



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**$(AXB, CXD) = (E, F)$ ŞEKLİNDEKİ SPLIT
KUATERNİYON MATRİS
DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Fatih Metin AYKANAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Fatih Metin AYKANAT

Tarih: 23.06.2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$(AXB, CXD) = (E, F)$ ŞEKLİNDEKİ SPLIT KUATERNİYON MATRİS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Fatih Metin AYKANAT

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

2022, 66 Sayfa

Jüri

**Doç. Dr. Melek ERDOĞDU
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Fatma Muazzez ŞİMŞİR**

Bu tezde, split kuaterniyon matris denklemleri ele alınmıştır. Tez; altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde split kuaterniyon matrisleri ve matris denklemlerine dair yapılmış çalışmaları içeren literatür özetine yer verilmiştir. İkinci bölümde split kuaterniyonların cebirsel yapısı ve temel özellikleri ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde split kuaterniyon matrisleri tanıtlmış ve cebirsel özellikleri ele alınmıştır. Bu bölümde split kuaterniyon matrislerinin cebirsel yapısına ilişkin bazı yeni sonuçlar da elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, (Ni ve ark.,2019) çalışmasında ifade edilen split kuaterniyonların 2×2 reel matris temsili yardımıyla, split kuaterniyon matrisleri için yeni bir reel blok matris temsili tanıtlmıştır. Bu yeni temsil yardımıyla $Ax = b$ şeklindeki lineer split kuaterniyon denklem sistemlerinin çözümüne dair yeni sonuçlar ifade edilmiştir. Beşinci bölümde ise, split kuaterniyon matrislerinin sağ reel blok matris temsilleri yardımıyla, $(AXB, CXD) = (E, F)$ şeklinde ifade edilen split kuaterniyon matris denklemlerinin özel olarak η -hermityen çözümlerine dair yapılan incelemeler sunulmuştur. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: η -Hermityen Matris, Split Kuaterniyon, Split Kuaterniyon Matris Denklemleri.

ABSTRACT

MS THESIS

ON THE SOLUTIONS OF SPLIT QUATERNION MATRIX EQUATIONS OF THE FORM $(AXB, CXD) = (E, F)$

Fatih Metin AYKANAT

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS**

Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

2022, 66 Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Prof. Dr. Fatma Muazzez ŞİMŞİR

In this thesis, split quaternion matrix equations are discussed. Thesis; consists of six sections. In the first section, the literature summary including the studies on split quaternion matrices and matrix equations is given. In the second section, algebraic structure and basic properties of split quaternions are expressed. In the third section, split quaternion matrices are introduced and their algebraic properties are discussed. In this section, some new results regarding the algebraic structure of split quaternion matrices are also obtained. In the fourth section, a new real block matrix representation for split quaternion matrices is introduced with the help of the 2×2 real matrix representation of split quaternions expressed in (Ni et al., 2019). With the help of this new representation, new results regarding the solution of linear split quaternion equation systems in the form of $Ax = b$ are expressed. In the last section, with the help of the right real block matrix representations of the split quaternion matrices, the investigations on the η -hermitian solutions of the split quaternion matrix equations expressed as $(AXB, CXD) = (E, F)$ are presented. In the last section, conclusions and recommendations are given.

Keywords: η -Hermitian Matrix, Split Quaternion, Split Quaternion Matrix Equations.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan, ilgisini, önerilerini göstermekten kaçınmayan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Melek ERDOĞDU' ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bu çalışmamı, süreç boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşime ithaf ederim.

Fatih Metin AYKANAT
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Araştırması	1
2. SPLİT KUATERNİYONLAR.....	5
3. SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİ VE CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ.....	18
3.1. Split Kuaterniyon Matrislerde Toplama İşlemi	19
3.2. Split Kuaterniyon Matrislerde Çarpma İşlemi	22
3.3. Split Kuaterniyon Matrislerde Diğer Temel Kavramlar	27
3.4. Özel Tanımlı Split Kuaterniyon Matrisler	36
4. SPLİT KUATERNİYON MATRİS DENKLEMLERİ	41
4.1. Split Kuaterniyon Matrislerinin $2m \times 2n$ Reel Matris Temsili	41
4.2. $Ax = b$ Şeklindeki Lineer Split Kuaterniyon Denklemleri	44
5. $(AXB, CXD) = (E, F)$ ŞEKLİNDEKİ SPLİT KUATERNİYON MATRİS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ.....	49
5.1. Split Kuaterniyon Matrislerin Reel Matris Temsilleri ve $vecAXB$ 'nın Yapısı ..	50
5.2. Split Kuaterniyon Matris Denkleminin η -Hermityen Çözümü	58
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	63
7. KAYNAKLAR	64

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{Q}_s^*$	Sıfırdan farklı split kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{Q}_s$	: Split kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{Q}_{s_0}$	: Pure split kuaterniyonlar kümesi
$M_{m \times 1}(\mathbb{Q}_s)$	: m boyutlu split kuaterniyon kolon vektörlerin kümesi
$M_{m \times n}(\mathbb{R})$	: $m \times n$ tipindeki reel matrislerin kümesi
$M_n(\mathbb{SR})$	: $n \times n$ tipindeki simetrik reel matrislerin kümesi
$M_n(\mathbb{ASR})$	: $n \times n$ tipindeki anti(ters) simetrik reel matrislerin kümesi
$M_{m \times n}(\mathbb{C})$	: $m \times n$ tipindeki kompleks matrislerin kümesi
$M_{m \times n}(\mathbb{Q})$	: $m \times n$ tipindeki kuaterniyon matrislerin kümesi
$M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$	: $m \times n$ tipindeki split kuaterniyon matrislerin kümesi
$R(A)$	: A split kuaterniyon matrisinin reel matris kısmı
$Im(A)$	: A split kuaterniyon matrisinin imajiner matris kısmı
$\bar{A}$	: A split kuaterniyon matrisinin eşleniği
A^T	: A split kuaterniyon matrisinin transpozesi
A^*	: A split kuaterniyon matrisinin eşlenik transpozesi
$\ A\ $	: A split kuaterniyon matrisinin Frobenius normu
A^+	: A matrisinin Moore-Penrose tersi
I_n	: n boyutlu birim matris
$\oplus$	: Split kuaterniyon matrislerde toplama işlemi
$\otimes$	: Split kuaterniyon matrislerde çarpma işlemi
A^R	: A split kuaterniyon matrisinin reel matris temsili
Ψ_A	: A split kuaterniyon matrisinin reel blok vektör temsili
H_E	: Problemin çözüm kümesi
$Tr(A)$	: A split kuaterniyon matrisinin izi
$Vec(A)$	: A split kuaterniyon matrisinin vektör temsili
I_q	: q split kuaterniyonunun karakter değeri

- φ_b : b split kuaterniyon vektörünün reel vektör temsili
- $\mathbb{Z}(A)$: A split kuaterniyon matrisinin $4m \times 4n$ reel matris temsili
- $\tau(q)$: q split kuaterniyonunun 2×2 reel matris temsili
- $\tau(A)$: A split kuaterniyon matrisinin $2m \times 2n$ reel matris temsili
- $vec(x)$: x split kuaterniyon vektörünün $4n \times 1$ reel matris temsili
- $M_n(\eta\mathbb{Q}_s)$: η Hermityen split kuaterniyon matrisleri kümesi
- $*$: Split kuaterniyon matrislerin kronecker çarpımı
- $vec_s(A)$: A kare split kuaterniyon matrisinin $\frac{n(n+1)}{2} \times 1$ split kuaterniyon matris temsili
- $vec_A(B)$: B kare split kuaterniyon matrisinin $\frac{n(n-1)}{2} \times 1$ split kuaterniyon matris temsili
- $\odot$: Bir split kuaterniyonla reel sayının çarpımı
- $\bullet$: İki split kuaterniyonun çarpımı

1. GİRİŞ

İrlandalı Matematikçi Sir William Rowan Hamilton kuaterniyonları 1843 yılında ortaya koymuştur (Hamilton; 1866). Kuaterniyonlar matematik tarihine değerli bir buluş olarak geçmiştir. Kuaterniyonlar kümesi bir bölüm halkası temsil eder (Zhang, 1997; Farenick ve Pidkowich, 2003). 1849 yıllarında ise, James Cockle split kuaterniyonları tanıtmıştır (Cockle; 1849). Split kuaterniyon geometri ve fizikte kullanılan Lorentziyen dönmeleri ifade etmekte kullanılabilir (Özdemir ve Ergin, 2006; Kula ve Yaylı, 2007; Alagöz ve ark., 2012; Erdoğan ve Özdemir, 2013a; Erdoğan ve Özdemir, 2013b).

1.1. Kaynak Araştırması

(He ve ark., 2017) çalışmalarında;

$$\mathbb{Q} = \{a_1 + a_2e_1 + a_3e_2 + a_4e_3 \mid e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$$

reel kuaterniyonlar cebiri ve $M_{m \times n}(\mathbb{Q})$ ise $m \times n$ ipinde reel kuaterniyon matrisleri olmak üzere her $\eta \in \{e_1, e_2, e_3\}$ için eğer $A^* = A$ ise $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Q})$ reel kuaterniyon matrisini η -hermityen matris olarak tanımlamışlardır. Burada $A^{\eta*} = -\eta A^* \eta$ ve A^* ise A matrisinin eşlenik transpozu olarak tanımlanmıştır. ($i = 1, 2, 3, 4$) olmak üzere $A_i \in M_{p_i \times t_i}(\mathbb{Q})$, $B_i \in M_{p_i \times t_{i+1}}(\mathbb{Q})$ ve $C_i \in M_{p_i \times p_i}(\mathbb{Q})$ η -hermityen matrislerden oluşan dokuz tane reel kuaterniyon matrisler içeren küme için bir matris ayrışımı da ortaya konulmuştur. $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $A_i X_i A_i^{\eta*} + B_i X_i + B_i^{\eta*} = C_i$ reel kuaterniyon matris denklemlerin η -hermityen çözümünün varlığı için gerek ve yeter şart ifade edilmiş ve bu ayrışımın bir uygulaması olarak verilmiştir. Bu çalışmada, η -hermityen çözümlerinin genel bir ifadesi de ortaya konulmuştur. A_i, B_i ve C_i blok matrisleri olarak verildiğinde, bu matrislerin rankları yardımıyla bahsi geçen sistemin η -hermityen çözümünün rankının sınırları elde edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçları ifade etmek için bazı nümerik örneklere de yer verilmiştir.

(He, 2019b) çalışmasında; $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q})$ için ϕ -hermityen reel kuaterniyon matrislerini tanımlamıştır. Bu çalışmada A bir ϕ -hermityen ve B, C, D aynı satır sayısına sahip birer reel kuaterniyon matrisler olmak üzere, (A, B, C, D) matrislerinin eş zamanlı bir matris ayrışımı incelenmiştir. Eş zamanlı matris ayrışımı kullanılarak, bazı reel kuaterniyon matris denklemlerinin ϕ -hermityen çözümlerinin varlığına dair gerek ve

yeter şartlar ortaya konulmuştur. Ayrıca genel çözümler mevcut ise reel kuaterniyon matris denklemlerinin çözümleri de incelenmiştir. Son olarak, çalışmanın sonuçlarını göstermek için bazı nümerik örnekler de sunulmuştur.

(Liu ve Zhang, 2019) çalışmalarında;

$$AX^* - XB = CY + D \text{ ve } X - AX^*B = CY + D$$

şeklinde olan split kuaterniyon matris denklemlerini incelemişlerdir. Burada X^* matrisi ya X 'e eşit ya da X 'in $\phi \in \{i, j, k\}$ için ϕ eşleniği olarak ele alınmış olup, ϕ - eşlenik matris denklemlerini bazı reel matris denklemlerine dönüşmesine olanak sağlayan bir split kuaterniyon matrisinin bazı reel matris temsillerini tanıtmışlardır. Bu çalışmalarında sunulan metodu kullanarak; orijinal split kuaterniyon matris denklem sisteminin tutarlılığı için gerek ve yeter şartın karşılık geldiği reel matris denklem sisteminin tutarlılığı olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca split kuaterniyon matris çözümlerinin karşılık geldikleri reel matris sistemlerinin reel çözümlerini kullanarak, çözüme dair bir formül ortaya koymuşlardır. Bir uygulama olarak ise yukarıda ifade edilen matris denklemlerinin ve

$$AX^* - XB = CY + D \text{ ve } X - AX^*B = CY + D$$

matris denklemlerinin bazı özel durumlarda çözümlerinin varlığı araştırmışlardır. Bununla birlikte, bahsi geçen bu dört split kuaterniyon matris denklemlerinin tek çözümü olabilmesi için bazı şartlar elde etmişlerdir.

(Magnus, 1983) çalışmasında; verilen lineer matris denklemlerinin genel çözümlerini, bu çözümlerin varlığını ve L-yapılandırılmış matrisleri ele almıştır. Magnus; L-yapılandırılmış reel matrislerin L-yapılandırılmış kuaterniyon matrislere genişlemesi ele alan bir teorik çalışma sunmuştur.

(Yuan ve Wang, 2016) çalışmalarında; L-yapılandırılmış reel kuaterniyon matrislerini ele almışlardır.

(Zhang ve ark., 2016a) çalışmalarında; kuaterniyon matrislerin reel matris temsillerini ve bu temsillerin özel yapılarını ele almışlardır. Kroneker çarpım ve genelleştirilmiş Moore-Penrose ters yardımıyla $AXB + CXD = E$ şeklindeki kuaterniyon matris denklemlerinin minimal normlu en küçük kare çözümlerini incelemişlerdir. Ayrıca pure imajiner (has kuaterniyon) en küçük kare çözümlerini ve reel en küçük kare

çözümlerini de elde etmişlerdir. Bu çalışmalarında; çözüm formülleri yalnızca reel matrisler içerir ve dolayısıyla (Yuan ve Liao, 2014) çalışmasında sunulan yöntemle göre daha kullanışlı olduğu görülür. Ayrıca, kuaterniyon matrislerinin reel matris temsillerinin özel yapısını ele alan bir reel aritmetik algoritmaya da yer vermişlerdir. Verilen algoritmanın bir uygulamasına da yer verebilmek için bazı nümerik örneklere de değinmişlerdir.

(Zhang ve ark., 2015) çalışmalarında; kuaterniyon matrislerin reel matris temsillerinin özel yapısını ve genelleştirilmiş Moore-Penrose tersini kullanarak $AX = B$ şeklinde verilen bir kuaterniyon matris denkleminin minimal normlu en küçük kare çözümlerini ele almışlardır. Bununla birlikte, bahsi geçen türde kuaterniyon matris denkleminin has kuaterniyon en küçük kare çözümlerini ve reel en küçük kare çözümlerini elde etmişlerdir.

(Erdoğan ve Özdemir, 2015) çalışmalarında; $a \times b$ şeklinde terimler içeren lineer split kuaterniyon denklemlerini araştırmıştır. 1,2 ve n bilinmeyenli genel lineer split kuaterniyon denklem sistemlerini çözmek için yeni bir metot vermişlerdir. Ayrıca bu yöntemi açıklamak için bazı örneklere de yer vermişlerdir.

