



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER UZAYLAR
VE
MODÜLER UZAYLAR ÜZERİNDE TOPOLOJİLER

Firdevs HAŞİMOĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Eylül -2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Firdevs HAŞİMOĞLU tarafından hazırlanan “**MODÜLER UZAYLAR VE MODÜLER UZAYLAR ÜZERİNDE TOPOLOJİLER**” adlı tez çalışması 25/09/2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Özgün GÜRMEN ALANSAL

Danışman

Doç. Dr. Sedat PAK

Üye

Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

İmza

.....

.....

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Şerife Yurdağül KUMCU
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

Firdevs HAŞİMOĞLU

12/09/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODÜLER UZAYLAR VE MODÜLER UZAYLAR ÜZERİNDE TOPOLOJİLER

Firdevs HAŞİMOĞLU

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sedat PAK

2023, 36 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Sedat PAK

Dr. Öğr. Üyesi Özgün GÜRMEN ALANSAL

Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Tezimiz dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde metrik uzaylar ve modüler metrik ile ilgili genel bilgi verilerek matematikteki tarihsel gelişimi verilmiştir. İkinci bölümde metrik, metrik uzay, metrik uzayda yakınsaklık, metrik uzayda yuvarlar gibi temel tanımlar verilmiş. Üçüncü bölümde modüler ve modüler uzaylar tanıtılarak bazı önemli teoremler incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise metrik yakınsaklık ve metrik topolojisi ile modüler yakınsaklık ve modüler topoloji araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Metrik Uzay, Metrik Yakınsama, Modüler Metrik, Modüler Yakınsama, Topolojik Uzay.

ABSTRACT

MS THESIS

MODULAR SPACES AND TOPOLOGIES ON MODULAR SPACES

Firdevs HAŞİMOĞLU

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE IN MATHEMATICS**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Sedat PAK

2023, 36 Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Sedat PAK

Asst. Prof. Dr. Özgün GÜRMEN ALANSAL

Assoc. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Our thesis consists of four chapters. In the first chapter, general information about metric spaces and modular metric is given and its historical development in mathematics is given. In the second chapter, basic definitions such as metric, metric space, convergence in metric space, rounds in metric space are given. In the third section, modular and modular spaces are introduced and some important theorems are analyzed. In the fourth section, metric convergence and metric topology, modular convergence and modular topology are investigated.

Keywords: Metric Space, Metric Convergence, Modular Metric, Modular Convergence, Topological Space.

ÖNSÖZ

Modüler Uzaylar ve Modüler Uzaylar Üzerinde Topolojiler adlı tez çalışmam sürecinde bana rehberlik eden, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan hocam Sayın Doç. Dr. Sedat PAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan, beni destekleyen sevgili eşim Hasan HAŞİMOĞLU'na ve oğlum Burak'a en içten duygularla teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatür Özeti	1
1.2. Tezin Amacı	3
2. ÖN BİLGİLER.....	5
2.1. Metrik Uzay	5
2.2. Metrik Uzayda Yuvarlar	5
2.3. Metrik Uzayda yakınsaklık	6
2.4. Bir Kümenin Limit Noktaları, Kapanışı, Dışı ve İçi	6
3. MODÜLERLERİN SINIFLANDIRILMASI.....	8
3.1. Modülerler.....	9
3.2. Modüler Metrik	9
4. MODÜLER UZAYLARDA TOPOLOJİLER	14
4.1. Modüler Uzaylar	14
4.2. Metrik Yakınsaklık.....	15
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	32
Kaynaklar	34
ÖZGEÇMİŞ	36

SİMGELER VE KISALTMALAR

(X, d)	Metrik uzay
(X_σ, d)	Modüler metrik uzay
$\tau(d_\sigma^0)$	Metrik topoloji
$\tilde{A}$	A nın limit noktalarının kümesi
$(X, \mathcal{T})$	Topolojik uzay
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
$d_{\text{ış}}(A)$	A kümesinin dışı
A°	A kümesinin içi
A^c	A kümesinin tümleyeni
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\emptyset$	Boş küme
$[0, \infty]$	Genişletilmiş negatif olmayan reel sayılar
(X, d_σ^0)	Genişletilmiş pseudometrik uzayı
(X_σ^*, d_σ^0) ve (X_σ^*, d_σ^*)	Pseudometrik uzaylar
σ	Modüler
x°	Modüler uzayların merkezi
X_σ^*, X_σ^0 ve X_σ^{fin}	Modüler uzaylar
d_σ^0	Genişletilmiş metrik
$\tau(\sigma)$	Modüler topoloji

1. GİRİŞ

1.1. Literatür Özeti

Bilinen Euclid uzaylardan farklı uzaylara geçiş ilk olarak Fréchet'in herhangi bir X kümesi üzerinde metrik tanımlamasıyla oluşmuştur (Frechet, 1906). Bu uzaylara metrik uzay ismi daha sonra Hausdorff tarafından verilmiştir (Hausdorff, 1914). Metrik uzaylar teorisi bir kümenin herhangi iki noktası arasındaki mesafe kavramını inceler.

Sabit nokta teorisi ilk olarak 1912 yılında Brouwer tarafından ortaya konmuştur (Brouwer, 1912). Sabit nokta teorisi matematiğin temel konularından biri olup ekonomi, fizik, kimya, bilgisayar ve mühendislik gibi birçok bilim dalında geliştirilerek kullanılmaktadır. Sabit nokta teorisi matematikte özellikle tam metrik uzaylar ve normlu lineer uzaylarda uygulama alanına sahiptir.

Tam metrik uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları 1922'de Banach'ın Daralma Prensipleri ile başlar (Banach, 1922). Brouwer'ın teoreminde fonksiyonun sadece sabit noktasının varlığından söz edilirken Banach sabit nokta teoreminde fonksiyonun sabit noktasının varlığının yanı sıra onun nasıl bulunacağı ile ilgili bir yöntem de verilmektedir (Brouwer, 1912).

