



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GAMMA REGRESYON MODELİNDE BAZI TAHMİN EDİCİLERİN
KARŞILAŞTIRILMASI

Merve KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Haziran - 2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Merve KORKMAZ tarafından hazırlanan "*GAMMA REGRESYON MODELİNDE BAZI TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI*" adlı tez çalışması 17/06/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Coşkun KUŞ

Danışman

Doç. Dr. Yasin ASAR

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Aydın KARAKOCA

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../.../2022 gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim KALAYCI
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Merve KORKMAZ
Tarih: 17/06/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GAMMA REGRESYON MODELİNDE BAZI TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Merve KORKMAZ

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Yasin ASAR

2022, xiii + 73 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Coşkun KUŞ

Doç. Dr. Yasin ASAR

Dr. Öğr. Üyesi Aydın KARAKOCA

Doğrusal modellere benzer olarak genelleştirilmiş doğrusal modellerin bir üyesi olan gamma regresyon modelinde de çoklu bağlantı problemi olduğunda en çok olabilirlik tahmin edicisinin performansı bu durumdan kötü etkilenmektedir. Bu çalışmada, gamma regresyon modellerinde çoklu bağlantı problemi olduğu durumlarda kullanılabilecek bazı tahmin ediciler incelenmiştir. Ayrıca Liu-tipi tahmin edicisinden yararlanılarak hemen hemen yansız Liu-tipi tahmin edicisi ile modifiye hemen hemen yansız Liu-tipi tahmin edicisi gamma regresyon modeli için önerilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin ve Liu-tipi tahmin edicisinin teorik özellikleri incelenerek birbirleriyle karşılaştırmaları yapılmıştır. Ayrıca bahsi geçen tahmin ediciler Monte Carlo simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması kullanılarak karşılaştırılmıştır. Nümerik çalışmalardan elde edilen sonuçlar teorik sonuçların doğruluğunu desteklemektedir.

Anahtar Kelimeler: Çoklu bağlantı problemi, Liu-tipi tahmin edici, Gamma regresyon modeli, Hemen hemen yansız tahmin edici, Modifiye hemen hemen yansız tahmin edici, Monte Carlo simülasyon.

ABSTRACT

MS THESIS

COMPARISON OF SOME ESTIMATORS IN GAMMA REGRESSION MODEL

Merve KORKMAZ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Yasin ASAR

2022, xiii + 73 Pages

Jury

Prof. Dr. Coşkun KUŞ

Assoc. Prof. Dr. Yasin ASAR

Assist. Prof. Dr. Aydın KARAKOCA

Similar to linear models, the performance of the maximum likelihood estimator is adversely affected when there is a multicollinearity problem in the gamma regression model, which is a member of the generalized linear models (GLM). In this study, some estimators that can be used in gamma regression models when there is a multicollinearity problem are examined. In addition, using the Liu-type estimator, a modified almost unbiased Liu-type estimator with a almost unbiased Liu-type estimator is proposed for the gamma regression model. The theoretical properties of the proposed estimators and the Liu-type estimator were examined and compared with each other. In addition, the aforementioned estimators were compared using a Monte Carlo simulation study and a real data application. The results obtained from the numerical studies support the accuracy of the theoretical results.

Key words: Multicollinearity problem, Liu-type estimator, Gamma regression model, Almost unbiased estimator, Modified almost unbiased estimator, Monte Carlo simulation.

ÖNSÖZ

Çalışmamın başından itibaren yardım ve desteklerini esirgemeyen, her zaman bilgilerini ve desteğini sakınmayan danışman hocam Doç. Dr. Yasin ASAR'a teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitim sürecinde maddi ve manevi destek sağlayan, aldığım her kararın arkasında duran, beni motive eden ve kendileri ile gurur duyduğum aileme teşekkürlerimi sunarım.

Merve KORKMAZ
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
TABLolar LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	5
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DOĞRUSAL MODELLER	11
3.1. Giriş	11
3.2. Üstel Aile	11
3.3. Olabilirlik Fonksiyonu	16
3.4. Parametre Tahmini	17
3.5. Ortalama Yanıtın Tahmini	21
3.6. $\hat{\beta}$ 'nin Asimptotik Dağılımı	22
4. GAMMA REGRESYON MODELİ	24
4.1. Gamma Regresyon Modeli	25
4.2. Çoklu Bağlantı Problemi	27
4.3. Yanlı Tahmin Ediciler	31
4.3.1. Gamma Ridge Tahmin Edicisi	32
4.3.2. Gamma Liu Tahmin Edicisi	33
4.3.3. Gamma Liu–Tipi Tahmin Edicisi	34
4.4. Hemen Hemen Yansız Tahmin Ediciler	34
4.4.1. Hemen Hemen Yansız Gamma Ridge Tahmin Edicisi	35
4.4.2. Hemen Hemen Yansız Gamma Liu Tahmin Edicisi	36
4.4.3. Hemen Hemen Yansız Gamma Liu–Tipi Tahmin Edicisi	38
4.5. Modifiye Hemen Hemen Yansız Tahmin Ediciler	39

4.5.1. Modifiye Hemen Hemen Yansız Gamma Ridge Tahmin Edicisi	39
4.5.2. Modifiye Hemen Hemen Yansız Gamma Liu Tahmin Edicisi	40
4.5.3. Modifiye Hemen Hemen Yansız Gamma Liu–Tipi Tahmin Edicisi	41
5. GAMMA LİU-TİPİ TAHMİN EDİCİSİ	42
5.1. Gamma Liu–tipi Tahmin Edicisinin Teorik Özellikleri	42
5.2. k Yanlılık Parametresinin Tahmini	43
5.3. d Parametresinin Tahmini.....	44
5.4. Genelleştirilmiş Gamma Liu–tipi Tahmin Edicisi	44
6. HEMEN HEMEN YANSIZ VE MODİFİYE HEMEN HEMEN YANSIZ GAMMA LİU-TİPİ TAHMİN EDİCİLERİN ÖZELLİKLERİ	47
6.1. Hemen Hemen Yansız Gamma Liu Tipi Tahmin Edicisinin Teorik Özellikleri	47
6.2. d Yanlılık Parametresinin Tahmini	48
6.3. Modifiye Hemen Hemen Yansız Liu Tipi Gamma Tahmin Edicisinin Teorik Özellikleri	49
6.4. d Yanlılık Parametresinin Tahmini	50
6.5. Tahmin Edicilerin Teorik Özelliklerinin Karşılaştırılması	50
6.5.1. Karesel Yan Karşılaştırması	50
6.5.2. Varyans Karşılaştırması	53
6.5.3. MMSE karşılaştırması	55
7. MONTE CARLO SİMÜLASYON ÇALIŞMASI	58
8. GERÇEK VERİ UYGULAMASI	63
9. SONUÇ VE ÖNERİLER	66
9.1. Sonuçlar	66
9.2. Öneriler	67
KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	72

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
8.1 k ve d değişimlerine bağlı tahmin edicilerin MSE'lerindeki değişim	65

TABLÖLAR LİSTESİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
7.1 Farklı n, p, ρ , ve ϕ değerleri için tahmin edicilerin simülasyon MSE değerleri. ..	61
7.2 Farklı n, p, ρ , ve ϕ değerleri için tahmin edicilerin simülasyon SB değerleri.	62
8.1 Body Fat verisinde parametre tahminleri ve MSE değerleri	63

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

y	Bağımlı değişken
z	Düzeltilmiş bağımlı değişken
$\mathbf{X}$	Veri matrisi
β	Regresyon katsayı vektörü
$\hat{\beta}$	β katsayı vektörünün tahmin edicisi
$\mathbf{W}$	Ağırlık matrisi
$\widehat{\mathbf{W}}$	Ağırlık matrisinin tahmini
α	β katsayı vektörünün kanonik hali
$\hat{\alpha}$	α 'nın tahmini
μ	y 'nin ortalaması
ϕ	Dağılım parametresi
ρ^2	Açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyon
Λ	Özdeğer matrisi
λ_i	i . öz değer
n	örneklem hacmi
p	Bağımsız değişken sayısı
σ^2	Modellerdeki hata teriminin varyansı
$\mathbf{I}$	$n \times n$ tipinde birim matris
$\mathbf{I}(\beta)$	Fisher bilgi matrisi
$\text{diag}(\mathbf{X})$	$\mathbf{X}$ matrisinin köşegen elemanları
$\text{tr}(\mathbf{X})$	$\mathbf{X}$ matrisinin izi
$\mathbf{X}^\top$	$\mathbf{X}$ matrisinin transpozu
$\oplus$	Matrisin köşegen elemanları
$E(\hat{\beta})$	$\hat{\beta}$ tahmin edicisinin beklenen değeri
$\text{bias}(\hat{\beta})$	$\hat{\beta}$ tahmin edicisinin yan vektörü
$\text{Cov}(\hat{\beta})$	$\hat{\beta}$ tahmin edicisinin varyans–kovaryans matrisi
$\text{Var}(\hat{\beta})$	$\hat{\beta}$ tahmin edicisinin varyansı
$V(\mu)$	μ 'nın varyansı
$\Phi^{-1}(\mathbf{x})$	Standart normal dağılımın birikimli olasılık fonksiyonunun tersi
$\sum$	Toplam sembolü

Kısaltmalar

GLM	Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller (Generalized linear models)
OLS	En Küçük Kareler (Ordinary Least Squares)
MLE	En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi (ML Estimator)
MSE	Hata Kareler Ortalaması (Mean Squared Error)
MMSE	Matris Hata Kareler Ortalaması
GLE	Gamma Liu Tahmin Edicisi
GRR	Gamma Ridge Tahmin Edicisi
GAURE	Hemen Hemen Yansız Gamma Ridge Tahmin Edicisi
GAULE	Hemen Hemen Yansız Gamma Liu Tahmin Edicisi
GLTE	Gamma Liu Tipi Tahmin Edicisi
GGLTE	Genelleştirilmiş Gamma Liu Tipi Tahmin Edicisi
GAULTE	Hemen Hemen Yansız Gamma Liu Tipi Tahmin Edicisi
GMAULTE	Modifiye Hemen Hemen Yansız Liu Tipi Tahmin Edicisi
AN	Asimptotik Normal Dağılım

1. GİRİŞ

İstatistikte kullanılan analiz yöntemlerinden birisi regresyon analizidir. Regresyon analizi bir veri grubunu modelleyerek çıkarımlarda bulunmaya yarar. Bu çıkarımlar açıklayıcı değişkenlerle yanıt değişkenleri arasındaki ilişkileri esas alarak ortaya çıkar. Regresyon modellerinden en yaygını doğrusal regresyon modelidir. Basit doğrusal regresyon modeli bir açıklayıcı değişken ve bir yanıt değişkeninden oluşurken çoklu doğrusal regresyon modeli bir yanıt değişkeni ve bu yanıt değişkenini açıkladığı düşünülen birden fazla bağımsız değişkenden oluşmaktadır. Ancak regresyon modelleriyle gerçek veriler tam olarak uyuşmamaktadır. Bu uyuşmazlığı açıklayan faktör ise hata terimidir. Doğrusal regresyon modellerinde gerçek verilerdeki bağımsız değişkenlerin sabit olduğu, hata teriminin ise ortalamasının 0, varyansının da σ^2 olduğu varsayılır. Hataların bu dağılımı oluşacak olan yanıt değişkenini etkiler. Bu durumda bağımsız değişkenlerin sabit bir değerine karşılık gelen yanıt değişkeni rasgele değişken olacaktır ve modelde yanıt değişkeninin ortalaması kullanılacaktır. O halde doğrusal regresyon modeli yanıt değişkeninin ortalamasını modeller. Model bu şekilde oluşturularak gerçek verilerde çok daha karmaşık olan ilişkilerin daha kolay incelenebilmesini ve kestirilebilmesini sağlar.

Regresyon modellerinde açıklayıcı değişkenlerin katsayıları olan bilinmeyen parametreleri de bulunmaktadır. Modelin doğrusallığını belirleyen bilinmeyen parametrelerinin modeldeki durumudur. Regresyon katsayılarının modeldeki durumlarına göre bu modeller doğrusal ya da doğrusal olmayan regresyon modelleri olarak ikiye ayrılırlar. Regresyon analizinin amaçlarından bir tanesi modellerdeki bilinmeyen parametreleri tahmin etmektir. Bilinmeyen parametreleri tahmin etmek için kullanılan tahmin yöntemleri bulunmaktadır. Bu yöntemlerden en yaygın olarak kullanılanlar en küçük kareler (OLS: ordinary least squares) ve en çok olabilirlik (MLE: maximum likelihood estimator) yöntemleridir. Bu tahmin ediciler regresyon modelleri için en iyi yansız tahmin ediciler olsalar da farklı durumlarda çok da iyi kestirimler sağlayamayabilirler. Örneğin açıklayıcı değişkenler arasında yakın doğrusal ilişkiler olması durumlarında bu tahmin edicilerin özellikleri bozulmaktadır. Yansız tahmin edicilerin tercih edilemeyeceği bu tür durumlarda yanlı tahmin ediciler kullanılabilir.

Regresyon modellerinde parametrelerin tahmin edicilerinin yansız olması önemli bir kriterken açıklayıcı değişkenler arasındaki yüksek doğrusal ilişkiler olunca yani çoklu bağlantı

problemiyle karşılaşıldığında yanlı tahmin ediciler kullanmak avantajlı hale gelmektedir. Bu düşünceyle Hoerl ve Kennard (1970) yanlı bir tahmin edici olan ridge tahmin edicisini önermiştir. Ridge tahmin edicisi OLS ve MLE tahmin edicilerinin kullanılmasının uygun olmadığı durumlarda iyi sonuçlar vermektedir. Aynı zamanda Liu (1993) yanlı bir tahmin edici olan Liu tahmin edicisini önermiştir. Daha sonra birçok araştırmada ridge ve Liu tahmin edicilerinin gerek teorik olarak gerekse nümerik olarak farklı modellerde performansları incelenmiştir. Liu (2003) çalışmasında ise ridge ve Liu tahmin edicisini harmanlayarak yeni bir tahmin edici olan Liu–tipi tahmin edicisini önermiştir. Önerilen bu tahmin ediciler doğrusal olmayan regresyon modellerinde ve genelleştirilmiş doğrusal modellerde (GLM: generalized linear models) de incelenmiştir.

GLM’den ilk olarak Nelder ve Wedderburn (1972)’in çalışmasında bahsedilmiştir. GLM doğrusal olmayan modellerle doğrusal modellerin birleşimi niteliğindedir. GLM’de normal dağılım veya sabit varyanslılık varsayımları olmak zorunda değildir. Ayrıca üstel dağılım ailesi grubundaki dağılımlardan oluşturulan GLM’ler Bernolli, binom, Poisson ve negatif binom gibi kesikli dağılımları içerirken; normal, gamma, beta dağılımı gibi sürekli dağılımları da içermektedir. Bu yüzden kullanım alanı geniştir.

Özellikle GLM’de yanlı tahmin edicilerin yanında hemen hemen yansız tahmin ediciler ve modifiye hemen hemen yansız tahmin ediciler de kullanılarak daha iyi kestirimler elde etmek amaçlanmıştır. Hemen hemen yansız tahmin ediciler, yanlı tahmin edicilerden bu yanlı tahmin edicilerin yan vektörlerinin çıkarılmasıyla elde edilen yeni bir tahmin edicidir ve hangi yanlı tahmin ediciden yararlanıldıysa onun ismini içermektedir. Hemen hemen yansız ridge, hemen hemen yansız Liu, hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicileri bu tahmin edicilere örnektir. GLM’de hemen hemen yansız tahmin edicilerin iyi kestirimler sağladığını gösteren çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları Singh ve ark. (1986), Amin ve ark. (2020a), Akdeniz ve Kaçıranlar (1995), Varathan ve Wijekoon (2019), Akram ve ark. (2020) şeklindedir.

Bahsi geçen çalışmalardan elde edilen sonuçlara göre birçok modelde hemen hemen yansız tahmin edicilerin iyi performansa sahip olduğu anlaşılmaktadır. Bunun yanında yanlı tahmin edicilerden faydalanılarak modifiye hemen hemen yansız tahmin ediciler de elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin amacı ise hemen hemen yansız tahmin edicilere göre varyansı daha düşük tahmin ediciler elde etmektir. Bu tahmin edicilerin isimleri de modifiye hemen hemen yansız ridge tahmin edicisi, modifiye hemen hemen yansız Liu tahmin edicisi ve

modifiye hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisidir. Lukman ve ark. (2020), Varathan ve Wijekoon (2021), Yıldız (2018), Akdeniz ve Duran (2012) modifiye hemen hemen yansız tahmin edicilerin kullanımı üzerine yapılmış çalışmalardandır.

GLM’lerden biri olan gamma regresyon modeli istatistikte çok kullanışlı olan bir modeldir ve bahsi geçen bu tahmin edicilerden hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisi ile modifiye hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisi dışındakiler gamma regresyon modeli üzerinde de çalışılmış ve elde edilen sonuçlar olumlu yönde olmuştur. Ancak hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisi ile modifiye hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisi gamma regresyon modeli için incelenmemiştir. Gamma regresyon modelinde Liu–tipi tahmin edicisi MLE’den daha iyi kestirimler verdiği göre bu tahmin ediciden elde edilecek olan ve Liu–tipi tahmin edicisine göre daha az yanlı olan hemen hemen yansız gamma Liu–tipi tahmin edicisi ile modifiye hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisinin de gamma regresyon modeline uyumlu verilerde Liu–tipi tahmin edicisinden ve diğer yanlı tahmin edicilerden daha iyi kestirimler elde etmesi beklenen bir durum olacaktır. Tezde ele alınan bu tahmin edicilerle de gamma dağılımından faydalanarak veri elde eden alanlar için çalışma kolaylığı sağlanacaktır.

Bu tezde gamma regresyon modeli için hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisiyle modifiye hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisi detaylı bir şekilde incelenip bazı tahmin edicilerle hem teorik olarak hem de simülasyon ve gerçek veriler kullanılarak karşılaştırmaları yapılacaktır.

Tezin 3. Bölümünde GLM’ler hakkında detaylı bilgilendirme yapılmış olup Bölüm 3.2’de ise gamma regresyon modelinin de ait olduğu üstel aile hakkında geniş bilgilendirme yapılmış, Bölüm 3.3’te olabilirlik fonksiyonu açıklanmış ve olabilirlik fonksiyonundan yararlanılarak yanıt değişkeni olan y ’nin varyansı ve ortalaması da elde edilmiş olup bazı dağılımlarda uygulaması gösterilmiştir. Bölüm 3.4’te parametre tahmini en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Bölüm 3.5 ve 3.6’te ise sırasıyla kısaca ortalama yanıt tahmininden ve MLE’nin asimptotik dağılımından bahsedilmiştir. 4. Bölümde ise teze konu olan gamma dağılımı incelenirken Bölüm 4.1’de gamma regresyon modelinin gamma dağılımıyla elde edilme aşamaları gösterilmiştir. Bölüm 4.2’de regresyon modellerinde çoklu bağlantı konusu ele alınmış, çoklu bağlantıyı belirlemek için kullanılabilecek yöntemlerden bahsedilmiştir. Bölüm 4.3, 4.4 ve 4.5 ise çoklu bağlantı durumunda MLE’nin iyi sonuçlar verememesi durumunda alternatif olarak kullanılabilecek olan yanlı tahmin edicilerden bahsedilmiş ve bazı

yanlı tahmin ediciler incelenmiştir. 5. Bölümde tezde kullanılacak olan temel yanı tahmin edicinin gamma regresyon modeli üzerinde teorik incelemeleri yapılmıştır. 6. Bölümde hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisi ile modifiye hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisinin gamma regresyon modelinde incelemeleri yapılmıştır. 7. Bölümde, önerilen tahmin edicilerin teorik sonuçlarını desteklemek için Monte Carlo simülasyon çalışması yapılırken 8. Bölümde ise gerçek verilerle uygulama yapılmıştır. Son olarak da 9. Bölümde tezde elde edilmiş olan sonuçlar açıklanmış ve tezin sonuçlarından faydalanılarak önerilerde bulunulmuştur.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Regresyon analizinde çoklu bağlantı ilk olarak Frisch (1934) tarafından ele alınmıştır. Daha sonra Farrar ve Glauber (1967), Silvey (1969) ve Mackinnon ve Puterman (1988) makalelerinde çoklu bağlantı üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Çoklu bağlantının varlığında, en çok kullanılan parametre tahmin edicileri olan en çok olabilirlik ve en küçük kareler tahmin edicilerinde olumsuz sonuçlar meydana geldiği için Hoerl ve Kennard (1970), $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ matrisinin köşegen elemanlarına pozitif bir sayı ekleyerek daha iyi tahminler elde edilebileceğini öne sürmüştür. Bu çalışmada önerilen tahmin ediciye ridge tahmin edicisi adı verilmiştir.

Hoerl ve Kennard (1970b) ridge tahmin edicisi üzerine bir araştırma yapmıştır. Bu makalede ridge tahmin edicisinin teorik özelliklerine değinilip k parametresinin en doğru sonucu vereceği değer tahmini üzerinde durulmuştur. $0 \leq k \leq 1$ aralığı için en iyi parametre tahmini üzerine çalışılmıştır.

Hoerl ve ark. (1975) makalesinde ise ridge tahmin edicisi üzerine simülasyon çalışmaları yapılmıştır. Simülasyon çalışmalarıyla k parametresi seçimlerinin hangi durumlarda diğer tahmin edicilerden daha avantajlı olduğu gözlemlenmiştir.

Genelleştirilmiş doğrusal modeller, ilk olarak Nelder ve Wedderburn (1972) tarafından önerilmiştir. Bu makalede modellerin değişken dönüştürme yöntemleriyle β katsayı vektörlerinin doğrusal olmayan formlarının doğrusallaştırılarak ortaya çıkan sorunların azaltılması amaçlanmış ve bu yönde çalışmalar sürdürülmüştür.

McDonald ve Galarneau (1975) ridge-tipi tahmin edicisi üzerine yazılmış bir makale olup bu makalede ridge-tipi tahmin edicisi tanımlanıp farklı k parametreleri için regresyon katsayı tahmin sonuçları incelenmiş ve ayrıca ridge-tipi tahmin edicinin çoklu bağlantı durumunda OLS'den daha küçük hata kareler ortalaması (MSE: mean squared error) sonuçları verdiği, yani daha tutarlı tahminlerde bulunduğu Monte Carlo simülasyon çalışmasında görülmüştür.

Lawless ve Wang (1976) ridge tahmin edicisinde kullanılabilecek yeni bir k tahmini önererek simülasyon çalışması yapmışlar ve önerdikleri yöntemi diğer tahmin edicilerle simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırmışlardır.

Belirtilen çalışmalar dışında da ridge tahmin edicisindeki k parametresinin tahmini

üzerine makaleler yazılarak MSE sonuçlarını en düşük yapmayı amaçlayan k tahminleri oluşturulmuştur.

Ohtani (1986) ve Singh ve ark. (1986) tarafından hemen hemen yansız ridge tahmin edicisi önerilmiştir, Singh ve ark. (1986) jackknife yöntemini kullanarak hemen hemen yansız ridge tahmin edicisini önermiş ve yan vektörünün teorik özelliklerinden bahsetmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş ridge regresyon ile karşılaştırmalar yapılmıştır.

GLM’de MLE Nyquist (1991) tarafından ceza fonksiyonu yaklaşımı yardımıyla elde edilmiş, hipotez testinden ve GLM’de ridge tahmin edicisinin elde edilmişinden bahsedilmiştir.

Segerstedt (1992) tarafından GLM’de MLE üzerine çalışılmıştır. Bu çalışmada çoklu bağlantının artmasıyla MLE’yle gerçek değerin farkından elde edilen uzunluğun arttığı gözlemlenmiş olup bu tahmin edicinin iyi sonuçlar vermemesi üzerine ridge tahmin edicisinin kullanılması önerilmiştir. Ayrıca ridge tahmin edicisinin varyansının MLE’nin varyansından küçük olduğu durumlar seçildiğinde ridge tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının daha küçük sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Çoklu bağlantı durumlarında kullanılabilecek başka bir tahmin edici Liu (1993) tarafından önerilen Liu tahmin edicisidir. Liu tahmin edicisi, ridge tahmin edicisi ve Stein tahmin edicisinin eksik yönlerinin olması dolayısıyla önerilmiştir. Liu tahmin edicisindeki amaç bu iki tahmin edicinin her birinin avantajlı yönlerini içerisinde bulundurabilecek bir tahmin edicinin oluşturulmasıdır. Bu şekilde oluşturulmuş olan tahmin edicide d yanlılık parametresi bulunmaktadır ve bu parametrenin değer aralığı $0 < d < 1$ şeklindedir.

Akdeniz ve Kaçiranlar (1995) genelleştirilmiş hemen hemen yansız Liu tahmin edicisini tanımlamış ve genelleştirilmiş hemen hemen yansız Liu tahmin edicisi, genelleştirilmiş Liu tahmin edicisi ve OLS tahmin edicisi arasında karşılaştırmalar yaparak sonuçta hemen hemen yansız Liu tahmin edicisinin daha iyi tahminler sağladığını belirtmişlerdir.

Liu (2003) iki parametrelili bir tahmin edici olan Liu–tipi tahmin edicisini önermiştir. Ridge tahmin edicisinin çoklu bağlantıda etkili olduğu bilinmektedir ancak şiddetli çoklu bağlantı olduğu bazı durumlarda ridge tahmin edicisinin de başarısız olması durumunda iki parametrelili olan Liu–tipi tahmin edicinin daha iyi sonuçlar vereceği öne sürülmüştür. Liu–tipi tahmin edicisindeki k ve d parametreleri, sırasıyla, $k > 0$ ve $-\infty < d < \infty$ şeklinde değer aralıklarına sahiptir.