(Yuan ve ark., 2017) çalışmalarında; X bilinmeyen bir split kuaterniyon hermityen matris ve A, B, C, D, E, F ise uygun boyutta bilinen split kuaterniyon matrisler olmak üzere $AXB + CXD = E$ şeklindeki split kuaterniyon matris denklemlerinin çözümlerini araştırmışlardır. Bahsi geçen şekilde verilen bir split kuaterniyon matris denkleminin denklemin çözümünün varlığına dair yeni sonuçlar ortaya koymuşlardır. Ayrıca çözümün var olduğu durumda, çözümün bulunması için bir formül elde etmişlerdir. Elde edilen sonuçları örneklerle irdeleyip, nümerik algoritmalara da yer vermişlerdir.

(Farenick ve Pidkowich, 2003) çalışmalarında; elemanları kuaterniyon olan normal matrislerin spektral teorisini incelemişlerdir.

(Zhang, 1997) çalışmasında; kuaterniyon ve kuaterniyon matrisleri üzerine kısa bir inceleme yapmıştır. Bilinen bazı sonuçların yeni ispatlarını sunmuş ve kompleks matrislerin kuaterniyon matrisleri ile benzerlikleri tartışmıştır. Bir kuaterniyon matrisinin

bir çift kompleks matrisine dönüştürme yöntemleri ile birlikte homotopi teorisinin üzerinde durmuştur.

2. SPLIT KUATERNİYONLAR

Bu bölümde (Kula, 2003; Erdoğan, 2015; Özdemir, 2020) kaynaklardan yararlanılarak split kuaterniyonlar kümesinin tanımı ve split kuaterniyonlar üzerinde tanımlı işlemler ifade edilmiştir. Bu işlemlerle birlikte split kuaterniyonların cebirsel yapısı ortaya konulmuştur.

$$\mathbb{Q}_S = \{q = q_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

kümesi üzerinde

$$\forall q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i, p = p_0 + \sum_{i=1}^3 p_i e_i \in \mathbb{Q}_S$$

için aşağıdaki işlemler tanımlansın (Cockle, 1849).

Toplama: $+: \mathbb{Q}_S \times \mathbb{Q}_S \rightarrow \mathbb{Q}_S$ olmak üzere

$$q + p = q_0 + p_0 + \sum_{i=1}^3 (q_i + p_i) e_i$$

şeklinde tanımlı bir iç işlemdir.

Çarpma: $\bullet : \mathbb{Q}_S \times \mathbb{Q}_S \rightarrow \mathbb{Q}_S$ olmak üzere

$$\begin{aligned} q \bullet p &= (q_0 p_0 - q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3) \\ &\quad + (q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_2 p_3 + q_3 p_2) e_1 \\ &\quad + (q_0 p_2 + q_2 p_0 - q_1 p_3 + q_3 p_1) e_2 \\ &\quad + (q_0 p_3 + q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2) e_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir iç işlemdir.

Eşitlik: $q = p$ olması için gerek ve yeter şart $i = 0, 1, \dots, 3$ için $q_i = p_i$ olmasıdır.

Tanım 2.1.

$$\mathbb{Q}_S = \left\{ q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesine üzerinde tanımlı olan toplama, çarpma ve eşitlik işlemleriyle birlikte split kuaterniyonlar (bölünmüş kuaterniyonlar veya kokuaterniyonlar) kümesi adı verilir. Bu kümenin her bir elemanına ise split kuaterniyon denir.

Teorem 2.1. (Kula, 2003; Özdemir, 2020) $(\mathbb{Q}_S, +, \bullet)$ üçlüsü değişmeli olmayan birimli bir halkadır.

İspat:

$$q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i, p = p_0 + \sum_{i=1}^3 p_i e_i, r = r_0 + \sum_{i=1}^3 r_i e_i$$

birer split kuaterniyon olsun.

$$p + q = (q_0 + p_0) + \sum_{i=1}^3 (p_i + q_i) e_i \in \mathbb{Q}_S$$

olduğundan $\mathbb{Q}_S$ kümesi toplama işlemine göre kapalıdır. Öte yandan

$$\begin{aligned} (q + p) + r &= (q_0 + p_0) + \sum_{i=1}^3 (q_i + p_i) e_i + r_0 + \sum_{i=1}^3 r_i e_i \\ &= (q_0 + p_0 + r_0) + \sum_{i=1}^3 (q_i + p_i + r_i) e_i \\ &= q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i + (p_0 + r_0) + \sum_{i=1}^3 (p_i + r_i) e_i \\ &= q + (p + r) \end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{Q}_S$ kümesi toplama işlemine göre birleşmelidir. Her $q \in \mathbb{Q}_S$ için $q + 0 = 0 + q = q$ olacak şekilde

$$0 = x_0 + \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in \mathbb{Q}_S$$

elemanı var ise bu elemana $\mathbb{Q}_S$ kümesi toplama işlemine göre birim elemanı adı verilir. Buradan

$$q + 0 = (q_0 + x_0) + \sum_{i=1}^3 (q_i + x_i) e_i = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i$$

elde edilir. Eşitlik tanımından

$$q_0 + x_0 = q_0, \quad q_1 + x_1 = q_1, \quad q_2 + x_2 = q_2, \quad q_3 + x_3 = q_3$$

olduğu görülür. O halde $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 'dır.

Böylece toplama işlemine göre birim eleman

$$0 = 0 + \sum_{i=1}^3 0e_i$$

olarak bulunur. Öte yandan $\forall q \in \mathbb{Q}_S$ için $q + q' = q' + q = 0$ olacak şekilde bir

$$q' = q_0' + \sum_{i=1}^3 q_i' e_i \in \mathbb{Q}_S$$

elemanı mevcut ise bu elemana $q \in \mathbb{Q}_S$ elamanının toplama işlemine göre ters elamanı adı verilir. Burada

$$q + q' = (q_0 + q_0') + \sum_{i=1}^3 (q_i + q_i') e_i = 0 + \sum_{i=1}^3 0e_i$$

olduğunda

$$q_0 + q_0' = q_1 + q_1' = q_2 + q_2' = q_3 + q_3' = 0$$

elde edilir. O halde

$$q_0' = -q_0, \quad q_1' = -q_1, \quad q_2' = -q_2, \quad q_3' = -q_3$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$q' = -q_0 + \sum_{i=1}^3 (-q_i) e_i$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} q + p &= q_0 + p_0 + \sum_{i=1}^3 (q_i + p_i) e_i \\ &= p_0 + q_0 + \sum_{i=1}^3 (p_i + q_i) e_i \\ &= p + q \end{aligned}$$

olduğundan $(\mathbb{Q}_S, +)$ ikilisi bir Abel grubudur.

$$\begin{aligned} q \bullet p &= (q_0 p_0 - q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3) \\ &\quad + (q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_2 p_3 + q_3 p_2) e_1 \\ &\quad + (q_0 p_2 + q_2 p_0 - q_1 p_3 + q_3 p_1) e_2 \\ &\quad + (q_0 p_3 + q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2) e_3 \end{aligned}$$

bir split kuaterniyon olduğundan $\mathbb{Q}_S$ kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

$$\begin{aligned}
r \bullet (p + q) &= (r_0 + \sum_{i=1}^3 r_i e_i) \bullet (p_0 + q_0 + \sum_{i=1}^3 (p_i + q_i) e_i) \\
&= r_0(p_0 + q_0) - r_1(p_1 + q_1) + r_2(p_2 + q_2) + r_3(p_3 + q_3) \\
&\quad + (r_1(p_0 + q_0) + r_0(p_1 + q_1) - r_2(p_3 + q_3) + r_3(p_2 + q_2)) e_1 \\
&\quad + (r_0(p_2 + q_2) + r_2(p_0 + q_0) - r_1(p_3 + q_3) + r_3(p_1 + q_1)) e_2 \\
&\quad + (r_0(p_3 + q_3) + r_3(p_0 + q_0) - r_2(p_1 + q_1) + r_1(p_2 + q_2)) e_3 \\
&= r_0 p_0 - r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3 + (r_0 p_1 + r_1 p_0 + r_2 p_3 - r_3 p_2) e_1 \\
&\quad + (r_0 p_2 + r_2 p_0 + r_3 p_1 - r_1 p_3) e_2 + (r_0 p_3 + r_3 p_0 + r_1 p_2 - r_2 p_1) e_3 \\
&\quad + r_0 q_0 - r_1 q_1 + r_2 q_2 + r_3 q_3 + (r_0 q_1 + r_1 q_0 + r_2 q_3 - r_3 q_2) e_1 \\
&\quad + (r_0 q_2 + r_2 q_0 + r_3 q_1 - r_1 q_3) e_2 + (r_0 q_3 + r_3 q_0 + r_1 q_2 - r_2 q_1) e_3 \\
&= r \bullet p + r \bullet q
\end{aligned}$$

olduğundan soldan dağılma özelliği sağlanır. Sağdan dağılma özelliği de benzer şekilde görülebilir.

$$\begin{aligned}
(q \bullet p) \bullet r &= \begin{pmatrix} q_0 p_0 - q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 \\ + (q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_2 p_3 + q_3 p_2) e_1 \\ + (q_0 p_2 + q_2 p_0 - q_1 p_3 + q_3 p_1) e_2 \\ + (q_0 p_3 + q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2) e_3 \end{pmatrix} \bullet \left(r_0 + \sum_{i=1}^3 r_i e_i \right) \\
&= \left(q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i \right) \bullet \begin{pmatrix} p_0 r_0 - p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 \\ + (p_1 r_0 + p_0 r_1 - p_2 r_3 + p_3 r_2) e_1 \\ + (p_0 r_2 + p_2 r_0 - p_1 r_3 + p_3 r_1) e_2 \\ + (p_0 r_3 + p_3 r_0 - p_2 r_1 + p_1 r_2) e_3 \end{pmatrix} \\
&= q \bullet (p \bullet r)
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{Q}_S$ kümesi çarpma işlemine göre birleşmelidir. Öte yandan

$$\begin{aligned}
q \bullet p &= q_0 p_0 - q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 + (q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_2 p_3 + q_3 p_2) e_1 \\
&\quad + (q_0 p_2 + q_2 p_0 - q_1 p_3 + q_3 p_1) e_2 + (q_0 p_3 + q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2) e_3
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
p \bullet q &= p_0 q_0 - p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + (p_1 q_0 + p_0 q_1 - p_2 q_3 + p_3 q_2) e_1 \\
&\quad + (p_0 q_2 + p_2 q_0 - p_1 q_3 + p_3 q_1) e_2 + (p_0 q_3 + p_3 q_0 - p_2 q_1 + p_1 q_2) e_3
\end{aligned}$$

ifadelerinden

$$-q_2p_3 + q_3p_2 \neq -p_2q_3 + p_3q_2$$

$$-q_1p_3 + q_3p_1 \neq -p_1q_3 + p_3q_1$$

$$-q_2p_1 + q_1p_2 \neq -p_2q_1 + p_1q_2$$

olduğundan $q \bullet p \neq p \bullet q$ olduğu görülür. Split kuaterniyonlar çarpma işlemine göre değişmeli değildir.

$$1 = 1 + \sum_{i=1}^3 0e_i \in \mathbb{Q}_S$$

için

$$\begin{aligned} 1 \bullet q &= \left(1 + \sum_{i=1}^3 0e_i\right) \left(q_0 + \sum_{i=1}^3 q_ie_i\right) \\ &= q_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 \\ &= q \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $1 \in \mathbb{Q}_S$ çarpma işlemine göre birim elemandır. Sonuç olarak $(\mathbb{Q}_S, +, \bullet)$ üçlüsünün değişmeli olmayan birimli bir halka olduğu elde edilir.

Teorem 2.2. (Kula, 2003; Özdemir, 2020) $(\mathbb{Q}_S, +, \bullet)$ üçlüsü bir cisim değildir.

İspat: $\mathbb{Q}_S^* = \mathbb{Q}_S - \{0\}$ olarak tanımlansın. $\mathbb{Q}_S^*$ kümesi çarpma işlemine göre değişmeli değildir. Ayrıca $\mathbb{Q}_S^*$ kümesinde her elemanın çarpma işlemine göre ters elemanı yoktur. $(\mathbb{Q}_S^*, \bullet)$ ikilisi Abel grubu değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{Q}_S^*, +, \bullet)$ üçlüsü de bir cisim değildir.

Tanım 2.2. (Kula, 2003; Özdemir, 2020)

$$q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_ie_i \in \mathbb{Q}_S$$

split kuaterniyonun da $q_0 \in \mathbb{R}$ sayısına q split kuaterniyonunun skaler (reel) kısmı, $\sum_{i=1}^3 q_ie_i$ sayısına ise q split kuaterniyonunun vektörel kısmı adı verilir.

$$S(q) = q_0 \text{ ve } V(q) = \sum_{i=1}^3 q_ie_i$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer $S(q) = q_0 = 0$ ise $q \in \mathbb{Q}_S$ 'ye pure (has) split kuaterniyon adı verilir.

Tanım 2.3. Split kuaterniyonlar kümesi üzerinde

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_S \rightarrow \mathbb{Q}_S$$

dış işlemi

$$q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i \in \mathbb{Q}_S, \lambda \in \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$\lambda \odot q = \lambda q_0 + \sum_{i=1}^3 (\lambda q_i) e_i$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.3. $\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_S \rightarrow \mathbb{Q}_S$ dış işlemi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall p, q \in \mathbb{Q}_S$ için

- 1) $\lambda_1 \odot (p + q) = \lambda_1 \odot p + \lambda_1 \odot q,$
- 2) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot p = \lambda_1 \odot p + \lambda_2 \odot p,$
- 3) $(\lambda_1 \lambda_2) \odot p = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot p)$

özellikleri sağlar.

İspat: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i, p = p_0 + \sum_{i=1}^3 p_i e_i \in \mathbb{Q}_S$ olsun.

1)

$$\begin{aligned} \lambda_1 \odot (p + q) &= \lambda_1 \odot \left((p_0 + q_0) + \sum_{i=1}^3 (p_i + q_i) e_i \right) \\ &= \lambda_1 (p_0 + q_0) + \sum_{i=1}^3 \lambda_1 (p_i + q_i) e_i \\ &= \lambda_1 p_0 + \sum_{i=1}^3 \lambda_1 p_i e_i + \lambda_1 q_0 + \sum_{i=1}^3 \lambda_1 q_i e_i \\ &= \lambda_1 \odot p + \lambda_1 \odot q \end{aligned}$$

elde edilir.

2)

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + \lambda_2) \odot p &= (\lambda_1 + \lambda_2) \odot \left(p_0 + \sum_{i=1}^3 p_i e_i \right) \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2) p_0 + \sum_{i=1}^3 (\lambda_1 + \lambda_2) p_i e_i \\
&= \lambda_1 p_0 + \sum_{i=1}^3 \lambda_1 p_i e_i + \lambda_2 p_0 + \sum_{i=1}^3 \lambda_2 p_i e_i \\
&= \lambda_1 \odot p + \lambda_2 \odot p
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

3)

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 \lambda_2) \odot p &= (\lambda_1 \lambda_2) \odot \left(p_0 + \sum_{i=1}^3 p_i e_i \right) \\
&= (\lambda_1 \lambda_2) p_0 + \sum_{i=1}^3 (\lambda_1 \lambda_2) p_i e_i \\
&= \lambda_1 (\lambda_2 p_0) + \sum_{i=1}^3 \lambda_1 (\lambda_2 p_i) e_i \\
&= \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot p)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.1. (Kula, 2003; Özdemir, 2020) $(\mathbb{Q}_S, +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot)$ altılısı bir reel vektör uzayıdır.

