \begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}, & 0.10 \leq x \leq 0.50, \\ \frac{9}{4} - \frac{5}{2}x, & 0.50 \leq x \leq 0.90, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{17}{4}, & 1.70 \leq x \leq 2.10, \\ \frac{25}{4} - \frac{5}{2}x, & 2.10 \leq x \leq 2.50, \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} \frac{10}{3}x - 8, & 2.40 \leq x \leq 2.70, \\ 10 - \frac{10}{3}x, & 2.70 \leq x \leq 3.00 \end{cases}$$

ile

$$t_0 = \begin{cases} \frac{5}{2}x - 1, & 0.40 \leq x \leq 0.80, \\ 3 - \frac{5}{2}x, & 0.80 \leq x \leq 1.20 \end{cases}$$

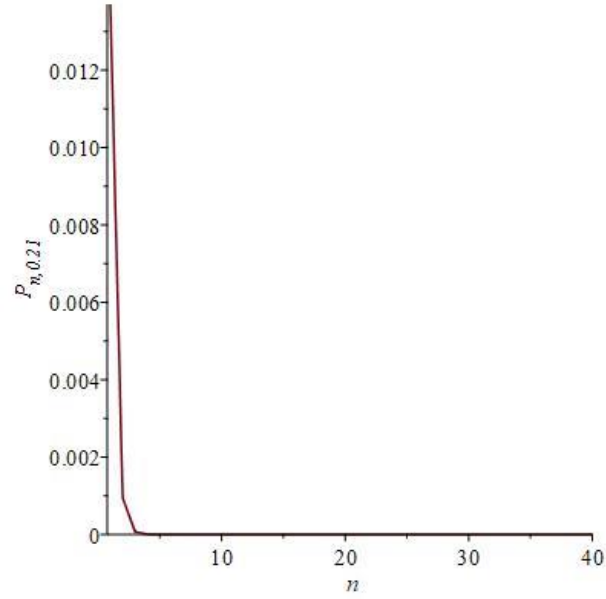
şeklinde olsun. Bu durumda,

$$[A]^\alpha = \left[\frac{4\alpha + 1}{10}, \frac{9 - 4\alpha}{10} \right] \text{ ve } [B]^\alpha = \left[\frac{4\alpha + 17}{10}, \frac{25 - 4\alpha}{10} \right]$$

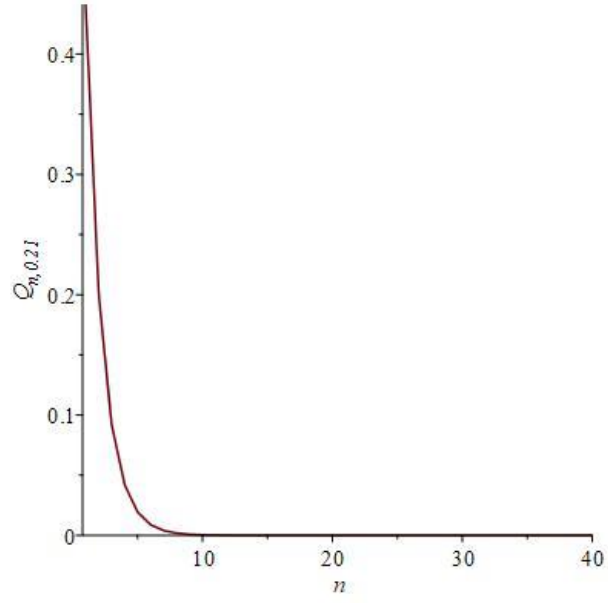
elde edilir. Her $\alpha \in (0,1]$ için $A_r^\alpha < B_l^\alpha$ olup, Teorem 4.4'e ait koşulun sağlandığı görülmektedir. Yani (4.1) bulanık fark denkleminin verilen parametreler için her pozitif çözümü sıfıra yakınsar.