Kibria (2003) genelleştirilmiş ridge tahmin edicileri üzerine çalışma yapmıştır. Kibria (2003) ve Khalaf ve Shukur (2005) ridge tahmin edicisinde yanlılık parametresinin tah-

minleri üzerine çalışmıştır. Kibria (2003) ve Khalaf ve Shukur (2005) ridge tahmin edicisinin yanlılık parametresi için literatürde önerilmiş yanlılık parametrelerinin hangisinin daha iyi sonuçlar vereceğini Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırmıştır.

Akdeniz ve Erol (2003), doğrusal modeller için hemen hemen yansız ridge tahmin edicisi ile hemen hemen yansız Liu tahmin edicisini tanımlamış ve bu iki tahmin ediciyi kendi aralarında MSE'leri bakımından karşılaştırmış ve ayrıca bu iki tahmin ediciyi ridge ve Liu tahmin edicileriyle gerçek veri uygulaması kullanılarak karşılaştırmıştır.

Khalaf ve Shukur (2005), çoklu bağlantının varlığında regresyon katsayılarının tahminlerinin kararlı olması için ridge tahmin edicisinin kullanılabileceğinden bahsederek yanlılık parametresinin tahminlerinin belirlenmesi üzerine çalışmışlar ve ayrıca simülasyonla yanlılık parametresinin değerleri için önerilen farklı tahmin yöntemlerinin karşılaştırmalarını yapmışlardır.

Alkhamisi ve ark. (2006), daha önce yapılmış olan çalışmalardan elde edilmiş olan ridge yanlılık parametrelerinden bazılarının (Kibria (2003), Hoerl ve Kennard (1970b), Khalaf ve Shukur (2005)) modifiye edilmesiyle oluşturulan yeni tahmin edicide daha iyi sonuçlar sağlanacağını savunmuşlardır. Ayrıca birkaç tane yanlılık parametresi tahmin yöntemi önerip bunların karşılaştırmalarını da Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla yapmışlardır.

Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2008) yeni bir tahmin edici olan $k - d$ sınıfı tahmin edicisini ($k - d$ class estimator) önermişlerdir.

Batah ve ark. (2008) modifiye jackknife ridge regresyon tahmincisi üzerine çalışmışlardır. Bu tahmin edicinin MSE'sini incelemişler ve ridge, Liu, Liu-tipi tahmin edicilerinin MSE'leriyle teorik olarak karşılaştırmalar yapmışlardır.

Akdeniz ve Duran (2012) doğrusal regresyon modelleri için genelleştirilmiş Liu tahmin edicisini inceleyip jackknife Liu tahmin edicisi ve modifiye jackknife Liu tahmin edicisini önermişlerdir. Bu tahmin edicilerin matris hata kareler ortalaması (MMSE: Matrix Mean Squared Error) ve yan vektörlerini inceleyerek birbirleriyle karşılaştırmalarını önce teorik olarak daha sonra simülasyonla göstermişlerdir.

Månsson ve ark. (2012a) logistik regresyon modelinde Liu tahmin edicisini tanımlamış, bu tahmin edicinin MSE'si üzerinde durarak d yanlılık parametresinin tahmini için birkaç öneride bulunmuşlardır. Buna ek olarak makalede, simülasyon çalışması yapılarak farklı d tahminleri seçilmiş, seçilen d tahminleri kullanılarak tahmin ediciler karşılaştırılmıştır.

Månsson ve ark. (2012b), Poisson regresyon modelinde Liu tahmin edicisini incelemişlerdir. Bu makalede, Poisson regresyon modelinde Liu tahmin edicisinin yanlılık parametresi olan d parametresi için diğer çalışmalarda önerilmiş olan tahmin ediciler ele alınarak simülasyon çalışması yapılmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Månsson (2013) negatif binom regresyon modelinde Liu tahmin edicisini incelemiştir. Negatif binom regresyon modelinde Liu tahmin edicisinin MSE özelliklerini araştırarak farklı d tahmin değerleri için simülasyon çalışmasıyla MSE sonuçlarını karşılaştırmıştır.

Huang ve Yang (2013) negatif binom regresyon modelinde Liu tahmin edicisi ve ridge tahmin edicisini kullanarak, bu iki tahmin edicinin harmanlanmasıyla yeni bir tahminci olan iki parametrelili tahmin ediciyi önermişlerdir. Bu tahmin edicilerin MSE ve MMSE fonksiyonlarını teorik olarak incelemişler ve negatif binom regresyon modelinde MLE, Liu ve ridge tahmin edicileriyle kendi önerdikleri tahmin ediciyi simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırmışlardır.

İnan ve Erdoğan (2013) lojistik regresyon modelinde Liu-tipi tahmin edicisini önermişlerdir ve MLE, ridge tahmin edicisi ve lojistik regresyonda önerdikleri Liu-tipi tahmin edicisinin performanslarını Monte Carlo simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması yardımıyla karşılaştırmışlardır.

Dorugade (2014) doğrusal regresyon modelinde çoklu bağlantı varlığında ridge tahmin edicisinin yanlılık parametresinin yeni bir tahmin değerini önererek literatürdeki diğer tahmin değerleriyle karşılaştırmalar yapmıştır.

Khurana ve ark. (2014) ridge tahmin edicisi yardımıyla jackknife ridge tahmin edicisi ve modifiye jackknife ridge tahmin edicisinin elde edilmesini incelemiş, bu tahmin edicileri yan vektörleri ve MSE'leri bakımından inceleyip simülasyon çalışmasıyla teorik olarak bulduğu sonuçları desteklemiştir.

Månsson ve ark. (2015) logistik regresyon modelinde çoklu bağlantının varlığında MLE'nin iyi tahminler verememesinden dolayı ağırlıklandırılmış Liu tahmin edicisini önermiş ve Liu tahmin edicisinin yanlılık parametresi olan d 'nin farklı çalışmalarda elde edilen tahmin değerlerini kullanarak en iyi tahmin sonucunu sağlayan tahmin değerini bulmak için çalışmalar yapmışlardır.

Kurtoğlu ve Özkale (2016) GLM'de Liu tahmin edicisini ele almış, GLM'de Liu tahmin edicisinin teorik özelliklerini incelemiş, d parametresinin seçimi üzerinde durmuş ve GLM için MLE ve Liu tahmin edicisinin MSE'lerinin karşılaştırmasını yapmışlardır. Bu

makalede hem gerçek veriler üzerinden hem de Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırmaların sonuçları desteklenmiştir.

Chaubey ve ark. (2018) Liu-tipi tahmin edicisini tanıtmış, jackknife Liu-tipi tahmin edicisini elde ederek hemen hemen yansız Liu-tipi tahmin edicisinden bahsetmiş ve daha sonra Liu-tipi tahmin edicisiyle diğer iki tahmin edici arasında karşılaştırmalar yapmışlardır. Bu karşılaştırmalardan elde ettikleri sonuçları ise gerçek veri uygulaması ve Monte Carlo simülasyon çalışmasıyla desteklemişlerdir.

Wu ve ark. (2018) logistik regresyon modelinde çoklu bağlantı olması durumunda kısıtlı (restricted) hemen hemen yansız Liu tahmin edicisini önermiştir. Makalede MLE, hemen hemen yansız Liu tahmin edicisi, kısıtlı MLE ve yeni tahmin edici arasında teorik karşılaştırmalar yapılmıştır. Ayrıca simülasyonlarla tahmin edicilerin performansları nümerik olarak karşılaştırılmıştır.

Qasim ve ark. (2018), gamma regresyon modelinde log-bağlantı fonksiyonu kullanarak Fisher puanlama metoduyla modelin MLE'sini elde etmiştir. Bu çalışmada, gamma regresyon modeli için Liu tahmin edicisi ele alınarak bu iki tahmin edicinin MSE'leri karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda MLE'den daha küçük MSE'ye sahip olan Liu tahmin edicisinin yanlılık parametresi elde edilmiştir. Bu parametrenin literatürdeki tahmin edicileri ve bu makalede önerilen tahmin ediciler simülasyon çalışmasıyla ve gerçek veri uygulamasıyla karşılaştırılmıştır.

Yıldız (2018) doğrusal regresyon modeli üzerinde jackknife prosedürü kullanarak modifiye edilmiş jackknife Liu-tipi tahmin edicisini tanımlamıştır. Bu tahmin edicinin MSE, varyans-kovaryans matrisi, yan vektörü ve MMSE'sini elde ederek incelemiştir. Ayrıca modifiye jackknife Liu-tipi tahmin edicisinin MSE'sinin jackknife Liu tahmin edicisinin MSE'sinden daha küçük olduğu durumu incelenmiştir. Simülasyon ve gerçek veri uygulamasıyla araştırmasını desteklemiştir.

Varathan ve Wijekoon (2021) logistik regresyon modelinde Liu, hemen hemen yansız Liu ve modifiye hemen hemen yansız Liu tahmin edicilerini ve bu tahmin edicilerin MSE'lerini ayrı ayrı incelemiş ve bu tahmin edicileri kendi aralarında ikişerli olarak MSE bakımından teorik olarak karşılaştırmışlardır.

Lukman ve ark. (2020) makalesinde gamma regresyon modelinde yeni bir ridge-tipi tahmin edici önerilerek özellikleri incelenmiştir.

Almagal ve Asar (2020) gamma regresyon modelinde Liu-tipi tahmin ediciyi tanım-

layarak gamma ridge tahmin edicisi ve gamma Liu tahmin edicileriyle teorik olarak karşılaştırmalar yapmışlardır. Bu karşılaştırma sonuçlarını simülasyonlarla desteklemişlerdir.

Amin ve ark. (2020b) gamma regresyon modelinde çoklu bağlantının olması halinde ridge tahmin edicisinin kullanılabileceğini öne sürmüş ve ridge tahmin edicisinin MSE özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca literatürdeki farklı ridge yanlılık parametre tahminleri kullanılarak gamma ridge ve MLE tahmin edicileri bu araştırmada karşılaştırılmıştır.

Amin ve ark. (2020a) gamma regresyon modelinde çoklu bağlantı varlığında hemen hemen yansız ridge tahmin edicisini tanımlamış ve hemen hemen yansız ridge tahmin edicisinin MSE'sini, varyans-kovaryans matrisini ve yan vektörünü elde etmişlerdir. Ayrıca ridge yanlılık parametresinin tahmini için önerilerde bulunarak simülasyon çalışmasıyla gamma ridge tahmin edicisi ile hemen hemen yansız gamma ridge tahmin edicisini karşılaştırmışlardır.

Akram ve ark. (2020), ters Gaussgil (Inverse Gaussian) regresyon modelini incelemiştir. Bu çalışmada ters Gaussgil regresyon modelinde ridge, Liu ve Liu-tipi tahmin edicilerinin özellikleri incelenerek tahmin ediciler ikiyeşerli şekilde teorik olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca Liu-tipi tahmin edicisinin yanlılık parametreleri için tahmin ediciler önerilerek yapılan simülasyonla MSE'lerin hangi durumlarda daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DOĞRUSAL MODELLER

3.1. Giriş

Doğrusal modellerde y bağımlı değişkeninin dağılımı normal ve varyansı da sabit kabul edilmektedir. Ancak çoğu deneysel olayda seçilen modelin doğrusallığı, y 'nin normalliği veya sabit varyanslı olma özelliği geçerli olmayabilir. Örneğin y yanıt değişkeni kesikli (ayrık) rassal değişken olabilir. Kesikli rassal değişkenin değerleri sayılabilir, pozitif tam sayılarla birebir eşleşir. Kesikli rassal değişkenlerden olan iki sonuçlu yanıt değişkenli modeller başarı ve başarısızlık şeklinde muhtemel iki sonuçludur dolayısıyla böyle modellerde başarı olasılığı üzerinde durulur. O halde iki sonuçlu yanıt değişkenli modeller normal dağılıma sahip değildir. y yanıt değişkeninin dağılımının normal olmadığı bir başka durum ise yanıtın sayı şeklindeki değerlere sahip olmasıdır (Belirli bir durumdaki kusurların sayısı veya belirli bir zaman diliminde bir kavşakta meydana gelen kaza sayısı gibi).

Normal dağılmayan yanıt değişkenlerinin diğer örnekleri biyomedikal uygulamalarda, klinik deneylerde ve kalite mühendisliğinde bulunabilir (Khuri, 2009). Bu tür verileri inceleyebilmek için, Nelder ve Wedderburn (1972) tarafından, genelleştirilmiş doğrusal modeller (GLM: generalized linear models) önerilmiştir. Bu model üstel dağılım ailesinin üyelerinin araştırmacı tarafından ele alınmasına olanak sağlayan bir modeldir.

Yukarıda da belirtildiği üzere kesikli ve sürekli yanıt değişkenlerini içeren modeller genelleştirilmiş doğrusal model çatısı altında toplanabilir ve GLM'lerde yanıt değişkeni üzerindeki normallik ve sabit varyanslılık varsayımları gerekli değildir. Genelleştirilmiş doğrusal modeller böyle durumlarda y yanıtına dönüşüm teknikleri uygulayarak yanıtın normal dağılıma dönüşmesini sağlar (Korucu, 2010). GLM'ler hakkında detaylı incelemeler McCulloch ve Searle (2001), Dobson (2008) gibi yazarların kitaplarında bulunmaktadır. GLM'lerde bağımlı değişkenin dağılımı üstel aile sınıfına aittir. GLM'lerde bağımlı değişken üstel dağılım formunda yazılarak işlemlere devam edilir. Bu özel sınıf bir sonraki başlıkta detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

3.2. Üstel Aile

Genelleştirilmiş doğrusal modellerin üç ögesi vardır, bunlar:

- (a) y yanıt vektörünün elemanlarının dağılımı birbirinden bağımsız ve üstel aileye ait olan olasılık dağılımlarından olabilir. Olasılık (yoğunluk) fonksiyonu

$$f(y; \theta, \phi) = \exp \left(\frac{\theta y - b(\theta)}{a(\phi)} - c(y, \phi) \right) \quad (3.1)$$

şeklindedir. Burada $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ ve $c(\cdot)$ bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca θ , dağılımın ortalaması olan μ 'nun bir fonksiyonudur ve kanonik parametre olarak isimlendirilir. ϕ ise dağılım(dispersion) parametresidir.

- (b)

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}^\top(\mathbf{X}) \boldsymbol{\beta} \quad (3.2)$$

formunda doğrusal kestirici, $\boldsymbol{\eta}$, (linear predictor) olarak adlandırılan bir doğrusal modeldir. k -tane açıklayıcı değişken $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ şeklinde olup $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)^\top$ açıklayıcı değişken matrisidir ve $\mathbf{f}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X}$ 'in q -bileşenli vektör fonksiyonu, $\boldsymbol{\beta}$ ise q -boyutlu bilinmeyen parametre vektörüdür.

- (c) Bağlantı fonksiyonu (link function) $g(\cdot)$ ise (3.2)'deki $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})$ 'i $\mathbf{X}$ 'teki ortalama yanıt $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X})$ ile ilişkilendirir. Öyle ki,

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) = g(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X})). \quad (3.3)$$

$g(\cdot)$ bağlantı fonksiyonu monoton diferansiyellenebilir bir fonksiyondur ve tersi $h(\cdot)$ fonksiyonu olmak üzere

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}) = h(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})) \quad (3.4)$$

eşitliği sağlanır (Khuri, 2009).

Genelleştirilmiş doğrusal modellerde ortalama yanıtın özel bir dönüşümü olan $g(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}))$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 'lerin doğrusal bir modeli olarak gösterilebilir. $h(\cdot)$ fonksiyonu doğrusal olmayan formda olabileceğinden (3.4) formülü, ortalama yanıt fonksiyonu $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X})$ 'in genellikle doğrusal olmayan bir model ile gösterilebileceğini ifade eder.

Özel olarak, eğer $g(\cdot)$ birim fonksiyon ise ve y yanıtı normal dağılıma sahipse özel bir sınıf olan doğrusal modeller elde edilir. Ayrıca, eğer $g(\mu) = \theta$ ise ki θ burada (3.1)'deki kanonik parametredir, bu durumda $g(\cdot)$ kanonik bağlantı fonksiyonu olarak adlandırılır.

En sık kullanılan bağlantı fonksiyonları şunlardır:

(i) Logit fonksiyonu,

$$\eta(\mathbf{X}) = \log \left(\frac{\mu(\mathbf{X})}{1 - \mu(\mathbf{X})} \right).$$

şeklindedir.

(ii) Probit fonksiyonu,

$$\eta(\mathbf{X}) = \Phi^{-1}(\mu(\mathbf{X})),$$

şeklindedir. Burada $\Phi^{-1}(\mathbf{x})$ standart normal dağılımın birikimli olasılık fonksiyonunun tersidir.

(iii) Logaritmik fonksiyon,

$$\eta(\mathbf{X}) = \log(\mu(\mathbf{X})).$$

(iv) Ters polinom fonksiyonu,

$$\eta(\mathbf{X}) = \frac{1}{\mu(\mathbf{X})}.$$

B biçiminde olup ters bağlantı fonksiyonu olarak da bilinir.

Pek çok dağılım, üstel dağılım ailesinin üyesidir. Aşağıda bu durumun bazı örnekleri bulunmaktadır.

(a) **Normal Dağılım:**

Bu dağılım üstel ailenin iyi bilinen bir üyesidir. Ortalaması μ , varyansı σ^2 olan normal rasgele değişken olan y 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right),$$

olup bu olasılık yoğunluk fonksiyonu düzenlenerek

$$f(y; \mu, \sigma^2) = \exp \left\{ \frac{\mu y - \frac{\mu^2}{2}}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2) \right) \right\}.$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik (3.1) ile karşılaştırıldığında $\theta = \mu$, $b(\theta) = \frac{\mu^2}{2}$, $a(\phi) = \phi = \sigma^2$ ve

$$c(y, \phi) = \frac{-1}{2} \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2) \right)$$

olduğu görülür. Dikkat edildiğinde kanonik parametre olan θ 'nın μ konum parametresine eşit olduğu ve dağılım parametresi olan ϕ 'nin ise σ^2 'ye eşit olduğu kolayca görülür. Kanonik bağlantı fonksiyonu burada özdeşdir. Buna özdeş bağ denir.

(b) Poisson Dağılımı:

Bu kesikli dağılıma sahip y rasgele yanıt değişkeni $0, 1, 2, 3, \dots$, değerlerini aşağıda verilen olasılık fonksiyonuna göre alır

$$f(y; \lambda) = \frac{\exp(-\lambda) \lambda^y}{y!}, y = 0, 1, 2, \dots,$$

burada λ , y yanıtının ortalaması μ 'ye eşittir. Bu olasılık fonksiyonu

$$f(y; \lambda) = \exp(y \log \lambda - \lambda - \log y!) \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.5) ile (3.1) karşılaştırılırsa $\theta = \log \lambda$, $b(\theta) = \lambda = \exp(\theta)$, $a(\phi) = 1$ ve $c(y, \phi) = -\log(y!)$ olduğu görülür. Bundan dolayı kanonik parametre $\theta = \log \lambda$, ve dağılım parametresi $\phi = 1$ olacaktır. Buna karşılık gelen kanonik bağlantı fonksiyonu ise şöyledir:

$$g(\mu) = \theta = \log \lambda = \log \mu.$$

Bu fonksiyon daha önce bahsedilen logaritmik bağlantı fonksiyonudur.

Poisson dağılımı, belirli bir zaman diliminde veya bir üretim sürecindeki kusurların sayısı gibi belirli bir alanda meydana gelen bazı olayların sayısı gibi sayma verilerini modellemek için kullanılır.

(c) Bernoulli (Binary) Dağılımı:

İki olası sonuçlu bağımsız bir dizi deneme ele alınsın ve bu denemelerin sonuçları başarı ve başarısızlık şeklinde olsun. Tek bir denemenin başarı olasılığına p denilsin. y , belirli bir denemede başarıya ulaşıncı 1 değerini alırken başarısızlık için 0 değerini alsın. Böyle bir durumda y 'nin ortalaması μ , p değerine eşit olur ve olasılık fonksiyonu

$$f(y; p) = p^y (1 - p)^{(1-y)}, y = 0, 1$$

olarak yazılabilir. Bu fonksiyon ise

$$f(y; p) = \exp(y(\log p - \log(1 - p)) + \log(1 - p)), \quad y = 0, 1 \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu, Eşitlik (3.1) ile karşılaştırılınca

$$\theta = (\log p - \log(1 - p)) = \log\left(\frac{p}{1 - p}\right),$$

$b(\theta) = -\log(1 - p) = \log(1 + \exp(\theta))$, $a(\phi) = 1$, ve $c(y, \theta) = 0$ olduğu görülür.

Kanonik bağlantı fonksiyonu ise şöyledir:

$$\begin{aligned} g(\mu) &= \theta \\ &= \log\left(\frac{p}{1 - p}\right) \\ &= \log\left(\frac{\mu}{1 - \mu}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Bu daha önce bahsedilen logit fonksiyonudur. Ayrıca lojistik bağlantı fonksiyonu olarak isimlendirilir. Eşitlik (3.2)'de verilen doğrusal kestirici olan $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})$ 'i ifade etmek için (3.7)'yi kullanmak mümkündür. $\mathbf{x}_i^\top = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$ gözlem noktasında başarı olasılığı $p = \mu$ 'yu $\mathbf{x}_i$ 'nin fonksiyonu $p(\mathbf{x}_i)$ olarak

$$p(\mathbf{x}_i) = \frac{\exp(f^\top(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\beta})}{1 + \exp(f^\top(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\beta})} \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ise lojistik regresyon modeli olarak adlandırılan $p(\mathbf{x})$ için doğrusal olmayan bir modeldir. İki sonuçlu yanıt değişkenli dağılım, oranlar şeklinde gözlemlenen verilerde kullanılır.

İki sonuçlu yanıt değişkenli dağılım için diğer olası bağlantı fonksiyonları şunlardır: Probit fonksiyonu $F^{-1}(p)$ ve $\log(-\log(1 - p))$ tamamlayıcı log-log bağlantı fonksiyonu (complementary log-log function).

Binom dağılımı, iki sonuçlu (binary) yanıt değişkenli dağılımla yakından ilişkili bir dağılımdır. n - tane bağımsız deneme, ve her bir denemenin başarı olasılığı p olduğu durumda, y bu denemelerdeki başarı sayısını gösterirse bu durumda y 'ye binom dağılımına sahip rasgele değişken denir. Bu dağılımın olasılık fonksiyonu

$$f(y, p) = \binom{n}{y} p^y (1 - p)^{n-y}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, n$$

olarak yazılır. Bu dağılım üstel aileye aittir ve

$$\theta = \log\left(\frac{p}{1 - p}\right), \quad b(\theta) = n \log(1 + \exp(\theta)), \quad a(\phi) = \phi = 1,$$

ve $c(y, \phi) = \log \binom{n}{y}$ şeklindedir. Ortalaması ve varyansı ise sırasıyla

$$\mu = np, \sigma^2 = np(1-p)$$

şeklinde, ve kanonik bağlantı fonksiyonu

$$g(\mu) = \theta = \log \left(\frac{p}{1-p} \right) = \log \left(\frac{\mu}{1-\mu} \right)$$

şeklindedir. $n = 1$ olduğu özel durumda ise bu dağılım iki yanıtlı dağılım olacaktır.

3.3. Olabilirlik Fonksiyonu

(3.1) numaralı formülde y , $\mathbf{y}$ rasgele değişkeninin bir değeridir. $f(\mathbf{y}, \theta, \phi)$, $\mathbf{y}$ 'nin bir fonksiyonudur ve burada θ ve ϕ sabittir. Tanım gereği olabilirlik fonksiyonu, $L(\theta, \phi; \mathbf{y})$, $\mathbf{y}$ rasgele değişkeninin gözlemlenen değeri olan y için verilen θ ve ϕ 'nin bir fonksiyonudur ve

$$L(\theta, \phi; \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \theta, \phi) \quad (3.9)$$

şeklinde gösterilir. L temelde θ ve ϕ parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon $\mathbf{y}$ 'nin sonuçları tarafından belirlendiğinden $L(\theta, \phi; \mathbf{y})$ bir rasgele değişkendir. Log olabilirlik fonksiyonu $l(\theta, \phi; \mathbf{y})$ ise $L(\theta, \phi; \mathbf{y})$ 'nin logaritmasıdır ve

$$l(\theta, \phi; \mathbf{y}) = \log L(\theta, \phi; \mathbf{y}) \quad (3.10)$$

şeklinde gösterilir. Olabilirlik fonksiyonu düzgünlük koşulları altında (üstel aile için geçerli olan koşullar) iken

$$E \left(\frac{\partial l(\theta, \phi; \mathbf{y})}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (3.11)$$

$$E \left(\frac{\partial^2 l(\theta, \phi; \mathbf{y})}{\partial \theta^2} \right) + E \left(\left(\frac{\partial l(\theta, \phi; \mathbf{y})}{\partial \theta} \right)^2 \right) = 0 \quad (3.12)$$

olduğu gösterilebilir. (3.1) formülünü kullanarak

$$l(\theta, \phi; \mathbf{y}) = \frac{\theta \mathbf{y} - b(\theta)}{a(\phi)} + c(\mathbf{y}, \phi) \quad (3.13)$$

elde edilir. Buradan θ 'ya göre ilk iki mertebeden türevi alınırsa

$$\frac{\partial l(\theta, \phi; \mathbf{y})}{\partial \theta} = \frac{\mathbf{y} - b'(\theta)}{a(\phi)} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 l(\theta, \phi; \mathbf{y})}{\partial \theta^2} = \frac{-b''(\theta)}{a(\phi)} \quad (3.15)$$

elde edilir, $b'(\theta)$ ve $b''(\theta)$ burada sırasıyla $b(\theta)$ 'nin birinci ve ikinci mertebeden türevlerdir. (3.11) ve (3.14) eşitliklerinden

$$\mu = b'(\theta) \quad (3.16)$$

elde edilir, öyle ki burada $\mu = E(\mathbf{y})$. Ayrıca (3.12), (3.14) ve (3.16) eşitliklerinden

$$\frac{-b''(\theta)}{a(\phi)} + \frac{Var(\mathbf{y})}{a^2(\phi)} = 0 \quad (3.17)$$

elde edilir.