$\mathbb{Q}_S = \text{span} \{1, e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere $\text{boy}(\mathbb{Q}_S) = 4$ elde edilir.

Sonuç 2.2. Split kuaterniyonlar kümesinde çarpma işlemi ile $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ baz elamanlarının çarpımı aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir.

	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	1	$-e_1$
e_3	e_3	e_2	e_1	1

Tablo 2.1. Split kuaterniyonlar kümesinde $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ baz elamanlarının çarpımı

Not 2.1. Bu kısımdan sonra kısalığın hatırı için iki split kuaterniyonun çarpımının temsilinde $p \bullet q$ yerine pq ve bir reel sayı ile bir split kuaterniyonun çarpımının temsilinde $\lambda \odot q$ yerine λq temsili kullanılacaktır.

Tanım 2.4.

$$\forall q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i \in \mathbb{Q}_S$$

için

$$\bar{q} = q_0 - \sum_{i=1}^3 q_i e_i = S(q) - V(q)$$

şeklinde tanımlanan ve $\bar{q}$ ile gösterilen split kuaterniyonuna q 'nun eşleniği adı verilir.

Teorem 2.4. (Kula, 2003; Özdemir, 2020) $\forall q, p \in \mathbb{Q}_S$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler sağlanır:

- 1) $\overline{q + p} = \bar{q} + \bar{p}$,
- 2) $\overline{qp} = \bar{p} \bar{q}$,
- 3) $\overline{\bar{q}} = q$,
- 4) $\overline{\lambda q} = \lambda \bar{q}$,
- 5) $q \bar{q} = \bar{q} q$.

İspat: $q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i, p = p_0 + \sum_{i=1}^3 p_i e_i \in \mathbb{Q}_S$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

1)

$$\begin{aligned} \overline{q + p} &= q_0 + p_0 + \sum_{i=1}^3 (q_i + p_i) e_i \\ &= q_0 + p_0 - \sum_{i=1}^3 (q_i + p_i) e_i \\ &= q_0 - \sum_{i=1}^3 q_i e_i + p_0 - \sum_{i=1}^3 p_i e_i \\ &= \bar{q} + \bar{p} \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

2)

$$qp = q_0p_0 - q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 + (q_1p_0 + q_0p_1 - q_2p_3 + q_3p_2) e_1 \\ + (q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_3p_1) e_2 + (q_0p_3 + q_3p_0 - q_2p_1 + q_1p_2) e_3$$

olduğundan

$$\overline{qp} = q_0p_0 - q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 + (-q_1p_0 - q_0p_1 + q_2p_3 - q_3p_2) e_1 \\ + (-q_0p_2 - q_2p_0 + q_1p_3 - q_3p_1) e_2 + (-q_0p_3 - q_3p_0 + q_2p_1 - q_1p_2) e_3$$

elde edilir. Öte yandan

$$\bar{p} \bar{q} = p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + (-p_0q_1 - p_1q_0 + p_3q_2 - p_2q_3) e_1 \\ + (-p_2q_0 - p_0q_2 + p_3q_1 - p_1q_3) e_2 + (-p_3q_0 - p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1) e_3$$

olur ve $\overline{qp} = \bar{p} \bar{q}$ elde edilir.

3)

$$\overline{\bar{q}} = \overline{q_0 - \sum_{i=1}^3 q_i e_i} = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i = q$$

sağlanır.

4)

$$\overline{\lambda q} = \overline{\lambda q_0 + \sum_{i=1}^3 \lambda q_i e_i} = \lambda q_0 - \sum_{i=1}^3 \lambda q_i e_i \\ = \lambda \left(q_0 - \sum_{i=1}^3 q_i e_i \right) = \lambda \bar{q}$$

olarak bulunur.

5)

$$q\bar{q} = \left(q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i \right) \left(q_0 - \sum_{i=1}^3 q_i e_i \right) \\ = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned}\bar{q}q &= \left(q_0 - \sum_{i=1}^3 q_i e_i\right) \left(q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i\right) \\ &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $q\bar{q} = \bar{q}q$ olduğu görülür.

Tanım 2.5. (Kula, 2003; Özdemir, 2020)

$$q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i \in \mathbb{Q}_S$$

için

$$I_q = q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

değeri q split kuaterniyonunun karakterini temsil eder. Eğer $I_q < 0$ ise q split kuaterniyonuna spacelike; $I_q > 0$ ise q split kuaterniyonuna timelike ve $I_q = 0$ ise q split kuaterniyonuna lightlike (veya null) adı verilir.

Tanım 2.6. (Kula, 2003; Özdemir, 2020) $\|\cdot\|: \mathbb{Q}_S \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu

$$\forall q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i \in \mathbb{Q}_S$$

için

$$\|q\| = \sqrt{|q\bar{q}|} = \sqrt{|\bar{q}q|} = \sqrt{|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2|}$$

şeklinde tanımlanır. $\|q\|$ reel sayısına q split kuaterniyonunun normu denir.

Uyarı 2.1. Yukarıda tanımlanan fonksiyon pozitif tanımlı olmadığı için semi (yarı) norm fonksiyonudur.

Tanım 2.7. (Kula, 2003; Özdemir, 2020) Normu 1 olan split kuaterniyona birim split kuaterniyon adı verilir. $I_q \neq 0$ olmak üzere $\forall q \in \mathbb{Q}_S^*$ için $\frac{q}{\|q\|}$ birim split kuaterniyondur.

Tanım 2.8. (Kula, 2003; Özdemir, 2020) $\forall q \in \mathbb{Q}_S^*$ için

$$qp = pq = 1$$

eşitliğini sağlayan $p \in \mathbb{Q}_S$ varsa p split kuaterniyonuna q 'nın tersi denir ve q^{-1} ile gösterilir.

Eğer $I_q \neq 0$ ise

$$q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i$$

split kuaterniyonun tersi vardır ve

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{I_q}$$

split kuaterniyonuna eşittir.

Teorem 2.5. (Ni ve ark.,2019; Aydın, 2020; Özdemir, 2020) $\tau: \mathbb{Q}_S \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\forall q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i \in \mathbb{Q}_S$$

için

$$\tau(q) = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir lineer izomorfizmadır.

İspat:

$$q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i, p = p_0 + \sum_{i=1}^3 p_i e_i \in \mathbb{Q}_S \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}$$

olsun.

$$\begin{aligned} \tau(q + \lambda p) &= \tau\left((q_0 + \lambda p_0) + \sum_{i=1}^3 (q_i + \lambda p_i) e_i\right) \\ &= \begin{bmatrix} (q_0 + \lambda p_0) + (q_2 + \lambda p_2) & -(q_1 + \lambda p_1) + (q_3 + \lambda p_3) \\ (q_1 + \lambda p_1) + (q_3 + \lambda p_3) & (q_0 + \lambda p_0) - (q_2 + \lambda p_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_0 + p_2 & -p_1 + p_3 \\ p_1 + p_3 & p_0 - p_2 \end{bmatrix} \\ &= \tau(q) + \lambda \tau(p) \end{aligned}$$

olduğundan τ dönüşümü lineerdir. $\tau(q) = \tau(p)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 + p_2 & -p_1 + p_3 \\ p_1 + p_3 & p_0 - p_2 \end{bmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir.

Bu eşitlikten

$$q_0 = p_0, q_1 = p_1, q_2 = p_2, q_3 = p_3$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $q = p$ elde edilir.

O halde τ dönüşümü birebirdir. Öte yandan $\forall A = [a_{rs}] \in M_2(\mathbb{R})$ için $\tau(q) = A$ olacak şekilde bir tek $q \in \mathbb{Q}_S$ vardır. Burada

$$q = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{a_{21} - a_{12}}{2} e_1 + \frac{a_{11} - a_{22}}{2} e_2 + \frac{a_{21} + a_{12}}{2} e_3$$

olarak bulunur. Bu durumda τ dönüşümü örtendir. Sonuç olarak τ bir lineer izomorfizmadır.

Tanım 2.9. (Ni ve ark.,2019; Aydın, 2020; Özdemir, 2020)

$$\forall q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i \in \mathbb{Q}_S$$

için

$$\tau(q) = \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix}$$

matrisine q split kuaterniyonunun 2×2 reel matris temsili adı verilir ve

$$\det(\tau(q)) = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = I_q$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.6. (Ni ve ark.,2019; Aydın, 2020) $\forall p, q \in \mathbb{Q}_S$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- 1) $\tau(p + q) = \tau(p) + \tau(q)$,
- 2) $\tau(pq) = \tau(p)\tau(q)$,
- 3) $\tau(\lambda p) = \lambda\tau(p)$,
- 4) $\tau(1) = I_2$.

İspat:

$$q = q_0 + \sum_{i=1}^3 q_i e_i, p = p_0 + \sum_{i=1}^3 p_i e_i \in \mathbb{Q}_S \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}$$

olsun. 1) ve 3) özellikleri $\tau: \mathbb{Q}_S \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dönüşümünün lineer olmasından dolayı açıktır.

2)

$$pq = p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + (p_1q_0 + p_0q_1 - p_2q_3 + p_3q_2) e_1 \\ + (p_0q_2 + p_2q_0 - p_1q_3 + p_3q_1) e_2 + (p_0q_3 + p_3q_0 - p_2q_1 + p_1q_2) e_3$$

eşitliği yardımıyla

$$\tau(pq) = [a_{rs}] \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11} &= p_0q_0 + p_0q_2 - p_1q_1 + p_2q_0 - p_1q_3 + p_2q_2 + p_3q_1 + p_3q_3 \\ &= (p_0 + p_2)(q_0 + q_2) - (p_1 - p_3)(q_1 + q_3) \\ a_{12} &= p_0q_3 - p_1q_0 - p_0q_1 + p_1q_2 - p_2q_1 + q_0p_3 + p_2q_3 - p_3q_2 \\ &= -(q_1 - q_3)(p_0 + p_2) - (p_1 - p_3)(q_0 - q_2) \\ a_{21} &= p_0q_1 + p_1q_0 + p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p - q_0p_3 - p_2q_3 + p_3q_2 \\ &= (p_1 + p_3)(q_0 + q_2) + (p_0 - p_2)(q_1 + q_3) \\ a_{22} &= p_0q_0 - p_0q_2 - p_1q_1 - p_2q_0 + p_1q_3 + p_2q_2 - p_3q_1 + p_3q_3 \\ &= (p_0 - p_2)(q_0 - q_2) - (q_1 - q_3)(p_1 + p_3) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tau(pq) &= \begin{bmatrix} p_0 + p_2 & -p_1 + p_3 \\ p_1 + p_3 & p_0 - p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 + q_2 & -q_1 + q_3 \\ q_1 + q_3 & q_0 - q_2 \end{bmatrix} \\ &= \tau(p)\tau(q) \end{aligned}$$

elde edilir.

4) $1 = 1 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$ olmak üzere

$$\tau(1) = \begin{bmatrix} 1 + 0 & -0 + 0 \\ 0 + 0 & 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

olarak bulunur.

3. SPLIT KUATERNİYON MATRİSLERİ VE CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.1. (Alagöz ve ark., 2012; Erdoğan, 2015) Elemanları birer split kuaterniyon olan matrislere split kuaterniyon matrisi adı verilir. Bir başka ifade ile $1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n$ olmak üzere $a_{rs} \in \mathbb{Q}_S$ için

$$A = [a_{rs}]$$

şeklindeki matrise $m \times n$ tipinde split kuaterniyon matris adı verilir. Buradan

$$a_{rs} = (a_{rs})_0 + \sum_{i=1}^3 (a_{rs})_i e_i \in \mathbb{Q}_S$$

olmak üzere

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan $A_0, A_1, A_2, A_3 \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ matrisler olup

$$A_0 = [(a_{rs})_0]$$

$$A_1 = [(a_{rs})_1]$$

$$A_2 = [(a_{rs})_2]$$

$$A_3 = [(a_{rs})_3]$$

eşitlikleri ile ifade edilir. O halde $m \times n$ tipinde split kuaterniyon matrislerinin kümesi

$$M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S) = \{A = [a_{rs}]: a_{rs} \in \mathbb{Q}_S, 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n\}$$

veya

$$M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S) = \left\{ A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i : A_i \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), i = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

şeklinde temsil edilir.

Tanım 3.2. (Alagöz ve ark., 2012; Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015)

$$A = [a_{rs}], \quad B = [b_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere $1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n$ için $a_{rs} = b_{rs}$ ise A ve B split kuaterniyon matrisleri eşittir denir ve $A = B$ ile gösterilir.

Sonuç 3.1.

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i, \quad B = B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

için $A = B$ olması için gerek ve yeter şart $A_0 = B_0, A_1 = B_1, A_2 = B_2$ ve $A_3 = B_3$ olmasıdır.

Tanım 3.3. Bir A split kuaterniyon matrisinin satır ve sütun sayıları eşit ise yani $n \times n$ tipinde bir matris ise A matrisine n . mertebeden bir split kuaterniyon kare matris adı verilir. Split kuaterniyon kare matrislerin kümesi $M_n(\mathbb{Q}_S)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4. $A = [a_{rs}] \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarının bulunduğu köşegene A split kuaterniyon matrisinin esas köşegeni adı verilir.

Tanım 3.5. $A = [a_{rs}] \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olsun. Eğer A split kuaterniyon matrisinin esas köşegen elemanları $1 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 \in \mathbb{Q}_S$ ve diğer elemanları $0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 \in \mathbb{Q}_S$ ise n . mertebeden A split kuaterniyon kare matrisine split kuaterniyon birim matris adı verilir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir.

Tanım 3.6. $A = [a_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere her $1 \leq r \leq m$ ve $1 \leq s \leq n$ için $a_{rs} = 0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 \in \mathbb{Q}_S$ ise A matrisine split kuaterniyon sıfır matrisi adı verilir ve $0_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ ile gösterilir.

3.1. Split Kuaterniyon Matrislerde Toplama İşlemi

Tanım 3.1.1. (Alagöz ve ark., 2012; Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015) $M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ kümesi üzerinde toplama işlemi

$$\oplus: M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S) \times M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere

$$\forall A = [a_{rs}], \quad B = [b_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

için

$$A \oplus B = [a_{rs} + b_{rs}]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.1. $A = \begin{bmatrix} e_1 + e_3 & e_2 \\ e_2 - e_3 & e_3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 + e_1 & e_2 - e_3 \\ e_1 - e_3 & e_1 \end{bmatrix}$ split kuaterniyon matrisleri verilsin.

$$a_{11} + b_{11} = (e_1 + e_3) + (1 + e_1) = 1 + 2e_1 + e_3$$

$$a_{12} + b_{12} = e_2 + (e_2 - e_3) = 2e_2 - e_3$$

$$a_{21} + b_{21} = (e_2 - e_3) + (e_1 - e_3) = e_1 + e_2 - 2e_3$$

$$a_{22} + b_{22} = e_3 + e_1$$

eşitliklerinden

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 + 2e_1 + e_3 & 2e_2 - e_3 \\ e_1 + e_2 - 2e_3 & e_3 + e_1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Uyarı 3.1.1.