Modüler ise bir lineer uzay üzerindeki norm kavramının genişlemesidir. Metrik modüler kavramı Chistyakov tarafından ifade edilmiştir (Chistyakov, 2006). Modüler uzaylar, ilk olarak modüler metrik uzay kavramını ortaya koyan Chistyakov tarafından tanımlanmış ve kısaca modüler yakınsaklık, konveks modüler, eşdeğer metrikler, soyut konveks koni ve metrik yarı grup hakkında gösterimlerde bulunmuştur (Chistyakov, 2008). O zamandan beri modüler uzaylar yoğun bir şekilde araştırılmış ve üzerlerinde çeşitli topolojiler tanımlanmıştır. İlk modüler uzay teorisi 1950' de Nakano tarafından ortaya konmuştur (Nakano, 1950). Modüler uzaylar, temsil teorisi, topoloji ve fizik dahil olmak üzere matematiğin çeşitli alanlarında ortaya çıkan matematiksel yapılardır. Topolojide, modüler uzaylar genellikle süreklilik ve yakınsama gibi topolojik özelliklerin incelenmesine olanak tanıyan bir topoloji ile donatılmıştır. Modüler uzayların çalışılması, modüler operatörler gibi yeni matematiksel araçların geliştirilmesine de yol açmıştır. Bu

bağlamda, modüler uzaylardaki topolojiler, bu uzayların özelliklerinin ve çeşitli alanlardaki uygulamalarının anlaşılmasında önemli bir rol oynar.

Modüler uzaylarda en önemli topolojilerden biri, son yıllarda yoğun bir şekilde çalışılan modüler yakınsaklık topolojisi. Modüler yakınsaklık topolojisi, modüler uzaylarda tanımlanan ve uzayın modüler yapısıyla yakından ilişkili olan bir topolojidir. Bu topoloji, modüler uzaylarla yakından ilişkili olan bir fonksiyon uzayı sınıfı olan Orlicz uzayları bağlamında yoğun bir şekilde incelenmiştir. Özellikle, genel Orlicz uzayları çerçevesinde birlikte yakınsaklık ve modüler yakınsaklık sonuçları elde edilmiştir, bu da bize L_p -uzayları, interpolasyon uzayları, üstel uzaylar ve diğer birçok uzayı kapsama imkanı sağlamaktadır (Orlicz, 1988), (Mazur ve Orlicz, 1958).

Modüler uzaylardaki topolojilerin bir başka önemli yönü de sabit nokta teorisiyle olan ilişkileridir. Son yıllarda, sabit nokta teorisi modüler uzaylar bağlamında yoğun bir şekilde çalışılmış (Kirk ve Sims, 2001) ve modüler uzaylar üzerinde tanımlanmış eşlemelerin sabit noktalarının varlığı ve benzersizliği üzerine çeşitli sonuçlar elde edilmiştir (Khamis ve Kozłowski, 2015).

1.2. Tezin Amacı

Modüler topolojik uzaylar, topoloji, cebir ve geometri gibi temel matematiksel yapıları birleştiren önemli bir araştırma alanıdır. Bu alandaki çalışmalar, topolojik uzayları modüler cebir kullanarak incelemeyi amaçlar. Dolayısıyla modüler topolojik uzaylar:

1. Modüler Topolojik Uzay Nedir? Modüler topolojik uzaylar, özellikle homotopi teorisi ve cebirsel topoloji bağlamında incelenen bir yapıdır. Bu uzaylar, topolojik nesneleri ve bu nesneler arasındaki dönüşümleri cebirsel yöntemlerle analiz etmek amacıyla oluşturulan bir matematiksel çerçevedir. Temel amaç, topolojik uzayları modüler cebirlerle bağlantılı hale getirerek, bu uzaylar üzerindeki yapıları daha iyi anlamak ve sınıflandırmaktır.
2. Modüler Cebir Nedir? Modüler topolojik uzayların temelini oluşturan modüler cebir, aritmetiksel nesnelerin çözümleme ve sınıflandırılması için kullanılır. Modüler cebir, bir modül üzerinde işlem yapma yeteneğine odaklanır. Bu modül, genellikle bir halka veya vektör uzayıdır. Modüler cebir, grup teorisi ve halka teorisi gibi diğer matematiksel dallarla sık sık ilişkilidir.
3. Modüler Topolojik Uzayların Özellikleri:
 - Modüler topolojik uzaylar, homotopi teorisi ve homoloji teorisi gibi topolojik teorilerle ilişkilidir. Bu nedenle topolojik uzayların şekillerini ve dönüşümlerini daha iyi anlamak için kullanılırlar.
 - Bu uzaylar, topolojik uzayların modüler cebirlerini kullanarak belirli özelliklerini sınıflandırmak ve tanımlamak için kullanılır.
 - Modüler topolojik uzaylar, topolojik çözümlemelerde ve incelemelerde karmaşık yapıları basitleştirmek ve daha anlaşılır hale getirmek için kullanılır.
4. Uygulama Alanları:
 - Modüler topolojik uzaylar, karmaşık topolojik verilerin analizi, görüntü işleme, sinyal işleme ve biyoinformatik gibi birçok farklı uygulama alanında kullanılır.
 - Özellikle veri analizi ve desen tanıma gibi alanlarda, modüler topolojik uzaylar, verilerin topolojik özelliklerini daha iyi anlamak ve modellemek için kullanılır.

Modüler topolojik uzaylar, matematiksel araştırmaların yanı sıra çeşitli uygulama alanlarında da önemli bir rol oynar. Bu alandaki çalışmalar, topolojik nesnelerin daha iyi anlaşılmasına ve çeşitli disiplinlerde kullanılmasına yardımcı olur.



2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamız için gereken temel kavram ve bilgileri vereceğiz.

2.1. Metrik Uzay

Metrik uzaylar teorisi (Frechet, 1906) ve (Hausdorff, 1914) tarafından oluşturulmuştur. Temelinde, bir kümenin herhangi iki noktası arasındaki uzaklık kavramı vardır. Metrik uzay teorisinde, genellikle kümenin cebirsel yapısı herhangi bir rol oynamaz. Eğer söz konusu küme zengin bir cebirsel yapıya sahip ise, örneğin küme üzerinde doğrusal bir uzay, metrikler veya uzaklık fonksiyonları olabilir. normlar aracılığıyla tanımlanabilir. Özellikle, Banach uzayları teorisi (Banach, 1932) modern fonksiyonel uzaylarda temel öneme sahiptir. Kuratowski'nin gömme teoreminin (Kuratowski, 1966) herhangi bir metrik uzayını bir Banach uzayına alt uzayı olarak görülebileceğini göstermiştir. Banach uzay teorisinin birçok sonucu metrik doğrusal uzay teorisine genişletilmiştir (Rolewicz, 1985).

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için,

$$\text{M-1)} \quad d(x, y) \geq 0 \text{ ve } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\text{M-2)} \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$\text{M-3)} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde metrik ve (X, d) sıralı ikilisine metrik uzay denir (Megginson, 1998).