Böylece $\mathbf{y}$ 'nin varyansı

$$Var(\mathbf{y}) = a(\phi) b''(\theta) \quad (3.18)$$

şeklindedir. Burada $a(\phi)$, sadece ϕ dağılım parametresi ϕ 'ye bağlıyken $b''(\theta)$ ise sadece θ kanonik parametresine bağlıdır ve dolayısıyla $\mathbf{y}$ 'nin dağılımının ortalaması olan μ 'ye bağlıdır. $b''(\theta)$ varyans fonksiyonu olarak isimlendirilir ve $V(\mu)$ olarak gösterilir.

Yukarıdaki sonuçları doğrulamak için (3.16) ve (3.18) formülleri normal, Poisson ve iki yanıtı (binary) dağılımlarında uygulanabilir. Normal dağılım durumunda, $\theta = \mu$, $b(\theta) = \frac{1}{2}\mu^2$ ve $a(\phi) = \phi = \sigma^2$ şeklindedir. Dolayısıyla $b(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2$ ve $b'(\theta) = \mu$ olur. Ayrıca $a(\phi) b''(\theta)$, σ^2 varyansını verecektir. Poisson dağılımı için inceleme yapılırsa $\theta = \log \lambda$, $b(\theta) = \exp(\theta)$ ve $a(\phi) = 1$ şeklinde olup $b'(\theta) = \exp(\theta) = \lambda$ olur ve bu da dağılımın ortalamasıdır. Bunlara ek olarak Poisson dağılımında $a(\phi) b''(\theta) = \lambda$ varyansı verecektir. İki yanıtı(binary) dağılımı için inceleme yapılırsa da $\theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$, $b(\theta) = \log(1 + \exp(\theta))$ ve $a(\phi) = 1$ olduğu gözlenir. Bu durumda iki yanıtı dağılımının ortalaması $b'(\theta) = \exp(\theta) / (1 + \exp(\theta)) = p$ olurken, varyansı ise

$$a(\phi) b''(\theta) = \exp(\theta) / (1 + \exp(\theta))^2 = p(1-p)$$

olur (Khuri, 2009).

3.4. Parametre Tahmini

Bu bölümde, (3.2)'de verilen modelin doğrusal kestiricisi η içinde görünen modelin parametre vektörü β 'nin nasıl tahmin edileceğini incelenmiştir. β parametresinin tahmin edicisine ulaşabilmek için en çok olabilirlik yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemle elde edilen tahmin ediciye en çok olabilirlik tahmin edicisi denir.

(3.1)'deki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip n tane bağımsız rasgele değişken $y_1, y_2, \dots, y_n$ olsun. μ_i, y_i 'nin ortalaması ve θ_i ise, y_i 'nin kanonik parametresidir ($i = 1, 2, \dots, n$). y_i 'ler yanıt değişkeni y 'ye ait olan gözlemleri ifade etmektedir. $g(\mu_i) = \eta_i$ olsun ki burada $g(\cdot)$ uygun bir bağlantı fonksiyonudur. Bu bağlantı fonksiyonu (3.2)'de verildiği gibi $\eta_i = \eta(\mathbf{x}_i) = f^\top(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\beta}$ şeklindedir. (3.1)'den

$$f(y_i; \theta_i, \phi) = \exp\left(\frac{\theta_i y_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi)\right), i = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

elde edilir ki burada ϕ dağılım parametresinin sabit bir değere sahip olduğu varsayılır. Yani y 'nin değerlerine göre değişim göstermez. $y_1, y_2, \dots, y_n$ 'lere ilişkin log-olabilirlik fonksiyonu

$$l(\boldsymbol{\theta}, \phi; \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta_i y_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right) \quad (3.20)$$

formundadır öyle ki, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^\top$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ şeklindedir. Doğrusal kestirici $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta}$ 'ya bağlı olduğundan ve ortalama yanıt (3.4)'teki gibi $\boldsymbol{\eta}$ 'nın bir fonksiyonu olduğundan dolayı $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ortalamaları $\boldsymbol{\beta}$ 'nin bir fonksiyonu olur. $\boldsymbol{\beta}$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_j} = 0, j = 1, 2, \dots, p \quad (3.21)$$

(3.20)'den

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta}, \phi; \mathbf{y})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial l_i}{\partial \beta_j} \right), j = 1, 2, \dots, p \quad (3.22)$$

denklemlerinin çözülmesiyle elde edilir ki, burada $\beta_j, \boldsymbol{\beta}$ 'nin j . elemanıdır. Ayrıca

$$l_i = \left(\frac{\theta_i y_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right), i = 1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

şeklindedir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, p$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial \beta_j} &= \frac{\partial l_i}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} \\ \frac{\partial l_i}{\partial \theta_i} &= \frac{y_i - b'(\theta_i)}{a(\phi)} \\ &= \frac{y_i - \mu_i}{a(\phi)}, \end{aligned}$$

olur, çünkü (3.16)'ya göre $\mu_i = b'(\theta_i)$ ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} &= \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} \right)^{-1} = \frac{1}{b'(\theta)}, \\ \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} &= \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \mu_i} \right)^{-1} = \frac{1}{g'(\mu_i)}, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} &= f_j(\mathbf{x}_i), \end{aligned}$$

şeklindedir, burada $\eta_i = f^\top(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\beta}$ ve $f_j(\mathbf{x}_i)$ de $f^\top(\mathbf{x}_i)$ 'nin j . elemanıdır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial l_i}{\partial \beta_j} &= \frac{y_i - \mu_i}{a(\phi)} \frac{1}{b''(\theta_i)} \frac{1}{g'(\mu_i)} f_j(\mathbf{x}_i) \\ &= \frac{y_i - \mu_i}{Var(y_i)} \frac{f_j(\mathbf{x}_i)}{g'(\mu_i)}, i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

elde edilir, çünkü $Var(y_i) = a(\phi)b''(\theta_i)$. (3.22)'den

$$\frac{\partial l_i}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i)}{w_i} g'(\mu_i) f_j(\mathbf{x}_i), j = 1, 2, \dots, p \quad (3.24)$$

elde edilir, öyle ki,

$$w_i = Var(y_i) (g'(\mu_i))^2, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.25)$$

olur. (3.21)'deki en çok olabilirlik denklemleri

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i)}{w_i} g'(\mu_i) f_j(\mathbf{x}_i) = 0, j = 1, 2, \dots, p. \quad (3.26)$$

olarak yazılır.

$\boldsymbol{\beta}$ 'nin en çok olabilirlik tahmini $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ile gösterilir. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, (3.26)'da verilen denklemlerin çözümünden elde edilir. Bu denklemler $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 'lerin doğrusal olmayan denklemleridir çünkü $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 'ler, genel olarak, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 'nin doğrusal olmayan fonksiyonlarıdır. Bu sebeple (3.26) denklemlerinin kapalı formda çözümü olmayabilir. Ancak bu denklemlerin çözümünü elde etmek için Newton–Raphson metoduna dayalı Fisher puanlama metodu kullanılabilir. Bu iki metod birbirine çok benzemesine rağmen bazı farklılıkları mevcuttur. Newton Raphson metodu ile Fisher puanlama metodu arasındaki fark Hessian matrisinin kullanılış şekillerindedir. Newton Raphson metodu Hessian matrisinin kendisinden yani diğer adıyla gözlenen bilgi matrisinden faydalanırken Fisher puanlama metodu bu matrisin beklenen değerinden, diğer adıyla beklenen bilgi matrisinden yararlanmaktadır. Ayrıca, kanonik bağlantı fonksiyonuna sahip GLM'ler için gözlenen ve beklenen bilgi matrisleri aynıdır. (bkz. Bölüm 4.5.5, Khuri (2009))

Öncelikle $\boldsymbol{\beta}^0$, $\boldsymbol{\beta}$ 'nin başlangıç tahmini ve $\boldsymbol{\beta}^t$ ise $\boldsymbol{\beta}$ 'nin t . adımdaki tahmini olsun ($t \geq 1$). Böylece,

$$\boldsymbol{\beta}^{t+1} = \boldsymbol{\beta}^t - \{E(\mathbf{H}_l(\boldsymbol{\beta}))|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^t}\}^{-1} \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}}|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^t}, t = 1, 2, \dots, \quad (3.27)$$

$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}}|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^t}$ j . elemanı $\frac{\partial l}{\partial \beta_j}$ olan ve $\boldsymbol{\beta}^t$ kullanılarak hesaplanan vektördür, $\mathbf{H}_l(\boldsymbol{\beta})$, ise

$$\mathbf{H}_l(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top} \right) \quad (3.28)$$

ile verilen l 'nin Heissan matrisidir. $\mathbf{H}_l$, $p \times p$ boyutlu simetrik bir matristir ve $\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_j \partial \beta_k}$, Heissan matrisinin (j, k) . elemanını temsil eder. (3.27)'deki beklenen değer ise verilen dağılıma göre β 'nın yerine β^t kullanılarak değerlendirmeye alınır. (3.24) yardımıyla

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{D} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \quad (3.29)$$

şeklinde yazılır, burada $\mathbf{X}$, i . satırı $f^\top(\mathbf{x}_i)$ olan $n \times p$ boyutlu bir matristir ve (3.2) denklemindeki doğrusal tahmin edicinin model matrisi olarak isimlendirilir, $\mathbf{W} = \bigoplus_{i=1}^n w_i^{-1}$, $\mathbf{D} = \bigoplus_{i=1}^n [g'(\mu_i)]$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ ve $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^\top$ şeklindedir. Burada " $\bigoplus$ " köşegen elemanları göstermektedir. Ayrıca, (3.24) kullanılarak Heissan matrisi $\mathbf{H}_l(\beta)$ 'nin (j, k) . elemanı

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \sum_{i=1}^n \left((y_i - \mu_i) \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left(\frac{g'(\mu_i)}{w_i} f_j(\mathbf{x}_i) \right) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{g'(\mu_i)}{w_i} f_j(\mathbf{x}_i) \frac{\partial}{\partial \beta_k} (y_i - \mu_i) \right).$$

Ancak,

$$\frac{\partial}{\partial \beta_k} (y_i - \mu_i) = \frac{-\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_k} = \frac{-1}{g'(\mu_i)} f_k(\mathbf{x}_i)$$

olur, çünkü $\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} = \frac{1}{g'(\mu_i)}$ ve $\frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_k} = f_k(\mathbf{x}_i)$. Böylece,

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_i) \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left(\frac{g'(\mu_i)}{w_i} f_j(\mathbf{x}_i) \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_j(\mathbf{x}_i)}{w_i} f_k(\mathbf{x}_i) \right) \quad (3.30)$$

haline gelir. Her iki tarafının beklenen değerinin alınmasıyla

$$E \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \right) = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{w_i} f_j(\mathbf{x}_i) f_k(\mathbf{x}_i) \right)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\mathbf{H}_l(\beta)$ 'nin beklenen değeri

$$E(\mathbf{H}_l(\beta)) = -\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X} \quad (3.31)$$

formunda olur.

(3.29) ve (3.31) denklemleri kullanılarak (3.27)'deki formül şu hale dönüşür:

$$\begin{aligned} \beta^{t+1} &= \beta^t + \left[(\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{D} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right]_{\beta=\beta^t} \\ &= \left[(\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{W} \right]_{\beta=\beta^t} \left[\mathbf{X} \beta^t + (\mathbf{D} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}))_{\beta=\beta^t} \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

(3.32) denkleminin sağ tarafındaki ifade aşağıda gösterildiği gibi ilginç bir yorumlamaya sahiptir. $g(\mathbf{y})$ 'nin $\boldsymbol{\mu}$ civarında birinci dereceden Taylor serisi yaklaşımının alındığını varsayalım yani $g(\mathbf{y}) \approx \mathbf{z}$ olsun, öyle ki burada

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= g(\boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) g'(\boldsymbol{\mu}) \\ &= \boldsymbol{\eta} + (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) g'(\boldsymbol{\mu}) \\ &= \mathbf{f}^\top(\mathbf{X}) \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) g'(\boldsymbol{\mu})\end{aligned}\quad (3.33)$$

şeklindedir. $\mathbf{z}$ 'nin ortalaması $\boldsymbol{\eta}$ ve varyansı ise $Var(\mathbf{y}) (g'(\boldsymbol{\mu}))^2$ 'dir. (3.33)'ün $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 'de hesaplanmasıyla

$$z_i = \mathbf{f}^\top(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\beta} + (y_i - \mu_i) g'(\mu_i), i = 1, 2, \dots, n \quad (3.34)$$

elde edilir, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ şeklindedir. Eşitlik (3.34)'ün matris formu

$$\mathbf{z} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \quad (3.35)$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{z}$ 'nin varyans–kovaryans matrisi

$$Var(\mathbf{z}) = \mathbf{D} \left(\bigoplus_{i=1}^n (Var(y_i)) \right) \mathbf{D} = \bigoplus_{i=1}^n (g'(\mu_i))^2 Var(y_i) = \mathbf{W}^{-1} \quad (3.36)$$

olarak ifade edilir. $\mathbf{z}$ 'nin t . iterasyondaki değeri $\mathbf{z}^t$ ile gösterilir. (3.32), (3.35) ve (3.36) eşitliklerinden yola çıkarak (3.32)'deki $\boldsymbol{\beta}^{t+1}$ 'in, yanıt değişkeninin $\mathbf{z}^t$ ve varyans–kovaryans matrisinin ise $(\mathbf{W}^{-1})^t$ olduğu doğrusal modeldeki $\boldsymbol{\beta}$ 'nin genelleştirilmiş (ağırlıklı) en küçük kareler tahmin edicisi formunda olduğu görülmektedir. (3.32)'deki formülün tekrarlanması yakınsama oluncaya kadar devam eder.

Sonuç olarak, (3.26)'de verilen en çok olabilirlik denklemlerinin çözümü $\mathbf{y}$ 'ye uygulanmış bir bağlantı fonksiyonunun doğrusallaştırılmış formu kullanılarak ağırlıklandırılmış tekrarlı (iteratif) en küçük kareler yöntemi ile elde edilir.

$\mathbf{y}$ veri vektörü, $\boldsymbol{\mu}$ 'nün ilk değerinin tahmini $\boldsymbol{\eta}^0$ olarak kullanılabilir ki $\boldsymbol{\eta}^0$ 'ın i . elemanı $g(y_i)$ olur. Bundan $g'(\mu_i)$, $Var(\mu_i)$, μ_i 'deki varyans vektörü ve $\mathbf{z}$ için başlangıç değerleri elde edilir. $\mathbf{z}$ için $\boldsymbol{\eta}^0$ seçilir. Bunlar yinelemeli, tekrarlı metodu başlatmak için yeterlidir (Khuri, 2009).

3.5. Ortalama Yanıtın Tahmini

(3.2)'de verilen doğrusal tahmin edici $\eta(\mathbf{X})$ 'nın tahmini

$$\hat{\eta}(\mathbf{X}) = f^\top(\mathbf{X})\hat{\beta} \quad (3.37)$$

olup burada $\hat{\beta}$, tekrarlanan sürecin bir sonucu olarak elde edilen β 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. (3.4)'teki formül yardımıyla verilen bir $\mathbf{x}$ noktasındaki ortalama yanıt $\mu(\mathbf{x})$

$$\hat{\mu}(\mathbf{x}) = h(\hat{\eta}(\mathbf{x})) = h\left(f^\top(\mathbf{x})\hat{\beta}\right). \quad (3.38)$$

olarak yazılabilir. Burada $h(\cdot)$ fonksiyonu, bağlantı fonksiyonu $g(\cdot)$ 'nin ters fonksiyondur. Bu tahmin değeri aynı zamanda $\mathbf{x}$ noktasındaki kestirilen yanıt (predicted response) değeridir.

3.6. $\hat{\beta}$ 'nin Asimptotik Dağılımı

β 'nin en çok olabilirlik tahmininin kesinlik derecesi asimptotik olarak β 'nin Fisher bilgi matrisi kullanılarak belirlenebilir, bu matris $\mathbf{I}(\beta)$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{I}(\beta) = -E(\mathbf{H}_l(\beta)) \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlanır. $E(\mathbf{H}_l(\beta))$ ise (3.28)'de verilen Hessian matrisinin beklenen değeridir. (3.31)'i kullanarak $\mathbf{I}(\beta)$

$$\mathbf{I}(\beta) = \mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X} \quad (3.40)$$

olarak yazılır. n örneklem hacmi olup $n \rightarrow \infty$ iken β 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisinin β ortalamalı ve $(\mathbf{I}(\beta))^{-1}$ varyans–kovaryans matrisli asimptotik normal dağılıma sahip olduğu bilinmektedir (Khuri, 2009). O halde

$$\hat{\beta} \approx AN\left(\beta, (\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1}\right). \quad (3.41)$$

olarak ifade edilebilir. Burada AN asimptotik normallliği belirtir. Verilen bir örneklem hacmi için, $\hat{\beta}$ 'nin varyans–kovaryans matrisi yaklaşık olarak

$$Cov(\hat{\beta}) \approx (\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \quad (3.42)$$

şeklinde gösterilebilir. (3.37) ve (3.42) kullanılarak $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{X})$ 'nın varyansı yaklaşık olarak

$$Var(\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{X})) \approx \mathbf{f}^\top(\mathbf{X}) (\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (3.43)$$

şeklinde gösterilir. Şimdi (3.38)'deki $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{X})$ 'in varyansının yaklaşık bir ifadesini elde etmek için ilk olarak $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})$ 'in bir komşuluğundaki $h(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}))$ 'in birinci dereceden Taylor serisi yaklaşımı

$$h(\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{X})) \approx h(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})) + (\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})) h'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})) \quad (3.44)$$

olarak elde edilir, burada, $h'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}))$, $h(\cdot)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\eta}$ 'ya göre türevidir. (3.38), (3.43) ve (3.44) formüllerini kullanarak

$$\begin{aligned} Var(\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{X})) &\approx [h'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}))]^2 Var(\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{X})) \\ &= [h'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}))]^2 \mathbf{f}^\top(\mathbf{X}) (\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

olarak bulunur. $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{X})$ 'in varyansı $\mathbf{X}$ 'teki kestirim varyansı (prediction variance) olarak adlandırılır. (3.45)'in sağ tarafı bu varyansın yaklaşık bir ifadesidir.

4. GAMMA REGRESYON MODELİ

Gamma regresyon modeli oldukça kullanışlı regresyon modellerinden biridir. Genelleştirilmiş doğrusal modeller grubuna giren gamma regresyonu pozitif çarpık ve ortalamanın dağılım parametresiyle orantılı olduğu durumlarda kullanılır. Gamma regresyon modeli için MLE yöntemi en iyi yansız tahmin edici yöntemlerindendir. Ancak açıklayıcı değişkenler arasında doğrusal ilişkiler bulunduğu zaman model parametrelerinin tahminleri büyük varyanslara sahip olur ve varyans şişmesi denilen olaya neden olur. Bunun sonucunda MLE yöntemi model tahmininde kötü sonuçlar verir. Bu gibi durumlarda gamma regresyon modeli için yanlı tahmin edicilerden olan ridge tahmin edicisi, Liu tahmin edicisi, Liu–tipi tahmin edicisi alternatif ve kullanışlı olacaktır. Yanlı tahmin edicilerin yansız tahmin edicilerden farkı tahmin ediciye az miktarda yan ekleyerek varyansının büyüklüğünü azaltıp daha kararlı ve doğru tahminler elde etmektir.

Gamma regresyon modelinde hemen hemen yansız tahmin edicileri kullanmak da mümkündür. Hemen hemen yansız gamma tahmin ediciler, yansız tahmin edicilerle aynı amaca hizmet etmekte olup yansız tahmin edicilere göre çok daha küçük miktarda yan ekleyerek yanlı tahmin edicileden daha kararlı tahminlere ulaşmayı amaçlamaktadır. Hemen hemen yansız gamma tahmin edicilerinden bazıları hemen hemen yansız gamma ridge tahmin edicisi, hemen hemen yansız gamma Liu tahmin edicisi ve hemen hemen yansız gamma Liu–tipi tahmin edicileridir.

Hemen hemen yansız tahmin edicilerin yanında geliştirilmiş bir başka tahmin edici ise modifiye hemen hemen yansız tahmin edicidir ve hemen hemen yansız tahmin edicilere göre küçük miktarda yan ekleyip daha iyi sonuçlar elde etmeyi sağlayabilmektedir. Bu tahmin yöntemi de gamma regresyon modeli için kullanılabilir. Modifiye hemen hemen yansız gamma tahmin edicilerine örnek olarak modifiye hemen hemen yansız gamma ridge tahmin edicisi, modifiye hemen hemen yansız gamma Liu tahmin edicisi ve modifiye hemen hemen yansız gamma Liu–tipi tahmin edicisi verilebilir.

Bu bölümde gamma regresyon modelinin elde edilişi, gamma regresyon modelinde çoklu bağlantı problemi, gamma regresyon modeli için kullanılan yanlı tahmin ediciler, gamma regresyon modeli için kullanılan hemen hemen yansız tahmin ediciler ve gamma regresyon modeli için geliştirilmiş modifiye hemen hemen yansız tahmin edicilerinden bahsedile-

cektir.

4.1. Gamma Regresyon Modeli

Gamma regresyon modeli gamma dağılımından elde edilen bir modeldir ve bu modelin parametrelerini tahmin etmek için genelde en çok olabilirlik yöntemi kullanılmaktadır. Gamma dağılımına sahip, pozitif çarpık verilerde gamma regresyon modelini kullanmak daha iyi tahminler sağlamaktadır. Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}, y > 0 \quad (4.1)$$

olarak yazılabilir. Burada y gamma dağılımlı yanıt değişkenidir ve parametreleri α ve β şeklindedir ($\alpha, \beta > 0$). Bu parametrelerden α gamma dağılımı için şekil parametresiyken β ise ölçek parametresidir. Gamma dağılımının beklenen değeri ve varyansı sırasıyla şu şekildedir:

$$E(y) = \alpha\beta$$

$$Var(y) = \alpha\beta^2.$$

Amin ve ark. (2020b) α ve β yerine $\alpha = \phi^{-1}$ ve $\beta = \mu\phi$ ifadelerini kullanarak yeniden parametrelendirme yapmışlardır. Tezin bundan sonraki kısımlarında bu şekilde devam edilecektir. Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu bu parametre dönüşümleriyle tekrar yazılırsa

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{1}{(\Gamma(1/\phi)(\mu\phi)^{1/\phi})} y^{(1/\phi)-1} e^{-y/\mu\phi}, y \geq 0 \quad (4.2)$$

şekline dönüşür. Ayrıca gamma dağılımı üstel dağılım ailesinden bir dağılımdır. Üstel dağılım ailesi formunu kullanmak önceki bölümlerde MLE'yi bulmada kullanılan yolların takibinde kolaylık sağladığından gamma dağılımı için bu form tercih edilmiştir. Üstel dağılım ailesinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y; \theta, \phi) = \exp \left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi) \right) \quad (4.3)$$

formunda gösterilir. Burada θ konum parametresi, $b(\theta)$ kümülatif fonksiyonu ve ϕ ise dağılım parametresini ifade etmektedir. (4.2) numaralı eşitlik üstel dağılım ailesi formunda yazılırsa

$$f(y; \theta, \phi) = \exp \left(\frac{y/\mu - (-\ln(\mu))}{(-\phi)} + \frac{(1-\phi)}{\phi} \ln y - \frac{\ln \phi}{\phi} - \ln \Gamma \left(\frac{1}{\phi} \right) \right) \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.3) ve (4.4) numaralı eşitliklerden $\theta = 1/\mu$, $a(\phi) = -\phi$ ve $b(\theta) = -\ln(\mu)$ olduğu görülebilir. Gamma dağılımının beklenen değeri ve varyansı sırasıyla

$$E(y) = b'(\theta) = \left(\frac{\partial b}{\partial \mu} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{-1}{\mu} \right) (-\mu^2) = \mu$$

$$Var(y) = -\phi b''(\theta) = -\phi \left(\frac{\partial^2 b}{\partial \mu^2} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) = -\phi(1)(-\mu^2) = \phi\mu^2$$

şeklinde olur. i . gözlem için açıklayıcı değişkenlerin değerleri $\mathbf{x}_i^\top = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ olduğundan gamma dağılımlı bağımlı değişkeninin y 'nin ortalaması için gamma regresyon modeli

$$g(\mu_i) = \ln(\mu_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{x}_i^\top = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$, $\mathbf{X}$ matrisinin i . gözlem vektörüdür ve $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ ise regresyonun katsayılar vektörüdür. $g(\mu_i)$ fonksiyonu ise bağlantı fonksiyonudur, öyle ki, $g(\mu_i) = \eta_i$. Gamma regresyon modeli için log-olabilirlik fonksiyonu Eşitlik (4.4) kullanılarak

$$l(\mu, \phi) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{-\phi} \left(\frac{y_i}{\mu_i} - (-\ln(\mu_i)) \right) + \frac{1-\phi}{\phi} \ln(y_i) - \frac{\ln(\phi)}{\phi} - \ln \left(\Gamma \left(\frac{1}{\phi} \right) \right) \right] \quad (4.5)$$

olarak yazılır (Amin ve ark., 2020b). Denklem (4.5) maksimize edilerek MLE elde edilir. Ancak Denklem (4.5), $\boldsymbol{\beta}$ 'nin doğrusal olmayan bir fonksiyonu olduğundan iteratif (yinelemeli) yöntemler kullanılır. İteratif bir yöntemle elde edilen MLE tahminleri $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\mu}$ ve $\hat{\phi}$ olsun. Log-olabilirlik fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ 'ya göre kısmi türevinin alınıp