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i, \quad B = B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere

$$A \oplus B = A_0 + B_0 + \sum_{i=1}^3 (A_i + B_i) e_i$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Örnek 3.1.2.

$$A = \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ e_3 & e_1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 + e_1 & e_3 \\ e_2 - e_3 & e_2 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisleri verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e_3$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $A_0, A_1, A_2, A_3 \in M_2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e_3$$

olarak yazılır. Burada

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} A \oplus B &= A_0 + B_0 + \sum_{i=1}^3 (A_i + B_i) e_i \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) e_1 \\ &\quad + \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) e_2 + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) e_3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e_3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 2e_1 & -e_2 + e_3 \\ e_2 & e_1 + e_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.1. (Alagöz ve ark., 2012; Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015)
 $\forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ ve $0_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ sıfır matrisi olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

- 1) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$,
- 2) $A \oplus 0_{m \times n} = 0_{m \times n} \oplus A = A$,
- 3) $A \oplus A' = A' \oplus A = 0_{m \times n}$ olacak şekilde bir tek $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ vardır,
- 4) $A \oplus B = B \oplus A$.

İspat: 1) $A = [a_{rs}]$, $B = [b_{rs}]$, $C = [c_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ olsun. Split kuaterniyonlar kümesi üzerinde toplama işlemi birleşmeli olduğundan

$$(A \oplus B) \oplus C = [a_{rs} + b_{rs}] \oplus [c_{rs}]$$

$$\begin{aligned}
&= [(a_{rs} + b_{rs}) + c_{rs}] \\
&= [a_{rs} + (b_{rs} + c_{rs})] \\
&= [a_{rs}] + [b_{rs} + c_{rs}] \\
&= A \oplus (B \oplus C)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2) $A \oplus 0_{m \times n} = [a_{rs} + 0] = A$ ve $0_{m \times n} \oplus A = [0 + a_{rs}] = A$ olduğu görülür.

3) $A' = [a_{rs}'] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ olsun $A \oplus A' = [a_{rs} + a_{rs}'] = [0]$ eşitliğinden

$$a'_{rs} = -a_{rs}$$

olduğu görülür. O halde $A' = [-a_{rs}]$ olduğundan $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ matrisinin toplama işlemine göre tersi vardır.

4) $A \oplus B = [a_{rs} + b_{rs}] = [b_{rs} + a_{rs}] = B \oplus A$ elde edilir.

Sonuç 3.1.1. (Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015) $(M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S), \oplus)$ bir Abel grubudur.

3.2. Split Kuaterniyon Matrislerde Çarpma İşlemi

Tanım 3.2.1. (Erdoğan, 2015) Split kuaterniyon matrislerde çarpma işlemi

$$\otimes: M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S) \times M_{m \times p}(\mathbb{Q}_S) \rightarrow M_{m \times p}(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere

$$A \otimes B = [c_{rt}] = \left[\sum_{s=1}^n a_{rs} b_{st} \right]$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 3.2.1. $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ ve $B = B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i e_i \in M_{n \times p}(\mathbb{Q}_S)$ matrislerin çarpımı

$$\begin{aligned}
A \otimes B &= (A_0 B_0 - A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) \\
&\quad + (A_1 B_0 + A_0 B_1 - A_2 B_3 + A_3 B_2) e_1 \\
&\quad + (A_0 B_2 + A_2 B_0 - A_1 B_3 + A_3 B_1) e_2 \\
&\quad + (A_0 B_3 + A_3 B_0 - A_2 B_1 + A_1 B_2) e_3
\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Örnek 3.2.1.

$$A = \begin{bmatrix} e_1 & e_3 \\ e_2 & e_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 + e_1 & 0 \\ e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisleri verilsin. Tanıma göre

$$A \otimes B = [c_{rt}] = \left[\sum_{s=1}^2 a_{rs} b_{st} \right]$$

eşitliğinden

$$c_{11} = \sum_{s=1}^2 a_{1s} b_{s1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$$

$$= e_1(1 + e_1) + e_3 e_2$$

$$= e_1 + e_1^2 + e_3 e_2$$

$$= e_1 - 1 + e_1$$

$$= -1 + 2e_1,$$

$$c_{12} = \sum_{s=1}^2 a_{1s} b_{s2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$$

$$= e_1 0 + e_3 e_3$$

$$= 1,$$

$$c_{21} = \sum_{s=1}^2 a_{2s} b_{s1} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}$$

$$= e_2(1 + e_1) + e_1 e_2$$

$$= e_2 + e_2 e_1 + e_1 e_2$$

$$= e_2,$$

$$c_{22} = \sum_{s=1}^2 a_{2s} b_{s2} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}$$

$$= e_2 e_2 + e_1 e_3$$

$$= 1 - e_2$$

olarak bulunur. O halde

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} -1 + 2e_1 & 1 \\ e_2 & 1 - e_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Öte yandan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e_3 ,$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e_3$$

eşitliklerinden

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (A_0 B_0 - A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) \\ &\quad + (A_1 B_0 + A_0 B_1 - A_2 B_3 + A_3 B_2) e_1 \\ &\quad + (A_0 B_2 + A_2 B_0 - A_1 B_3 + A_3 B_1) e_2 \\ &\quad + (A_0 B_3 + A_3 B_0 - A_2 B_1 + A_1 B_2) e_3 \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} e_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e_3 \\ &= \begin{bmatrix} -1 + 2e_1 & 1 \\ e_2 & 1 - e_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1. (Erdoğan, 2015) $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S), C, D \in M_{n \times o}(\mathbb{Q}_S), E \in M_{o \times u}(\mathbb{Q}_S)$ için

- 1) $(A \otimes C) \otimes E = A \otimes (C \otimes E),$
- 2) $A \otimes (C \oplus D) = (A \otimes C) \oplus (A \otimes D),$
- 3) $(C \oplus D) \otimes E = (C \otimes E) \oplus (D \otimes E)$

özellikleri sağlanır.

İspat:1) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$, $C \in M_{n \times o}(\mathbb{Q}_S)$ ve $E \in M_{o \times u}(\mathbb{Q}_S)$ için

$$A = [a_{rs}], C = [c_{st}] \text{ ve } E = [e_{tl}]$$

olsun. O halde

$$A \otimes C = [a_{rs}][c_{st}] = [h_{rt}]$$

eşitliği

$$h_{rt} = \sum_{s=1}^n a_{rs} c_{st}$$

ve

$$C \otimes E = [c_{st}][e_{tl}] = [f_{sl}]$$

olmak üzere

$$f_{sl} = \sum_{t=1}^o c_{st} l_{tl}$$

olarak yazılabilir. Bu nedenle

$$(A \otimes C) \otimes E = [h_{rt}][e_{tl}] = \sum_{t=1}^o h_{rt} l_{tl}$$

olup

$$(A \otimes C) \otimes E = \left[\sum_{t=1}^o h_{rt} l_{tl} \right] = \left[\sum_{t=1}^o \sum_{s=1}^n (a_{rs} c_{st}) l_{tl} \right]$$

sonucuna varılır. Diğer taraftan

$$A \otimes (C \otimes E) = [a_{rs}][f_{sl}] = \left[\sum_{s=1}^n a_{rs} f_{sl} \right]$$

bulunur ve

$$A \otimes (C \otimes E) = \left[\sum_{s=1}^n a_{rs} f_{sl} \right] = \left[\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^o a_{rs} (c_{st} l_{tl}) \right]$$

elde edilir. $a_{rs}, c_{st}, l_{tl} \in \mathbb{Q}_S$ olduğundan split kuaterniyon çarpımının birleşme özelliğinden

$$(a_{rs}c_{st})l_{tl} = a_{rs}(c_{st}l_{tl})$$

yazılabilir. O halde $A \otimes (C \otimes E) = A \otimes (C \otimes E)$ olduğu görülür.

2) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$, $C, D \in M_{n \times o}(\mathbb{Q}_S)$ için $A = [a_{rs}]$, $C = [c_{st}]$ ve $D = [d_{st}]$ olsun. O halde

$$A \otimes C = [a_{rs}][c_{st}] = \left[\sum_{s=1}^n a_{rs}c_{st} \right]$$

ve

$$A \otimes D = [a_{rs}][d_{st}] = \left[\sum_{s=1}^n a_{rs}d_{st} \right]$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} A \otimes (C \oplus D) &= [a_{rs}]([c_{st}] + [d_{st}]) \\ &= \left[\sum_{s=1}^n [a_{rs}]([c_{st}] + [d_{st}]) \right] \\ &= \left[\sum_{s=1}^n a_{rs}(c_{st} + d_{st}) \right] \\ &= \left[\sum_{s=1}^n a_{rs}c_{st} + a_{rs}d_{st} \right] \\ &= \left[\sum_{s=1}^n a_{rs}c_{st} \right] + \left[\sum_{s=1}^n a_{rs}d_{st} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $A \otimes C$ ve $A \otimes D$ çarpımları yardımıyla

$$A \otimes (C \oplus D) = (A \otimes C) \oplus (A \otimes D)$$

sonucuna varılır.

3) $C, D \in M_{n \times o}(\mathbb{Q}_S)$ ve $E \in M_{o \times u}(\mathbb{Q}_S)$ için $C = [c_{st}]$, $D = [d_{st}]$ ve $E = [e_{tl}]$ olsun. O halde

$$C \otimes E = [c_{st}][e_{tl}] = \sum_{t=1}^o c_{st}e_{tl}$$

ve

$$D \otimes E = [d_{st}][e_{tl}] = \sum_{t=1}^o d_{st}e_{tl}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} (C \oplus D) \otimes E &= ([c_{st}] + [d_{st}])[e_{tl}] \\ &= \left[\sum_{t=1}^o (c_{st} + d_{st})e_{tl} \right] \\ &= \left[\sum_{t=1}^o c_{st}e_{tl} + d_{st}e_{tl} \right] \\ &= \left[\sum_{t=1}^o c_{st}e_{tl} \right] + \left[\sum_{t=1}^o d_{st}e_{tl} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $C \otimes E$ ve $D \otimes E$ çarpımları yardımıyla

$$(C \oplus D) \otimes E = (C \otimes E) \oplus (D \otimes E)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1. $(M_n(\mathbb{Q}_S), \oplus, \otimes)$ üçlüsü değişmeli olmayan bir halkadır.

Not 3.2.1. Bu kısımdan sonra kısalığın hatırı için split kuaterniyon matrislerin toplamı $A \oplus B$ yerine $A + B$ ve çarpımı $A \otimes B$ yerine AB ile gösterilecektir.

3.3. Split Kuaterniyon Matrislerde Diğer Temel Kavramlar

Tanım 3.3.1. (Erdoğan, 2015) $A = [a_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere A split kuaterniyon matrisinin eşleniği

$$\bar{A} = [\overline{a_{rs}}]$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere A matrisinin eşleniği

$$\bar{A} = A_0 - \sum_{i=1}^3 A_i e_i$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Teorem 3.3.1. (Alagöz ve ark., 2012; Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015)

$\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$1) \overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B},$$

$$2) \overline{\bar{A}} = A.$$

İspat: $A = [a_{rs}], B = [b_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ olsun.

$$\begin{aligned} 1) \overline{A + B} &= [\overline{a_{rs} + b_{rs}}] = [\overline{a_{rs}} + \overline{b_{rs}}] \\ &= [\overline{a_{rs}}] + [\overline{b_{rs}}] = \bar{A} + \bar{B} \end{aligned}$$

elde edilir.

2)

$$\overline{\bar{A}} = \overline{[\overline{a_{rs}}]} = [\overline{\overline{a_{rs}}}] = [a_{rs}] = A$$

olduğu görülür.

Örnek 3.3.1.

$$A = \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 \\ 0 & e_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e_1 & -e_3 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisleri verilsin.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ 0 & -e_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_3 \\ 0 & -e_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\bar{A} \bar{B} = \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ 0 & -e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & e_3 \\ 0 & -e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e_2 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e_2 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e_2 \\ 0 & -e_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\bar{A} \bar{B} \neq \overline{AB}$ elde edilir.

Tanım 3.3.2. (Alagöz ve ark., 2012 ; Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015)

$$A = [a_{rs}] \in M_{m \times n} (\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere A matrisinin transpozu

$$A^T = [a_{sr}] \in M_{n \times m} (\mathbb{Q}_S)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n} (\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere

$$A^T = A_0^T + \sum_{i=1}^3 A_i^T e_i$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Teorem 3.3.2. (Alagöz ve ark., 2012 ; Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015)

$\forall A, B \in M_{m \times n} (\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

- 1) $(A^T)^T = A$,
- 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- 3) $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$.

İspat: $A = [a_{rs}]$, $B = [b_{rs}] \in M_{m \times n} (\mathbb{Q}_S)$ olsun.

1)

$$(A^T)^T = [a_{sr}]^T = [a_{rs}] = A$$

olduğu görülür.

2)

$$\begin{aligned} (A + B)^T &= [a_{sr} + b_{sr}]^T = [a_{sr} + b_{sr}] \\ &= [a_{sr}] + [b_{sr}] = A^T + B^T \end{aligned}$$

elde edilir.

3)

$$(\bar{A})^T = [\overline{a_{rs}}]^T = [\overline{a_{sr}}] = \overline{(A^T)}$$

olduğu görülür.

Örnek 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 \\ 0 & e_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e_1 & -e_3 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisleri verilsin.

$$A^T = \begin{bmatrix} -e_1 & 0 \\ e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$B^T = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ -e_3 & e_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 + e_2 & -e_1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e_2 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - e_2 & e_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$(AB)^T \neq B^T A^T$$

elde edilir.

Tanım 3.3.3. (Alagöz ve ark., 2012 ; Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015)

$$A = [a_{rs}] \in M_{m \times n} (\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere A matrisinin eşlenik transpozu

$$A^* = (\bar{A})^T = [\overline{a_{sr}}]$$

şeklinde tanımlanır. Bununla birlikte

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere

$$A^* = A_0^T - \sum_{i=1}^3 A_i^T e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Teorem 3.3.3. $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ ve $\forall C, D \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ için

$$1) (A + B)^* = A^* + B^*,$$

$$2) (A^*)^* = A^*,$$

$$3) (CD)^* = C^* D^*$$

özellikleri sağlanır.

İspat: 1) ve 2) Eşleniğin ve transpozun özelliklerinden açıktır.