n	$P_n^{0.21}$	$Q_n^{0.21}$
0	4,84000E-01	1,11600E+00
1	1,37047E-02	4,41369E-01
2	9,44963E-04	2,01881E-01
3	7,12547E-05	9,23400E-02
4	5,42149E-06	4,22360E-02
5	4,12857E-07	1,93190E-02
6	3,14425E-08	8,83600E-03
7	2,39463E-09	4,04200E-03
8	1,82372E-10	1,84900E-03
9	1,38893E-11	8,46000E-04
10	1,05779E-12	3,87000E-04
11	8,05603E-14	1,77000E-04
12	6,13539E-15	8,10000E-05
13	4,67265E-16	3,70000E-05
14	3,55864E-17	1,70000E-05
15	2,71022E-18	8,00000E-06

Şekil 4.19. $\alpha = 0.21$ için P_n ve Q_n değerleri



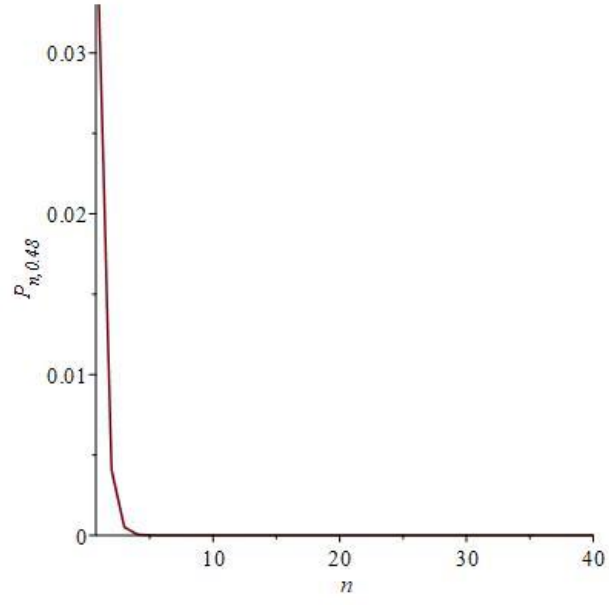
Şekil 4.20. $\alpha = 0.21$ için P_n değerleri



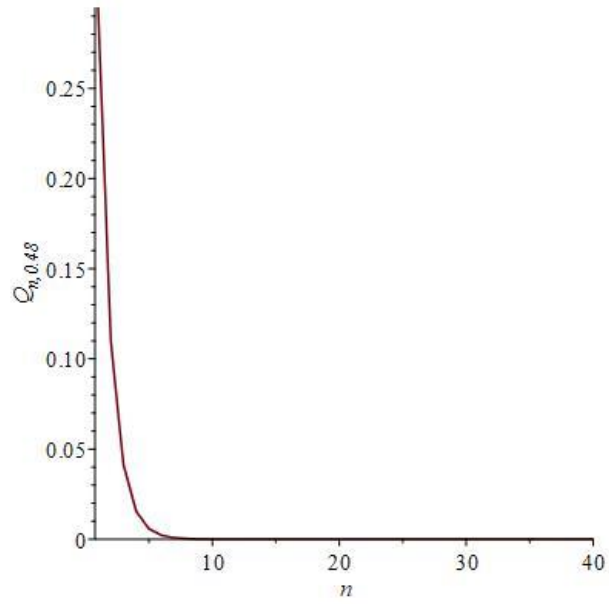
Şekil 4.21. $\alpha = 0.21$ için Q_n değerleri

n	$P_n^{0.48}$	$Q_n^{0.48}$
0	5,92000E-01	1,00800E+00
1	3,30329E-02	2,94925E-01
2	4,05062E-03	1,10358E-01
3	5,11619E-04	4,12966E-02
4	6,47226E-05	1,54535E-02
5	8,18844E-06	5,78281E-03
6	1,03597E-06	2,16397E-03
7	1,31068E-07	8,09773E-04
8	1,65822E-08	3,03023E-04
9	2,09792E-09	1,13393E-04
10	2,65422E-10	4,24326E-05
11	3,35802E-11	1,58786E-05
12	4,24845E-12	5,94188E-06
13	5,37498E-13	2,22349E-06
14	6,80024E-14	8,32047E-07
15	8,60342E-15	3,11358E-07