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial l(\mu_i, \phi)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0 \quad (4.6)$$

denklem sistemi çözülür. $S(\boldsymbol{\beta})$, $p \times 1$ boyutlu bir yapıdadır. (4.6) numaralı denklemde $S(\boldsymbol{\beta})$ $\boldsymbol{\beta}$ 'nin doğrusal olmayan bir fonksiyonudur. Bu nedenle bilinmeyen parametrelerin tahmini için kullanılan Fisher puanlama yöntemdeki iterasyonlar

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(t+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(t)} - \left\{ E[H_l(\boldsymbol{\beta})]_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(t)}} \right\}^{-1} \left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right]_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(t)}}. \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Burada $E(H_l(\boldsymbol{\beta})) = -\frac{1}{\phi} \mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X}$ şeklinde olup Heissan matrisinin beklenen değeridir. Bütün bu aşamalar uygulandığında $\boldsymbol{\beta}$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MLE}} = (\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{z} \quad (4.8)$$

olarak ifade edilebilir. Burada düzeltilmiş bağımlı değişken $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ (bkz. Amin ve ark. (2020b)) için $z_i = \hat{\eta}_i + \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)}{\hat{\mu}_i}$, $\widehat{\mathbf{W}} = \bigoplus_{i=1}^n \frac{1}{g'(\hat{\mu}_i)V(\hat{\mu}_i)}$ ve $V(\mu) = Var(y_i)/\phi = b''(\theta)$ olur (bkz. Khuri (2009), sf. 507). Dikkat edilirse bu buradaki $\mathbf{W}$ matrisi (3.25) numaralı eşitlikten farklıdır. Buradaki değişiklik incelenen makalelerle uyum sağlayabilmek amacıyla yapılmıştır. Heissan matrisinin önceki bölümden biraz farklı çıkmasının nedeni $\mathbf{W}$ 'ye uygulanan değişimdir. Log-bağlantı fonksiyonu kullanılarak ortalamanın tahmini $\hat{\mu}_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE})$ şeklini alır. $\widehat{\mathbf{W}}$ ve $\mathbf{z}$ ise Fisher puanlama iteratif yöntemiyle en son adımda elde edilen ağırlık matrisi ve düzeltilmiş bağımlı değişkendir. En çok olabilirlik tahmin edicisi olan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}$ asimptotik olarak normal dağılımlıdır ve varyans-kovaryans matrisi

$$Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}) = \hat{\phi}(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X})^{-1}$$

olur, burada $\hat{\phi} = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\hat{\mu}_i^2}$ şeklindedir (bkz. Agresti (2015), sf. 154). MSE tahmin değerleri ile gerçek değerler arasındaki farkın karesi olup bir tahmin edicinin ne kadar iyi olduğunu ölçmede kullanılan bir kriterdir ve küçük değerlere sahip olması beklenir. En çok olabilirlik tahmin edicisinin MSE'si

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}) &= E\left(\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} - \boldsymbol{\beta}\right)^\top \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} - \boldsymbol{\beta}\right)\right) \\ &= tr\left(\hat{\phi}(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X})^{-1}\right) = \hat{\phi} \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

olarak ifade edilir, burada λ_j 'ler $j = 1, 2, \dots, p$ için $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisinin özdeğerleridir (Amin ve ark., 2020b). MLE'nin hata kareler ortalaması incelenirse, özdeğerler küçüldükçe MSE'nin arttığı görülür. Özdeğerlerin küçük olması varyans şişmesine neden olup tahmin değerlerinde istenmeyen sonuçlara sebep olur. Varyansların aşırı büyümesi sorunu çoklu bağlantı probleminden kaynaklanmaktadır. Çoklu bağlantı problemi açıklayıcı değişkenler arasında yüksek korelasyonlar bulunması veya yakın doğrusal bağımlılık olması durumudur. Böyle durumlarda MLE iyi sonuçlar vermediği için farklı yöntemler kullanılır. Bir sonraki başlıkta çoklu bağlantıdan detaylı olarak söz edilecektir.

4.2. Çoklu Bağlantı Problemi

Çoklu bağlantı $\mathbf{X}$ matrisinin sütunlarının ölçeklendirilmesine bağlı olduğu için $\mathbf{X}$ matrisinin ölçeklendirildiği varsayalım. GLM'lerde çoklu bağlantıya geçilmeden önce

GLM'ler için uygun notasyon tanımlamaları gerekmektedir. Regresyon katsayısı vektörü olan β için $n \times n$ boyutlu ağırlıklandırılmış köşegen matris $\mathbf{W}$, önceki bölümlerde

$$\mathbf{W} = \bigoplus_{i=1}^n \frac{1}{g'(\mu_i)V(\mu_i)}, V(\mu_i) = Var(y_i)/\phi = b''(\theta), i = 1, 2, \dots, n$$

olarak ifade edilmişti. Ayrıca $n \times 1$ boyutlu düzeltilmiş bağımlı değişken $\mathbf{z}$, (3.42)'de verilmiş olup, i . elemanı

$$\begin{aligned} z_i &= f^\top(\mathbf{x}_i)\beta + (y_i - \mu_i)g'(\mu_i) \\ z_i &= g(\mu_i) + (y_i - \mu_i)g'(\mu_i), i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

olarak yazılabilir, burada verilen $\mu_i = g^{-1}(f^\top(\mathbf{x}_i)\beta)$ şeklindedir. GLM'lerde parametre tahmini genellikle yinelemeli ağırlıklandırılmış en küçük kareler (IRLS) algoritması kullanılarak en çok olabilirlik yöntemi ile bulunur (Nelder ve Wedderburn, 1972). Buna göre, her adımda tahmin edilen parametre vektörü

$$\beta^{t+1} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{z}_{\beta^t}$$

şeklinde yazılabilir. Verilen eşitlikte t ifadesi iterasyon numarasıdır. En son elde edilen parametre vektörü ise en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicisi için her adımda elde edilen parametre vektörüne $\mathbf{X}^{(t)} = [\mathbf{W}_{\beta^t}]^{1/2} \mathbf{X}$ ve $\mathbf{z}^{(t)} = [\mathbf{W}_{\beta^t}]^{1/2} \mathbf{z}_{\beta^t}$ dönüşümleri uygulandığında

$$\beta^{t+1} = \left((\mathbf{X}^{(t)})^\top \mathbf{X}^{(t)} \right)^{-1} \mathbf{X}^{(t)} \mathbf{z}^{(t)} \quad (4.10)$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen tahminler β için MLE'dir ve sonuçta asimptotik olarak normal dağılımlıdır.

Eğer $(\mathbf{W}_{\beta^t})^{1/2} \mathbf{X} \alpha$ 'nın yeterince küçük bileşenleri olacak şekilde bir α yön vektörü varsa ya da $\alpha^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X} \alpha$ küçükse GLM'lerde çoklu bağlantı mevcuttur (Mackinnon ve Puterman, 1989). $\alpha^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X} \alpha$ 'nın en küçük değerini alması için α 'nın, $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X}$ 'nin en küçük öz değeri λ_{min} 'e karşılık gelen öz vektörünün yönünde olması gerekir. Sonuç olarak, GLM'lerde çoklu bağlantı λ_{min} 'nin küçük değerlerine karşılık gelir. Dolayısıyla, çoklu bağlantıyı bulma kriterlerinden biri olarak $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X}$ matrisinin koşul sayısı yani, $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X}$ matrisinin maksimum öz değerinin minimum öz değerine oranının karekökü, kullanılabilir. Eğer $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X}$ matrisinin koşul sayısı 10'u aşarsa GLM'lerde çoklu bağlantı mevcuttur yorumu yapılır.

Bu yöntem ve diğer yöntemler öznedir ancak çoklu bağlantıyı bulmak açısından iyi birer kılavuzdurlar. GLM'lerden biri olan gamma regresyon modeli için de yukarıda verilenler geçerli olup β bilinmediğinden $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_\beta \mathbf{X}$ matrisinin tahmini olarak $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\hat{\beta}_{MLE}} \mathbf{X}$ kullanılır. Burada $\hat{\beta}_{MLE}$ gamma regresyon modelinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Çünkü $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_\beta \mathbf{X}$ matrisinin bileşenleri β için 1 – 1 olduğunda $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\hat{\beta}_{MLE}} \mathbf{X}$ matrisi, $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_\beta \mathbf{X}$ 'nin MLE'si olur. Bazı düzgünlük koşulları altında $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\hat{\beta}_{MLE}} \mathbf{X}$ tutarlı olacaktır. Uygulamada, eş doğrusallığı tespit etmek için gamma regresyon modelinin MLE'si $\hat{\beta}_{MLE}$ parametresi β^t ile değiştirilir. Burada t ifadesi ağırlıklı en küçük kareler algoritmasının kriterlerini sağlayan β 'nin iterasyon numarasıdır. Gamma regresyon modelinde de $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X}$ matrisinde t yeteri kadar büyük olduğunda ($\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\hat{\beta}_{MLE}} \mathbf{X}$ matrisi elde edilir) koşul sayısı 10'u aşarsa çoklu bağlantının varlığından bahsedilir.

Yukarıdaki sonuçlardan yola çıkılarak GLM'lerde ve de dolayısıyla gamma regresyon modelinde çoklu bağlantı üzerine bazı sonuçlar elde edilebilir. Tekrarlı ağırlıklandırılmış en küçük kareler algoritması, β , MLE'ye yakın olduğu durumlarda hesaplama bakımından kararsız olabilir, çünkü t yeterince büyük olduğu zaman, $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X}$ matrisinin neredeyse tekil olduğu görülebilmektedir. $\hat{\beta}_{MLE}$ 'nin asimptotik kovaryans matrisi $\phi \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\hat{\beta}_{MLE}} \mathbf{X} \right)^{-1}$ şeklinde olup çoklu bağlantı olduğunda kovaryans matrisinin bileşenleri fazla büyük olacak ve bu yüzden parametre tahminleri güvenilir olmayacaktır. Çoklu bağlantı durumlarında sapma ve genelleştirilmiş Pearson istatistiği gibi çıkarım ve tahminlerin GLM üzerindeki etkilerini bulmak kolay olmayacaktır. Çünkü bunlar β ve $\mathbf{W}$ 'nin karmaşık fonksiyonlarıdır (Mackinnon ve Puterman, 1989).

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşıldığı üzere çoklu bağlantıda kullanılacak olan teşhis kriteri $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X}$, yeterince büyük t iterasyonu için $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^*} \mathbf{X}$ matrisine yaklaşacaktır. (Burada β^* , GLM'lerde MLE tahmin edicisidir.) Bu yöntem, yanıtı modellemek için seçilen belirli bir dağılıma bağlıdır ve bu nedenle standart doğrusal modellerdeki çoklu bağlantı teşhisine dayalı daha basit kriterler elde etme olasılığı üzerinde düşünülmüştür. Standart doğrusal modellerin tersine GLM'lerde çoklu bağlantının varlığı hem $\mathbf{X}$ matrisinin sütunlarının geometrisine hem de β matrisinin yönüne bağlıdır. Bunun nedeni $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^t} \mathbf{X}$ matrisinin $\mathbf{X}\beta$ 'nin açık bir fonksiyonu olmasıdır ve sonuç olarak matrisin öz değerleri $\mathbf{X}$ ve β 'nin belirli değerlerine bağlıdır. Bu nedenle standart doğrusal modeller çoklu bağlantı gösterirken GLM'ler göstermeyebilir ya da tam tersi olup GLM'ler çoklu bağlantı gösterirken standart doğrusal modellerde görülmeyebilir. Bunların yanında iki modelde de çoklu

bağlantı görülüp çoklu bağlantının yönleri farklı olabilir. Mackinnon ve Puterman (1988) bu olası durumları gösteren gamma dağılımına bağlı örnekler vermiştir ve bu çalışma tek başına standart doğrusal model tanılmasının GLM'deki çoklu bağlantıyı tespit etmek için yetersiz olduğunu göstermektedir. Bunun yerine tanılama $\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta^*} \mathbf{X}$ matrisine dayandırılmalıdır.

Aşağıda verilen teorem GLM'nin ve buna karşılık gelen standart doğrusal modelin indekslerinin çoklu bağlantılılığı arasındaki ilişkileri hakkında bilgi vermektedir. Bu teorem Mackinnon (1986) tarafından özel bir durum olarak ağırlıklı en küçük kareler ve standart doğrusal modeller bağlamında belirtilmiş ve özel bir uygulaması verisi ile ele almıştır.

Teorem 4.1 $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ matrisinin koşul sayısı ϕ ve $\mathbf{X}^\top \mathbf{V} \mathbf{X}$ matrisinin koşul sayısı ϕ_v olsun. Burada $\mathbf{V}$ pozitif köşegen matris olup v_{min} ve v_{max} bu matrisin minimum ve maksimum bileşenleridir. Buna göre aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\left(\frac{v_{min}}{v_{max}} \right) \phi^2 \leq \phi_v^2 \leq \left(\frac{v_{max}}{v_{min}} \right) \phi^2.$$

İspat Teoremin ispatı için bkz. Mackinnon ve Puterman (1988) (s.47-48) ■

Bu sonuç, tahmin için ağırlıklı en küçük kareler modellerinin kullanıldığı herhangi bir modelde çoklu bağlantı analizinde uygulanabilir. Mackinnon (1986) GLM'lerde $\mathbf{V}$ 'nin $\mathbf{W}(\beta)$ ile belirlenmesini şu şekilde yorumlamıştır: GLM sisteminin koşul sayısı, standart doğrusal modellerin koşul sayısının $\mathbf{V}$ ölçekleme ağırlıklılarının minimum değerinin maksimum değerine oranı şeklinde bazı reel katlarıyla sınırlandırılmıştır. Bu teorem yoluyla iki sonuç çıkarılmıştır. Bunlardan birisi eğer ağırlıklar oransız değilse o zaman GLM'lerdeki çoklu bağlantı standart doğrusal modelinkine benzerdir ve dolayısıyla çoklu bağlantıyı $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ matrisiyle bulmak mümkün olur. Ancak tam tersi durum mevcutsa teoremdeki aralık geniş olacak ve standart doğrusal modelde çoklu bağlantı olmasa bile GLM'de çoklu bağlantı olabilir. Bu kadar geniş aralık veren veri kümeleri ortalama değer ölçeğinin uç değerlerinde yanıtlar içerenlerdir, örneğin küçük ve büyük sayılara sahip Poisson modeli (Mackinnon, 1986).

GLM'lerde ve dolayısıyla gamma regresyon modelinde çoklu bağlantı olduğu durumda ise MLE'yi kullanmak iyi kestirimler vermediği için başka tahmin yöntemleri kullanmak gerekmektedir. Bu tahmin edicilerin MLE'den daha iyi sonuçlar vermesinin yanında MLE gibi yansız değil belli bir miktar yana sahip olmaları mümkündür. Modele yan eklemek, istenmeyen bir durum olsa da çoklu bağlantı durumunda avantaj sağlamaktadır. Gamma

regresyon modeli için önerilen bazı yanlı tahmin ediciler bir sonraki başlıklarda incelenecektir.

4.3. Yanlı Tahmin Ediciler

Bir modelde açıklayıcı değişkenler arasında yakın doğrusal ilişkiler bulunuyorsa yani modelde çoklu bağlantı problemi varsa yansız tahmin yöntemleri olan MLE ve OLS, model tahmininde yüksek varyanslara sahip olduğundan tahminler kararsız olacaktır. Çoklu bağlantının varlığında yansız tahmin edicilerin MSE'si yüksek çıkacak, katsayılarının işaretlerinde farklılıklar görülebilecektir. Tahmin değerlerinin iyi sonuçlar verememesi araştırmacıları yeni tahmin ediciler aramaya yönlendirmiştir. Modele az miktarda yan eklenerek daha kararlı tahminler elde edilebileceği öne sürülmüş ve yanlı tahmin ediciler önerilmiştir. Bunlardan birisi ridge tahmin edicisidir. İlk olarak Hoerl ve Kennard (1970) tarafından önerilen ridge tahmin edicisi, doğrusal regresyon modelinde $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ matrisinin köşegen elemanlarına pozitif bir k parametresinin eklenmesiyle elde edilen bir tahmin yöntemidir. Bu yöntemin önerilmesinin ardından yanlılık parametresi k 'nın değerinin tahmini üzerine çalışmalar yapılarak eklenen yan miktarının MSE'de daha küçük sonuçlar vermesi amaçlanmıştır.

Çoklu bağlantı durumlarında kullanılabilecek başka bir tahmin edici Liu (1993) tarafından önerilmiş olan Liu tahmin edicisidir. Liu tahmin edicisi, ridge ve Stein tahmin edicilerinin ikisinin de avantajlarından faydalanılarak oluşturulmuştur. Bu tahmin edicinin bir d yanlılık parametresi bulunmaktadır ve bu parametrenin değer aralığı $0 < d < 1$ şeklindedir. Ayrıca bu aralıkta hangi değer seçilirse en iyi MSE sonuçlarının elde edileceği üzerinde de çalışmalar yapılmıştır.

Liu tahmin edicisinden sonra, iki parametrelili bir tahmin edici olan Liu-tipi tahmin edicisi Liu (2003) tarafından önerilmiştir. Bu tahmin edici, Liu tahmin edicisi ile ridge tahmin edicisinin özelliklerini içerisinde barındıran bir tahmin edicidir. Liu-tipi tahmin edicisindeki k ve d parametreleri, sırasıyla, $k > 0$ ve $-\infty < d < \infty$ şeklinde sınırlanmıştır. Diğer yanlı tahmin edicilerde olduğu gibi bu parametrelerin, tahmin edicinin performansını en iyi yapacak şekilde seçilmesi için, farklı tahmin yöntemleri üzerine çalışılmıştır.

Literatürde bu tahmin edicilerin haricinde başka yanlı tahmin ediciler de önerilmiştir. Ancak bu tezde yukarıda bahsedilen üç yöntem incelenecektir. Tezin ilerleyen bölümlerinde, özellikle GLM'lerde kullanılan ve ridge, Liu ve Liu-tipi tahmin edicileri temel alınarak

oluşturulmuş yanlı tahmin ediciler de tanımlanmıştır. Bu tahmin ediciler ise hemen hemen yansız tahmin ediciler olarak adlandırılmıştır. Yanlı tahmin edicilere göre hemen hemen yansız tahmin ediciler modele daha az miktarda yan ekleyerek daha iyi tahminlerde bulunmayı sağlamıştır. Bu tahmin edicilerin modifiye edilmesiyle, modifiye hemen hemen yansız tahmin edicileri oluşturulmuş ve modelde çoklu bağlantının olduğu durumlarda diğer yanlı tahmin edicilere alternatif olarak kullanışlı tahmin ediciler olmuşlardır. Burada bahsi geçen yanlı tahmin ediciler, gamma regresyon modelinde tanıtılacaktır.

4.3.1. Gamma Ridge Tahmin Edicisi

Açıklayıcı değişkenler arasında yüksek ilişkiler bulunduğu durumlarda araştırmacılar tarafından tercih edilebilecek bir yöntem olan ridge tahmin edicisi ilk olarak Hoerl ve Kennard (1970) tarafından önerilmiştir. Ridge tahmin edicisi, Segerstedt (1992) tarafından genelleştirilmiş doğrusal modellerde kullanılmıştır. Gamma regresyon modelinde uygulamasını Almagal (2018), Amin ve ark. (2020a) ve Amin ve ark. (2020b) yapmışlardır. Gamma regresyon modelinde katsayı vektörü olan β 'nin gamma ridge tahmin edicisi (GRRE: Gamma regression ridge estimator) Amin ve ark. (2020a) tarafından

$$\hat{\beta}_{GRRE} = \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} \hat{\beta}_{MLE}, k > 0 \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\mathbf{I}$ matrisi $p \times p$ boyutlu birim matrisini temsil ederken $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisinin yanındaki k ise ridge tahmin edicisinin yan parametresi olarak adlandırılır, ridge yanlılık parametresinin değer aralığı $k > 0$ şeklindedir.

Gamma regresyon modelinde çoklu bağlantı olması durumunda doğrusal regresyon modeline benzer şekilde, kötü koşullu durumda olan $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisinin köşegen elemanlarına eklenen yanlılık parametresinin modelde olan kötü koşulluluğu ortadan kaldırması beklenir. GRRE için beklenen değer

$$\begin{aligned} E \left(\hat{\beta}_{GRRE} \right) &= E \left(\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} \hat{\beta}_{MLE} \right) \\ &= \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} E \left(\hat{\beta}_{MLE} \right) \\ &= \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} \beta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Amin ve ark. (2020a), GRRE'nin varyans–kovaryans matrisini, yan

vektörünü ve MSE'sini sırayla

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{\beta}_{GRRE}) &= \hat{\phi} \left(\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \right) \\
Bias(\hat{\beta}_{GRRE}) &= \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} \beta - \beta \\
&= -k \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \beta \\
MSE(\hat{\beta}_{GRRE}) &= \hat{\phi} \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j}{(\lambda_j + k)^2} + k^2 \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{(\lambda_j + k)^2}
\end{aligned}$$

olarak elde etmişlerdir, burada $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, p$ için $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisinin özdeğerleridir.

4.3.2. Gamma Liu Tahmin Edicisi

Ridge tahmin edicisi dışında bir diğer yanlı tahmin edici ise Liu tahmin edicisidir. Ridge tahmin edicisi pratikte etkili bir yöntem olmasına karşın k 'nın karmaşık bir fonksiyonudur. Liu tahmin edicisi ise d 'nin doğrusal bir fonksiyonu olduğu için ridge tahmin edicisinden daha kullanışlı ve pratik bir yöntem olarak önerilmiştir. Liu tahmin edicisinde yanlılık parametresi olan d parametresi $0 < d < 1$ aralığındadır.

Doğrusal modellerde Liu (1993) tarafından önerilen Liu tahmin edicisi, genelleştirilmiş doğrusal modeller için Kurtoğlu ve Özkale (2016) tarafından düzenlenirken, gamma regresyon modeli için ise Qasim ve ark. (2018) tarafından tanımlanmıştır. Gamma regresyon modelinde parametre vektörü β 'nin gamma Liu tahmin edicisi (GLE: gamma Liu estimator)

$$\hat{\beta}_{GLE} = \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + d\mathbf{I} \right) \hat{\beta}_{MLE}, 0 < d < 1 \quad (4.12)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada d doğrusal regresyon modelinde olduğu gibi Liu tahmin edicisinin yanlılık parametresidir. Kurtoğlu ve Özkale (2016), GLE'nin performansını araştırmak için bir Monte Carlo simülasyon çalışması yapmışlardır. GLE'nin beklenen değeri

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}_{GLE}) &= E \left(\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + d\mathbf{I} \right) \hat{\beta}_{MLE} \right) \\
&= \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + d\mathbf{I} \right) E(\hat{\beta}_{MLE}) \\
&= \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + d\mathbf{I} \right) \beta
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Almagal ve Asar (2020), GLE'nin varyans-kovaryans matrisini, yan vek-

törünü ve MSE'sini sırasıyla

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}_{GLE}) &= \hat{\phi} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + d\mathbf{I} \right) \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} \\ &\quad \times \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + d\mathbf{I} \right) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-1} \\ Bias(\hat{\beta}_{GLE}) &= -(1-d) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-1} \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$MSE(\hat{\beta}_{GLE}) = \hat{\phi} \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + 1)^2} + (1-d)^2 \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{(\lambda_j + 1)^2} \quad (4.14)$$

şeklinde ifade etmişlerdir. Burada $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, p$ için $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisinin özdeğerleridir.

4.3.3. Gamma Liu-Tipi Tahmin Edicisi

Liu-tipi tahmin edicisinin Liu (2003) tarafından önerilmesinin ardından Liu-tipi tahmin edicisi doğrusal modeller dışındaki farklı modellere uyarlanmıştır. GLM'lerde İnan ve Erdoğan (2013), Asar ve Genç (2016), Amin ve ark. (2019), Varathan ve Wijekoon (2019) farklı modeller için bu tahmin ediciyi incelemişlerdir. Gamma regresyon modeli için ise Almagal ve Asar (2020) Liu-tipi tahmin edicisini tanımlamışlardır. Gamma regresyon modelinde parametre vektörü $\boldsymbol{\beta}$ 'nin gamma Liu-tipi tahmin edicisi (GLTE: gamma Liu-type estimator)

$$\hat{\beta}_{GLTE} = \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} - d\mathbf{I} \right) \hat{\beta}_{MLE}, k > 0, -\infty < d < +\infty \quad (4.15)$$

olarak ifade edilir. Burada k ve d Liu-tipi tahmin edicisinin yanlılık parametreleridir. Tezde kullanılacak olan tahmin edicilerden biri bu tahmin edici olduğundan ileride ayrı bir bölüm olarak daha ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

4.4. Hemen Hemen Yansız Tahmin Ediciler

Gamma regresyon modelinde çoklu bağlantı problemi olduğunda en çok olabilirlik tahmin edicisinin iyi sonuçlar vermediği bunun üzerine de yanlı tahmin edicilerin kullanıldığı daha önceki bölümlerde bahsedilmişti. Hemen hemen yansız gamma regresyon tahmin edicileri de çoklu bağlantı probleminin olduğu durumlar için geliştirilmiş olup, modele az miktarda yan ekleyerek varyansı düşürmeyi ve MSE'yi küçültmeyi amaçlar. Hemen

hemen yansız gamma tahmin edicilerinin de yanlı gamma tahmin edicilerine göre avantajı, eklenen yanın daha küçük olup yanlı tahmin edicilerden daha iyi tahmin sonuçları elde edebilmesidir. Hemen hemen yansız tahmin edicinin tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.1 (Xu ve Yang, 2011) $\hat{\beta}$, β parametresinin yanlı bir tahmin edicisi olsun. $\hat{\beta}$ tahmin edicisinin yan vektörü $Bias(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}) - \beta = C\beta$ olup bu eşitlik $E(\hat{\beta} - C\beta) = \beta$ şeklindedir. Buradan $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - C\hat{\beta} = (I - C)\hat{\beta}$ elde edilir ki bu da $\tilde{\beta}$ yanlı tahmin edicisine dayalı hemen hemen yansız tahmin edici olarak adlandırılır.