3)

$$C = C_0 + \sum_{i=1}^3 C_i e_i, D = D_0 + \sum_{i=1}^3 D_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$$

olsun.

$$\begin{aligned} CD &= C_0 D_0 - C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3 \\ &\quad + (C_1 D_0 - C_0 D_1 - C_2 D_3 + C_3 D_2) e_1 \\ &\quad + (C_0 D_2 + C_2 D_0 - C_1 D_3 + C_3 D_1) e_2 \\ &\quad + (C_0 D_3 + C_3 D_0 - C_2 D_1 + C_1 D_2) e_3 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= C_0 D_0 - C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3 \\ &\quad - (C_1 D_0 - C_0 D_1 - C_2 D_3 + C_3 D_2) e_1 \\ &\quad - (C_0 D_2 + C_2 D_0 - C_1 D_3 + C_3 D_1) e_2 \\ &\quad - (C_0 D_3 + C_3 D_0 - C_2 D_1 + C_1 D_2) e_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
(CD)^* &= (\overline{CD})^T \\
&= D_0^T C_0^T - D_1^T C_1^T + D_2^T C_2^T + D_3^T C_3^T \\
&\quad - (D_0^T C_1^T - D_1^T C_0^T - D_3^T C_2^T + D_2^T C_3^T) e_1 \\
&\quad - (D_2^T C_0^T + D_0^T C_2^T - D_3^T C_1^T + D_1^T C_3^T) e_2 \\
&\quad - (D_3^T C_0^T + D_0^T C_3^T - D_1^T C_2^T + D_2^T C_1^T) e_3
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Öte yandan

$$D^* = (\overline{D})^T = D_0^T - D_1^T e_1 - D_2^T e_2 - D_3^T e_3$$

ve

$$C^* = (\overline{C})^T = C_0^T - C_1^T e_1 - C_2^T e_2 - C_3^T e_3$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
D^* C^* &= D_0^T C_0^T - D_1^T C_1^T + D_2^T C_2^T + D_3^T C_3^T \\
&\quad + (-D_0^T C_1^T + D_1^T C_0^T + D_3^T C_2^T - D_2^T C_3^T) e_1 \\
&\quad + (-D_2^T C_0^T - D_0^T C_2^T + D_3^T C_1^T - D_1^T C_3^T) e_2 \\
&\quad + (-D_3^T C_0^T - D_0^T C_3^T + D_1^T C_2^T + D_2^T C_1^T) e_3
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$(CD)^* = D^* C^*$$

olduğu görülür.

Tanım 3.3.4. $A \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ split kuaterniyon matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamına A split kuaterniyon matrisinin izi denir ve $tr(A)$ ile gösterilir.

$$tr(A) = \sum_{s=1}^n a_{ss}$$

olarak ifade edilir.

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere A matrisinin izi

$$tr(A) = tr(A_0) + \sum_{i=1}^3 tr(A_i)e_i$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Teorem 3.3.4. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ için

1) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$,

2) $tr(AB) \neq tr(A) tr(B)$,

3) $tr(AB) \neq tr(BA)$ (genellikle),

4) $tr(A^T) = tr(A)$,

5) $tr(\bar{A}) = \overline{tr(A)}$

özellikleri sağlanır.

İspat: $A = [a_{rs}], B = [b_{rs}] \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olsun.

1) $A + B = [a_{rs} + b_{rs}]$ olduğundan

$$\begin{aligned} tr(A + B) &= \sum_{s=1}^n (a_{ss} + b_{ss}) = \sum_{s=1}^n a_{ss} + \sum_{s=1}^n b_{ss} \\ &= tr(A) + tr(B) \end{aligned}$$

elde edilir.

2) $AB = [C_{rt}] = [\sum_{s=1}^n a_{rs} b_{st}]$ olduğundan

$$tr(AB) = \sum_{r=1}^n C_{rr} = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^n a_{rs} b_{sr} \right)$$

elde edilir. Öte yandan

$$tr(A) tr(B) = \left(\sum_{r=1}^n a_{rr} \right) \left(\sum_{r=1}^n b_{rr} \right)$$

olduğundan $tr(AB) \neq tr(A) tr(B)$ olduğu görülür.

3) Benzer şekilde

$$tr(BA) = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^n b_{rs} a_{st} \right)$$

eşitliğinden $tr(AB) \neq tr(BA)$ elde edilir.

4) $A^T = [a_{rs}]$ olduğundan A ve A^T matrislerinin tüm esas köşegen elemanları aynıdır. O halde $tr(A^T) = tr(A)$ dır.

5) $A = [a_{rs}]$ olmak üzere $\bar{A} = [\bar{a}_{rs}]$ olduğundan

$$tr(\bar{A}) = \sum_{r=1}^n \bar{a}_{rr} = \sum_{r=1}^n \overline{a_{rr}} = \overline{tr(A)}$$

elde edilir.

Tanım 3.3.5. (Alagöz ve ark., 2012 ; Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015)

$A, B \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ verilsin. Eğer

$$AB = BA = I_n$$

ise A matrisinin tersi vardır denir ve B matrisine A split kuaterniyon matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir.

Tanım 3.3.6 Tersisi mevcut olan split kuaterniyon matrisine regüler split kuaterniyon matris adı verilir. Aksi halde split kuaterniyon matrisine singüler matris denir.

Teorem 3.3.5. $A, B \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere; eğer $AB = I_n$ ise $BA = I_n$ 'dır.

Teorem 3.3.5' in ispatı için (Alagöz ve ark., 2012 ; Erdoğan ve Özdemir 2013b; Erdoğan, 2015) kaynakları önerilir.

Teorem 3.3.6. $A \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ matrisinin tersi varsa tektir.

İspat: $A \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ matrisinin $B, C \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere iki farklı tersi olsun. Bu durumda

$$AB = BA = I_n$$

ve

$$AC = CA = I_n$$

eşitlikten sağlanır.

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C$$

olduğunda $B = C$ elde edilir.

Teorem 3.3.7. (Alagöz ve ark., 2012; Erdoğan, 2015) $A, B \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ matrislerinin tersi varsa aşağıdaki özellikler sağlanır:

- 1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- 2) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$,
- 3) $(\bar{A})^{-1} \neq \overline{(A^{-1})}$ (genellikle),
- 4) $(A^T)^{-1} \neq (A^{-1})^T$ (genellikle).

İspat: $A, B \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ matrislerinin tersi var olsun.

1) Bu durumda

$$AA^{-1} = A^{-1}A = BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliklerden

$$AA^{-1} = (AI_n)A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$$

elde edilir. O halde

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

eşitliği de sağlanır. Sonuç olarak AB matrisin de tersi vardır ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

olduğu görülür.

2) $AA^{-1} = I_n$ eşitliğinin her iki tarafının eşlenik ve transpozu alınır

$$\overline{(AA^{-1})}^T = \overline{(A^{-1})}^T (\bar{A})^T = I_n$$

elde edilir. Bu durumda

$$(\bar{A})^T \overline{(A^{-1})}^T = I_n$$

eşitliği de sağlanır. $(\bar{A})^T = A^*$ matrisinin tersi vardır ve

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

elde edilir.

3) ve 4) ifadelerinin ispatı $\overline{AB} \neq \bar{A} \bar{B}$ ve $(AB)^T \neq B^T A^T$ olduğundan açıktır.

Örnek 3.3.3.

$$A = \begin{bmatrix} e_1 & 1 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisi verilsin.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_3 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Öte yandan

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -e_1 & 1 \\ 0 & -e_2 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{A})^{-1} = \begin{bmatrix} e_1 & e_3 \\ 0 & -e_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\overline{(A^{-1})} = \begin{bmatrix} e_1 & -e_3 \\ 0 & -e_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(\bar{A})^{-1} \neq \overline{(A^{-1})}$ olduğu görülür. Öte yandan

$$(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -e_1 & 1 \\ -e_3 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -e_1 & 0 \\ e_3 & e_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan $(A^T)^{-1} \neq (A^{-1})^T$ olduğu görülür.

3.4. Özel Tanımlı Split Kuaterniyon Matrisler

Tanım 3.4.1. (Alagöz ve ark., 2012; Erdoğan, 2015) $A \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere

$$AA^* = A^*A$$

eşitliği sağlanıyorsa A split kuaterniyon matrisine normal matris adı verilir.

Tanım 3.4.2. (Alagöz ve ark., 2012) $A \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere

$$A = A^*$$

eşitliği sağlanıyorsa A split kuaterniyon matrisine hermityen matris denir. Ayrıca eğer

$$A = -A^*$$

eşitliği sağlanıyorsa A matrisine ters (anti) hermityen matris denir.

Tanım 3.4.3. (Alagöz ve ark., 2012; Erdoğan, 2015) $A \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere

$$AA^* = A^*A = I_n$$

eşitliği sağlanıyorsa A matrisine uniter matris adı verilir. O halde A uniter matrisi için

$$A^{-1} = A^*$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 3.4.4. (Kösal ve ark., 2016; Cao ve Chang, 2020; Wang ve ark., 2021) $A, B \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere

$$S^{-1}AS = B$$

olacak şekilde $S \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ matrisi varsa A ve B split kuaterniyon matrislerine benzer matrisler adı verilir.

Tanım 3.4.5. (Li ve ark. 2021)

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$$

ve $\eta = e_1, e_2, e_3$ olmak üzere A^η matrisler

$$A^{e_1} = -e_1(A)e_1 = A_0 + A_1 e_1 - A_2 e_2 - A_3 e_3$$

$$A^{e_2} = e_2(A)e_2 = A_0 - A_1 e_1 + A_2 e_2 - A_3 e_3$$

$$A^{e_3} = e_3(A)e_3 = A_0 - A_1 e_1 - A_2 e_2 + A_3 e_3$$

şeklinde tanımlansın $(A^\eta)^*$ matrisi ise

$$\eta = e_1 \text{ ise } (A^\eta)^* = -\eta A^* \eta$$

$$\eta = e_2, e_3 \text{ ise } (A^\eta)^* = \eta A^* \eta$$

ile gösterilir. Eğer $(A^\eta)^* = A$ ise A matrisine η hermityen matris adı verilir. Burada

$$(A^\eta)^* = (A^*)^\eta$$

olduğu açıktır. $n \times n$ tipindeki η -hermityen matrislerin kümesi $M_n(\eta\mathbb{Q}_S)$ ile gösterilir.

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
(A^{e_1})^* &= -e_1 A^* e_1 \\
&= e_1 (A_0^T - A_1^T e_1 - A_2^T e_2 - A_3^T e_3) e_1 \\
&= A_0^T - A_1^T e_1 - A_2^T e_2 + A_3^T e_3, \\
(A^{e_2})^* &= -e_2 A^* e_2 \\
&= e_2 (A_0^T - A_1^T e_1 - A_2^T e_2 - A_3^T e_3) e_2 \\
&= A_0^T - A_1^T e_1 - A_2^T e_2 + A_3^T e_3, \\
(A^{e_3})^* &= -e_3 A^* e_3 \\
&= e_3 (A_0^T - A_1^T e_1 - A_2^T e_2 - A_3^T e_3) e_3 \\
&= A_0^T + A_1^T e_1 + A_2^T e_2 - A_3^T e_3
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.4.1: $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ matrisinin e_1 hermityen olması için gerek ve yeter şart $A_0, A_3 \in M_n(\mathbb{R})$ matrislerin simetrik ve $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})$ matrislerinin ters simetrik olmasıdır.

İspat: $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ verilsin.

$$(A^{e_1})^* = A_0^T - A_1^T e_1 - A_2^T e_2 - A_3^T e_3$$

olduğundan

$$(A^{e_1})^* = A$$

olması için gerek ve yeter şart

$$A_0^T = A_0,$$

$$-A_1^T = A_1,$$

$$-A_2^T = A_2$$

ve

$$A_3^T = A_3$$

olmasıdır.

Sonuç 3.4.2 $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ matrisinin e_2 hermityen olması için gerek ve yeter şart $A_0, A_1, A_3 \in M_n(\mathbb{R})$ matrislerin simetrik ve $A_2 \in M_n(\mathbb{R})$ matrisinin ise ters simetrik olmasıdır.

İspat: $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ olsun.

$$(A^{e_2})^* = A_0^T + A_1^T e_1 - A_2^T e_2 + A_3^T e_3$$

olduğundan

$$(A^{e_2})^* = A$$

olması için gerek ve yeter şart

$$A_0^T = A_0,$$

$$A_1^T = A_1,$$

$$-A_2^T = A_2$$

ve

$$A_3^T = A_3$$

olmasıdır.

Sonuç 3.4.3 $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ matrisinin e_3 hermityen olması için gerek ve yeter şart $A_0, A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})$ matrislerinin simetrik ve $A_3 \in M_n(\mathbb{R})$ matrisinin ise ters simetrik olmasıdır.

İspat: $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ verilsin.

$$(A^{e_3})^* = A_0^T + A_1^T e_1 + A_2^T e_2 - A_3^T e_3$$

olduğundan

$$(A^{e_3})^* = A$$

olması için gerek ve yeter şart

$$A_0^T = A_0,$$

$$A_1^T = A_1,$$

$$A_2^T = A_2$$

ve

$$-A_3{}^T = A_3$$

olmasıdır.

4. SPLIT KUATERNİYON MATRİS DENKLEMLERİ

Bu bölümde bazı özel split kuaterniyon matris denklemleri ve split kuaterniyon matrislerinin blok reel matris temsilleri incelenmiştir.

4.1. Split Kuaterniyon Matrislerinin $2m \times 2n$ Reel Matris Temsili

Tanım 4.1.1.

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A_0 + A_2 & -A_1 + A_3 \\ A_1 + A_3 & A_0 - A_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen $2m \times 2n$ tipindeki reel matrise A matrisinin blok reel matris temsili adı verilir ve $\tau(A)$ ile gösterilir.

Örnek 4.1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 + e_1 + e_2 & e_2 - e_3 & e_1 - e_3 \\ e_1 + e_2 & -e_3 & e_2 + e_3 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} e_2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} e_3$$

şeklinde yazılırsa

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \begin{bmatrix} A_0 + A_2 & -A_1 + A_3 \\ A_1 + A_3 & A_0 - A_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.1. $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$, $C \in M_{n \times p}(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

- 1) $\tau(A + B) = \tau(A) + \tau(B)$,
- 2) $\tau(A C) = \tau(A) \tau(C)$,
- 3) $\tau(I_n) = I_{2n}$.

İspat: $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i$, $B = B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$ olsun.

1)

$$A + B = (A_0 + B_0) + \sum_{i=1}^3 (A_i + B_i) e_i$$

olduğundan

$$\tau(A + B) = \begin{bmatrix} (A_0 + B_0) + (A_2 + B_2) & -(A_1 + B_1) + (A_3 + B_3) \\ (A_1 + B_1) + (A_3 + B_3) & (A_0 + B_0) - (A_2 + B_2) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned}\tau(A) + \tau(B) &= \begin{bmatrix} A_0 + A_2 & -A_1 + A_3 \\ A_1 + A_3 & A_0 - A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 + B_2 & -B_1 + B_3 \\ B_1 + B_3 & B_0 - B_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_0 + A_2 + B_0 + B_2 & -A_1 + A_3 - B_1 + B_3 \\ A_0 + A_3 + B_1 + B_3 & A_0 - A_2 + B_0 - B_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde $\tau(A + B) = \tau(A) + \tau(B)$ olduğu görülür.

2) $AC = F = F_0 + \sum_{i=1}^3 F_i e_i \in M_{m \times p}(\mathbb{Q}_S)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}AC &= (A_0 C_0 - A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) \\ &\quad + (A_1 C_0 - A_0 C_1 - A_2 C_3 + A_3 C_2) e_1 \\ &\quad + (A_0 C_2 + A_2 C_0 - A_1 C_3 + A_3 C_1) e_2 \\ &\quad + (A_0 C_3 + A_3 C_0 - A_2 C_1 + A_1 C_2) e_3\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$F_0 = A_0C_0 - A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3$$

$$F_1 = A_1C_0 - A_0C_1 - A_2C_3 + A_3C_2$$

$$F_2 = A_0C_2 + A_2C_0 - A_1C_3 + A_3C_1$$

ve

$$F_3 = A_0C_3 + A_3C_0 - A_2C_1 + A_1C_2$$

olduğu görülür. O halde

$$\tau(AC) = \begin{bmatrix} F_0 + F_2 & -F_1 + F_3 \\ F_1 + F_3 & F_0 - F_2 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Öte yandan

$$\tau(A)\tau(C) = \begin{bmatrix} A_0 + A_2 & -A_1 + A_3 \\ A_1 + A_3 & A_0 - A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 + C_2 & -C_1 + C_3 \\ C_1 + C_3 & C_0 - C_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği blok matris çarpımı yardımıyla açılırsa;

$$\tau(A)\tau(C) = \begin{bmatrix} F_0 + F_2 & -F_1 + F_3 \\ F_1 + F_3 & F_0 - F_2 \end{bmatrix} = \tau(AC)$$

eşitliği elde edilir.