Burada M-2) M-3) şartı $d(x, x) = 0$ özelliği ile birlikte sağlanıyorsa metriğimizi pseudometrik veya sözde metrik olarak ifade ederiz ve negatif olmayan $d(x, y)$ reel sayısına da x ve y noktaları arasındaki pseudometrik tarafından ifade edilen sözde uzaklık denir.

2.2. Metrik Uzayda Yuvarlar

Tanım 2.2.1. (X, d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ bir reel sayı olsun.

a) Açık Yuvar:

$$B_{(X,d)}(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

kümesine ε yarıçaplı a merkezli açık yuvar denir.

b) Kapalı Yuvar:

$$D_{(X,d)}(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq \varepsilon\}$$

kümesine ε yarıçaplı a merkezli kapalı yuvar denir.

c) Yuvar Yüzeyi:

$$S_{(X,d)}(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) = \varepsilon\}$$

kümesine ε yarıçaplı a merkezli yuvar yüzeyi denir.

2.3. Metrik Uzayda yakınsaklık

Tanım 2.3.1. (X, d) bir metrik uzay, (x_n) terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}_+$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}_+$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa (x_n) dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda x noktasına (x_n) dizisinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.2. (Cauchy Dizisi) (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) de bu uzayda bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}_+$ sayısı $n, m \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.3.3. (Tam metrik Uzay) (X, d) bir metrik uzay ve X kümesindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir (Kreyszig, 1978).

2.4. Bir Kümenin Limit Noktaları, Kapanışı, Dışı ve İçi

Tanım 2.4.1. A bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren her U açık kümesi x noktasından başka A nın bir elemanını içeriyor ise x noktasına A kümesinin bir limit veya yığılma noktası denir. Yani $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \mathcal{T}$ için

$$(A \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$$

ise x noktasına A kümesinin bir limit noktası denir. A nın bütün limit noktalarının kümesi $\tilde{A}$ ile gösterilir.

$(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay, A, X in bir alt kümesi ve $\tilde{A}$, A nın limit noktalarının kümesi olsun.

- i. $A \cup \tilde{A}$ kümesine A kümesinin kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.
- ii. $X \setminus \bar{A}$ kümesine A kümesinin dışı denir ve $dış(A)$ ile gösterilir. $dış(A)$ kümesinin elemanlarına da A kümesinin dış noktaları denir.

$(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa x noktasına A nın bir iç noktası denir. A nın bütün iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve A° ile gösterilir. Yani,

$$A^\circ = \{x \in X | x \in U \subseteq A \text{ özelliğinde en az bir } U \in \mathcal{T} \text{ vardır}\}$$

3. MODÜLERLERİN SINIFLANDIRILMASI

Modüler metrik uzaylar, metrik uzayların bir tür özel alt sınıfını temsil eder. Bu tür uzaylar, metrik yapıları üzerine daha fazla cebirsel yapının eklenmesiyle oluşturulur. Modüler metrik uzaylar, matematiksel analiz, topoloji ve özellikle teorik fizik gibi birçok farklı matematiksel ve bilimsel alanın bir parçası olarak kullanılırlar. İşte modüler metrik uzaylar hakkında daha fazla bilgi:

1. **Metrik Uzay:** Modüler metrik uzaylar, önce bir metrik uzayın temel kavramlarını içerir. Metrik uzay, bir küme üzerinde tanımlanmış bir uzaklık fonksiyonu ile birlikte gelir. Bu uzaklık fonksiyonu, elemanların birbirlerine olan uzaklığını tanımlar.
2. **Modüler Yapı:** Modüler metrik uzayların temel özelliği, metrik uzaklığın ötesinde bir modüler yapıya sahip olmalarıdır. Bu modüler yapı, metrik uzayın elemanları arasındaki cebirsel işlemleri tanımlar.
3. **Modüler Uzaklık Fonksiyonları:** Modüler metrik uzaylarda, elemanlar arasındaki uzaklık fonksiyonları, genellikle metrik uzaklık fonksiyonlarına ek olarak modüler işlemlere tabi tutulur. Bu, elemanlar arasındaki ilişkileri daha karmaşık bir şekilde ifade etme yeteneği sunar.
4. **Uygulamalar:** Modüler metrik uzaylar, birçok farklı alanda kullanılır. Özellikle teorik fizikte, yerçekimi gibi karmaşık alanların matematiksel modellemesinde kullanılırlar. Ayrıca, bilgisayar bilimlerinde, veri madenciliğinde ve yapay zeka alanlarında da modüler metrik uzaylar önemli bir rol oynarlar.

Modüler metrik uzaylar, matematikçiler ve bilim insanları tarafından hala aktif olarak araştırılmakta olan bir konudur. Bu alandaki çalışmalar, daha karmaşık modellerin ve yapıların oluşturulmasına ve anlaşılmasına katkı sağlamaktadır. Modüler metrik uzaylar, matematiksel analiz, teorik fizik ve veri bilimi gibi farklı alanlarda karmaşık problemleri çözme ve yapıları analiz etme yeteneği sunar. Bu nedenle, bu alandaki araştırmaların ve çalışmaların ileriye dönük önemli katkılar sağlama potansiyeli bulunmaktadır.

Bu bölümde modüler ve modüler metrik kavramları ele alınarak çeşitli modülerler incelenecektir.

Boştan farklı bir X kümesi üzerindeki σ modülleri, $x, y \in X$ olmak üzere herhangi bir $\lambda > 0$ parametresi için (burada λ zaman olarak düşünüldüğünde),

$$0 \leq \sigma_\lambda(x, y) < \infty$$

eşitsizliği λ zamanda x ve y noktaları arasındaki hız olarak düşünülür. Modüler metrik fonksiyonu,

$$\sigma: X \rightarrow (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$$

$$(\lambda, x, y) \rightarrow \sigma(\lambda, x, y) = \sigma_\lambda(x, y)$$

biçiminde ifade edilir.

3.1. Modülerler

Modüler uzaylar, integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue, Riesz ve Orlicz uzaylarının uzantılarıdır. Modüler doğrusal uzayların genel bir teorisi Nakano tarafından yarı sıralı doğrusal uzaylarda bir spektral teori geliştirdiği ve modüler uzayında hareket eden izdüşümler için integral gösterimini oluşturduğu iki monografisinde (Nakano, 1950), (Nakano, 1951) kurulmuştur; Nakano'nun gerçek doğrusal uzaylar üzerindeki modülerleri dışbükey fonksiyonlardır. Konveks olmayan modülerler ve bunlara karşılık gelen modüler doğrusal uzaylar Musielak ve Orlicz (Musielak, Orlicz, 1959) tarafından oluşturulmuştur. Daha kapsamlı bir açıklama için Musielak'a (1983) başvurunuz. Orlicz uzayları ve modüler doğrusal uzaylar modern doğrusal olmayan fonksiyonel analizde klasik araçlar haline gelmiştir.