Tanım 4.1 kullanılarak yanlı tahmin edicilerin hemen hemen yansız tahmin edici versiyonları elde edilecektir. Bu alt bölümde hemen hemen yansız gamma tahmin edicileri kısaca tanıtılacaktır.

4.4.1. Hemen Hemen Yansız Gamma Ridge Tahmin Edicisi

Bu tezin konusu olan hemen hemen yansız tahmin edicilerden ilki hemen hemen yansız ridge tahmin edicisidir (AURE: almost unbiased ridge estimator). Bu tahmin edici, doğrusal modellerdeki ridge tahmin edicisinin yukarıda verilen tanım kullanılarak elde edilmiş olan hemen hemen yansız versiyonudur. Doğrusal regresyon modeli için hemen hemen yansız ridge tahmin edicisi Singh ve ark. (1986) tarafından önerilmiştir. Akdeniz ve Erol (2003) doğrusal regresyon modelinde hemen hemen yansız ridge tahmin edicisini incelemiştir ve Amin ve ark. (2020a) bu tahmin ediciyi gamma regresyon modeline genelleştirmişlerdir. Amin ve ark. (2020a) hemen hemen yansız gamma ridge tahmin edicisini (GAURE: almost unbiased gamma ridge estimator)

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{GAURE} &= \left(I + k \left(X^T \widehat{W} X + kI \right)^{-1} \right) \hat{\beta}_{GRRE} \\
&= \left(2I - \left(X^T \widehat{W} X + kI \right)^{-1} X^T \widehat{W} X \right) \hat{\beta}_{GRRE} \\
&= \left(I + \left(X^T \widehat{W} X + kI \right)^{-1} X^T \widehat{W} X \right) \left(X^T \widehat{W} X + kI \right)^{-1} X^T \widehat{W} X \hat{\beta}_{MLE} \\
&= \left(I - k^2 \left(X^T \widehat{W} X + kI \right)^{-2} \right) \left(X^T \widehat{W} X \right) \left(X^T \widehat{W} X \right)^{-1} \hat{\beta}_{MLE} \\
&= \left(I - k^2 \left(X^T \widehat{W} X + kI \right)^{-2} \right) \hat{\beta}_{MLE}, k > 0
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada $\hat{\beta}_{\text{GRRE}}$ (4.11)'de verilen gamma ridge regresyon tahmin edicisidir. GAURE'nin beklenen değeri

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\beta}_{\text{GAURE}}\right) &= E\left(\left(\mathbf{I} - k^2\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-2}\right)\hat{\beta}_{\text{MLE}}\right) \\ &= \left(\mathbf{I} - k^2\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-2}\right) E\left(\hat{\beta}_{\text{MLE}}\right) \\ &= \left(\mathbf{I} - k^2\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-2}\right) \beta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Amin ve ark. (2020a) GAURE'nin varyans–kovaryans matrisini, yan vektörünü ve MSE'sini sırasıyla

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\hat{\beta}_{\text{GAURE}}\right) &= \hat{\phi}\left(\mathbf{I} - k^2\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-2}\right)\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X}\right)^{-1} \\ &\quad \times \left(\mathbf{I} - k^2\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-2}\right)^T \\ \text{Bias}\left(\hat{\beta}_{\text{GAURE}}\right) &= -k^2\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-2} \beta \\ \text{MSE}\left(\hat{\beta}_{\text{GAURE}}\right) &= \hat{\phi} \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j^2 + 2k\lambda_j)^2}{\lambda_j(\lambda_j + k)^4} + k^4 \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{(\lambda_j + k)^4} \end{aligned}$$

şeklinde elde etmişlerdir. Yukarıdaki denklemlerde geçen λ_j önceki bölümde tanımlandığı gibidir.

4.4.2. Hemen Hemen Yansız Gamma Liu Tahmin Edicisi

Bir diğer hemen hemen yansız tahmin edici de hemen hemen yansız Liu tahmin edicisidir (AULE: almost unbiased Liu estimator). Doğrusal regresyon modelinde, hemen hemen yansız Liu tahmin edicisinin geliştirilmiş hali Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) tarafından önerilmiştir. Akdeniz ve Erol (2003) doğrusal regresyon modeli için hemen hemen yansız geliştirilmiş ridge tahmin edicisi ile hemen hemen yansız geliştirilmiş Liu tahmin edicisini matris hata kareler ortalaması kriterine göre karşılaştırmışlardır. Akdeniz ve Duran (2012) doğrusal modellerde geliştirilmiş AULE'yi jackknife yöntemi ile modifiye ederek yeni bir tahmin edici tanımlamışlardır. Wu ve ark. (2018) kısıtlı hemen hemen yansız Liu tahmin edicisinin lojistik regresyondaki performansını incelemişlerdir. Varathan ve Wijekoon (2019) ve Varathan ve Wijekoon (2021) lojistik regresyonda Liu tahmin edicisi ve hemen hemen yansız Liu tahmin edicisi üzerine çalışmışlardır.

Gamma regresyon modelinde ise hemen hemen yansız Liu tahmin edicisi daha önce tanımlanmamıştır. Bu tahmin edici literatürde çalışılmış olan modellerde iyi sonuçlar verdiği için gamma regresyon modelinde de çoklu bağlantı olduğu durumlarda iyi tahmin sonuçları vereceği düşünülmektedir. Bu tezde gamma regresyon modelinde, bahsi geçen bu tahmin edici hemen hemen yansız gamma Liu tahmin edicisi (GAULE: almost unbiased gamma Liu estimator) olarak isimlendirilmiştir.

Qasim ve ark. (2018) tarafından önerilen GLE'nin yan vektörü (4.13)'te

$$Bias\left(\hat{\beta}_{GLE}\right) = -(1-d)\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-1}\beta$$

olarak verilmişti. Tanım (4.1)'i kullanan makalelerden olan Kadiyala (1984) ve Varathan ve Wijekoon (2021)'i takip ederek yan düzeltmesi yapılmış hemen hemen yansız gamma Liu tahmin edicisi (BCGLE: bias-corrected gamma Liu estimator)

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{BCGLE} &= \hat{\beta}_{GLE} - Bias\left(\hat{\beta}_{GLE}\right) \\ &= \hat{\beta}_{GLE} + (1-d)\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-1}\beta\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. GAULE'nin elde edilmesi için BCGLE formülündeki β yerine $\hat{\beta}_{GLE}$ yazılır (bkz. Tanım 4.1). O halde GAULE aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{GAULE} &= \hat{\beta}_{GLE} + (1-d)\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-1}\hat{\beta}_{GLE} \\ &= \left(\mathbf{I} + (1-d)\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-1}\right)\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + d\mathbf{I}\right)\hat{\beta}_{MLE} \\ &= \left(\mathbf{I} + (1-d)\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-1}\right)\left(\mathbf{I} - (1-d)\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-1}\right)\hat{\beta}_{MLE} \\ &= \left(\mathbf{I} - (1-d)^2\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-2}\right)\hat{\beta}_{MLE}.\end{aligned}$$

Yani, kısaca GAULE

$$\hat{\beta}_{GAULE} = \left(\mathbf{I} - (1-d)^2\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-2}\right)\hat{\beta}_{MLE}, 0 < d < 1 \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada d , GAULE'nin yanlılık parametresidir. GAULE'nin beklenen değeri

$$\begin{aligned}E\left(\hat{\beta}_{GAULE}\right) &= \left(\mathbf{I} - (1-d)^2\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-2}\right)E\left(\hat{\beta}_{MLE}\right) \\ &= \left(\mathbf{I} - (1-d)^2\left(\mathbf{X}^T\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-2}\right)\beta\end{aligned}$$

olarak bulunur. GAULE'nin varyans–kovaryans matrisi, yan vektörü ve MSE'si sırasıyla

$$\begin{aligned}
Cov\left(\widehat{\beta}_{GAULE}\right) &= \widehat{\phi} \left(\mathbf{I} - (1-d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-2} \right) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} \right)^{-1} \\
&\quad \times \left(\mathbf{I} - (1-d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-2} \right)^T \\
Bias\left(\widehat{\beta}_{GAULE}\right) &= \left(- (1-d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-2} \right) \beta \\
MSE\left(\widehat{\beta}_{GAULE}\right) &= \widehat{\phi} \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j + d)^2 (\lambda_j + 2 - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + 1)^4} + (d-1)^4 \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{(\lambda_j + 1)^4}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4.4.3. Hemen Hemen Yansız Gamma Liu–Tipi Tahmin Edicisi

Hemen hemen yansız tahmin edicilerden biri olan hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisi (AULTE: almost unbiased Liu–type estimator) Chaubey ve ark. (2018) ve Yıldız (2018) tarafından çalışılmıştır. Yapılan literatür taramasında hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisinin gamma regresyon modelinde çalışmadığı görülmüş olup gamma regresyon modelinde hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisini uygulamanın çoklu bağlantı probleminin varlığında iyi tahmin sonuçları sağlayabileceği düşünülmüştür. Dolayısıyla, bu tezde gamma regresyon modelinde hemen hemen yansız gamma Liu–tipi tahmin edicisi (GAULTE: almost unbiased gamma Liu–type estimator) tanımlanmıştır. Gamma Liu–tipi tahmin edicisinin yan vektörü

$$\begin{aligned}
Bias\left(\widehat{\beta}_{GLTE}\right) &= \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} - d\mathbf{I} \right) \widehat{\beta}_{MLE} - \beta \\
&= - (k + d) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \beta
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak bulunur. Chaubey ve ark. (2018) ve Kadiyala (1984)'dan faydalanarak yan düzeltmesi yapılmış gamma Liu–tipi tahmin edicisi (BCGLTE: bias–corrected gamma Liu–type estimator)

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_{BCGLTE} &= \widehat{\beta}_{GLTE} - Bias\left(\widehat{\beta}_{GLTE}\right) \\
&= \widehat{\beta}_{GLTE} + (k + d) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \beta
\end{aligned}$$

olarak tanımlanabilir. GAULTE'yi oluşturmak için BCGLTE formülündeki β yerine $\widehat{\beta}_{GLTE}$ yazılacaktır (bkz. Tanım 4.1). O halde Chaubey ve ark. (2018) ve Ohtani (1986)'yi takip

ederek, GAULTE aşağıdaki adımlarla elde edilir

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{\text{GAULTE}} &= \hat{\beta}_{\text{GLTE}} + (k + d) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-1} \hat{\beta}_{\text{GLTE}} \\
&= \left(\mathbf{I} + (k + d) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-1} \right) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} - d \mathbf{I} \right) \hat{\beta}_{\text{MLE}} \\
&= \left(\mathbf{I} + (k + d) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-1} \right) \left(\mathbf{I} - (k + d) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-1} \right) \hat{\beta}_{\text{MLE}} \\
&= \left(\mathbf{I} - (k + d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-2} \right) \hat{\beta}_{\text{MLE}}.
\end{aligned}$$

Önerilen bu yeni tahmin edici kısaca

$$\hat{\beta}_{\text{GAULTE}} = \left(\mathbf{I} - (k + d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k \mathbf{I} \right)^{-2} \right) \hat{\beta}_{\text{MLE}}, k > 0, -\infty < d < \infty \quad (4.18)$$

olarak ifade edilir. Bu tezin 6. Bölümünde GAULTE'nin teorik özellikleri daha detaylı bir şekilde incelenecektir.

4.5. Modifiye Hemen Hemen Yansız Tahmin Ediciler

Doğrusal regresyon modelinde hemen hemen yansız tahmin ediciler incelendiğinde, bu tahmin edicilerin modifiye edilmiş versiyonlarının da tanımlandığı görülmüştür. Gerek teorik, gerek simülasyon ve gerekse de gerçek veri uygulamalarında modifiye hemen hemen yansız tahmin edicilerin diğer yanlı tahmin edicilere ve hemen hemen yansız tahmin edicilere göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Modifiye hemen hemen yansız tahmin ediciler üzerine yapılmış olan çalışmalardan bazıları Lukman ve ark. (2020), Varathan ve Wijekoon (2021) Yıldız (2018), Akdeniz ve Duran (2012) ve Almagal (2018) şeklindedir. Bu alt bölümde modifiye edilmiş hemen hemen yansız tahmin edicilerden kısaca bahsedilecektir.

4.5.1. Modifiye Hemen Hemen Yansız Gamma Ridge Tahmin Edicisi

Bir önceki bölümde gamma regresyon modeli için verilen hemen hemen yansız ridge tahmin edicisinin modifiyesi olan modifiye hemen hemen yansız gamma ridge tahmin edicisi (GMAURE: modified almost unbiased gamma ridge estimator) Almagal (2018) tarafından

aşağıda gösterildiği gibi önerilmiştir

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{\text{GMAURE}} &= \left(\mathbf{I} - k^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-2} \right) \hat{\beta}_{\text{GRRE}} \\ &= \left(\mathbf{I} - k^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-2} \right) \left(\mathbf{I} - k \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \right) \hat{\beta}_{\text{MLE}}\end{aligned}\quad (4.19)$$

GMAURE'nin beklenen değeri

$$\begin{aligned}E \left(\hat{\beta}_{\text{GMAURE}} \right) &= E \left(\left(\mathbf{I} - k^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-2} \right) \left(\mathbf{I} - k \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \right) \hat{\beta}_{\text{MLE}} \right) \\ &= \left(\mathbf{I} - k^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-2} \right) \left(\mathbf{I} - k \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \right) E \left(\hat{\beta}_{\text{MLE}} \right) \\ &= \left(\mathbf{I} - k^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-2} \right) \left(\mathbf{I} - k \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \right) \beta\end{aligned}$$

olarak elde edilir. GMAURE'nin varyans–kovaryans matrisi, yan vektörü ve MSE'si sırasıyla (Almagal, 2018)

$$\begin{aligned}\text{Cov} \left(\hat{\beta}_{\text{GMAURE}} \right) &= \phi \mathbf{H} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{H}^\top \\ \text{Bias} \left(\hat{\beta}_{\text{GMAURE}} \right) &= -k \left(\mathbf{I} + k \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} - k^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-2} \right) \\ &\quad \times \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \beta \\ \text{MSE} \left(\hat{\beta}_{\text{GMAURE}} \right) &= \hat{\phi} \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j^2 (\lambda_j + 2k)^2}{(\lambda_j + k)^6} + k^2 \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j^2 + 3k\lambda_j + k^2)^2 \alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^6}\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir, öyle ki $\mathbf{H} = \left(\mathbf{I} - k^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-2} \right) \left(\mathbf{I} - k \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + k\mathbf{I} \right)^{-1} \right)$.

4.5.2. Modifiye Hemen Hemen Yansız Gamma Liu Tahmin Edicisi

Hemen hemen yansız gamma Liu tahmin edicisinin modifiye edilmiş versiyonu daha önce çalışılmamıştır. Bu tezde modifiye hemen hemen yansız gamma Liu tahmin edicisi (GMAULE: modified almost unbiased gamma Liu estimator) olarak adlandırılacaktır. Varathan ve Wijekoon (2021) faydalanılarak GMAULE aşağıdaki gibi önerilmiştir

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{\text{GMAULE}} &= \left(\mathbf{I} - (1 - d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-2} \right) \hat{\beta}_{\text{GLE}} \\ &= \left(\mathbf{I} - (1 - d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-2} \right) \left(\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + d\mathbf{I} \right) \right) \hat{\beta}_{\text{MLE}}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

GMAULE'nin beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilmiştir

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\beta}_{\text{GMAULE}}\right) &= E\left(\mathbf{F}\hat{\beta}_{\text{MLE}}\right) \\ &= \mathbf{F}E\left(\hat{\beta}_{\text{MLE}}\right) \\ &= \mathbf{F}\beta \end{aligned}$$

öyle ki $\mathbf{F} = \left(\mathbf{I} - (1-d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-2}\right) \left(\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + d\mathbf{I}\right)\right)$. Ayrıca GMAULE'nin varyans–kovaryans matrisi, yan vektörü ve MSE'si

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\hat{\beta}_{\text{GMAULE}}\right) &= \hat{\phi}\mathbf{F}\left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{F}^\top \\ \text{Bias}\left(\hat{\beta}_{\text{GMAULE}}\right) &= (\mathbf{F} - \mathbf{I})\beta \\ \text{MSE}\left(\hat{\beta}_{\text{GMAULE}}\right) &= \hat{\phi} \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j + d)^4 (\lambda_j + 2 - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + 1)^6} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \frac{\left((d-1)\lambda_j^2 - (d-1)(d-3)\lambda_j + (2d^2 - d^3 - 1)\right)^2 \alpha_j^2}{(\lambda_j + d)^6} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4.5.3. Modifiye Hemen Hemen Yansız Gamma Liu–Tipi Tahmin Edicisi

Hemen hemen yansız Liu–tipi gamma tahmin edicisinin modifiye edilmiş versiyonu gamma regresyon modeli için daha önce tanımlanmamış olup bu tezde önerilen bir diğer tahmin edicidir. Önerilen bu yeni tahmin edici ise modifiye hemen hemen yansız gamma Liu–tipi tahmin edicisi (GMAULTE: modified almost unbiased gamma Liu–type estimator) olarak adlandırılmıştır. Akdeniz ve Duran (2012) ve Yıldız (2018)'in çalışmalarından yararlanılarak, bu tezde GMAULTE

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{\text{GMAULTE}} &= \left(\mathbf{I} - (k+d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-2}\right) \hat{\beta}_{\text{GLTE}} \\ &= \left(\mathbf{I} - (k+d)^2 \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-2}\right) \left(\mathbf{I} - (k+d) \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\right) \hat{\beta}_{\text{MLE}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bölüm 6.3'te GMAULTE'nin elde edilişi ve teorik özellikleri ayrıntılı olarak çalışılmıştır.

5. GAMMA LIU-TİPİ TAHMİN EDİCİSİ

Bu bölümde gamma regresyon modeli için liu-tipi tahmin edicisinin teorik özellikleri incelenecektir. Daha sonra gamma Liu-tipi tahmin edicisinin yanlılık parametrelerinin tahminleri yapılacaktır. Ayrıca genelleştirilmiş gamma Liu-tipi tahmin edicisinden ve genelleştirilmiş gamma Liu-tipi tahmin edicisinin teorik özellikleri incelenecektir.

5.1. Gamma Liu-tipi Tahmin Edicisinin Teorik Özellikleri

Bu bölümde gamma Liu-tipi tahmin edicisinin (GLTE) teorik özelliklerinden olan matris hata kareler ortalaması, varyans kovaryans matrisi ve yan vektörü incelenecektir. Gamma regresyon modeli için Liu-tipi tahmin edicisinin Eşitlik (4.15)'te verilmişti. Ayrıca $\hat{\beta}_{GLTE}$ 'nin MSE'nin matris formu olan MMSE hangi koşullarda pozitif tanımlı olacağı incelenecektir. $\mathbf{A}$ pozitif tanımlı bir matris ise $\mathbf{A} > 0$ ve $\mathbf{A}$ pozitif yarı tanımlı matris olduğunda ise $\mathbf{A} \geq 0$ olarak gösterilmiştir. MMSE için yapılacak işlemlerinin kolaylığı açısından modelin kanonik formu kullanılır. Kanonik model için $\mathbf{Z} = \mathbf{XQ}$ ve $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}^\top \boldsymbol{\beta}$ olmak üzere $\mathbf{Z}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} \mathbf{Q} = \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ elde edilir ki burada $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$; $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisinin özdeğerleridir. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ eşitsizliği ise $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ 'in sıralı özdeğerleridir öyle ki $p \times p$ boyutlu $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisi için $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_p]$ normalleştirilmiş özvektörlerin matrisidir. Son durumda MLE'nin kanonik formu $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{MLE} = \mathbf{Q}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}$ şeklinde yazılır.

Gamma Liu-tipi tahmin edicisi kanonik formda

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GLTE} = (\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-1} (\boldsymbol{\Lambda} - d\mathbf{I}) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{MLE} \quad (5.1)$$

olarak ifade edilir ki burada $k > 0$ ve $-\infty < d < \infty$ şeklindedir. $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GLTE}$ 'nin beklenen değeri, varyans kovaryans matrisi ve yan vektörü sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
E(\hat{\alpha}_{\text{GLTE}}) &= E((\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})\hat{\alpha}_{\text{MLE}}) \\
&= (\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})E(\hat{\alpha}_{\text{MLE}}) \\
&= (\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})\alpha
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{\alpha}_{\text{GLTE}}) &= Cov((\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})\hat{\alpha}_{\text{MLE}}) \\
&= (\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})Cov(\hat{\alpha}_{\text{MLE}})(\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})^\top \\
&= (\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})\phi\Lambda^{-1}(\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})^\top \\
&= \phi(\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})\Lambda^{-1}(\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})^\top
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
Bias(\hat{\alpha}_{\text{GLTE}}) &= E(\hat{\alpha}_{\text{GLTE}}) - \alpha \\
&= (\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})\alpha - \alpha \\
&= -(k + d)(\Lambda + k\mathbf{I})^{-1}\alpha.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$\hat{\alpha}_{\text{GLTE}}$ 'nin MSE ve MMSE matrisi sırasıyla

$$MSE(\hat{\alpha}_{\text{GLTE}}) = \phi \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j(\lambda_j + k)^2} + (k + d)^2 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^2} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
MMSE(\hat{\alpha}_{\text{GLTE}}) &= \phi\Lambda_k^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})\Lambda^{-1}\Lambda_k^{-1}(\Lambda - d\mathbf{I})^\top \\
&\quad + (k + d)^2\Lambda_k^{-1}\alpha^\top\alpha\Lambda_k^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\Lambda_k = \Lambda + k\mathbf{I}$ şeklindedir ve ayrıca Λ_k simetrik pozitif tanımlı matristir.

5.2. k Yanlılık Parametresinin Tahmini

Yanlılık parametrelerinin amacı modele az miktarda yan ekleyerek varyansı azaltmaktır. Yanlılık parametreleri sayesinde model daha doğru sonuçlar verir. Yanlı tahmin ediciler özellikle çoklu bağlantı problemlerinde en çok olabilirlik tahmin edicisinden daha iyi sonuçlar verir. Böyle durumlarda yanlı tahmin edicilerinin MSE'sinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin MSE'sinden daha küçük çıktığı görülür. Yanlı tahmin edicilerde yanlılık parametresinin en uygunu da MSE'yi en düşük yapan değerdir. Bu düşünceyle ridge tahmin edicisi için k yanlılık parametresi bulunmuş ve daha sonrasında elde edilen bu parametresi için en uygun olabilecek $\hat{k}$ yanlılık parametre tahmini elde edilmeye yönelik çalışmalar

yapılmıştır. k parametresi ridge tahmin edicisi dışında yukarıda incelenmiş olan Liu-tipi tahmin edicisinde de bulunduğundan elde edilen $\hat{k}$ yanlılık parametre tahminleri Liu-tipi tahmin edicileri içeren çalışmalarda da tercih edilmiştir. Örneğin Akram ve ark. (2020) Liu-tipi tahmin edicisini kullanmış ve $\hat{k}$ parametresinin seçimi için Hoerl ve ark. (1975)'de önerilen tahmin ediciyi kullanmıştır.

Bu çalışmada gamma Liu-tipi tahmin edicisi için Almagal ve Asar (2020) tarafından kullanılmış olan $\hat{k}$ yanlılık parametresinin tahmini tercih edilmiştir ki $\hat{k} = \frac{p\hat{\phi}}{\hat{\beta}_{MLE}^\top \hat{\beta}_{MLE}}$ şeklindedir ve burada $\hat{\phi} = (n - p)^{-1} \sum_{i=1}^n ((y_i - \hat{\mu}_i)/\hat{\mu}_i)^2$ 'dir.

5.3. d Parametresinin Tahmini

Gamma Liu-tipi tahmin edicisinin formülü göz önüne alındığında k yanlılık parametresinin yanında d yanlılık parametresinin de olduğu görülecektir. d parametresinin MSE'yi en küçükleyecek şekilde seçilmesi gerekmektedir. Bunun için GLTE'nin MSE'sinin d 'ye göre türevi alınır ve

$$\frac{\partial (MSE(\hat{\alpha}_{GLTE}))}{\partial d} = 0$$

denklemleri d 'ye göre çözülür. GLTE'nin MSE'si şu şekilde düzenlenebilir

$$MSE(\hat{\alpha}_{GLTE}) = d^2 \sum_{j=1}^p \frac{(\phi + \alpha_j^2 \lambda_j)}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2} + d \sum_{j=1}^p \frac{2k\alpha_j^2 \lambda_j - 2\phi \lambda_j}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2} + \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j^2 \phi + k^2 \alpha_j^2 \lambda_j}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2}.$$

Bu fonksiyonun d 'ye göre türevi alınır

$$\frac{\partial MSE(\hat{\alpha}_{GLTE})}{\partial d} = 2d \sum_{j=1}^p \frac{(\phi + \alpha_j^2 \lambda_j)}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2} + \sum_{j=1}^p \frac{2k\alpha_j^2 \lambda_j - 2\phi \lambda_j}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2} = 0$$

elde edilir. Buna göre d 'nin optimal değeri,

$$d = \frac{\sum_{j=1}^p \frac{(\phi - k\alpha_j^2)}{(\lambda_j + k)^2}}{\sum_{j=1}^p \frac{(\phi + \lambda_j \alpha_j^2)}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2}} \quad (5.7)$$

olarak bulunur, Almagal ve Asar (2020) makalesinde (2.27) eşitliğinde $d_{optimal}$ olarak verilmiştir. Bu parametre tahmin edicisi tezde simülasyon ve gerçek veri uygulamasında GLTE için kullanılacaktır.