3) $I_n = I_n + \sum_{i=1}^3 O_n e_i$ olarak ifade edilirse

$$\tau(I_n) = \begin{bmatrix} I_n + O_n & -O_n + O_n \\ O_n + O_n & I_n - O_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2. $A \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ bir regüler matris ise

$$(\tau(A))^{-1} = \tau(A^{-1})$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $A \in M_n(\mathbb{Q}_S)$ bir regüler matris olsun. O halde

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

eşitliği sağlanır. Önceki teoremin 2) ve 3) özelliklerinden

$$\tau(AA^{-1}) = \tau(A)\tau(A^{-1}) = \tau(I_n) = I_{2n}$$

elde edilir. Bu durumda $\tau(A) \in M_{2n}(\mathbb{R})$ matrisinin tersi vardır ve $(\tau(A))^{-1} = \tau(A^{-1})$ olduğu görülür.

4.2. $Ax = b$ Şeklindeki Lineer Split Kuaterniyon Denklemleri

Bu kısımda $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$, $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{Q}_S)$ verilen ve $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{Q}_S)$ bilinmeyen olmak üzere

$$Ax = b \quad (4.2.1)$$

şeklindeki sol katsayıları lineer denklem sistemleri ele alınmıştır.

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

$$b = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i e_i \in M_{m \times 1}(\mathbb{Q}_S)$$

ve

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in M_{n \times 1}(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere 4.2.1. denklemden

$$\tau(Ax) = \tau(b)$$

eşitliği yazılabilir. Teorem 4.1.1.'in 1) ve 2) önermesi kullanılırsa

$$\tau(A)\tau(x) = \tau(b)$$

$$\begin{bmatrix} A_0 + A_2 & -A_1 + A_3 \\ A_1 + A_3 & A_0 - A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2 & -x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 & x_0 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + b_2 & -b_1 + b_3 \\ b_1 - b_3 & b_0 - b_2 \end{bmatrix}$$

reel matris denklemi elde edilir. Buradan

$$\begin{bmatrix} A_0 + A_2 & A_1 - A_3 & A_0 + A_2 & A_1 - A_3 \\ A_1 - A_3 & -A_0 - A_2 & A_1 - A_3 & A_0 + A_2 \\ A_1 + A_3 & A_0 - A_2 & A_1 + A_3 & A_0 - A_2 \\ A_0 - A_2 & -A_1 - A_3 & A_2 - A_0 & A_1 + A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + b_2 \\ -b_1 + b_3 \\ b_1 + b_3 \\ b_0 - b_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

eşitliği yazılabilir.

Bu reel matris eşitliğinin çözümünün varlığını aşağıdaki teorem yardımıyla incelenebilir.

Teorem 4.2.1. (Ben-Israil ve Grevelle, 2003) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ olmak üzere $Ax = b$ lineer denklem sisteminin bir $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ çözümü olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$A A^+ b = b \quad (4.2.4)$$

olmasıdır. Bu durumda lineer denklem sisteminin genel çözümü

$$x = A^+ b + (I_n - A^+ A)y \quad (4.2.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $y \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ keyfi bir matristir. Ayrıca $\text{rank}(A) = n$ olduğu durumda ise $Ax = b$ lineer denkleminin tek çözümü

$$x = A^+ b \quad (4.2.6)$$

şeklinde dir. Burada A^+ ile A matrisinin Moore Penrose genelleştirilmiş tersi temsil edilmektedir.

Tezde, bundan sonra

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$$

split kuaterniyon matrisi için; 4.2.3 denklemiyle elde edilen $4m \times 4n$ reel blok matrisi

$$\mathfrak{Z}(A) = \begin{bmatrix} A_0 + A_2 & A_1 - A_3 & A_0 + A_2 & A_1 - A_3 \\ A_1 - A_3 & -A_0 - A_2 & A_1 - A_3 & A_0 + A_2 \\ A_1 + A_3 & A_0 - A_2 & A_1 + A_3 & A_0 - A_2 \\ A_0 - A_2 & -A_1 - A_3 & A_2 - A_0 & A_1 + A_3 \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

olarak temsil edilecektir. Bununla birlikte

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in M_{n \times 1}(\mathbb{Q}_S)$$

split kuaterniyon matrisi için; 4.2.3 denklemiyle elde edilen $4n \times 1$ reel matrisi

$$\text{vec}(x) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

olarak gösterelim. Son olarak

$$b = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i e_i \in M_{m \times 1}(\mathbb{Q}_S)$$

split kuaterniyon matrisi için; 4.2.3 denklemiyle elde edilen $4m \times 1$ reel matrisi

$$\varphi_b = \begin{bmatrix} b_0 + b_2 \\ -b_1 + b_3 \\ b_1 + b_3 \\ b_0 - b_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

olarak gösterilir. O halde $\mathfrak{Z}(A) \in M_{4m \times 4n}(\mathbb{R})$, $vec(x) \in M_{4n \times 1}(\mathbb{R})$, $\varphi_b \in M_{4m \times 1}(\mathbb{R})$ olmak üzere 4.2.3 denklemi

$$\mathfrak{Z}(A)vec(x) = \varphi_b \quad (4.2.10)$$

olarak ifade edilir. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.2. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$, $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{Q}_S)$ olmak üzere $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{Q}_S)$ bilinmeyenli

$$Ax = b$$

şeklindeki lineer denklem sisteminin çözümü olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\mathfrak{Z}(A)(\mathfrak{Z}(A))^+ \varphi_b = \varphi_b \quad (4.2.11)$$

olmasıdır. Bu lineer denklem sisteminin genel çözümü

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in M_{n \times 1}(\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere

$$vec(x) = (\mathfrak{Z}(A))^+ \varphi_b + (I_{4n} - \mathfrak{Z}(A)(\mathfrak{Z}(A))^+) vec(y)$$

eşitliği yardımıyla bulunur. Burada

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^3 y_i e_i \in M_{n \times 1}(\mathbb{Q}_S)$$

keyfi split kuaterniyon matrisidir. $Rank(\mathfrak{Z}(A)) = 4n$ ise $Ax = b$ lineer denklem sisteminin tek çözümü

$$vec(x) = (\mathfrak{Z}(A))^+ \varphi_b$$

eşitliği ile bulunur.

İspat: $Ax = b$ lineer denklem sistemi 4.2.10 ile verilen lineer denklem sistemine denktir. Teorem 4.2.1'e göre 4.2.10 ile verilen reel lineer denklem sisteminin çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\mathfrak{Z}(A)(\mathfrak{Z}(A))^+\varphi_b = \varphi_b$$

olmasıdır. Ayrıca teorem 4.2.1'e göre bu lineer denklem sisteminin genel çözümü

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^3 y_i e_i \in M_{n \times 1} (\mathbb{Q}_S)$$

keyfi split kuaterniyon matrisi için

$$vec(x) = (\mathfrak{Z}(A))^+\varphi_b + (I_{4n} - \mathfrak{Z}(A)(\mathfrak{Z}(A))^+) vec(y)$$

olarak elde edilir. Eğer $rank(\mathfrak{Z}(A)) = 4n$ ise $Ax = b$ lineer denklem sisteminin tek çözümü

$$vec(x) = (\mathfrak{Z}(A))^+\varphi_b$$

eşitliği ile bulunur.

Örnek 4.2.1.

$$A = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & 1 \\ e_3 & 1 & e_2 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3} (\mathbb{Q}_S)$$

ve

$$b = \begin{bmatrix} e_2 \\ -e_2 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 1} (\mathbb{Q}_S)$$

olmak üzere

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in M_{3 \times 1} (\mathbb{Q}_S)$$

bilinmeyenli $Ax = b$ lineer denklem sistemi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} e_3$$

olarak ifade edilir. Buradan

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(A) &= \begin{bmatrix} A_0 + A_2 & A_1 - A_3 & A_0 + A_2 & A_1 - A_3 \\ A_1 - A_3 & -A_0 - A_2 & A_1 - A_3 & A_0 + A_2 \\ A_1 + A_3 & A_0 - A_2 & A_1 + A_3 & A_0 - A_2 \\ A_0 - A_2 & -A_1 - A_3 & A_2 - A_0 & A_1 + A_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\text{rank}(\mathfrak{Z}(A)) = 7$ olduğundan tek çözüm olmadığı görülür.

5. $(AXB, CXD) = (E, F)$ ŞEKLİNDEKİ SPLIT KUATERNİYON MATRİS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Lineer matris denklemleri; fizik, bilgisayar bilimleri, veri analizi, mühendislik, sinyal ve renkli görüntü işleme, kontrol ve sistem teorisi, optimal kontrol, sinir ağları, tutarlılık teorisi gibi pek çok alanda önemli rol oynar. Pek çok araştırmacı Lyapunov denklemi gibi

$$A^*X + XA = B, AX = B, AXB = C, AXB + CYD = E \text{ ve } AXB + CXD = E$$

şeklindeki matris denklemlerinin reel cisim, kompleks cisim ve kuaterniyon bölüm halkası üzerinde çözümlerini araştırmışlardır (Magnus, 1983; Shim ve Chen, 2003; Liao ve ark., 2005; Meng ve ark., 2005; Wang ve ark., 2007; Wu ve ark., 2008; Yuan ve ark., 2008; Mansour, 2010; Song ve ark., 2012; Zhang ve ark., 2015; Yuan ve Wang, 2016; Zhang ve ark., 2016b; He ve ark., 2017; Şimşek ve ark., 2017; He, 2019b; Liu ve Zhang, 2019; Yu ve ark., 2020; He, 2021s). η -hermityen kuaterniyon matris çözümlerini ele alan (Took ve Mandic, 2011; Took ve ark., 2011; Wang ve Xue, 2019) çalışmaları involüsyon özellikleri, lineer modellemelere uygulamaları olduğunu ve istatistiksel sinyal işlemenin yakınsaklık analizi üzerine etkilerin varlığı olduğu için önem taşır. Ayrıca bu çalışmalarda η -hermityen matrisler ile ilişkilendirilmiş kuaterniyon matris denklemleri elde edilmiş pek çok yeni sonuç da ortaya konulmuştur (Yuan ve Wang, 2016; He ve ark., 2017; He, 2019b). Zaman içinde yapılan bu çalışmalardaki sonuçların split kuaterniyon matris denklemlerine genelleştirmeleri söz konusu olmuştur. (Liu ve Zhang, 2019) çalışmalarında;

$$AX^* - XB = CY + D, X - AX^*B = CY + D$$

şeklindeki split kuaterniyon matris denklemlerinin çözümlerinin var olması için gerek ve yeter şartı elde etmişlerdir. (Yuan ve ark., 2017) çalışmalarında;

$$AXB + CXD = E$$

şeklindeki split kuaterniyon matris denklemlerini farklı gösterimler kullanarak ele almışlardır. Bahsi geçen bu çalışmaya dayanarak (Zhang ve ark., 2015; Zhang ve ark., 2016b) ile (Yuan ve ark., 2017)'in geliştirdikleri metotlardan yola çıkıp

$$(AXB, CXD) = (E, F) \tag{5.1}$$

şeklindeki split kuaterniyon matris denkleminin η -hermityen çözümlerinin genelleştirilmiş Moore-Penrose ters, Kronecker çarpım, vektörel işlemler, split kuaterniyon matrislerinin reel matris temsilleri kullanarak bulunması amaçlanmıştır (Li ve ark., 2021).

Bu problem aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Problem 5.1. Verilen $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s), B \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s), C \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s), D \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s), E \in M_{m \times s}(\mathbb{Q}_s)$, ve $F \in M_{m \times s}(\mathbb{Q}_s)$ için (5.1) denklemini sağlayan $X \in M_n(\eta\mathbb{Q}_s)$ matrislerini bulunuz.

Bundan sonra problemin çözüm kümesini H_E ile gösterelim. Şimdi ise H_E 'nin boştan farklı bir küme olması için gerek ve yeter şart araştırılacaktır. Bu çalışmada; öncelikle, split kuaterniyonların reel temsilleri ve $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s), X \in M_n(\eta\mathbb{Q}_s)$ ve $B \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s)$ olmak üzere $vec(AXB)$ yapıları ele alınmıştır. Ardından, problemin çözüm formülleri reel matrislerini kullanarak elde edilmiştir (Li ve ark., 2021).

5.1. Split Kuaterniyon Matrislerin Reel Matris Temsilleri ve $vec(AXB)$ 'nin Yapısı

Tanım 5.1.1. (Li ve ark., 2021) Her $A = [a_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$ matrisi için Frobenius normu ise

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^n \|a_{rs}\|^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 5.1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 + e_1 & e_3 \\ e_2 + e_3 & e_1 + 2e_3 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisi verilsin.

$$\|a_{11}\| = \sqrt{|1 + 1|} = \sqrt{2},$$

$$\|a_{12}\| = \sqrt{|-1|} = \sqrt{1},$$

$$\|a_{21}\| = \sqrt{|1 - 1|} = 0,$$

$$\|a_{22}\| = \sqrt{|1 - 4|} = \sqrt{3}$$

olarak bulunur. O halde A split kuaterniyon matrisinin Frobenius normu

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sqrt{\sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \|a_{rs}\|^2} \\ &= \sqrt{2 + 1 + 0 + 3} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Tanım 5.1.2. (Li ve ark., 2021) Her $A = [a_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$, $B \in M_{p \times q}(\mathbb{Q}_s)$ için A ve B split kuaterniyon matrislerinin kronecker çarpımı

$$A * B = [a_{rs}B] \in M_{mp \times nq}(\mathbb{Q}_s)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 5.1.2.

$$A = \begin{bmatrix} e_1 & e_3 \\ e_2 + e_3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisleri verilsin.

$$\begin{aligned}a_{11}B &= e_1[e_2 \ e_3] = [e_1e_2 \ e_1e_3] \\ &= [e_3 \ -e_2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{12}B &= e_3[e_2 \ e_3] = [e_3e_2 \ e_3^2] \\ &= [e_1 \ 1],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{21}B &= (e_2 + e_3)[e_2 \ e_3] \\ &= [(e_2 + e_3)e_2 \ (e_2 + e_3)e_3] \\ &= [1 + e_1 \ -e_1 + 1],\end{aligned}$$

$$a_{22}B = 1[e_2 \ e_3] = [e_2 \ e_3]$$

olduğu görülür. Buradan A ve B matrislerinin kronecker çarpımı

$$A * B = \begin{bmatrix} e_3 & -e_2 & e_3 & 1 \\ 1 + e_1 & 1 - e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Önerme 5.1.1. (Li ve ark., 2021) A, B, C, D, E, F, G, H birer uygun boyutta split kuaterniyon matrisleri olmak üzere ve $k \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$1) (kA) * C = A * (kC) = k(A * C),$$

$$2) [A, B] * C = [A * C, B * C],$$

$$3) D * [A, B] = [D * A, D * B],$$

$$4) \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} * G = \begin{bmatrix} E * G \\ F * G \end{bmatrix},$$

$$5) H * \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H * E \\ H * F \end{bmatrix}.$$

Tanım 5.1.3. (Li ve ark., 2021) Her $A = [a_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$ için $s = 1, 2, \dots, n$ için

$$a_s = (a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ms})$$

olmak üzere

$$Vec(A) = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

şeklinde tanımlanan split kuaterniyon vektörüne A split kuaterniyon matrisinin vektör yapısı adı verilir.