Tanım 3.1.1. $X, \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. $x, y \in X$ elemanları aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\sigma: X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneline modüler denir (Orlicz 1988).

$$m-1) x = 0 \text{ ise } \sigma(x) = 0,$$

$$m-2) \alpha = 1 \text{ olan tüm } a \text{ değerleri için } \sigma \alpha = \sigma(x),$$

$$m-3) \alpha, \beta \geq 0 \text{ ve } \alpha + \beta = 1 \text{ olduğunda } \sigma(\alpha x + \beta y) \leq \sigma(x) + \sigma(y).$$

3.2. Modüler Metrik

"Modüler metrik" ifadesi, genellikle sayı teorisi ve modüler form teorisi gibi matematiksel alanlarda kullanılan özel bir metrik yapısını ifade eder. Modüler metrikler, modüler formların uzayları üzerinde tanımlanan bir tür mesafe ölçüsüdür ve genellikle bu uzaydaki farklı modüler formlar arasındaki "uzaklık" kavramını belirlemek için kullanılır.

Bir modüler metrik, genellikle modüler formlar arasındaki benzerlik veya farklılık düzeyini ölçen bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Bu metrik, modüler formların birbirlerine ne kadar yakın veya uzak olduğunu belirlemek için kullanılır ve bu, sayı teorisi ve modüler form teorisi gibi matematiksel alanlarda önemli bir role sahiptir.

Örneğin, f ve g olmak üzere iki modüler form arasındaki modüler metrik, genellikle şu şekilde ifade edilir:

$$d(f, g) = \int |f(z) - g(z)| d\mu$$

burada z kompleks düzlemin elemanlarıdır, $d\mu$ bir ölçüdür ve integral, bir fonksiyonun iki form arasındaki farkının toplamını verir. Bu, modüler form teorisinde, modüler formlar arasındaki "uzaklığı" belirlemek için kullanılan bir tipik metrik yapısıdır.

Modüler metrikler, modüler formların analizi ve sayı teorisindeki çeşitli problemlerde önemli bir araçtır. Modüler formların uzayları üzerindeki bu metrik yapılar, modüler form teorisindeki çeşitli konularda kullanılarak, özellikle sayılar teorisindeki problemlerin çözümünde ve modüler formların özelliklerinin anlaşılmasında önemli bir rol oynar.

Tanım 3.2.1 X boştan farklı bir küme, $x, y \in X$, $\lambda > 0$ ve $\mu > 0$ olmak üzere

$$\sigma: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$$

fonksiyonu, aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa modüler metriktir olarak isimlendirilir.

- i) $x = y \Leftrightarrow \sigma_\lambda(x, y) = 0$
- ii) $\sigma_\lambda(x, y) = \sigma_\lambda(y, x)$
- iii) $\sigma_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \sigma_\lambda(x, z) + \sigma_\mu(z, y)$

burada i) yerine, i') $\sigma_\lambda(x, x) = 0$ olarak alırsak σ **pseudomodüler** olarak isimlendirilir.

Ayrıca i) yerine, i_s) $x \neq y$ için $\sigma_\lambda(x, y) \neq 0$ olarak alırsak σ **kesin modüler** olarak isimlendirilir.

iii) yerine,

- i) $\sigma_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \sigma_\lambda(x, z) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \sigma_\mu(z, y)$ ise σ **konveks modülerdir**.

Not 3.2.2

- a. $\sigma: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ iken $y = x$ ve $\mu = \lambda > 0$ alındığında

(iii) de (i') ve (ii) den faydalanılarak

$$0 = \sigma_{2\lambda}(x, x) \leq \sigma_\lambda(x, z) + \sigma_\lambda(z, x) = 2\sigma_\lambda(x, z)$$

elde edilir. Böylece her $\lambda > 0$ ve $x, z \in X$ için $\sigma_\lambda(x, z) \geq 0$ veya $\sigma_\lambda(x, z) = \infty$ olur.

b. Eğer $\sigma_\lambda(x, y) = \sigma_\lambda x, y \in X$ elemanlarından bağımsız ise (i') ile birlikte $\sigma \equiv 0$ dır. $\sigma \equiv 0$, (i) ile birlikte X üzerindeki tek pseudomodülerdir.

Eğer $\sigma_\lambda(x, y) = \sigma(x, y)$, $\lambda > 0$ 'dan bağımsız ise (i) ve (iii) aksiyomlarından σ bir genişletilmiş metriktir.

c. (i) aksiyomu şu şekilde yazılabilir:

$$(x = y) \Leftrightarrow (\sigma^{x,y} = 0)$$

(i $\Leftarrow$) den

$$(x \neq y) \Rightarrow (\sigma^{x,y} \neq 0)$$

dır.

(i_s) den

$$(x \neq y) \Rightarrow (\sigma^{x,y}(\lambda) \neq 0)$$

olur. Böylelikle (i $\Leftarrow$) ispatlanmış olur.

Başka bir deyişle (i_s),

$$\exists \lambda > 0 \text{ için } \sigma_\lambda(x, y) = 0 \text{ ise } x = y$$

anlamına gelir. Böylece (i')+(i_s) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (i') elde edilir. (iv) $\Rightarrow$ (iii) olduğu açıktır.

Böylece X üzerindeki bir konveks kesin modüler, X üzerinde bir konveks modülerdir, aynı zamanda X üzerinde bir konveks pseudomodülerdir.

d. modüler metriklerin (iv) aksiyomunu

$$(\lambda + \mu)\sigma_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \lambda\sigma_\lambda(x, z) + \mu\sigma_\mu(z, y)$$

şeklinde yazarsak σ 'nin X üzerinde bir konveks pseudomodüler olduğunu görürüz ancak ve ancak $\hat{\sigma}_\lambda(x, y) = \lambda\sigma_\lambda(x, y)$ X üzerinde sadece bir pseudomodülerdir.