5.4. Genelleştirilmiş Gamma Liu–tipi Tahmin Edicisi

Genelleştirilmiş Liu–tipi tahmin edicisi, Liu–tipi tahmin edicisindeki parametreler olan k ve d yanlılık parametrelerini $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisinin köşegen elemanlarına Liu–tipi tahmin edicisindeki gibi tek bir değer olarak eklemek yerine $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisinin her bir köşegen elemanı için daha uygun olabilecek küçültme parametreleri eklemeyi esas alır. Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) ve Akdeniz ve Duran (2012) Liu tahmin edicisinin genelleştirilmiş halini kullanmıştır. Bu çalışmalardan ve (4.15) denklemindeki gamma Liu–tipi tahmin edicisinden yararlanılarak genelleştirilmiş gamma Liu–tipi tahmin edicisi (GGLTE)

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GGLTE}} = \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} + \mathbf{K} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X} - \mathbf{D} \right) \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MLE}} \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada belirtilen $\mathbf{K}$ ve $\mathbf{D}$ uygun boyutlu köşegen matrislerdir. Bu durumda $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_p)$ şeklindedir öyle ki $j = 1, 2, 3, \dots, p$ için $k_j \geq 0$. Aynı şekilde $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$, $j = 1, 2, 3, \dots, p$ için $-\infty < d_j < \infty$ olacaktır. Dikkat edilirse $k_1 = k_2 = \dots = k_p = 1$ olduğu durumda $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GGLTE}}$ tahmin edicisinin genelleştirilmiş gamma Liu tahmin edicisine indirgendiği görülmektedir. Benzer şekilde $d_1 = d_2 = \dots = d_p = 0$ olduğu durumdaysa $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GGLTE}}$ tahmin edicisinin genelleştirilmiş gamma ridge tahmin edicisine dönüştüğü görülmektedir.

Genelleştirilmiş gamma Liu–tipi tahmin edicisi kanonik formda

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{GGLTE}} = (\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1} (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{D}) \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MLE}}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{GGLTE}}$ 'nin beklenen değeri, varyans kovaryans matrisi ve yan vektörü sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur

$$\begin{aligned} E(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{GGLTE}}) &= E\left((\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1} (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{D}) \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MLE}}\right) \\ &= (\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1} (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{D}) E(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MLE}}) \\ &= (\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1} (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{D}) \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{\alpha}_{\text{GGLTE}}) &= Cov((\mathbf{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{D})\hat{\alpha}_{\text{MLE}}) \\
&= (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{D})Cov(\hat{\alpha}_{\text{MLE}})((\mathbf{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1})^{\top}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{D})^{\top} \\
&= (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{D})\phi\mathbf{\Lambda}^{-1}((\mathbf{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1})^{\top}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{D})^{\top} \\
&= \phi(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{D})\mathbf{\Lambda}^{-1}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I}) \quad (5.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Bias(\hat{\alpha}_{\text{GGLTE}}) &= E(\hat{\alpha}_{\text{GGLTE}}) - \alpha \\
&= (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{D})\alpha - \alpha \\
&= -(\mathbf{K} + \mathbf{D})(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{K})^{-1}\alpha. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Bu denklemlerin yardımıyla, $\hat{\alpha}_{\text{GGLTE}}$ 'nin MSE ve MMSE'si sırasıyla

$$MSE(\hat{\alpha}_{\text{GGLTE}}) = \phi \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j - d_j)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k_j)^2} + \sum_{j=1}^p \frac{(k_j + d_j)^2 \alpha_j^2}{(\lambda_j + k_j)^2} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
MMSE(\hat{\alpha}_{\text{GGLTE}}) &= \phi \mathbf{\Lambda}_k^{-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{D})\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Lambda}_k^{-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{D})^{\top} \\
&\quad + (\mathbf{K} + \mathbf{D})^2 \mathbf{\Lambda}_k^{-1}\alpha^{\top}\alpha\mathbf{\Lambda}_k^{-1} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{\Lambda}_K = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{K}$ şeklindedir ve ayrıca $\mathbf{\Lambda}_K$ simetrik pozitif tanımlı matristir.

6. HEMEN HEMEN YANSIZ VE MODİFİYE HEMEN HEMEN YANSIZ GAMMA LIU-TİPİ TAHMİN EDİCİLERİN ÖZELLİKLERİ

Bölüm 4.4.3'te tanımlanan hemen hemen yansız gamma Liu-tipi tahmin edicisi ile Bölüm 4.5.3'te tanımlanan modifiye edilmiş hemen hemen yansız gamma Liu-tipi tahmin edicisinin teorik özellikleri bu bölümde kanonik form kullanılarak verilecektir. Ayrıca bu bölümde hemen hemen yansız Liu-tipi tahmin edicisinin yanlılık parametrelerinin tahminleri ile modifiye hemen hemen yansız Liu-tipi tahmin edicisinin yanlılık parametrelerinin tahmin edicileri oluşturulacaktır.

6.1. Hemen Hemen Yansız Gamma Liu Tipi Tahmin Edicisinin Teorik Özellikleri

Tanımı Denklem (4.18)'da verilen GLTE'nin kanonik hali $k > 0$ ve $-\infty < d < \infty$ olmak üzere

$$\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}} = (\mathbf{I} - (k + d)^2 (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}) \hat{\alpha}_{\text{MLE}}$$

şeklindedir.

GAULTE için beklenen değer ve yan vektörleri ve varyans kovaryans matrisi sırasıyla

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}}) &= E((\mathbf{I} - (k + d)^2 (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}) \hat{\alpha}_{\text{MLE}}) \\ &= (\mathbf{I} - (k + d)^2 (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}) E(\hat{\alpha}_{\text{MLE}}) \\ &= (\mathbf{I} - (k + d)^2 (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}) \alpha \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}}) &= E(\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}}) - \alpha \\ &= (\mathbf{I} - (k + d)^2 (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}) \alpha - \alpha \\ &= (\mathbf{I} - (k + d)^2 (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2} - \mathbf{I}) \alpha \\ &= -((k + d)^2 (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}) \alpha \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}}) &= Cov\left((\mathbf{I} - (k+d)^2(\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}) \hat{\alpha}_{\text{MLE}}\right) \\
&= \mathbf{A}Cov(\hat{\alpha}_{\text{MLE}})\mathbf{A}^\top \\
&= \mathbf{A}\phi\mathbf{\Lambda}\mathbf{A}^\top \\
&= \phi\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{A}^\top
\end{aligned} \tag{6.3}$$

olarak elde edilmiştir, burada $\mathbf{A} = \mathbf{I} - (k+d)^2(\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}$ şeklindedir.

GAULTE'nin MSE ve MMSE'si ise (6.2) ve (6.3) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}}) &= \phi \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j - d)^2(\lambda_j + d + 2k)^2}{(\lambda_j + k)^4 \lambda_j} + (k+d)^4 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^4} \\
MMSE(\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}}) &= \phi\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{A}^\top + (k+d)^4 \mathbf{\Lambda}_k^{-2} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{\Lambda}_k^{-2}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

olarak bulunur.

6.2. d Yanlılık Parametresinin Tahmini

GAULTE'nin d yanlılık parametresinin bir tahmin edicisini elde etmek için MSE fonksiyonu $MSE(\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}})$ 'nin d 'ye göre kısmi türevinin alınarak aşağıdaki denklem çözülebilir

$$\frac{\partial (MSE(\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}}))}{\partial d} = 0. \tag{6.5}$$

Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial (MSE(\hat{\alpha}_{\text{GAULTE}}))}{\partial d} \\
&= \phi \sum_{j=1}^p \frac{-2(\lambda_j - d)(\lambda_j + d + 2k)^2 + 2(\lambda_j + d + 2k)(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j(\lambda_j + k)^4} \\
&\quad + 4(k+d)^3 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^4} \\
&= 2\phi \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j - d)(\lambda_j + d + 2k)}{\lambda_j(\lambda_j + k)^4} (-2(k+d)) + 4(k+d)^3 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^4} \\
&= -4(k+d) \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j - d)(\lambda_j + d + 2k)}{\lambda_j(\lambda_j + k)^4} + 4(k+d)^3 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2 \lambda_j}{\lambda_j(\lambda_j + k)^4} \\
&= \sum_{j=1}^p \frac{(k+d)}{\lambda_j(\lambda_j + k)^4} (-\phi(\lambda_j - d)(\lambda_j + 2k + d) + (k+d)^2 \lambda_j \alpha_j^2)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

elde edilir. Burada $f_j(d) = (-\phi(\lambda_j - d)(\lambda_j + 2k + d) + (k + d)^2 \lambda_j \alpha_j^2) = 0$ olsun. Bu durumda $f_j(d)$ fonksiyonu d 'nin karesel bir fonksiyonu olarak

$$f_j(d) = d^2 (\phi + \lambda_j \alpha_j^2) + d (2k\phi + 2k\lambda_j \alpha_j^2) + (-\lambda_j^2 \phi - 2k\phi \lambda_j + k^2 \lambda_j \alpha_j^2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu fonksiyonların kökleri diskriminant kullanılarak elde edilir. $f_j(d)$ 'nin diskriminantı aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\begin{aligned} \Delta_{1j} &= 4k^2 (\phi + \lambda_j \alpha_j^2)^2 - 4 (\phi + \lambda_j \alpha_j^2) (-\lambda_j^2 \phi - 2k\phi \lambda_j + k^2 \lambda_j \alpha_j^2) \\ &= 4k^2 (\phi + \lambda_j \alpha_j^2) + 4 (\phi + \lambda_j \alpha_j^2) \lambda_j^2 \phi + 8k (\phi - \lambda_j \alpha_j^2) \phi \lambda_j - 4k^2 (\phi + \lambda_j \alpha_j^2) \lambda_j \alpha_j^2 \\ &= 4\phi (\phi + \lambda_j \alpha_j^2) (\lambda_j + k)^2 > 0. \end{aligned}$$

Diskriminant kullanılarak elde edilen kökler ise

$$d_{1j,2j} = -k \mp \frac{(\lambda_j + k) \sqrt{\phi (\phi + \lambda_j \alpha_j^2)}}{(\phi + \lambda_j \alpha_j^2)}$$

olarak bulunur. Simülasyon ve gerçek veri uygulamalarında GAULTE'nin d yanlılık parametresinin tahmini değeri bu köklerden yararlanılarak

$$d_{opt} = \min \left(-k + \frac{(\lambda_j + k) \sqrt{\phi (\phi + \lambda_j \alpha_j^2)}}{(\phi + \lambda_j \alpha_j^2)} \right) \quad (6.7)$$

şeklinde seçilecektir.

6.3. Modifiye Hemen Hemen Yansız Liu Tipi Gamma Tahmin

Edicisinin Teorik Özellikleri

Yıldız (2018) modifiye jackknifed Liu-tipi tahmin edicisini doğrusal regresyonda kullanmıştır. Yıldız (2018)'in çalışması takip edilerek modifiye gamma Liu-tipi tahmin edicisi (GMAULTE) kanonik formda $k > 0$, $-\infty < d < \infty$ olmak üzere

$$\hat{\alpha}_{\text{GMAULTE}} = (\mathbf{I} - (k + d)^2 (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}) (\mathbf{I} - (k + d) (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-1}) \hat{\alpha}_{\text{MLE}}$$

olarak yazılabilir. GMAULTE'nin beklenen değeri, varyans-kovaryans matrisi ve yan vektörü ise sırasıyla

$$E(\hat{\alpha}_{\text{GMAULTE}}) = (\mathbf{I} - (k + d)^2 (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-2}) (\mathbf{I} - (k + d) (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-1}) \alpha \quad (6.8)$$

$$\text{Cov}(\hat{\alpha}_{\text{GMAULTE}}) = \phi \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{B}^T \quad (6.9)$$

$$\text{Bias}(\hat{\alpha}_{\text{GMAULTE}}) = -(k + d) (\mathbf{I} + (k + d) \mathbf{\Lambda}_k^{-1} - (k + d)^2 \mathbf{\Lambda}_k^{-2}) \mathbf{\Lambda}_k^{-1} \alpha \quad (6.10)$$

olarak elde edilmiştir, burada $\mathbf{B} = (\mathbf{I} - (k + d)^2 \mathbf{\Lambda}_k^{-2}) (\mathbf{I} - (k + d) \mathbf{\Lambda}_k^{-1})$. GMAULTE'nin MSE'si ve matris MMSE'si

$$MSE(\hat{\alpha}_{\text{GMAULTE}}) = \phi \sum_{j=1}^p \frac{(\lambda_j - d)^4 (\lambda_j + d + 2k)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^6} + (k + d)^2 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2 ((\lambda_j + k)^2 + (k + d)(\lambda_j - d))^2}{(\lambda_j + k)^6} \quad (6.11)$$

$$MMSE(\hat{\alpha}_{\text{GMAULTE}}) = \phi \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{B}^\top + (k + d)^2 \mathbf{F} \mathbf{\Lambda}_k^{-1} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{\Lambda}_k^{-1} \mathbf{F}^\top \quad (6.12)$$

şeklinde hesaplanmıştır, burada $\mathbf{F} = \mathbf{I} + (k + d) \mathbf{\Lambda}_k^{-1} - (k + d)^2 \mathbf{\Lambda}_k^{-2}$.

6.4. d Yanlılık Parametresinin Tahmini

Gamma regresyon modelinde modifiye hemen hemen yansız Liu–tipi regresyon modelinin MSE'sinin d yanlılık parametresine minimize edilmesiyle d yanlılık parametresinin en iyi MSE'yi elde etmeyi sağlayacak değeri elde edilebilir. Ancak bu fonksiyonun türevi alındığında d parametresine göre 5. dereceden bir denklem oluştuğu için d 'nin uygun bir çözümünü elde etmek mümkün değildir. Bu nedenle bu çalışma için kullanılan simülasyon uygulaması ve gerçek veri uygulamasında hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edici için bulunmuş d_{opt} tahmin yöntemi kullanılacaktır.

6.5. Tahmin Edicilerin Teorik Özelliklerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde gamma Liu–tipi tahmin edicisi, hemen hemen yansız gamma Liu–tipi tahmin edicisi, modifiye hemen hemen yansız Liu–tipi tahmin edicisinin yan vektörlerinin karesi olan karesel yanlarının (SB:squared bias), varyanslarının ve MMSE fonksiyonlarının karşılaştırmalarına yer verilecektir.

6.5.1. Karesel Yan Karşılaştırması

$\forall j = 1, \dots, p$ için (5.4), (6.2) ve (6.10) eşitlikleri kullanılarak GLTE, GAULTE ve GMAULTE'nin karesel yanları

$$\|bias(\hat{\alpha}_{GLTE})\|^2 = (k+d)^2 \sum_{j=1}^p \left(\frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^2} \right) \quad (6.13)$$

$$\|bias(\hat{\alpha}_{GAULTE})\|^2 = (k+d)^4 \sum_{j=1}^p \left(\frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^4} \right) \quad (6.14)$$

$$\|bias(\hat{\alpha}_{GMAULTE})\|^2 = (k+d)^2 \sum_{j=1}^p \left(\frac{\alpha_j^2 ((\lambda_j + k)^2 + (k+d)(\lambda_j - d))^2}{(\lambda_j + k)^6} \right) \quad (6.15)$$

şeklinde bulunur.

Aşağıdaki teoremden GLTE ve GAULTE'nin karesel yanları karşılaştırılacaktır.

Teorem 6.1 $\forall j = 1, \dots, p$ için $(\lambda_j - d)(\lambda_j + d + 2k) > 0$ olduğu zaman GAULTE'nin karesel yanı GLTE'nin karesel yanından daha küçüktür.

İspat (6.13) ve (6.14) eşitlikleri kullanılarak, GLTE ve GAULTE'nin karesel yanlarının farkı

$$\begin{aligned} \|bias(\hat{\alpha}_{GLTE})\|^2 - \|bias(\hat{\alpha}_{GAULTE})\|^2 &= \sum_{j=1}^p \left((k+d)^2 \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^2} \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^p \left((k+d)^4 \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^4} \right) \\ &= (k+d)^2 \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 \left(\frac{1}{(\lambda_j + k)^2} - \frac{(k+d)^2}{(\lambda_j + k)^4} \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada $(k+d)^2$ her zaman pozitiftir. GLTE'nin karesel yanının GAULTE'nin karesel yanından büyük olması için yukarıdaki farkın pozitif çıkması gerekmektedir. O halde

$$\left(\frac{1}{(\lambda_j + k)^2} - \frac{(k+d)^2}{(\lambda_j + k)^4} \right) = \frac{(\lambda_j + k)^2 - (k+d)^2}{(\lambda_j + k)^4}$$

ifadesi pozitif olmalıdır. Eğer $\forall j = 1, \dots, p$ için

$$(\lambda_j + k)^2 - (k+d)^2 = (\lambda_j - d)(\lambda_j + d + 2k) > 0$$

ise $\|bias(\hat{\alpha}_{GLTE})\|^2 - \|bias(\hat{\alpha}_{GAULTE})\|^2$ ifadesi de pozitif olur. Elde edilen bu sonuç üzerine ispat tamamlanmıştır. ■

Teorem 6.2 $\forall j = 1, \dots, p$ için $d > 2\lambda_j + k$ veya $-k < d < \lambda_j$ veya $d < -\lambda_j - 2k$ olduğu zaman GMAULTE'nin karesel yanı GLTE'nin karesel yanından daha küçüktür.

İspat (6.13) ve (6.15) eşitlikleri kullanılarak GLTE'nin yan vektörünün karesinin GMAULTE'nin yan vektörünün karesine farkı

$$\begin{aligned}
& ||bias(\hat{\alpha}_{GLTE})||^2 - ||bias(\hat{\alpha}_{GMAULTE})||^2 \\
&= \sum_{j=1}^p \left((k+d)^2 \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j+k)^2} \right) - \sum_{j=1}^p \left((k+d)^2 \frac{\alpha_j^2 ((\lambda_j+k)^2 + (k+d)(\lambda_j-d))^2}{(\lambda_j+k)^6} \right) \\
&= \sum_{j=0}^p \frac{(k+d)^2 \alpha_j^2}{(\lambda_j+k)^2} \left(\frac{2(d-\lambda_j)(k+d)(\lambda_j+k)^2 - (k+d)^2(\lambda_j-d)^2}{(\lambda_j+k)^4} \right) \quad (6.16)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Elde edilen (6.16)'nın $\forall j = 1, \dots, p$ için pozitifliğini değerlendirmek için

$$g_j(d) = (\lambda_j - d)(k + d) (d^2 - d(\lambda_j - k) - 2\lambda_j^2 - 5k\lambda_j - 2k^2)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun kökleri incelenebilir. $g_j(d)$ incelendiğinde ilk kısımdan $d_{3j} = \lambda_j$ ve $d_{4j} = -k$ kökleri elde edilir. $g_j(d)$ 'nin kalan kısmının kökleri de diskriminant kullanılarak bulunur. $g_j(d)$ 'nin diskriminantı ise

$$\begin{aligned}
\Delta_{2j} &= (\lambda_j - k)^2 + 8\lambda_j^2 + 20k\lambda_j + 8k^2 = 9\lambda_j^2 + 18k\lambda_j + 9k^2 \\
&= 9(\lambda_j + k)^2
\end{aligned}$$

görüldüğü üzere sıfırdan büyüktür ve bu nedenle bu kısmın iki reel kökü bulunmaktadır. Bu kökler $d_{5j} = 2\lambda_j + k$ ve $d_{6j} = -2k - \lambda_j$ olarak bulunmuştur. Denklemin köklerine bakıldığında $-2k - \lambda_j < -k < \lambda_j < 2\lambda_j + k$, şeklinde olduğu görülür. Denklem için işaret incelemesi yapıldığında $d > 2\lambda_j + k$, $-k < d < \lambda_j$ ve $d < -\lambda_j - 2k$ için $||bias(\hat{\alpha}_{GLTE})||^2 - ||bias(\hat{\alpha}_{GMAULTE})||^2$ 'nin pozitif olduğu görülür. ■

Teorem 6.3 $\forall j = 1, \dots, p$ için $d > \lambda_j + \sqrt{2}(\lambda_j + k)$ veya $\lambda_j - \sqrt{2}(\lambda_j + k) < d < \lambda_j$ veya $d < -\lambda_j - 2k$ olduğu zaman GMAULTE'nin karesel yanı GAULTE'nin karesel yanından daha küçüktür.

İspat (6.14) ve (6.15) eşitlikleri kullanılarak, GAULTE ve GMAULTE'nin karesel yan-

larının farkı

$$\begin{aligned}
& ||bias(\hat{\alpha}_{GAULTE})||^2 - ||bias(\hat{\alpha}_{GMAULTE})||^2 \\
&= (k+d)^4 \sum_{j=1}^p \left(\frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j+k)^4} \right) - (k+d)^2 \sum_{j=1}^p \left(\frac{\alpha_j^2 ((\lambda_j+k)^2 + (k+d)(\lambda_j-d))^2}{(\lambda_j+k)^6} \right) \\
&= \sum_{i=1}^p \left(\frac{(k+d)^2 \alpha_j^2}{(\lambda_j+k)^6} ((k+d) + (\lambda_j+k)^2 (2\lambda_j+k-d)) (-(\lambda_j+k)^2 + (k+d)^2) \right) \\
&= \sum_{i=1}^p \left(\frac{(k+d)^2 \alpha_j^2}{(\lambda_j+k)^6} (d^2 - 2d\lambda_j - 2k^2 - 4k\lambda_j - \lambda_j^2) (\lambda_j-d) (2k+d+\lambda_j) \right) \quad (6.17)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Elde edilen (6.17)'nin $\forall j = 1, 2, \dots, p$ için pozitifliğini değerlendirmek için

$$t_j(d) = (d^2 - 2d\lambda_j - 2k^2 - 4k\lambda_j - \lambda_j^2) (\lambda_j - d) (2k + d + \lambda_j)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun kökleri incelenir. $t_j(d)$ incelendiğinde ikinci ve üçüncü çarpanlarından $d_{7j} = \lambda_j$ ve $d_{8j} = -2k - \lambda_j$ kökleri elde edilir. $t(d_j)$ 'nin geri kalan kısmının ise diskriminantının

$$\begin{aligned}
\Delta_{3j} &= 4\lambda_j^2 + 8k^2 + 16k\lambda_j + 4\lambda_j^2 \\
&= 8(\lambda_j + k)^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Görüldüğü gibi diskriminant sıfırdan büyüktür ve bu nedenle bu kısmın iki reel kökü bulunmaktadır. Bu kökler $d_{9j} = \lambda_j + \sqrt{2}(\lambda_j + k)$ ve $d_{10j} = \lambda_j - \sqrt{2}(\lambda_j + k)$ olarak bulunacaktır. Denklemin köklerine bakıldığında $-2k - \lambda_j < \lambda_j - \sqrt{2}(\lambda_j + k) < \lambda_j < \lambda_j + \sqrt{2}(\lambda_j + k)$ şeklinde olduğu görülecektir. Denklemin işaret incelemesi yapıldığında ise $d < -2k - \lambda_j$, $-\sqrt{2}(\lambda_j + k) + \lambda_j < d < \lambda_j$ ve $d > \lambda_j + \sqrt{2}(\lambda_j + k)$ için $||bias(\hat{\alpha}_{GAULTE})||^2 - ||bias(\hat{\alpha}_{GMAULTE})||^2$ 'nin pozitif olduğu görülür.■

6.5.2. Varyans Karşılaştırması

Bu bölümde tahmin edicilerin varyanslarının karşılaştırmalarına yer verilmiştir. İlk olarak, sıradaki teoremden GLTE'nin varyansı ile GAULTE'nin varyansı arasındaki fark incelenmiştir.

Teorem 6.4 $\forall j = 1, \dots, p$ için $-(k+d)(2\lambda_j + 3k + d) > 0$ olduğunda GAULTE'nin varyansının GLTE'nin varyansından küçük olur.

İspat $V_1 = Var(\hat{\alpha}_{GLTE}) - Var(\hat{\alpha}_{GAULTE})$ olsun. GLTE'nin varyansının GAULTE'nin varyansından farkı incelenirse

$$\begin{aligned} V_1 &= \phi \sum_{j=1}^p \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2} - \frac{(\lambda_j - d)^2 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^4} \right) \\ &= \phi \sum_{j=1}^p \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^4} ((\lambda_j + k)^2 - (\lambda_j + 2k + d)^2) \right) \\ &= \phi \sum_{j=1}^p \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^4} (-(k + d)(2\lambda_j + 3k + d)) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\forall j = 1, 2, \dots, p$ için $-(k + d)(2\lambda_j + 3k + d) > 0$ olduğunda V_1 'in pozitif olduğu görülmektedir. ■

Sıradaki teoremdede GLTE'nin varyansı ile GMAULTE'nin varyansı arasındaki fark incelenmiştir.

Teorem 6.5 $\forall j = 1, 2, \dots, p$ için

$$k - \sqrt{2}(\lambda_j + k) < d < k + \sqrt{2}(\lambda_j + k)$$

olduğunda GMAULTE'nin varyansı GLTE'nin varyansından küçük olur.