Tanım 5.1.4. (Li ve ark., 2021) Her $A = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$ matrisi için

$$\Psi_A = [A_0 \ A_1 \ A_2 \ A_3]$$

olarak tanımlanır.

Tanım 5.1.5. (Li ve ark., 2021) Her $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$ split kuaterniyon matrisinin sağ reel blok matris temsili

$$A^R = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & -A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \in M_{4m \times 4n}(\mathbb{R})$$

eşitliği ile tanımlanır.

Sonuç. 5.1.1. (Li ve ark., 2021) Her $B = B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$ ve $C = C_0 + \sum_{i=1}^3 C_i e_i \in M_{n \times o}(\mathbb{Q}_s)$ için

$$\Psi_{BC} = [B_0 \ B_1 \ B_2 \ B_3] \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ -C_1 & C_0 & -C_3 & C_2 \\ C_2 & -C_3 & C_0 & -C_1 \\ C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \end{bmatrix} = \Psi_B C^R$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 5.1.1. (Li ve ark., 2021) Her $\lambda \in \mathbb{R}$, $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$, $C \in M_{n \times t}(\mathbb{Q}_s)$ için aşağıdakiler sağlanır:

- 1) $A = B \Leftrightarrow A^R = B^R$, $A = B \Leftrightarrow \Psi_A = \Psi_B$,
- 2) $(A + B)^R = A^R + B^R$, $(\lambda A)^R = \lambda A^R$, $\Psi_{A+B} = \Psi_A + \Psi_B$, $\Psi_{\lambda A} = \lambda \Psi_A$,
- 3) $(BC)^R = B^R C^R$,
- 4) $\|A\|^2 \geq iz(A^* A)$,
- 5) $(A^*)^R \neq (A^R)^*$.

İspat: 1), 2), 4), 5) 'in ispatları kolayca yapılabilir. Burada yalnızca 3)' ün ispatı verilecektir.

3)

$$(BC)^R = \begin{bmatrix} n_0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ -n_1 & n_2 & -n_3 & n_2 \\ n_2 & -n_3 & n_0 & -n_1 \\ n_3 & n_2 & n_1 & n_0 \end{bmatrix}$$

olarak gösterilsin. Burada doğrudan hesaplama ile

$$n_1 = B_0 C_0 - B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3,$$

$$n_2 = B_0 C_0 + B_1 C_0 - B_2 C_3 + B_3 C_2,$$

$$n_3 = B_0 C_2 - B_1 C_3 + B_2 C_0 + B_3 C_0,$$

$$n_4 = B_0 C_3 + B_1 C_2 - B_2 C_1 + B_3 C_0$$

olduğu görülür.

Öte yandan,

$$\begin{aligned}
 B^R C^R &= \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & B_0 & -B_3 & B_2 \\ B_2 & -B_3 & B_0 & -B_1 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ -C_1 & C_0 & -C_3 & C_2 \\ C_2 & -C_3 & C_0 & -C_1 \\ C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= B_0 C_0 - B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3, \\
 m_{12} &= B_0 C_1 + B_1 C_0 - B_2 C_3 + B_3 C_2, \\
 m_{13} &= B_0 C_2 - B_1 C_3 + B_2 C_0 + B_3 C_1, \\
 m_{14} &= B_0 C_3 + B_1 C_2 - B_2 C_1 + B_3 C_0, \\
 m_{21} &= -B_1 C_0 - B_0 C_1 - B_3 C_2 + B_2 C_3, \\
 m_{22} &= -B_1 C_1 + B_0 C_0 + B_3 C_3 + B_2 C_2, \\
 m_{23} &= -B_1 C_2 - B_0 C_3 - B_3 C_0 + B_2 C_1, \\
 m_{24} &= -B_1 C_3 + B_0 C_2 + B_3 C_1 + B_2 C_0, \\
 m_{31} &= B_2 C_0 + B_3 C_1 + B_0 C_2 - B_1 C_3, \\
 m_{32} &= B_2 C_1 - B_3 C_0 - B_0 C_3 - B_1 C_2, \\
 m_{33} &= B_2 C_2 + B_3 C_3 + B_0 C_0 - B_1 C_1, \\
 m_{34} &= B_2 C_3 - B_3 C_2 - B_0 C_1 - B_1 C_0, \\
 m_{41} &= B_3 C_0 - B_2 C_1 + B_1 C_2 + B_0 C_3, \\
 m_{42} &= B_3 C_1 + B_2 C_0 - B_1 C_3 + B_0 C_2, \\
 m_{43} &= B_3 C_2 - B_2 C_3 + B_1 C_0 + B_0 C_1, \\
 m_{44} &= B_3 C_3 + B_2 C_2 - B_1 C_1 + B_0 C_0.
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan her iki matris kıyaslandığında

$$(BC)^R = B^R C^R$$

olduğu görülür.

Uyarı 5.1.1. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), B \in M_{n \times s}(\mathbb{C})$ ve $C \in M_{s \times t}(\mathbb{C})$ için,

$$vec(ABC) = (C^T * A)vec(B) \quad (5.1.1)$$

iyi bilinen bir eşitliktir. Fakat; split kuaterniyon çarpımının değişmeli olmaması sebebiyle (5.1.1) eşitliği split kuaterniyonlar üzerinde sağlanmaz. Bu kısımda $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$, $B \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s), C \in M_{s \times t}(\mathbb{Q}_s)$ matrisleri için $vec(\Psi_{ABC})$ 'nın yapısına çalışılmıştır. Reel kuaterniyon matrisleri için benzer metot ve sonuçlar ise (Yuan ve Wang, 2016) çalışmasında mevcuttur.

Teorem 5.1.3. (Li ve ark., 2021) $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$, $B = B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i e_i \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s)$ ve $C = C_0 + \sum_{i=1}^3 C_i e_i \in M_{s \times t}(\mathbb{Q}_s)$ verilsin.

$$W_{ns} = \begin{bmatrix} I_{ns} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{ns} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ns} \\ I_{ns} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{ns} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ns} \\ I_{ns} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{ns} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ns} \\ I_{ns} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{ns} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ns} \end{bmatrix} \in M_{16ns \times 4ns}(\mathbb{R})$$

olmak üzere

$$vec(\Psi_{ABC}) = [(C^R)^T * A_0, ((e_1 C)^R)^T * A_1, ((e_2 C)^R)^T * A_2, ((e_3 C)^R)^T * A_3] W_{ns} vec(\Psi_B) \quad (5.1.2)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 5.1.6. (Li ve ark., 2021) Her $A = [a_{rs}] \in M_n(\mathbb{Q}_s)$ matrisi için

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, \sqrt{2}a_{21}, \dots, \sqrt{2}a_{n1}), \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{22}, \sqrt{2}a_{32}, \dots, \sqrt{2}a_{n2}), \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n-1} &= (a_{(n-1)(n-1)}, \sqrt{2}a_{n(n-1)}), \\ \mathbf{a}_n &= (a_{nn}) \end{aligned}$$

olmak üzere $vec_S(A)$ split kuaterniyon vektörü

$$vec_S(A) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n)^T \in M_{\frac{n(n+1)}{2} \times 1}(\mathbb{Q}_s) \quad (5.1.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.1.7. (Li ve ark., 2021) Her $B = [b_{rs}] \in M_n(\mathbb{Q}_s)$ matrisi için, $n \geq 2$ ve

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (b_{21}, b_{31}, \dots, b_{n1}), \\ \mathbf{b}_2 &= (b_{32}, b_{42}, \dots, b_{n2}), \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_{n-2} &= (b_{(n-1)(n-2)}, b_{n(n-2)}), \\ \mathbf{b}_{n-1} &= (b_{n(n-1)}) \end{aligned}$$

olmak üzere $vec_A(B)$ split kuaterniyon vektörü

$$vec_A(B) = \sqrt{2}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-2}, \mathbf{b}_{n-1})^T \in M_{\frac{n(n-1)}{2} \times 1}(\mathbb{Q}_s) \quad (5.1.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 5.1.1. (Yuan ve ark., 2017) $X \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

1)

$$X \in M_n(\mathbb{SR}) \Leftrightarrow vec(X) = K_S vec_S(X), \quad (5.1.5)$$

2)

$$X \in M_n(\mathbb{ASR}) \Leftrightarrow vec(X) = K_A vec_A(X). \quad (5.1.6)$$

Burada $K_S \in M_{n^2 \times \frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{R})$ matrisi

$$K_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} & e_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{2}e_2 & e_3 & \cdots & e_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sqrt{2}e_{n-1} & e_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e_1 & 0 & 0 & \cdots & e_2 & \cdots & 0 & e_{n-1} & \sqrt{2}e_n \end{bmatrix}$$

ve $K_A \in M_{n^2 \times \frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R})$ matrisi

$$K_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e_2 & e_3 & \cdots & e_{n-1} & e_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_3 & \cdots & e_{n-1} & e_n & \cdots & 0 \\ 0 & -e_1 & \cdots & 0 & 0 & -e_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -e_1 & 0 & 0 & \cdots & -e_2 & 0 & \cdots & e_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -e_1 & 0 & \cdots & 0 & -e_2 & \cdots & -e_{n-1} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir.

Yardımcı teorem 5.1.1. ile aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.1.3. (Yuan ve Wang, 2016) Her $X = X_0 + \sum_{i=1}^3 X_i e_i \in M_n(\eta\mathbb{Q}_s)$ için $\eta = \{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere

$$vec(\Psi_X) = L_{\eta vec_{\eta}(\Psi_X)}, \quad \eta \in \{e_1, e_2, e_3\} \quad (5.1.7)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$L_{e_1} = \begin{bmatrix} K_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_S \end{bmatrix}, \quad vec_{e_1}(\Psi_X) = \begin{bmatrix} vec_S(X_0) \\ vec_A(X_1) \\ vec_S(X_2) \\ vec_S(X_3) \end{bmatrix},$$

$$L_{e_2} = \begin{bmatrix} K_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_S \end{bmatrix}, \quad vec_{e_2}(\Psi_X) = \begin{bmatrix} vec_S(X_0) \\ vec_S(X_1) \\ vec_K(X_2) \\ vec_S(X_3) \end{bmatrix},$$

$$L_{e_3} = \begin{bmatrix} K_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_A \end{bmatrix}, \quad vec_{e_3}(\Psi_X) = \begin{bmatrix} vec_S(X_0) \\ vec_S(X_1) \\ vec_S(X_2) \\ vec_K(X_3) \end{bmatrix},$$

olarak ifade edilir.

İspat: $X = X_0 + \sum_{i=1}^3 X_i e_i \in M_n(\mathbb{Q}_s)$ olsun. Sonuç 3.4.1, Sonuç 3.4.2 ve Sonuç 3.4.3 e göre

$$\eta \in e_1 \text{ için } X \in M_n(\eta\mathbb{Q}_s) \Leftrightarrow X_0^T = X_0, X_1^T = -X_1, X_2^T = X_2, X_3^T = X_3$$

$$\eta \in e_2 \text{ için } X \in M_n(\eta\mathbb{Q}_s) \Leftrightarrow X_0^T = X_0, X_1^T = X_1, X_2^T = -X_2, X_3^T = X_3,$$

$$\eta \in e_3 \text{ için } X \in M_n(\eta\mathbb{Q}_s) \Leftrightarrow X_0^T = X_0, X_1^T = X_1, X_2^T = X_2, X_3^T = -X_3$$

olduğu görülür. (5.1.5) ve (5.1.6) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \text{vec}(\Psi_X) &= \begin{bmatrix} \text{vec}(X_0) \\ \text{vec}(X_1) \\ \text{vec}(X_2) \\ \text{vec}(X_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_S \text{vec}_S(X_0) \\ K_A \text{vec}_A(X_1) \\ K_S \text{vec}_S(X_2) \\ K_S \text{vec}_S(X_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}_S(X_0) \\ \text{vec}_A(X_1) \\ \text{vec}_S(X_2) \\ \text{vec}_S(X_3) \end{bmatrix} = L_{e_1 \text{vec}_{e_1}(\Psi_X)} \end{aligned}$$

elde edilir. $\eta = \{e_2, e_3\}$ için de benzer şekilde elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.4. (Li ve ark., 2021) $A = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$, $X = X_0 + \sum_{i=1}^3 X_i e_i \in M_n(\eta \mathbb{Q}_s)$ ve $B = B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\text{vec}(\Psi_{AXB}) = [(B^R)^T * A_0, (e_1 B^R)^T * A_1, (e_2 B^R)^T * A_2, (e_3 B^R)^T * A_3] W_{n^2} L_{n \text{vec}_n(\Psi_X)}.$$

5.2. Split Kuaterniyon Matris Denkleminin η -Hermityen Çözümü

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s), \quad B = B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i e_i \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s), \\ C &= C_0 + \sum_{i=1}^3 C_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s), \quad D = D_0 + \sum_{i=1}^3 D_i e_i \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s), \\ E &= E_0 + \sum_{i=1}^3 E_i e_i \in M_{m \times s}(\mathbb{Q}_s), \quad F = F_0 + \sum_{i=1}^3 F_i e_i \in M_{m \times s}(\mathbb{Q}_s). \end{aligned}$$

olarak verilsin.

$$P_1 = [(B^R)^T * A_0, ((e_1 B)^R)^T * A_1, ((e_2 B)^R)^T * A_2, ((e_3 B)^R)^T * A_3] W_{n^2} L_\eta, \quad (5.2.1)$$

$$P_2 = [(D^R)^T \otimes C_0, ((e_1 D)^R)^T \otimes C_1, ((e_2 D)^R)^T \otimes C_2, ((e_3 D)^R)^T \otimes C_3] W_{n^2} L_\eta, \quad (5.2.2)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \text{vec}(\Psi_E) \\ \text{vec}(\Psi_F) \end{bmatrix} \quad (5.2.3)$$

olsun. Çözüm için Teorem 4.2.1 'i kullanmak gereklidir.

Teorem 5.2.1. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s), B \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s), C \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s), D \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s), E \in M_{m \times s}(\mathbb{Q}_s)$, ve $F \in M_{m \times s}(\mathbb{Q}_s)$ olsun. Problemin $X \in H_E$ çözümü olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$PP^+e = e \quad (5.2.4)$$

olmasıdır. Eğer (5.2.4) koşulu sağlanırsa, bu durumda

$$H_E = \{X | \text{vec}(\Psi_X) = L_\eta[P^+e + (I_{2n^2+n} - P^+P)y]\}, \quad (5.2.5)$$

olup y ise uygun boyutta keyfi bir vektördür. Ayrıca, eğer (5.2.4) sağlanırsa (5.1) split kuaterniyon matris denkleminin $X_H \in H_E$ tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\text{rank}(P) = 2n^2 + n. \quad (5.2.6)$$

olmasıdır. X_H ise

$$\text{vec}(\Psi_{X_H}) = L_\eta P^+e. \quad (5.2.7)$$

olacak şekilde tanımlıdır (Li ve ark., 2021).