X üzerinde bir pseudomodüler olan σ 'nin temel özelliği monoton olmasıdır: $x, y \in X$ verildiğinde, $\sigma^{x,y}: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da artmayan bir fonksiyondur. $0 < \mu < \lambda$ ise, (iii) ($z = x$) ve i' aksiyomu şu anlama gelir:

$$\sigma_\lambda(x, y) = \sigma_{(\lambda-\mu)+\mu}(x, y) \leq \sigma_{(\lambda-\mu)}(x, x) + \sigma_\mu(x, y) = \sigma_\mu(x, y) \quad (1)$$

Sonuç olarak, $x, y \in X$ verildiğinde her $\lambda > 0$ noktasında sağdan limit,

$$(\sigma_{+0})_\lambda(x, y) \equiv \sigma_{\lambda+0}(x, y) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} \sigma_\mu(x, y) = \sup\{\sigma_\mu(x, y) : \mu > \lambda\} \quad (2)$$

ve soldan limit,

$$(\sigma_{-0})_\lambda(x, y) \equiv \sigma_{\lambda-0}(x, y) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} \sigma_\mu(x, y) = \inf\{\sigma_\mu(x, y) : 0 < \mu < \lambda\} \quad (3)$$

olarak gösterilebilir.

$[0, \infty]$ aralığında her $0 < \mu < \lambda$ için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\sigma_{\lambda+0}(x, y) \leq \sigma_\lambda(x, y) \leq \sigma_{\lambda-0}(x, y) \leq \sigma_{\mu+0}(x, y) \leq \sigma_\mu(x, y) \leq \sigma_{\mu-0}(x, y) \quad (4)$$

Bunu görmek için, σ 'nin monotonluğu ile birlikte herhangi bir $0 < \mu < \mu_1 < \lambda_1 < \lambda$ için,

$$\sigma_\lambda(x, y) \leq \sigma_{\lambda_1}(x, y) \leq \sigma_{\mu_1}(x, y) \leq \sigma_\mu(x, y)$$

elde edilir ve limitler $\lambda_1 \rightarrow \lambda - 0$ ve $\mu_1 \rightarrow \mu + 0$ olarak kalır.

Teorem 3.2.3. $x, y \in X$ ve σ, X üzerinde bir konveks pseudomodüler olsun. Buna göre,

- a. $\lambda \rightarrow \sigma_\lambda(x, y)$ ve $\lambda \rightarrow \lambda \sigma_\lambda(x, y)$ fonksiyonları $(0, \infty)$ aralığında artmayandır ve her $0 < \mu \leq \lambda$ için

$$\sigma_\lambda(x, y) \leq (\mu/\lambda) \sigma_\mu(x, y) \leq \sigma_\mu(x, y); \quad (1)$$

- b. $\sigma^{x,y} \neq 0$ ise $\lim_{\mu \rightarrow +0} \sigma_\mu(x, y) = \infty$;

- c. $\sigma^{x,y} \neq \infty$ ise, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma_\lambda(x, y) = 0$ dır.

İspat 3.2.3.

- a. (1) in $\hat{\sigma}$ ile ilgili bir sonucudur.

b. Bazı $\lambda > 0$ için $\sigma_\lambda(x, y) = \sigma^{x,y}(\lambda) \in (0, \infty]$ ve (1) in sol taraf eşitsizliğine ile her $0 < \mu < \lambda$ için $\sigma_\mu(x, y) \geq (1/\mu) \lambda \sigma_\lambda(x, y)$ olduğundan kaynaklanır. Özellikle Not 3.1 ile, σ bir konveks modüler ve $x \neq y$ ise, $w^{x,y} \neq 0$ dır.

c. Bazı $\mu > 0$ için $\sigma_\mu(x, y) < \infty$ olduğundan, (1) deki sol taraf eşitsizliği sonucuna varılır.

Tanım 3.2.4. (2) ve (3) de tanımlanan $\sigma_{+0}, \sigma_{-0}: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonları sırasıyla σ 'nin sağ ve sol düzenlemeleri olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.5. σ, X üzerinde bir pseudomodüler olsun. σ_{+0} ve σ_{-0} da σ ile aynı özelliklere sahip X üzerinde pseudomodüler olsunlar. Bu durumda $(0, \infty)$ aralığında σ_{+0} sağdan, σ_{-0} soldan süreklidir.

İspat 3.2.5. i', ii, iii ve iv özellikleri σ_{+0} ve σ_{-0} için açık olduğundan, sadece (i $\Leftrightarrow$) ın tamlığını ve tek taraflı sürekliliğini doğrulamak gerekir.

σ bir modüler, $x, y \in X$ ve her $\mu > 0$ için $(\sigma_{+0})_\mu(x, y) = 0$ olsun. $0 < \mu < \lambda$ seçildiğinde, (3.1.4) ve (3.1.2) den

$$0 \leq \sigma_\lambda(x, y) \leq \sigma_{\mu+0}(x, y) = 0$$

olur ve böylece, (i) aksiyomu ile birlikte $x = y$ elde edilir. Farzedelim ki her $\lambda > 0$ için $(\sigma_{-0})_\lambda(x, y) = 0$ olsun. $\sigma_\lambda(x, y) \leq \sigma_{\lambda-0}(x, y)$ olduğundan (i) aksiyomu $x = y$ olduğunu ispatlar.

σ bir kesin modüler, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. (i_s) koşulu ve (3.1.4) uyarınca, $0 < \mu < \lambda$ iken

$$0 \neq \sigma_\lambda(x, y) \leq \sigma_{\lambda-0}(x, y) \leq \sigma_{\mu+0}(x, y)$$

olur ve böylece her $\lambda > 0$ için $(\sigma_{-0})_\lambda(x, y) \neq 0$ ve her $\mu > 0$ için $(\sigma_{+0})_\mu(x, y) \neq 0$ dır.

σ_{+0} ın $(0, \infty)$ üzerinde sağdan sürekli olduğunu gösterelim. σ_{+0} X üzerinde bir pseudomodüler olduğunda $(0, \infty)$ üzerinde artmayandır, ve böylece $x, y \in X$, $\mu > 0$ ve $\gamma = (\sigma_{+0})_{\mu+0}(x, y)$ ise (3.1.4) ile birlikte $\gamma \leq (\sigma_{+0})_\mu(x, y)$ elde edilir. Ters eşitsizliği elde etmek için γ nın sonlu olduğunu varsayabiliriz. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon) > \mu$ vardır öyle ki, $\mu < \mu' \leq \mu_0$ ise

$$(\sigma_{+0})_{\mu'}(x, y) < \gamma + \varepsilon$$

elde ederiz.

σ_{-0} ın soldan sürekliliği de benzer şekilde elde edilir.