İspat $V_2 = Var(\hat{\alpha}_{GLTE}) - Var(\hat{\alpha}_{GMAULTE})$ olsun. GLTE'nin varyansının GMAULTE'nin varyansından farkı incelenirse

$$\begin{aligned} V_2 &= \phi \sum_{j=1}^p \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2} - \frac{(\lambda_j - d)^4 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^6} \right) \\ &= \phi \sum_{j=1}^p \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2} \left(1 - \frac{(\lambda_j - d)^2 (\lambda_j + 2k + d)^2}{(\lambda_j + k)^4} \right) \right) \\ &= \phi \sum_{j=1}^p \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^6} (-d^2 + d(-2k) + (2\lambda_j^2 + 4k\lambda_j + k^2)) \right). \quad (6.18) \end{aligned}$$

Denklem (6.18)'nin pozitifliğini incelemek için d 'nin bir fonksiyonu olarak

$$h_j(d) = (-d^2 + d(-2k) + (2\lambda_j^2 + 4k\lambda_j + k^2))$$

tanımlanırsa ve bu fonksiyonun diskriminantı incelendiğinde

$$\Delta_{3j} = 4k^2 + 4(2\lambda_j^2 + 4k\lambda_j + k^2) = 8(\lambda_j + k)^2 > 0$$

olduğu görülür. O halde bu fonksiyonun denkleminin 2 reel kökü vardır ve bu kökler

$$d_{7j,8j} = \frac{2k \mp 2\sqrt{2}(\lambda_j + k)}{-2} = k \mp \sqrt{2}(\lambda_j + k)$$

olarak yazılabilir. Yani $d_{3j} = k - \sqrt{2}(\lambda_j + k) < 0$ ve $d_{4j} = k + \sqrt{2}(\lambda_j + k) > 0$ şeklinde olduğundan d 'nin $d_{3j} < d < d_{4j}$ aralığında bulunması durumunda $h_j(d)$ pozitif olur. ■

Bir sonraki teoremdede GAULTE'nin varyansı ile GMAULTE'nin varyansı karşılaştırılacaktır.

Teorem 6.6 $\forall j = 1, 2, \dots, p$ için $(k + d)(2\lambda_j + k - d) > 0$ olduğunda GMAULTE'nin varyansı GAULTE varyansından küçük olur.

İspat $V_3 = Var(\hat{\alpha}_{GAULTE}) - Var(\hat{\alpha}_{GMAULTE})$ olsun. GAULTE ile GMAULTE'nin varyanslarının farkı incelenirse

$$\begin{aligned} V_3 &= \phi \sum_{j=1}^p \left(\frac{(\lambda_j - d)^2 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^4} - \frac{(\lambda_j - d)^4 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^6} \right) \\ &= \phi \sum_{j=1}^p \left(\frac{(\lambda_j - d)^2 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^6} ((k + d)(2\lambda_j + k - d)) (\lambda_j + 2k + d)^2 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\forall j = 1, \dots, p$ için $(k + d)(2\lambda_j + k - d) > 0$ eşitsizliğinin sağlanması durumunda V_3 pozitif olur. ■

6.5.3. MMSE karşılaştırması

Tahmin ediciler arasında karşılaştırma yapmak için MMSE fonksiyonları da kullanılabilir. Bu karşılaştırmalar yapılırken bir tahmin edicinin diğer tahmin ediciden MMSE bakımından daha iyi sonuçlar verdiği bazı durumları teorik olarak ispatlamak için aşağıdaki lemmadan yararlanılacaktır.

Lemma 6.1 (Trenkler and Toutenburg, 1990). $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$, β 'nin iki tahmin edicisi olsun. Bu tahmin edicilerin varyans–kovaryans matrislerinin farkı $\mathbf{D} = \text{Cov}(\hat{\beta}_1) - \text{Cov}(\hat{\beta}_2)$ pozitif tanımlı bir matris olsun ve ayrıca $\mathbf{a}_1 = \text{bias}(\hat{\beta}_1)$ ve $\mathbf{a}_2 = \text{bias}(\hat{\beta}_2)$ olarak verilsin. O halde $\mathbf{a}_2^\top (\mathbf{D} + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^\top)^{-1} \mathbf{a}_2 < 1$ ancak ve ancak $\text{MMSE}(\hat{\beta}_1) - \text{MMSE}(\hat{\beta}_2)$ pozitif tanımlı bir matristir.

Aşağıdaki teoremden GAULTE'nin MMSE'si ile GLTE'nin MMSE'si karşılaştırılmıştır.

Teorem 6.7 $\forall j = 1, 2, \dots, p$ için $-(k+d)(2\lambda_j + 3k + d) > 0$ olduğunda, GAULTE, MMSE kriterine göre GLTE'den daha iyi performansa sahiptir ancak ve ancak

$$\mathbf{b}_{GAULTE}^\top (\mathbf{H}_1 + \mathbf{b}_{GLTE} \mathbf{b}_{GLTE}^\top)^{-1} \mathbf{b}_{GAULTE} < 1.$$

Burada $\mathbf{H}_1 = Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GLTE}) - Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GAULTE})$ şeklindedir ve $\mathbf{b}_{GLTE}$ ile $\mathbf{b}_{GAULTE}$ sırasıyla GLTE ile GAULTE'nin yan vektörlerini ifade eder.

İspat GLTE ile GAULTE'nin kovaryansları arasındaki fark ele alınırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GLTE}) - Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GAULTE}) \\ &= \phi \left(\Lambda_k^{-1} \Lambda_d \Lambda^{-1} \Lambda_d \Lambda_k^{-1} - (\mathbf{I} - (k+d)^2 \Lambda_k^{-2}) \Lambda^{-1} (\mathbf{I} - (k+d)^2 \Lambda_k^{-2}) \right) \\ &= \phi \mathbf{Q}^\top diag \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2} - \frac{(\lambda_j - d)^2 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^4} \right) \mathbf{Q} \\ &= \phi \mathbf{Q}^\top diag \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^4} (-(k+d)(2\lambda_j + 3k + d)) \right) \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Burada $\Lambda_k^{-1} = diag\left(\frac{1}{\lambda_j + k}\right)$ ve $\Lambda_d = diag(\lambda_j - d)$ şeklindedir. $\forall j = 1, 2, \dots, p$ için $-(k+d)(2\lambda_j + 3k + d) > 0$ olduğunda $\mathbf{H}_1$ pozitif tanımlı olur. $\mathbf{b}_{GLTE}$ ve $\mathbf{b}_{GAULTE}$, (4.17) ve (6.2) numaralı eşitliklerde verilmiştir. Lemma 6.1'den yararlanılarak

$$\mathbf{b}_{GAULTE}^\top (\mathbf{H}_1 + \mathbf{b}_{GLTE} \mathbf{b}_{GLTE}^\top)^{-1} \mathbf{b}_{GAULTE} < 1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 6.8 $\forall j = 1, 2, \dots, p$ için $k - \sqrt{2}(\lambda_j + k) < d < k + \sqrt{2}(\lambda_j + k)$ eşitsizliği sağlandığında, MMSE kriteri bakımından GMAULTE, GLTE'ye göre daha iyi performansa sahiptir ancak ve ancak

$$\mathbf{b}_{GMAULTE}^\top (\mathbf{H}_2 + \mathbf{b}_{GLTE} \mathbf{b}_{GLTE}^\top)^{-1} \mathbf{b}_{GMAULTE} < 1.$$

Burada $\mathbf{H}_2 = Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GLTE}) - Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GMAULTE})$ ve $\mathbf{b}_{GLTE}$ ile $\mathbf{b}_{GMAULTE}$ sırasıyla GLTE ve GMAULTE'nin yan vektörleridir.

İspat GLTE ile GMAULTE'nin kovaryansları arasındaki fark ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_2 &= Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GLTE}) - Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GMAULTE}) \\
&= \phi \{ \boldsymbol{\Lambda}_k^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_d \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_d \boldsymbol{\Lambda}_k^{-1} - (\mathbf{I} - (k+d)^2 \boldsymbol{\Lambda}_k^{-2}) (\mathbf{I} - (k+d) \boldsymbol{\Lambda}_k^{-1}) \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \\
&\quad \times (\mathbf{I} - (k+d) \boldsymbol{\Lambda}_k^{-1}) (\mathbf{I} - (k+d)^2 \boldsymbol{\Lambda}_k^{-2}) \} \\
&= \phi \mathbf{Q}^\top diag \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^2} - \frac{(\lambda_j - d)^4 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^6} \right) \mathbf{Q} \\
&= \phi \mathbf{Q}^\top diag \left(\frac{(\lambda_j - d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^6} (-d^2 + d(-2k) + (2\lambda_j^2 + 4k\lambda_j + k^2)) \right) \mathbf{Q}
\end{aligned}$$

$\forall j = 1, 2, \dots, p$ için $k - \sqrt{2}(\lambda_j + k) < d < k + \sqrt{2}(\lambda_j + k)$ olduğunda $\mathbf{H}_2$ pozitif tanımlı olur. $\mathbf{b}_{GLTE}$ ve $\mathbf{b}_{GMAULTE}$, (4.17) ve (6.10) numaralı eşitliklerde verilmiştir. Lemma 6.1'den yararlanılarak

$$\mathbf{b}_{GMAULTE}^\top (\mathbf{H}_2 + \mathbf{b}_{GLTE} \mathbf{b}_{GLTE}^\top)^{-1} \mathbf{b}_{GMAULTE} < 1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 6.9 $\forall j = 1, 2, \dots, p$ için $(k+d)(2\lambda_j + k - d) > 0$ olduğunda MMSE kriteri bakımından GMAULTE, GAULTE'ye göre daha iyi sonuçlar vermektedir ancak ve ancak

$$\mathbf{b}_{GMAULTE}^\top (\mathbf{H}_3 + \mathbf{b}_{GAULTE} \mathbf{b}_{GAULTE}^\top) \mathbf{b}_{GMAULTE} < 1.$$

Burada $\mathbf{H}_3 = Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GAULTE}) - Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GMAULTE})$ ve $\mathbf{b}_{GAULTE}$ ile $\mathbf{b}_{GMAULTE}$ sırasıyla GAULTE ile GMAULTE'nin yan vektörlerini temsil etmektedir.

İspat GAULTE ile GMAULTE'nin kovaryanslarının farkları ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_3 &= Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GAULTE}) - Cov(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{GMAULTE}) \\
&= \phi \{ (\mathbf{I} - (k+d)^2 \boldsymbol{\Lambda}_k^{-2}) \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\mathbf{I} - (k+d)^2 \boldsymbol{\Lambda}_k^{-2}) - (\mathbf{I} - (k+d)^2 \boldsymbol{\Lambda}_k^{-2}) \\
&\quad \times (\mathbf{I} - (k+d) \boldsymbol{\Lambda}_k^{-1}) \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\mathbf{I} - (k+d) \boldsymbol{\Lambda}_k^{-1}) (\mathbf{I} - (k+d)^2 \boldsymbol{\Lambda}_k^{-2}) \} \\
&= \phi \mathbf{Q}^\top diag \left(\frac{(\lambda_j - d)^2 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^4} - \frac{(\lambda_j - d)^4 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^6} \right) \mathbf{Q} \\
&= \phi \mathbf{Q}^\top diag \left(\frac{(\lambda_j - d)^2 (\lambda_j + 2k + d)^2}{\lambda_j (\lambda_j + k)^6} (k+d)(2\lambda_j + k - d) \right) \mathbf{Q}.
\end{aligned}$$

$\forall j = 1, 2, \dots, p$ için $(k+d)(2\lambda_j + k - d) > 0$ iken $\mathbf{H}_3$ pozitif tanımlı olur. $\mathbf{b}_{GAULTE}$ ve $\mathbf{b}_{GMAULTE}$ sırasıyla GAULTE ve GMAULTE'nin yan vektörleridir. Lemma 6.1'den faydalanılarak $\mathbf{b}_{GMAULTE}^\top (\mathbf{H}_3 + \mathbf{b}_{GAULTE} \mathbf{b}_{GAULTE}^\top) \mathbf{b}_{GMAULTE} < 1$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

7. MONTE CARLO SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde Monte Carlo simülasyon çalışması kullanılarak tezde incelenen tahmin ediciler arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. McDonald ve Galarneau (1975) takip edilerek açıklayıcı değişkenler

$$x_{ij} = (1 - \rho^2)^{1/2} w_{ij} + \rho w_{i(p)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

eşitliği kullanılarak üretilmiştir. Bu eşitlikte w_{ij} 'ler standart normal dağılımdan üretilmiş rassal sayılar ve ρ^2 ise herhangi iki açıklayıcı değişken arasındaki korelasyonu göstermektedir. Bu formül verilerdeki korelasyon gücünü değiştirmeye yaramaktadır ve veride çoklu bağlantılı bir yapının ortaya çıkması için kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, farklı çoklu bağlantı derecelerinin tahmin ediciler üzerindeki etkilerini incelemek için farklı ρ değerleri dikkate alınmıştır ki bu değerler; $\rho = 0.9, 0.95$ ve 0.99 şeklindedir. Çalışma alanında yaygın olarak kullanılan bir kısıtlama olarak regresyon parametreleri $\sum_{j=1}^p \beta_j^2 = 1$ şartını sağlayacak şekilde seçilir (bkz. Kibria (2003)). Bağımlı değişkene ait n tane gözlem ise şekil parameresi $1/\phi$ ve ölçek parametresi $\phi\mu_i$ olan gamma dağılımından üretilerek regresyon modeli $i = 1, \dots, n$ için

$$\mu_i = E(y_i) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip})$$

şeklinde tanımlanmıştır. Dikkat edilecek olursa modele kesim değeri β_0 eklenerek parametre vektörü $(p + 1) \times 1$ boyutludur. Simülasyonda açıklayıcı değişkenleri bu yapıya uydurabilmek için açıklayıcı değişken matrisi $\mathbf{x}_i^\top = (1, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ şeklini almıştır. Bu çalışmada ϕ parametresi için 0.25 ve 0.50 değerleri kullanılmıştır.

Ayrıca simülasyon çalışması için örneklem boyutu yani gözlem sayısı 50, 100, 200 ve 400 olarak seçilmiştir. Bu çalışmada açıklayıcı değişken sayısının tahmin edicilerin performanslarına etkisini anlayabilmek için açıklayıcı değişken sayısı 4, 8, 16 ve 32 olarak alınmıştır.

Ayrıca farklı yöntemlerin yanlılık parametrelerini tahmin etmek için aşağıdaki şema kullanılmıştır:

- GLTE'nin parametreleri için daha önce de belirtildiği üzere Almagal ve Asar (2020)'ın

k parametre tahmini kullanılmıştır ki $\hat{k} = \frac{(p+1)\hat{\phi}}{\hat{\beta}_{MLE}^\top \hat{\beta}_{MLE}}$ şeklindedir ve burada

$$\hat{\phi} = \frac{1}{(n-p-1)} \sum_{i=1}^n ((y_i - \hat{\mu}_i)/\hat{\mu}_i)^2.$$

d parametresinin tahmini için ise Almagal ve Asar (2020)'in çalışmasındaki (2.27) numaralı eşitlikte bulunan $d_{optimal}$ değeri kullanılmıştır.

- GAULTE tahmin edicisinde bulunan k parametresinin tahmini için GLTE tahmin edicisinde kullanılmış olan parametrenin aynısı kullanılacaktır ve ayrıca d parametresi için ise bu çalışmada elde edilmiş olan d_{opt} tahmin parametresi kullanılmıştır.
- Son olarak da GMAULTE için de GAULTE'de kullanılan parametrelerin aynısı kullanılmıştır.

Simülasyon, yukarıda belirtilen parametrelerin her değeri için 1000 defa tekrarlanmıştır. Çalışmadaki herhangi bir $\hat{\beta}^*$ tahmin edicisinin MSE'si ve karesel yanı hesaplanarak metodların performanslarının karşılaştırılmasında kullanılır ve sırasıyla aşağıdaki gibi formüle edilir:

$$MSE(\hat{\beta}^*) = \frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} (\hat{\beta}^* - \beta)_r^\top (\hat{\beta}^* - \beta)_r \quad (7.1)$$

$$SB(\hat{\beta}^*) = (\bar{\hat{\beta}}^* - \beta)^\top (\bar{\hat{\beta}}^* - \beta), \quad \bar{\hat{\beta}}^* = \frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} {}_r\hat{\beta}_j^* \quad (7.2)$$

$(\hat{\beta}^* - \beta)_r$ parametre vektörüyle parametre vektörünün tahmini arasındaki farkı ifade etmektedir ve ${}_r\hat{\beta}_j^*$ ifadesi, $\hat{\beta}_j^*$ parametre tahmininin simülasyondaki r . iterasyonundaki değeri ifade etmektedir. Tüm hesaplamalar R programlama dili kullanılarak yapılmıştır (R Development Core Team, 2019). Farklı tahmin yöntemlerinin MSE ve SB'leri sırasıyla Tablo 7.1 ve 7.2 verilmiştir. Bu tablolar incelendiğinde elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

- Simüle edilen MSE değerlerine dayanarak, GMAULTE neredeyse tüm durumlarda diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterir. Tek istisna, düşük ve orta düzeyde doğrusallık durumları için $n = 100$ ve $p = 32$ olduğunda ortaya çıkmıştır.
- Tablo 7.1'de, korelasyon derecesi yüksek olduğunda GAULTE'nin GLTE'den daha iyi bir performansa sahip olduğu görülmektedir.

- Maksimum olabilirlik tahmin edicisi tüm durumlarda en yüksek MSE değerlerini üretir, diğer bir deyişle en kötü tahmin edici olur.
- n gözlem sayısı arttıkça (geri kalan değişkenler sabit olduğu sürece) tahmin edicilerin MSE'lerinde azalma görülmektedir. Bu beklenen bir durumdur. MSE'lerde azalmanın olması elde edilen tahminlerin tutarlılığını göstermektedir.
- Açıklayıcı değişken sayısının artmasıyla da açıklayıcı değişkenler arasında ilişki çoğalıp çoklubağlantı arttığından MSE'lerin arttığı gözlemlenmiştir. Bütün tahmin ediciler için en yüksek MSE sonuçları $p = 32$, $n = 100$ ve $\rho = 0.99$ olduğu zaman gözlemlenmiştir.
- ϕ yayılım parametresinin değeri arttıkça tahmin edicilerin MSE'sinde artışlar gözlemlenmiştir.
- Genel olarak, korelasyon derecesinin artırılması tahminciler üzerinde olumsuz bir etkiye sahiptir.
- Öte yandan, tahmin edicilerin SB performansları göz önüne alınırsa, Tablo 7.2'da GAULTE'nin $p = 4$ ve $p = 8$ olduğunda en düşük SB değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Ancak, $p = 16$ ve $p = 32$ olduğunda GMAULTE en küçük SB değerlerine sahiptir.
- Örneklem büyüklüğü artarsa genel olarak SB değerleri azalır. Ancak, değişken sayısında veya korelasyon derecesinde bir değişiklik varsa, SB değerleri için net bir durum yoktur.
- Dağılım parametresinin $\phi = 0.25$ 'ten $\phi = 0.50$ 'ye değişmesi durumunda da SB değerlerinin arttığı görülmektedir.

Tablo 7.1. Farklı n, p, ρ , ve ϕ değerleri için tahmin edicilerin simülasyon MSE değerleri.

		$\phi = 0.25$				$\phi = 0.50$			
n	ρ	MLE	GLTE	GAULTE	GMAULTE	MLE	GLTE	GAULTE	GMAULTE
$p = 4$									
50	0.90	0.0936	0.0197	0.0294	0.0141	0.1892	0.0529	0.0486	0.0215
	0.95	0.1744	0.0406	0.0239	0.0090	0.3523	0.1175	0.0478	0.0172
	0.99	0.8232	0.3165	0.0800	0.0135	1.6624	0.6917	0.1583	0.0276
100	0.90	0.0481	0.0071	0.0151	0.0063	0.0974	0.0184	0.0257	0.0094
	0.95	0.0904	0.0135	0.0134	0.0041	0.1833	0.0448	0.0303	0.0080
	0.99	0.4306	0.1439	0.0500	0.0067	0.8729	0.3420	0.0951	0.0132
200	0.90	0.0203	0.0050	0.0069	0.0050	0.0409	0.0074	0.0140	0.0073
	0.95	0.0380	0.0037	0.0109	0.0032	0.0765	0.0111	0.0148	0.0045
	0.99	0.1802	0.0398	0.0265	0.0035	0.3622	0.1171	0.0474	0.0066
400	0.90	0.0111	0.0036	0.0034	0.0033	0.0230	0.0044	0.0071	0.0044
	0.95	0.0209	0.0017	0.0058	0.0020	0.0434	0.0039	0.0101	0.0029
	0.99	0.0994	0.0132	0.0121	0.0017	0.2064	0.0484	0.0238	0.0033
$p = 8$									
50	0.90	0.2694	0.0862	0.3196	0.1537	0.5572	0.2155	0.6219	0.3375
	0.95	0.5180	0.1893	0.5316	0.2567	1.0711	0.4331	0.8453	0.3699
	0.99	2.5096	0.9525	1.2102	0.3475	5.1872	2.0302	2.5516	0.8790
100	0.90	0.1006	0.0128	0.0230	0.0060	0.2030	0.0391	0.0384	0.0097
	0.95	0.1929	0.0347	0.0426	0.0077	0.3892	0.1013	0.0752	0.0134
	0.99	0.9331	0.2989	0.1380	0.0173	1.8812	0.6484	0.2511	0.0310
200	0.90	0.0506	0.0043	0.0114	0.0031	0.1033	0.0119	0.0225	0.0054
	0.95	0.0973	0.0098	0.0152	0.0028	0.1984	0.0332	0.0325	0.0057
	0.99	0.4709	0.1192	0.0617	0.0070	0.9603	0.2982	0.1176	0.0133
400	0.90	0.0248	0.0018	0.0051	0.0017	0.0491	0.0034	0.0103	0.0028
	0.95	0.0475	0.0023	0.0089	0.0016	0.0943	0.0075	0.0123	0.0024
	0.99	0.2302	0.0353	0.0263	0.0028	0.4560	0.1045	0.0489	0.0051
$p = 16$									
100	0.90	0.2647	0.0738	0.2037	0.0915	0.5508	0.1870	0.3133	0.1132
	0.95	0.5126	0.1656	0.2977	0.1089	1.0657	0.3851	0.4201	0.1085
	0.99	2.4992	0.8596	0.6916	0.1333	5.1918	1.8443	1.2733	0.2203
200	0.90	0.1133	0.0140	0.0290	0.0053	0.2316	0.0423	0.0505	0.0083
	0.95	0.2192	0.0378	0.0519	0.0081	0.4481	0.1096	0.0885	0.0126
	0.99	1.0682	0.3110	0.1650	0.0182	2.1825	0.6931	0.3072	0.0329
400	0.90	0.0531	0.0030	0.0098	0.0017	0.1071	0.0088	0.0194	0.0032
	0.95	0.1029	0.0078	0.0153	0.0020	0.2073	0.0265	0.0297	0.0039
	0.99	0.5013	0.1058	0.0617	0.0058	1.0099	0.2671	0.1197	0.0110
$p = 32$									
100	0.90	0.6593	0.2577	1.3998	1.5181	1.4230	0.5858	1.8817	1.4503
	0.95	1.2800	0.4884	1.6187	1.1488	2.7601	1.0909	2.6106	1.5729
	0.99	6.2523	2.1548	4.0925	1.7757	13.4712	4.9598	8.9628	4.2595
200	0.90	0.2583	0.0604	0.1276	0.0333	0.5352	0.1606	0.1870	0.0365
	0.95	0.5016	0.1421	0.1751	0.0331	1.0385	0.3438	0.2667	0.0412
	0.99	2.4501	0.7847	0.4615	0.0565	5.0697	1.7022	0.8928	0.1099
400	0.90	0.1148	0.0120	0.0238	0.0037	0.2328	0.0364	0.0434	0.0066
	0.95	0.2230	0.0332	0.0409	0.0055	0.4520	0.0979	0.0748	0.0099
	0.99	1.0896	0.2943	0.1514	0.0164	2.2077	0.6541	0.2933	0.0309

Tablo 7.2. Farklı n, p, ρ , ve ϕ değerleri için tahmin edicilerin simülasyon SB değerleri.