Şekil 4.22. $\alpha = 0.48$ için P_n ve Q_n değerleri



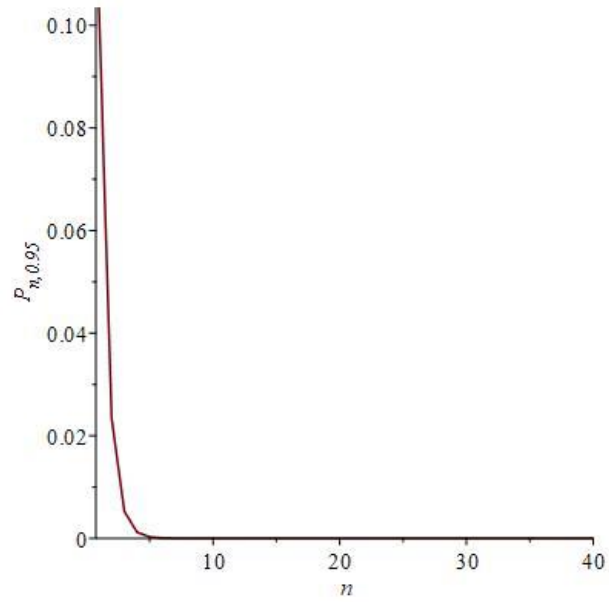
Şekil 4.23. $\alpha = 0.48$ için P_n değerleri



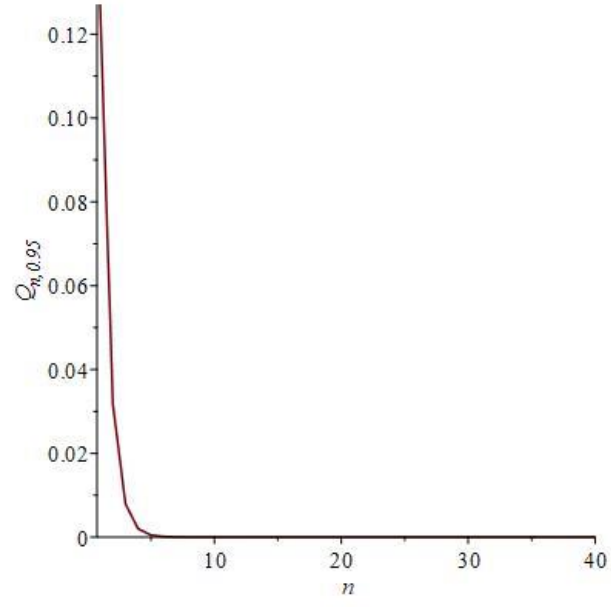
Şekil 4.24. $\alpha = 0.48$ için Q_n değerleri

n	$P_n^{0.95}$	$Q_n^{0.95}$
0	7,80000E-01	8,20000E-01
1	1,03512E-01	1,27125E-01
2	2,33752E-02	3,17359E-02
3	5,29229E-03	7,93384E-03
4	1,19825E-03	1,98346E-03
5	2,71303E-04	4,95865E-04
6	6,14270E-05	1,23966E-04
7	1,39080E-05	3,09916E-05
8	3,14898E-06	7,74789E-06
9	7,12977E-07	1,93697E-06
10	1,61429E-07	4,84243E-07
11	3,65499E-08	1,21061E-07
12	8,27545E-09	3,02652E-08
13	1,87369E-09	7,56630E-09
14	4,24231E-10	1,89157E-09
15	9,60523E-11	4,72894E-10

Şekil 4.25. $\alpha = 0.95$ için P_n ve Q_n değerleri



Şekil 4.26. $\alpha = 0.95$ için P_n değerleri



Şekil 4.27. $\alpha = 0.95$ için Q_n değerleri

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, şu ana kadar üzerinde çalışılmış olan birçok bulanık fark denklemi incelendi ve yapılan çalışmalar göz önünde bulundurularak, $t_0, A, B, C \in \mathbb{R}_F^+$ için

$$t_{n+1} = \frac{At_n}{B + Ct_n^s}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad s \in \mathbb{Z}^+$$

bulanık fark denklemi tanımlandı. Tanımlanan denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, sınırlılığı ve yakınsaklığı incelendi.