$(\sigma_{+0})_{+0} = \sigma_{+0}$ ve $(\sigma_{-0})_{-0} = \sigma_{-0}$ olduğunu göstermiştik. Böylece $(\sigma_{+0})_{-0} = \sigma_{+0}$ ve $(\sigma_{-0})_{+0} = \sigma_{-0}$ olduğunu göstermiş oluruz.

4. MODÜLER UZAYLARDA TOPOLOJİLER

Bu bölümde metrik ve modüler kümeler üzerinde pseudomodüler tarafından oluşturulan topoloji ve yakınsaklığı incelenecektir. Hatırlanacağı üzere modüler metrik tanımında $\sigma_\lambda(x, x) = 0$ ise σ nin pseudomodüler ve

$$\sigma_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \sigma_\lambda(x, z) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \sigma_\mu(z, y)$$

ise konveks modüler olduğuna değinmiştik.

Burada σ, X kümesi üzerinde bir pseudomodüler kabul edilerek σ konveks olduğunda, (X, d_σ^0) genişletilmiş pseudometrik uzayı ve (X_σ^*, d_σ^0) ve (X_σ^*, d_σ^*) pseudometrik uzayları üzerine metrik çalışma yapılacaktır.

4.1. Modüler Uzaylar

Modüler topolojik uzaylar ve modüler formlar teorisi, matematiksel araştırmalarda ve çeşitli matematik dallarındaki gelişmelerde önemli bir rol oynamıştır. Bu konular, matematiksel dünyadaki derin yapıları anlamak ve çözümlemek için kullanılan güçlü araçlardan biridir.

Tanım 4.1.1 σ, X kümesi üzerinde bir pseudomodüler, $x^0 \in X$ olsun.

$$X_\sigma^* \equiv X_\sigma^*(x^0) = \{x \in X: \sigma_\lambda(x, x^0) < \infty \text{ iken } \exists \lambda = \lambda(x) > 0\}$$

x^0 komşuluğunda modüler uzay olarak adlandırılır ve burada x^0 a da X_σ^* ın merkezi denir. x^0, X_σ^* ın bir denklik sınıfıdır. Her $x, y \in X_\sigma^*$ için $\sigma^{x,y} \neq \infty$ dur.

Eğer σ_+ ve σ_- , σ nin sağ ve sol regülasyonları ise (3.1.4) şu anlama gelir:

$$X_{\sigma+0}^* = X_{\sigma+0}^* = X_\sigma^*$$

Buradan yola çıkarak x^0 komşuluğunda iki modüler uzay daha tanımlayabiliriz:

$$X_\sigma^0 \equiv X_\sigma^0(x^0) = \{x \in X: \lambda \rightarrow \infty \text{ iken } \sigma_\lambda(x, x^0) \rightarrow 0\}$$

$$X_w^{fin} \equiv X_w^{fin}(x^0) = \{x \in X: \text{her } \lambda > 0 \text{ için } \sigma_\lambda(x, x^0) < \infty\}$$

Sonuç olarak,

$$X_{\sigma+0}^0 = X_{\sigma-0}^0 = X_\sigma^0 \text{ ve } X_{\sigma+0}^{fin} = X_{\sigma-0}^{fin} = X_\sigma^{fin}$$

$$X_{\sigma}^0 \subset X_{\sigma}^* \text{ ve } X_{\sigma}^{fin} \subset X_{\sigma}^*$$

elde edilir. Ancak σ dışbükey ise

$$X_{\sigma}^0 = X_{\sigma}^*$$

olur.

Teorem 4.1.2 X_{σ}^* modüler uzayında d_{σ}^0 temel pseudometriği tanımlanacaktır. $x, y \in X$ ve σ, X üzerinde bir pseudomodüler olsun.

$$d_{\sigma}^0(x, y) = \inf\{\lambda > 0: \sigma_{\lambda}(x, y) \leq \lambda\} (\inf \emptyset = \infty)$$

O halde d_{σ}^0, X üzerinde bir genişletilmiş pseudometriktir. Ayrıca $x, y \in X$ ise $d_{\sigma}^0(x, y) < \infty, x \sim y$ ye eşittir, dolayısıyla herhangi bir $x^o \in X$ için $d_{\sigma}^0, X_{\sigma}^* = X_{\sigma}^*(x^o)$ üzerinde bir pseudometriktir.

Teorem 4.1.3 $x, y \in X$ ve σ, X üzerinde bir konveks pseudomodüler olsun.

$$d_{\sigma}^*(x, y) = \{\lambda > 0: \sigma_{\lambda}(x, y) \leq 1\} = \inf_{\lambda > 0} \max\{\lambda, \lambda \sigma_{\lambda}(x, y)\}$$

X üzerinde bir genişletilmiş pseudometriktir. Ayrıca $x, y \in X_{\sigma}^*$ verildiğinde d_{σ}^0 ve d_{σ}^* aşağıdaki anlamda doğrusal olmayan eşdeğerdir.

$$\min\{d_{\sigma}^*(x, y), \sqrt{d_{\sigma}^*(x, y)}\} \leq d_{\sigma}^0(x, y) \leq \max\{d_{\sigma}^*(x, y), \sqrt{d_{\sigma}^*(x, y)}\}, \quad (1)$$

veya farklı bir şekilde yazılırsa,

$$d_{\sigma}^0(x, y) \cdot \min\{1, d_{\sigma}^0(x, y)\} \leq d_{\sigma}^*(x, y) \leq d_{\sigma}^0(x, y) \cdot \max\{1, d_{\sigma}^0(x, y)\} \quad (2)$$

ve

$$d_{\sigma}^*(x, y) \leq d_{\sigma}^0(x, y) \leq \sqrt{d_{\sigma}^*(x, y)} \quad (3)$$

elde edilir.

4.2. Metrik Yakınsaklık

Metrik yakınsaklık, matematikte topoloji alanında kullanılan bir kavramdır. Bir metrik uzaydaki bir dizi noktanın, belirli bir metrikle ölçüldüğünde birbirine ne kadar yakın olduğunu açıklar. Metrik uzaylarda metrik yakınsaklık kavramı, limitlerin

tanımlanması ve ardından bu limitlerin özelliklerini inceleme konusunda önemli bir araçtır. Bu, matematiksel analiz, topoloji ve diğer matematiksel disiplinlerde bir dizi konuda kullanılan temel bir kavramdır.

Tanım 4.2.1 X teki dizilerin yakınsaklığını d_σ^0 'ı yani metrik yakınsaklığı göz önünde bulundurarak başlayalım. Eğer $d_\sigma^0(x_n, x) \rightarrow 0$ ise bir $\{x_n\} \subset X$ dizisi $x \in X$ e yakınsar, kısaca $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir. Öncelikli amacımız bu yakınsamayı σ cinsinden karakterize etmektir.