		$\phi = 0.25$			$\phi = 0.50$		
n	ρ	GLTE	GAULTE	GMAULTE	GLTE	GAULTE	GMAULTE
$p = 4$							
50	0.90	0.004517	0.000146	0.005128	0.004922	0.000548	0.007192
	0.95	0.000978	0.000133	0.001682	0.001541	0.000512	0.002858
	0.99	0.000282	0.000139	0.000225	0.000820	0.000534	0.000710
100	0.90	0.002010	0.000030	0.001905	0.001999	0.000154	0.002330
	0.95	0.000405	0.000031	0.000586	0.000517	0.000159	0.000882
	0.99	0.000081	0.000035	0.000058	0.000273	0.000174	0.000194
200	0.90	0.003343	0.000015	0.002869	0.003174	0.000048	0.003007
	0.95	0.000694	0.000010	0.000637	0.000667	0.000042	0.000794
	0.99	0.000030	0.000012	0.000050	0.000179	0.000043	0.000084
400	0.90	0.002881	0.000007	0.002176	0.002799	0.000017	0.002232
	0.95	0.000631	0.000003	0.000488	0.000611	0.000014	0.000544
	0.99	0.000025	0.000004	0.000035	0.000061	0.000014	0.000050
$p = 8$							
50	0.90	0.000514	0.000481	0.000756	0.001780	0.002200	0.001938
	0.95	0.000508	0.000537	0.000507	0.002072	0.002471	0.001838
	0.99	0.000815	0.000765	0.000529	0.004022	0.003860	0.002422
100	0.90	0.000616	0.000118	0.000715	0.000854	0.000477	0.001108
	0.95	0.000213	0.000127	0.000290	0.000544	0.000501	0.000631
	0.99	0.000218	0.000174	0.000123	0.000567	0.000539	0.000489
200	0.90	0.000617	0.000033	0.000593	0.000612	0.000121	0.000680
	0.95	0.000150	0.000034	0.000184	0.000214	0.000126	0.000276
	0.99	0.000047	0.000038	0.000041	0.000222	0.000152	0.000128
400	0.90	0.000773	0.000009	0.000619	0.000750	0.000032	0.000666
	0.95	0.000166	0.000010	0.000145	0.000175	0.000034	0.000196
	0.99	0.000025	0.000014	0.000016	0.000059	0.000047	0.000041
$p = 16$							
100	0.90	0.000417	0.000425	0.000437	0.001606	0.001747	0.001308
	0.95	0.000453	0.000466	0.000391	0.001824	0.001855	0.001464
	0.99	0.000727	0.000636	0.000453	0.002767	0.002106	0.001746
200	0.90	0.000210	0.000116	0.000246	0.000435	0.000413	0.000469
	0.95	0.000133	0.000126	0.000141	0.000415	0.000434	0.000395
	0.99	0.000180	0.000156	0.000115	0.000518	0.000457	0.000416
400	0.90	0.000146	0.000030	0.000138	0.000208	0.000111	0.000216
	0.95	0.000052	0.000033	0.000054	0.000128	0.000117	0.000132
	0.99	0.000075	0.000053	0.000031	0.000161	0.000142	0.000113
$p = 32$							
100	0.90	0.001563	0.001713	0.001283	0.006368	0.007215	0.004886
	0.95	0.001713	0.001809	0.001449	0.007055	0.008153	0.006006
	0.99	0.002312	0.002184	0.001728	0.009970	0.012909	0.008410
200	0.90	0.000375	0.000525	0.000357	0.001460	0.001663	0.001141
	0.95	0.000434	0.000564	0.000385	0.001672	0.001768	0.001359
	0.99	0.000704	0.000690	0.000436	0.002447	0.002101	0.001638
400	0.90	0.000121	0.000107	0.000124	0.000368	0.000411	0.000343
	0.95	0.000109	0.000114	0.000102	0.000401	0.000434	0.000362
	0.99	0.000172	0.000142	0.000107	0.000534	0.000483	0.000413

8. GERÇEK VERİ UYGULAMASI

Bu bölümde tezde elde edilmiş bulguları göstermek için gerçek bir veri seti kullanılmıştır. İlk başta Garcia ve ark. (2005) tarafından kullanılan daha sonraları ise Reangsephet ve ark. (2020) tarafından gamma regresyon modeli üzerinde kullanılan "body fat" verisi ele alınmıştır. Bu veri seti Hothorn (2016) tarafından desteklenir ve TH.data adlı R paketinde mevcuttur. Bu veri seti sağlıklı 71 kadın deneğin gözlemlenmesiyle elde edilmiş olup bu gözlem sonuçları birbiriyle ilişkili 9 tane bileşenden oluşmaktadır. Bu bileşenler: yaş (age), bel çevresi (waistcirc), kalça çevresi (hipcirc), dirsek genişliği (elbowbreadth), diz genişliği (kneebreadth) ve dört gruba ayrılmış üç antropometrik ölçümün logaritmalarının toplamı (anthro3a, anthro3b, anthro3c, and anthro4) şeklindedir.

Tablo 8.1. Body Fat verisinde parametre tahminleri ve MSE değerleri

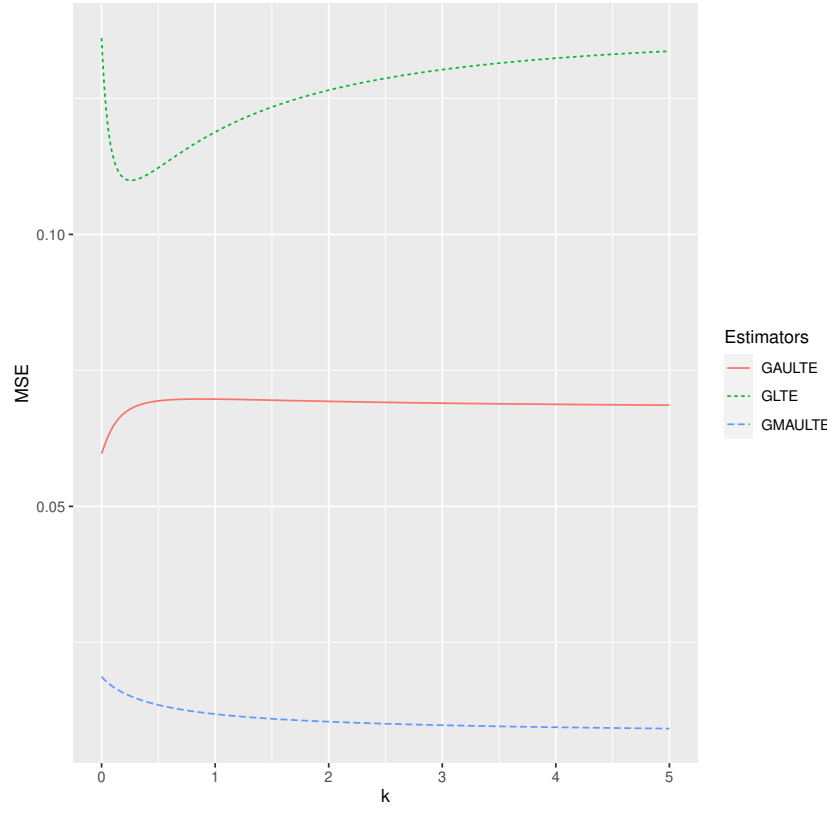
	MLE	LTE	AULTE	GMAULTE
(Intercept)	-0.219467	-0.049312	-0.115266	-0.032616
age	0.001606	0.001520	0.001530	0.001503
waistcirc	0.004196	0.004795	0.004507	0.004820
hipcirc	0.010772	0.010325	0.010373	0.010252
elbowbreadth	0.014118	0.001447	0.005719	0.000056
kneebreadth	0.042557	0.036824	0.040001	0.036466
anthro3a	-0.122724	-0.013908	-0.065063	-0.002922
anthro3b	0.140431	0.110937	0.130224	0.107181
anthro3c	0.129183	0.132774	0.137493	0.134811
anthro4	0.163679	0.100072	0.123233	0.094096
MSE	15.208570	0.116499	0.069726	0.012314

Elde edilmiş bu veriler yardımıyla deneklerin kemiklerinin mineral yoğunlukları arasındaki ilişki incelenmek istenmiştir. Bu verinin yanıt değişkeni olan ve kemik mineral yoğunluğu testi (DXA) ölçümü kullanılarak bulunan "DEXfat" değişkeninin dağılımını belirlemek amacıyla Anderson-Darling (AD) testi uygulanmıştır. AD testi R programının içerisinde bulunan `gofTest` paketinden faydalanılarak `ad.test` fonksiyonu yardımıyla yapılmıştır. R programında bu adımlar uygulandığında AD test istatistiği 0.3613 olarak elde edilmiş ve p değeri 0.8857 olarak hesaplanmıştır. Ayrıca dağılımın parametreleri olan şekil (shape) ve oran (rate) değerleri sırasıyla şu şekilde bulunmuştur: shape = 7.5917, rate = 0.2466. Bu nedenle, elde edilen bu sonuçlardan yola çıkılarak bu veri setini kullanarak bir gamma regresyon modeli uydurulabileceği söylenebilir. "Body Fat" verisine uydu-

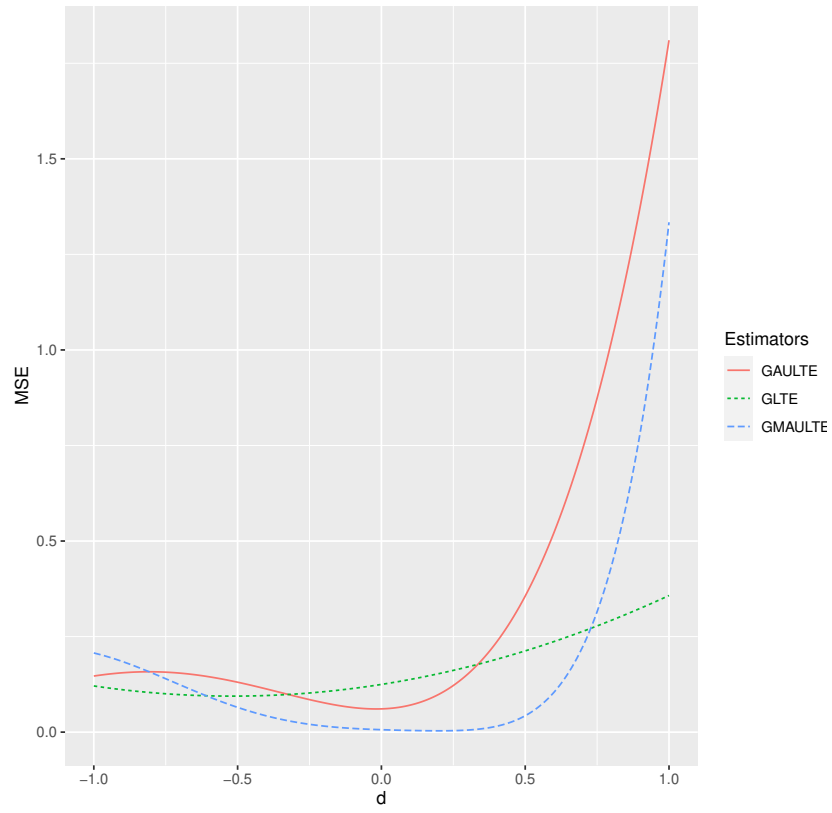
ruhan gamma regresyon modelinin $\mathbf{X}^\top \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{X}$ matrisi incelenip koşul sayısı hesaplanınca bu değerin 3410.632 olduğu görülmüştür ki bu çok büyük bir değeri olduğundan veri setinde göze çarpacak şekilde çoklu bağlantı olduğu söylenir. Tablo 8.1’de her bir açıklayıcı değişkenin karşısında tahmin edicilerin parametre tahmin değeri ve MSE’leri görülmektedir. Bu değeri (4.9), (5.5), (6.4), ve (6.11) numaralı eşitlikleri kullanarak elde edilmiştir. Tahmin edicilerin k ve d yanlılık parametreleri için kullanılacak tahmini değeri daha önceki kısımlarda bahsedilen yöntemlerle seçilmiştir.

Ayrıca Şekil 8.1’de k ve d parametrelerinin değeri için GLTE, GAULTE, GMAULTE tahmin edicilerinin MSE’lerindeki sonuçlar görülmektedir. Gerçek veri uygulamalarından elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Tablo 8.1 incelendiğinde MSE sonuçlarında en yüksek değeri MLE’ye ait olduğu görülmektedir. Bu sonuç gamma regresyon modelinde GLTE, GAULTE ve GMAULTE yanlı tahmin edicilerin çoklu bağlantının varlığında MLE’den daha iyi çıktığını göstermektedir. Bunun yanında en küçük MSE değeri GMAULTE’ye aittir.
- Tablo 8.1 incelendiğinde MLE ve yanlı tahmin edicilerin hepsinde açıklayıcı değişken katsayılarının her birinin işaretinin aynı olduğu görülmektedir.
- Ayrıca yine Tablo 8.1’e dikkat edilirse tahmin edicilerin katsayıları değeri arasındaki fark en fazla dirsek genişliği (elbowbreadth) değişkeninde ortaya çıkmıştır. Bu sonuçtan yola çıkılarak çoklu bağlantının dirsek genişliği (elbowbreadth) değişkeninde dikkat çeken değişikliklere neden olduğu söylenebilir.
- Şekil 8.1a’da görüldüğü gibi k değeri (0, 5) aralığında bütün değeri için en iyi sonuçları, en düşük MSE değeri veren tahmin edici GMAULTE iken en yüksek MSE sonuçlarını verip çoklu bağlantı varlığında kullanılması daha az uygun olan tahmin edici ise GLTE olmuştur.
- Şekil 8.1b’de d yanlılık parametresinin tahmin sonuçları incelendiğinde k parametresinden farklı olarak seçilmiş olan $(-1, 1)$ aralığında farklı tahmin edicilerin değişik aralıklarda en iyi sonuçlar verebildiği görülmektedir. Ancak teorik kısımda incelendiği üzere önermiş olduğumuz GMAULTE’nin MSE bakımından en iyi sonuçlar verdiği aralık $(-0.5, 0.5)$ aralığıdır.



(a) k değişimine bağlı MSE değişimi



(b) d değişimine bağlı MSE değişimi

Şekil 8.1. k ve d değişimlerine bağlı tahmin edicilerin MSE'lerindeki değişim

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

9.1. Sonuçlar

Üstel aile grubunun bir üyesi olup GLM'ye ait olan gamma regresyon modelinde diğer modellerde olduğu gibi çoklu bağlantının var olması durumunda yansız tahmin edicilerden MLE kararlı tahminler vermemektedir. MLE yerine yanlı tahmin edicilerin kullanılması çoklu bağlantıyı giderme yöntemlerinden biridir. Gamma regresyon modelinde yanlı tahmin edicilerden biri olan Liu-tipi tahmin edicisinin Almagal ve Asar (2020) çalışmasında kullanılmış olduğu ve MLE'den daha iyi tahmin sonuçları vermiş olduğu daha önce de belirtilmişti. Çoklu bağlantının olması durumunda diğer alternatif tahmin edicilerden bazıları hemen hemen yansız ve modifiye hemen hemen yansız tahmin edicileridir. Bu tahmin ediciler GLM'nin bazı modellerinde çalışılmış ve MLE'den ve hatta kendilerinin oluşumunda etkili olan yanlı tahmin edicilerden daha iyi tahmin sonuçları vermiştir. Bu tezde hemen hemen yansız ve modifiye hemen hemen yansız Liu-tipi tahmin ediciler GLM'lerde yapılmış çalışmalardan yararlanılarak gamma regresyon modeline uyarlanmış ve bu tahmin edicilerin gamma regresyon modelinde de çoklu bağlantı varlığında iyi sonuç verdiği gösterilmiştir.

İlk olarak GAULTE ve GMAULTE'nin katsayı tahmin edicileri oluşturulmuş ve bu tahmin edicilerin yanlılık parametrelerinin tahminleri oluşturulmuştur. Daha sonra GLTE, GAULTE ve GMAULTE tahmin edicilerinin MSE'leri ile SB'leri hem teorik olarak hem simülasyon çalışmasıyla hem de gerçek veri uygulamasıyla karşılaştırılmıştır. Bütün bu karşılaştırmalar ışığında şunlar söylenebilir:

- GAULTE ve GMAULTE tahmin edicileri GLTE'den ve dolayısıyla da MLE'den daha iyi tahmin edicilerdir.
- GMAULTE, GAULTE'den daha iyi sonuçlar veren bir tahmin edicidir.
- Eğer tezde kullanılacak olan yanlılık parametreleriyle çalışılırsa d yanlılık parametresinin aralığını -0.5 ile 0.5 aralığında tutmak GMAULTE'nin daha iyi sonuçlar vermesini sağlayacaktır.

- GAULTE ve GMAULTE'nin arasındaki performans farkını daha iyi gözlemleyebilmek için GAULTE ve GMAULTE için ayrı ayrı d yanlılık parametresi kullanılabilir.
- Çoklu bağlantının varlığında gamma regresyon modelinde MLE yerine bu tezde önerilen GAULTE ve GMAULTE rahatlıkla uygulanabilir.
- SB sonuçları GAULTE'de daha küçüktür, simülasyon sonuçlarında bazen GMAULTE'nin SB'sinin MLE'ye göre daha büyük çıkmasının nedeni GMAULTE için ayrı bir d tahmin edicisinin bulunamamış olması olabilir.

9.2. Öneriler

Bu tezde önerilen yeni yöntemler genelleştirilmiş doğrusal modellere ait diğer regresyon modellerine uygulanabilir. Literatürde mevcut olan diğer yanlı tahmin edicilerle teorik ve nümerik kıyasları yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Agresti, A. (2015). *Foundations of Linear and Generalized Linear Models*. John Wiley & Sons: New Jersey .
- Akdeniz, F. ve Erol, H. (2003). Mean Squared Error Matrix Comparisons of Some Biased Estimators in Linear Regression. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 32(12), 2389–2413.
- Akdeniz, F.ve Kaçiranlar, S. (1995). On the almost unbiased generalized liu estimator and unbiased estimation of the bias and mse. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 24(7), 1789–1797.
- Akdeniz Duran, E. ve Akdeniz, F. (2012). Efficiency of the modified jackknifed Liu-type estimator. *Statistical Papers*, 53(2), 265–280.
- Akram, M.N., Amin, M., Qasim, M. (2020). A new Liu-type estimator for the Inverse Gaussian Regression Model, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 90(7), 1153–1172.
- Alkhamisi, M., Khalaf, G. and Shukur, G. (2006). Some modifications for choosing ridge parameters. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 35(11), 2005–2020.
- Algamal, Z. Y. (2018a). Developing a ridge estimator for the gamma regression model. *Journal of Chemometrics*, 32(10), e3054.
- Algamal, Z. Y. ve Asar, Y. (2020). Liu-type estimator for the gamma regression model. *Communications in Statistics–Simulation and Computation*, 49(8), 2035–2048.
- Amin, M., Qasim, M., Amanullah, M. (2019). Performance of Asar and Genç and Huang and Yang’s two parameter. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43(6), 2951–2963.
- Amin, M. Qasim, Muhammad Y., Amanullah, M. (2020a). Almost unbiased ridge estimator in the gamma regression model. *Communications in Statistics–Simulation and Computation*, <https://doi.org/10.1080/03610918.2020.1722837>.
- Amin, M., Qasim, M., Amanullah, M. and Afzal, S. (2020b). Performance of some ridge estimators for the gamma regression model. *Statistical Papers* , 61(3), 997–1026.
- Asar, Y. ve Genç, A. (2016). New shrinkage parameters for the Liu-type logistic estimators. *Communication in Statistics–Simulation and Computation*, 45(3), 1094–1103.
- Batah, F. S. M., Ramanathan, T. V., Gore, S. D. (2008). The efficiency of modified jackknife and ridge type regression estimators: a comparison. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 3(2008), 111–122.
- Chaubey, Y. P., Khurana, M., Chandra, S. (2018). An Investigation into Properties of jack-

- knifed and Bootstrapped Liu-type Estimator. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 106(1), 159–170.
- Dobson, A. J. (2008). *An Introduction to Generalized Linear Models*, 3rd ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Dorugade, A. V. (2014). New ridge parameters for ridge regression. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 15(1), 94–99.
- Farebrother, R. W. (1976). Further results on the mean square error of ridge regression. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 38, 248–250.
- Farrar, Donald E. ve Glauber, Robert R. (1967). Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited. *The Review of Economics and Statistics*, 49(1), 92–107 .
- Frisch, R. (1934). *Statistical Confluence Analysis by means of Complete Regression Systems*. (Oslo : Universitetets Økonomiske Institutt. 1934. Pp. 192.)
- Garcia, A. L., Wagner, K., Hothorn, T., Koebnick, C., Zunft, H. J. F., Trippo, U. (2005). Improved prediction of body fat by measuring skinfold thickness, circumferences, and bone breadths. *Obesity Research*, 13(3), 626–634.
- Hoerl, A. E. ve Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12(1), 55–67.
- Hoerl, A. E. ve Kennard, R. W. (1970b). Ridge regression: Applications to Nonorthogonal Problems. *Technometrics*, 12(1), 55–67.
- Hoerl, A. E., Kennard, R. W. ve Baldwin, K. F. (1975). Ridge regression: some simulation. *Communications in Statistics*, 4:105–123.
- Hothorn, T. (2016) TH.data: TH's Data Archive. R package version 1.0-7. <https://CRAN.R-project.org/package=TH.data>
- Huang, J. ve Yang, H. (2013) A two-parameter estimator in the negative binomial regression model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(1), 124—134.
- İnan, D. ve Erdoğan, B. E. (2013). Liu-type logistic estimator. *Communications in Statistics–Simulation and Computation* , 42(7), 1578–1586.
- Kaçıranlar, S. ve Sakallıoğlu, S. (2008) A new biased estimator based on ridge estimation. *Springer*, (49)669–689.
- Kadiyala, K. (1984). A class of almost unbiased and efficient estimators of regression coefficients. *Economics Letters*, 16(3–4), 293–296.
- Khalaf, G., Månsson, K., Sjölander, P., Shukur, G. (2014). A Tobit ridge regression estimator. *Communications in Statistics–Theory and Methods* , 43(1), 131–140.

- Khalaf, G. ve Shukur, G. (2005). Choosing ridge parameter for regression problems. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 34:5, 1177–1182.
- Khurana, M., Chaubey, Y. P., Chandra, S. (2014). Jackknifing the ridge regression estimator: A revisit. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 43(24), 5249–5262.
- Khuri, A. I. (2009). *Linear model methodology*. CRC Press.
- Kıranoglu, M. E. (2005). Measuring secondary school education efficiencies of Turkish provinces: an application of data envelopment analysis, Yüksek Lisans Tezi. *Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul.
- Kibria, B. G. (2003). Performance of some new ridge regression estimators. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 32(2), 419–435.
- Korucu, Ö. (2010). *Genelleştirilmiş Lineer modellerde model seçimi üzerine alternatif bir yaklaşım*. Yüksek lisans tezi, İstanbul Üniversitesi/ Fen Bilimleri Fakültesi, İstanbul.
- Kurtoğlu, F. ve Özkale, M. R. (2016). Liu estimation in generalized linear models: application on gamma distributed response variable. *Statistical Papers*, 57(4), 911–928.
- Lawless, J. F. ve Wang, P. (1976). A simulation study of ridge and other regression estimators. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 5(4), 307–323.
- Liu, K., (1993). A new class of biased estimate in linear regression. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 22(2), 393–402.
- Liu, K. (2003). Using Liu-type estimator to combat collinearity. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 32 (5), 1009–20.
- Lukman, Adewale F., Ayinde, Kayode, Kibria, B. M. Golam, Adewuyi, Emmanuel T. (2020). Modified ridge-type estimator for the gamma regression model. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, <https://doi.org/10.1080/03610918.2020.1752720>.
- Mackinnon, M. J. (1986). *Collinearity in generalized linear models*. Dissertation, The University of British Columbia.
- Mackinnon, M. J. ve Puterman, M. L. (1989). Collinearity in generalized linear models. *Communications in statistics–Theory and methods*, 18(9), 3463–3472.
- Mackinnon, M. J. ve Puterman, M. L., 'Examples of Collinearity in Gamma Regression Models', Biostatistical Consulting Service Research Paper #1, Research Division, BC Children's Hospital.
- Månsson, K., Kibria, B. G. and Shukur, G. (2012a). On Liu estimators for the logit regression model., *Economic Modelling*. 29(4), 1483–1488.

- Månsson, K., Kibria, B. G., Sjolander, P. and Shukur, G. (2012b). Improved Liu estimators for the Poisson regression model. *International Journal of Statistics and Probability*, 1(1), 2–6.
- Månsson, K. (2013). Developing a Liu estimator for the negative binomial regression model: method and application. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 83(9), 1773–1780.
- Månsson, K., Kibria, B. G., Shukur, G. (2015). Performance of some weighted Liu estimators for logit regression model: an application to Swedish accident data. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 44(2), 363–375.
- McCulloch, C. E., Searle, S. R., 2001, Generalized Linear and Mixed Models, Wiley, New York, page 306.
- McDonald, G. C. ve Galarneau, D. I. (1975). A Monte Carlo evaluation of some ridge-type estimators. *Journal of the American Statistical Association*, 70(350), 407–416.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., Vining, G. G. (2012). *Doğrusal Regresyon Analizine Giriş* (Çev. Editörü: M. Aydın Erar), Nobel Yayınevi: Ankara.
- Muniz, G. ve Kibria, B. G. (2009). On some ridge regression estimators: An empirical comparisons. *Communications in Statistics–Simulation and Computation*, 38(3), 621–630.
- Nelder, J. A. ve Wedderburn, R. W. M. (1972). Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 135(3), 370–384. <https://doi.org/10.2307/2344614>.
- Nyquist, H. (1991). Restricted estimation of generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society–Applied Statistics, Series-C*, 40(1), 133–141.
- Qasim, M., Amin, M., Amanullah, M. (2018). On the performance of some new Liu parameters for the gamma regression model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88(16), 3065–3080.
- R Core Team (2019). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- Reangsephet, O., Lisawadi, S., Ahmed, S. E. (2020). Adaptive Estimation Strategies in Gamma Regression Model. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 14(1), 8.
- R. Rao, C., Helge Toutenburg, S. and Heumann, C. (2008). *Linear models and generalizations, Least Squares and Alternatives* (3rd Edition). Springer Berlin Heidelberg: New York.
- Ohtani, K. (1986). On small sample properties of the almost unbiased generalized ridge estimator. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 15(5), 1571–1578
- Özkale, M. R. ve Kaçıranlar, S. (2007). The restricted and unrestricted two-parameter esti-

- mators. *Communications in Statistics–Theory and Methods* , 2007,36(15), 2707–2725.
- Segerstedt, B. (1992). On ordinary ridge regression in generalized linear models. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 21 (8):2227—2246.
- Silvey, S. D. (1969). Multicollinearity and Imprecise Estimation. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 31(3), 539–552.
- Singh, B., Chaubey, Y.P., Dwivedi, T.D. (1986). An almost unbiased ridge estimator. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics B*, 48, 342–346.
- Trenkler, G. ve Toutenburg, H. (1990). Mean squared error matrix comparisons between biased estimators—An overview of recent results. *Statistical Papers*, 31(1), 165–179.
- Varathan, N. ve Wijekoon, P. (2019). Logistic Liu Estimator under stochastic linear restrictions. *Statistical Papers*, 60(3), 595–612.
- Varathan, N. ve Wijekoon, P. (2021). Modified almost unbiased Liu estimator in logistic regression. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 50(11), 3530–3546.
- Wu, J., Asar, Y., Arashi, M. (2018). On the restricted almost unbiased Liu estimator in the logistic regression model. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 47(18), 2018.
- Xu, J., Yang, H. 2011, More on the bias and variance comparisons of the restricted almost unbiased estimators, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 40(22):4053–4064.
- Yıldız, N., 2018, On the performance of the jackknifed Liu-type estimator in linear regression model, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 47(9), 2278–2290.