İspat: Teorem 5.1.1. 2) koşulu ve Teorem 3.1.4' ü göz önüne alınırsa

$$(AXB, CXD) = (E, F)$$

eşitliğini

$$\text{vec}(\Psi_{AXB}) = \text{vec}(\Psi_E),$$

$$\text{vec}(\Psi_{CXD}) = \text{vec}(\Psi_F)$$

eşitliklerine karşılık gelir. Buradan Teorem 5.1.4 yardımıyla

$$[(B^R)^T * A_0, ((e_1 B)^R)^T * A_1, ((e_2 B)^R)^T * A_2, ((e_3 B)^R)^T * A_3] W_{n^2} L_\eta \text{vec}_\eta(\Psi_X) = \text{vec}(\Psi_E),$$

$$[(D^R)^T * C_0, ((e_1 D)^R)^T * C_1, ((e_2 D)^R)^T * C_2, ((e_3 D)^R)^T * C_3] W_{n^2} L_\eta \text{vec}_\eta(\Psi_X) = \text{vec}(\Psi_F)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik

$$\begin{bmatrix} [(B^R)^T * A_0, ((e_1 B)^R)^T * A_1, ((e_2 B)^R)^T * A_2, ((e_3 B)^R)^T * A_3] W_{n^2} L_\eta \\ [(D^R)^T * C_0, ((e_1 D)^R)^T * C_1, ((e_2 D)^R)^T * C_2, ((e_3 D)^R)^T * C_3] W_{n^2} L_\eta \end{bmatrix} \text{vec}_\eta(\Psi_X) = \begin{bmatrix} \text{vec}(\Psi_E) \\ \text{vec}(\Psi_F) \end{bmatrix}.$$

olarak yazılabilir. O halde

$$Pvec_{\eta}(\Psi_X) = e$$

olduğu görülür. Yardımcı Teorem 5.2.1. gereğince, problemin $X \in H_E$ çözümü olabilmesi için gerek ve yeter şart (5.2.4)'ün sağlanmasıdır. Bu koşullar sağlanırsa

$$vec_{\eta}(\Psi_X) = P^+e + (I_{2n^2+n} - P^+P)y,$$

olur ve (5.1.7) eşitliğine göre

$$vec(\Psi_X) = L_{\eta}[P^+e + (I_{2n^2+n} - P^+P)y],$$

olarak bulunur. Burada y uygun boyutta bir keyfi vektördür. Bununla birlikte (5.2.4) sağlanırsa problemin $X \in H_E$ çözümü olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$P^+P = I_{2n^2+n}$$

yani (5.2.6)'ın sağlanmasıdır. Bu durumda

$$P^+P = I_{2n^2+n}$$

eşitliği

$$vec(\Psi_X) = L_{\eta}[P^+e + (I_{2n^2+n} - P^+P)y]$$

eşitliğinde yerine yazıldığında

$$vec(\Psi_X) = L_{\eta}(P^+e)$$

elde edilir.

Özel olarak A, B, C, D, E bilinen matrisleri küçük boyutlarda olduğu zaman; (Yuan ve ark., 2008) ve (Zhang ve ark., 2016b) çalışmalarında da bahsi geçtiği üzere Teorem 5.2.1. ile (5.1) split kuaterniyon matris denklemini çözmek uygundur.

$$P^+ = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^+$$

blok matrisin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersini bulmak için (Magnus, 1983) deki sonuçlar kullanılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$R = (I_{2n^2+n} - P_1^+P_1)P_2^T,$$

$$Z = (I_{4ms} + (I_{4ms} - R^+R)P_2P_1^+P_1^+P_2^T(I_{4ms} - R^+R))^{-1},$$

$$H = R^+ + (I_{4ms} - R^+R)ZP_2P_1^+P_1^+P_2^T(I_{2n^2+n} - P_2^TR^+),$$

$$S_{11} = I_{4ms} - P_1P_1^+ + P_1^+P_2^TZ(I_{4ms} - R^+R)P_2P_1^+,$$

$$S_{12} = -P_1^{+T} P_2^T (I_{4ms} - R^+ R) Z,$$

$$S_{22} = (I_{4ms} - R^+ R) Z.$$

Buradan (Magnus, 1983) çalışmasındaki sonuçlar yardımıyla

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^+ = (P_1^+ - H^T P_2 P_1^+, H^T), \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = P_1^+ P_1 + R^+ R, \quad (5.2.8)$$

$$I_{8ms} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

elde edilir.

Teorem 5.2.2. (Li ve ark., 2021) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s), B \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s), C \in M_{m \times n}(\mathbb{Q}_s), D \in M_{n \times s}(\mathbb{Q}_s), E \in M_{m \times s}(\mathbb{Q}_s)$, ve $F \in M_{m \times s}(\mathbb{Q}_s)$ olsun. Bununla birlikte P_1, P_2 ve e ise denklem (5.2.1) da verildiği şekilde olsun. Problemin $X \in H_E$ çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} e = 0 \quad (5.2.10)$$

olmasıdır. Bu durumda

$$H_E = \{X | \text{vec}(\Psi_X) = L_\eta[(P_1^+ - H^+ P_2 P_1^+, H^T)e + (I_{2n^2+n} - P_1^+ P_1 - R^+ R)y]\} \quad (5.2.11)$$

olup y ise uygun boyutta keyfi bir vektördür. Ayrıca eğer (5.2.4) sağlanırsa, (5.1) denkleminin tek $X_H \in H_E$ çözümü olması için gerek ve yeter şart denklem (5.2.6) in sağlanmasıdır. Bu durumda

$$\text{vec}(\Psi_{X_H}) = L_\eta(P_1^+ - H^+ P_2 P_1^+, H^T)e \quad (5.2.12)$$

olduğu görülür.

İspat: Teorem 5.2.1. 'de verilen (5.2.4) denklemi; $X \in H_E$ olması için gerek ve yeter şartı ifade eder. Denklem (5.2.4) aşağıdaki şekilde

$$\left(I_{8ms} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^+ \right) e = 0$$

yazılabilir. (5.2.9) denklemini yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} e = 0$$

olduğu görülür. O halde Teorem 5.2.1.' ye göre (5.2.10) ve (5.2.9) denklemleri birbirine denk olduğu için problemin $X \in H_E$ çözümü olması için gerek ve yeter şart (5.2.10)'un sağlanmasıdır. (5.2.8) denklemi ve Teorem 5.2.1. den (5.2.5) denkleminin sağlanması ile (5.2.11) denkleminin karşılık geldiği görülür. Ayrıca eğer (5.2.6) ve (5.2.10) birlikte sağlanırsa (5.2.7) denklemi (5.2.12)'deki şekilde yazılabilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, öncelikle split kuaterniyonların cebirsel yapısı açıklanmıştır. $M_{m \times n}(\mathbb{Q}_S)$; $m \times n$ tipinde split kuaterniyon matrislerinin kümesini göstermek üzere bu kümenin cebirsel özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca $m \times n$ tipindeki split kuaterniyon matrislerinin yeni bir $2m \times 2n$ tipinde reel blok matris temsili tanımlanmıştır. Bu yeni reel blok matris temsili kullanılarak $Ax = b$ şeklindeki split kuaterniyon denklem sistemlerinin çözümleri incelenmiştir. Ayrıca A, B, C, D, E, F birer uygun boyutta split kuaterniyon matris olmak üzere

$$(AXB, CXD) = (E, F)$$

şeklinde ifade edilen split kuaterniyon matris denklemlerinin $\eta = e_1, e_2, e_3$ için

$$x \in M_n(\eta\mathbb{Q}_S)$$

çözümleri incelenmiştir. Farklı türden split kuaterniyon matris denklemlerinin çözümleri de araştırılmaya açıktır. Bu çözümler için yeni tanımlanan reel blok reel matris temsili kullanılması önerilebilir. Ayrıca kompleks blok matris temsilleri yardımıyla ele alınan split kuaterniyon matrislerinin denklemlerini incelemek de araştırmacılara önerilebilir.

7. KAYNAKLAR

- Alagöz, Y., Oral, K. H. and Yüce, S., 2012, Split quaternion matrices, *Miskolc Mathematical Notes*, 13 (2), 223–232.
- Ben-Israel, A. and Greville, T. N. E., 2003, *Generalized inverses theory and applications*, Springer Science & Business Media.
- Cheong Took, C. and Mandic, D. P., 2011, Augmented second-order statistics of quaternion random signals, *Signal Processing*, 91 (2), 214–224.
- Cheong Took, C., Mandic, D. P. and Zhang, F., 2011, On the unitary diagonalisation of a special class of quaternion matrices, *Applied Mathematics Letters*, 24 (11), 1806–1809.
- Cockle, J., 1849, On Systems of Algebra Involving More than One Imaginary, *Philosophical Magazine*, 35: 434–435.
- Erdoğan, M. and Özdemir, M., 2013, On Complex Split Quaternion Matrices, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23, 625–638.
- Erdoğan, M. and Özdemir, M., 2013, On eigenvalues of split quaternion matrices, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23 (3), 615–623.
- Erdoğan, M. and Özdemir, M., 2015, Two-sided linear split quaternionic equations with n unknowns, *Linear and Multilinear Algebra*, 63 (1), 97–106.
- Farenick, D. R. and Pidkowich, B. A. F., 2003, The spectral theorem in quaternions, *Linear Algebra and Its Applications*, 371, 75–102.
- Hamilton S.W.R., 1866, *Elements of Ouaternions*, London: Longmans, Green, & Company.
- He, Z. H., 2019, Some quaternion matrix equations involving ϕ -hermicity, *Filomat*, 33 (16), 5097–5112.
- He, Z. H., Wang, Q. W. and Zhang, Y., 2017, Simultaneous decomposition of quaternion matrices involving η -hermicity with applications, *Applied Mathematics and Computation*, 298, 13–35.
- He, Z. H., 2021, Some new results on a system of Sylvester-type quaternion matrix equations, *Linear and Multilinear Algebra*, 69(16), 3069–3091.
- Kula, L., 2003, Bölünmüş kuaterniyonlar ve geometrik uygulamalar, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 116.
- Kula, L. And Yaylı, Y., 2007, Split quaternions and rotations in semi Euclidean space E_2^4 , *Journal of the Korean Mathematical Society*, 44, 1313–1327.
- Li, M. Z., Yuan, S. F. and Jiang, H., 2021, Direct methods on η -Hermitian solutions of

- the split quaternion matrix equation $(AXB, CXD) = (E, F)$, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, <https://doi.org/10.1002/mma.7273>.
- Liao, A. N. P., Bai, Z. Z. and Lei, Y., 2005, Best approximate solution of matrix equation $AXB + CYD = E$, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27 (3), 675–688.
- Liu, X. and Zhang, Y., 2019, Consistency of split quaternion matrix equations $AX^* - XB = CY + D$ and $X - AX^*B = CY + D$, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 29 (4), 1–20.
- Magnus, J. R., 1983, L-structured matrices and linear matrix equations, *Linear and Multilinear Algebra*, 14 (1), 67–88.
- Mansour, A., 2010, Solvability of $AXB - CXD = E$ in the operators algebra $B(H)$, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 31 (3), 257–261.
- Meng, C., Hu, X. and Zhang, L., 2005, The skew-symmetric orthogonal solutions of the matrix equation $AX = B$, *Linear Algebra and Its Applications*, 402, 303–318.
- Özdemir, M. and Ergin, A. A., 2005, Some geometric applications of split quaternions, *Int. Conf. Jonhjean Math. Soc*, 16, 108–115.
- Özdemir, M. and Ergin, A. A., 2006, Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space, *Journal of Geometry and Physics*, 56 (2), 322–336.
- Shim, S. Y. and Chen, Y., 2003, Least squares solution of matrix equation $AXB^* + CYD^* = E^*$, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 24 (3), 802–808.
- Song, C., Chen, G. and Liu, Q., 2012, Explicit solutions to the quaternion matrix equations $X - AXF = C$ and $X - A\tilde{X}F = C$, *International Journal of Computer Mathematics*, 89 (7), 890–900.
- Şimşek, S., Sarduvan, M. and Özdemir, H., 2017, Centrohermitian and Skew-Centrohermitian Solutions to the Minimum Residual and Matrix Nearness Problems of the Quaternion Matrix Equation $(AXB, DXE) = (C, F)$, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27(3), 2201–2214.
- Wang, G. and Xue, R., 2019, Comments on “The Quaternion LMS Algorithm for Adaptive Filtering of Hypercomplex Processes.”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 67 (7), 1957–1958.
- Wang, M., Cheng, X. and Wei, M., 2007, Iterative algorithms for solving the matrix equation $AXB + CX^TD = E$, *Applied Mathematics and Computation*, 187 (2), 622–629.
- Wu, A. G., Zhu, F., Duan, G. R. and Zhang, Y., 2008, Solving the generalized Sylvester matrix equation $AV + BW = EVF$ via a Kronecker map, *Applied Mathematics Letters*, 21 (10), 1069–1073.

- Yu, C., Liu, X. and Zhang, Y., 2020, The generalized quaternion matrix equation $AXB + CX^*D = E$, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43 (15), 8506–8517.
- Yuan, S.F., Wang, Q.W., Yu, Y.B. and Tian, Y., 2017, On Hermitian Solutions of the Split Quaternion Matrix Equation $AXB + CXD = E$, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27, 3235–3252.
- Yuan, S. F. and Wang, Q. W., 2016, L-structured quaternion matrices and quaternion linear matrix equations, *Linear and Multilinear Algebra*, 64 (2), 321–339.
- Yuan, S. F., Wang, Q. W. and Duan, X. F., 2013, On solutions of the quaternion matrix equation $AX = B$ and their applications in color image restoration, *Applied Mathematics and Computation*, 221, 10–20.
- Yuan, S. and Liao, A., 2014, Least squares hermitian solution of the complex matrix equation $AXB + CXD = E$ with the least norm, *Journal of the Franklin Institute*, 351 (11), 4978–4997.
- Yuan, S., Liao, A. and Lei, Y., 2008, Least squares hermitian solution of the matrix equation $(AXB, CXD) = (E, F)$ with the least norm over the skew field of quaternions, *Mathematical and Computer Modelling*, 48 (1–2), 91–100.
- Zhang, F., Mu, W., Li, Y. and Zhao, J., 2016, Special least squares solutions of the quaternion matrix equation $AXB + CXD = E$, *Computers and Mathematics with Applications*, 72 (5), 1426–1435.
- Zhang, F., Mu, W., Li, Y. and Zhao, J., 2016, Special least squares solutions of the quaternion matrix equation $AXB + CXD = E$, *Computers and Mathematics with Applications*, 72 (5), 1426–1435.
- Zhang, F., Wei, M., Li, Y. and Zhao, J., 2015, Special least squares solutions of the quaternion matrix equation $AX = B$ with applications, *Applied Mathematics and Computation*, 270, 425–433.
- Zhang, F., 1997, Quaternions and matrices of quaternions, *Linear Algebra and Its Applications*, 251, 21–57.