Eğer $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde $x \in X$, $x \in A$ ve $\{x_n\} \subset A$ varsa $A \subset X$ kümesi metrik yakınsaklık açısından kapalıdır.

Teorem 4.2.2 (a) $x \in X$ ve $\{x_n\} \subset X$ verildiğinde şu sonuca varılır: Her $\lambda > 0$ için

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \sigma_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (1)$$

Ayrıca, σ konveks, $d_\sigma^*(x_n, x) \rightarrow 0$ ve σ, X kümesi üzerinde bir modüler ise x limiti tektir.

(b) $\{x_n\}$ terimleri X kümesinin elemanlarından oluşan bir Cauchy dizi olsun. Her $\lambda > 0$ için

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \sigma_\lambda(x_n, x_m) \rightarrow 0 \quad (2)$$

Ayrıca, σ konveks, $d_\sigma^*(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ve σ, X kümesi üzerinde bir modüler ise x limiti tektir.

Cauchy dizileri için de benzer iddia geçerlidir.

(c) X_σ^* , X_σ^0 ve X_σ^{fin} modüler uzayları $x^o \in X$ komşuluğunda metrik yakınsaktır ve kapalıdır.

İspat 4.2.2 (a) Kabul edelim ki X kümesinin elemanlarından oluşan bir $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsasın. Yani, $x_n \rightarrow x$, $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda Her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_\sigma^*(x_n, x) < \varepsilon$ olmak üzere $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır.

σ, X kümesi üzerinde bir pseudomodüler ve X_σ^* modüler uzay, $x, y \in X_\sigma^*$, $\lambda > 0$ olsun. Bu durumda $d_\sigma^0(x, y) < \lambda$ koşulu $\sigma_{\lambda-0}(x, y) \leq d_\sigma^0(x, y) < \lambda$ anlamına gelir.

Tersi ise, $\sigma_{\lambda-0}(x, y) < \lambda$ koşulu $d_{\sigma}^0(x, y) < \lambda$ anlamına gelir ve Teorem (3.1.4) ile birlikte

$$\text{Her } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ için } \sigma_{\varepsilon}(x_n, x) \leq \sigma_{\varepsilon-0}(x_n, x) < \varepsilon \quad (1)$$

elde edilir. Bu nedenle, $\lambda > 0$ ve herhangi bir $n \geq n_0(\min\{\varepsilon, \lambda\})$ olduğunda, modüler metrik aksiyomlarından,

$$\sigma_{\lambda}(x_n, x) \leq \sigma_{\min\{\varepsilon, \lambda\}}(x_n, x) < \min\{\varepsilon, \lambda\} \leq \varepsilon$$

yazılır. Böylece, $\sigma_{\lambda}(x_n, x) \rightarrow 0$ dır.

Tersine $\varepsilon > 0$ ise $\sigma_{\varepsilon}(x_n, x) \rightarrow 0$ olur ve böylece her $n \geq n_1(\varepsilon)$ için $\sigma_{\varepsilon}(x_n, x) \leq \varepsilon$ olmak üzere, $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. d_{σ}^0 tanımından her $n \geq n_1(\varepsilon)$ için $d_{\sigma}^0(x_n, x) \leq \varepsilon$ anlamına gelir. Yani

$$d_{\sigma}^0(x_n, x) \rightarrow 0$$

dır.

Eğer σ konveks ise $d_{\sigma}^*(x_n, x) \rightarrow 0$ ve $d_{\sigma}^0(x_n, x) \rightarrow 0$ olur.

Eğer σ, X kümesi üzerinde bir modüler ise d_{σ}^0, X üzerinde bir genişletilmiş metrik ve X_{σ}^* üzerinde bir metriktir. Böylece x limiti (1) den tektir.

(b) $\{x_n\}$ Cauchy dizisi ise, X kümesinin elemanlarından oluşan bir $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyorsa herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_{\sigma}^*(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır.

σ, X kümesi üzerinde bir pseudomodüler ve X_{σ}^* modüler uzay, $x, y \in X_{\sigma}^*, \lambda > 0$ olsun. Bu durumda $d_{\sigma}^0(x, y) < \lambda$ koşulu $\sigma_{\lambda-0}(x, y) \leq d_{\sigma}^0(x, y) < \lambda$ anlamına gelir.

Tersi ise, $\sigma_{\lambda-0}(x, y) < \lambda$ koşulu $d_{\sigma}^0(x, y) < \lambda$ anlamına gelir ve Teorem(3.1.4) ile birlikte

$$\text{Her } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ için } \sigma_{\varepsilon}(x_n, x) \leq \sigma_{\varepsilon-0}(x_n, x) < \varepsilon \quad (1)$$

elde edilir. Bu nedenle, $\lambda > 0$ ve herhangi bir $n, m \geq n_0(\min\{\varepsilon, \lambda\})$ olduğunda, modüler metrik uzay tanımından,

$$\sigma_{\lambda}(x_n, x_m) \leq \sigma_{\min\{\varepsilon, \lambda\}}(x_n, x_m) < \min\{\varepsilon, \lambda\} \leq \varepsilon$$

yazılır. Böylece, $\sigma_\lambda(x_n, x_m) \rightarrow 0$ dır.

Tersine $\varepsilon > 0$ ise $\sigma_\varepsilon(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olur ve böylece her $n, m \geq n_1(\varepsilon)$ için $\sigma_\varepsilon(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ olmak üzere, $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. d_σ^0 tanımından her $n, m \geq n_1(\varepsilon)$ için $d_\sigma^0(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ anlamına gelir. Yani

$$d_\sigma^0(x_n, x_m) \rightarrow 0$$

dır.

Eğer σ konveks ise $d_\sigma^*(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ve $d_\sigma^0(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olur.

Eğer σ, X kümesi üzerinde bir modüler ise d_σ^0, X üzerinde bir genişletilmiş metrik ve X_σ^* üzerinde bir metriktir. Böylece x limiti (1) den tektir. Yani,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} d_\sigma^0(x_n, x_m) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda > 0 \text{ için } \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sigma_\lambda(x_n, x_m) = 0$$

dir.