Bu tezde tanımlanan denklemin basamağı artırılarak ya da denkleme farklı parametreler ve yeni terimler eklenerek daha kapsamlı denklemler tanımlanıp, bu denklemler üzerinde yeni çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Bede, B., 2013, *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Springer, New York.
- Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, *Metric Spaces of Fuzzy Sets*, World Scientific, Singapore.
- Elabbasy, E. M. and Eleissawy, S. M., 2013, Asymptotic behavior of two dimensional rational system of difference equations, *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms*, 20, 221-235.
- Han, C., Su, G., Li, L., Xia, G. and Sun, T., 2020, Eventual periodicity of the fuzzy max-difference equation $x_n = \max\{C, x_{n-m-k} / x_{n-m}\}$, *Advances in Difference Equations*, 673, 10 pages.
- Jia, L., Wang, C., Zhao, X. and Wei, W., 2022, Dynamic behavior of a fractional-type fuzzy difference system, *symmetry*, 14, 1337, 21 pages.
- Khastan, A., 2017, New solutions for first order linear fuzzy difference equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312, 156-166.
- Khastan, A., 2018, Fuzzy logistic difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(7), 55-66.
- Klir, G. and Yuan, B., 1995, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, New Jersey.
- Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Lavanya, A. P. and Lovenia, J. D. L., 2018, Positive solutions of a fuzzy nonlinear difference equations, *Tamsui Oxford Journal of Informational and Mathematical Sciences*, 32(2), 27-37.
- Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002a, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B / x_n$, *Soft Computing*, 6, 456-461.
- Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002b, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + x_n / x_{n-m}$, *Fuzzy Sets and Systems*, 129, 73-81.
- Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G., 2003, Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation, *Fuzzy Sets and Systems*, 140, 523-539.
- Rahman, G., Din, Q., Faizullah, F. and Khan, F. M., 2018, Qualitative behavior of a second-order fuzzy difference equation, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 34, 745-753.
- Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, *Lineer Fark Denklemleri*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.

- Sun, T., Xi, H., Su, G. and Qin, B., 2018, Dynamics of the fuzzy difference equation $z_n = \max\{1/z_{n-m}, \alpha_n/z_{n-r}\}$, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 11, 477-485.
- Sun, T., Su, G. and Qin, B., 2020, On the fuzzy difference equation $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-k})$, *Fuzzy Sets and Systems*, 387, 81-88.
- Wang, C., Su, X., Liu, P., Hu, X. and Li, R., 2017, On the dynamics of a five-order fuzzy difference equation, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10, 3303-3319.
- Wang, G. and Zhang, Q., 2018, Dynamical behavior of first-order nonlinear fuzzy difference equation, *International Journal of Computer Science*, 45(4), 552-559.
- Wang, C., Wei, W., Yang, Q. and Li, Y., 2019, On the periodicity of a max-type fuzzy difference equations, *American Journal of Electromagnetics and Applications*, 7(2), 13-18.
- Wang, C. and Li, J., 2020, Periodic solution for a max-type fuzzy difference equation, *Hindawi Journal of Mathematics*, 3094391, 12 pages.
- Wang, C., Li, J. and Jia, L., 2021, Dynamics of a high-order nonlinear fuzzy difference equations, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 11(1), 404-421.
- Yalçinkaya, İ., Atak, N. and Tollu, D. T., 2021, On a third-order fuzzy difference equation, *Journal of Prime Research in Mathematics*, 17(1), 59-69.
- Yalçinkaya, İ., Çalışkan, V. and Tollu, D. T., 2022, On a nonlinear fuzzy difference equation, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 71(1), 68-78.
- Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.