(c) $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ ve $x_n \rightarrow x$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $\lambda_0 > 0$ ise (2) ve modüler metrik uzayların (iii) aksiyomu ile $n_0 = n_0(\varepsilon)$ vardır.

$$\sigma_{\varepsilon+\lambda_0}(x, x^0) \leq \sigma_\varepsilon(x, x_{n_0}) + \sigma_{\lambda_0}(x_{n_0}, x^0) \leq \varepsilon + \sigma_{\lambda_0}(x_{n_0}, x^0) \quad (2)$$

$\sigma_{\lambda_0}(x_{n_0}, x^0) < \infty$ olmak üzere eğer $\{x_n\} \subset X_\sigma^*$ ve $x_{n_0} \in X$ ise, $\lambda_0 > 0$ dır. (2) ile

$$\sigma_{\varepsilon+\lambda_0}(x, x^0) < \infty, \text{ yani } x \in X_\sigma^* \text{ dır.}$$

$\{x_n\} \subset X_\sigma^0$ olsun. $x_{n_0} \in X_\sigma^0$ iken $\lambda \rightarrow \infty$, $\sigma_\lambda(x_{n_0}, x^0) \rightarrow 0$ olur ve böylece bazı $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon) > 0$ için $\sigma_{\lambda_0}(x_{n_0}, x^0) < \varepsilon$ dur. (3.1.1) ve (4.3.3) ile her $\lambda \geq \varepsilon + \lambda_0$ için

$$\sigma_\lambda(x, x^0) \leq \sigma_{\varepsilon+\lambda_0}(x, x^0)$$

elde edilir. Yani $x \in X_\sigma^0$, $\lambda \rightarrow \infty$ iken $\sigma_\lambda(x, x^0) \rightarrow 0$ olur.

Son olarak, $\{x_n\} \subset X_\sigma^{fin}$ ve $\lambda > 0$ seçelim. (1) ve (2) de $\varepsilon = \lambda/2$ ve $\lambda_0 = \lambda/2$ seçildiğinde $x_{n_0} \in X_\sigma^{fin}$ den $\sigma_{\lambda_0}(x_{n_0}, x^0) < \infty$ elde edilir. Dolayısıyla $\sigma_\lambda(x, x^0) = \sigma_{\varepsilon+\lambda_0}(x, x^0)$ anlamına gelir. Böylelikle $x \in X_\sigma^{fin}$ olur.

4.3. Metrik Topolojisi

Metrik topoloji, genel topolojinin özel bir durumu olup matematiksel analiz, diferansiyel geometri, cebirsel topoloji ve diğer matematik dallarında temel bir role sahiptir. Bu alan, matematiksel nesnelerin şeklini, uzaylar arasındaki ilişkileri ve bu uzaylarda bulunan fonksiyonların özelliklerini anlamak için kullanılır. Daha ayrıntılı bilgi için (KEFENG LIU,. 1991) , (M. Ando, M. J. Hopkins, and C. Rezk.)

Tanım 4.3.1 Açık kümeler: $x \in X$ ve $r > 0$ verildiğinde x merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$B(x,r)=B^{d^0_\sigma}(x,r)=\{y \in X: d^0_\sigma(x,y) < r\}$$

dir. Bu açık yuvar aynı zamanda açık bir kümedir. Yani boştan farklı bir $U \subset X$ alt kümesi her $x \in U$ için, $B(x,r) \subset U$ olacak şekilde $r = r(x) > 0$ var ise açıktır. Eğer $x \in X^*_\sigma(x^0)$ ise her $r > 0$ için $B(x,r) \subset X^*_\sigma(x^0)$ olur. Sonuç olarak,

$$U \subset X \Leftrightarrow \forall x^0 \in X \text{ için } U \cap X^*_\sigma(x^0) \text{ açıktır.}$$

Tanım 4.3.2. Modüler çevreler: $\lambda, \mu > 0$ ve $x \in X^*_\sigma$ verildiğinde, x ile ilgili σ -entourage veya modüler çevresi

$$B_{\lambda,\mu}(x)=B^\sigma_{\lambda,\mu}(x)=\{y \in X^*_\sigma: \sigma_\lambda(x,y) < \mu\}$$

σ 'nin sağdan ve soldan limitleri için çevreleri sırasıyla $B_{\lambda+0,\mu}(x)$ ve $B_{\lambda-0,\mu}(x)$ ile gösterelim.(3.1.2) ve (3.1.3)

$$x \in B_{\lambda,\mu}(x), 0 < \mu_1 < \mu_2 \text{ ise } B_{\lambda,\mu_1}(x) \subset B_{\lambda,\mu_2}(x)$$

dir. (3.1.4) eşitsizlikleri ile, $0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ ve $\mu > 0$ verildiğinde,

$$B_{\lambda_1+0,\mu}(x) \subset B_{\lambda-0,\mu}(x) \subset B_{\lambda,\mu}(x) \subset B_{\lambda+0,\mu}(x) \subset B_{\lambda_2-0,\mu}(x)$$

elde ederiz. Böylece $\lambda \rightarrow B_{\lambda,\mu}(x)$ ve $\mu \rightarrow B_{\lambda,\mu_1}(x)$ dönüşümleri azalmayandır. Teorem 2.2.11 (a) ile, $\lambda > 0$ için $B(x, \lambda) = B_{\lambda-0,\lambda}(x)$ tir. Dolayısıyla,

$$\text{Eğer } 0 < \mu < \lambda \text{ ise, } B_{\mu,\mu}(x) \subset B_{\mu,\lambda}(x) \subset B(x, \lambda) = B_{\lambda-0,\lambda}(x) \subset B_{\lambda-0,\lambda}(x) \text{ tir.}$$

Bu, σ açısından X_σ^* teki açık kümelerin bir karakterizasyonunu verir:

$$U \in \mathcal{T}(d_\sigma^0) \Leftrightarrow \forall x \in U \exists \mu = \mu(x) > 0 \text{ öyle ki } B_{\mu,\mu}(x) \subset U$$

Bir $A \subset X_\sigma^*$ kümesinin iç kısmı bazı $\mu > 0$ için $A^\circ = \{x \in A : B_{\mu,\mu}(x) \subset A\}$ dır.

Şimdi σ nin konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.2.3) deki eşitsizliklerden faydalanarak,

$$0 < r < 1 \text{ için } B(x,r) \subset B^{d_\sigma^*}(x,r) \subset B(x,\sqrt{r})$$

elde edilir. Buradan da $\mathcal{T}(d_\sigma^*) = \mathcal{T}(d_\sigma^0)$ yazılır. $\lambda, \mu > 0$ için, $d_\sigma^* = d_\sigma^0$ ve $B_{\lambda,\mu}^{\hat{\sigma}}(x) = B_{\lambda,\mu/\lambda}(x)$ olmak üzere $\hat{\sigma}_\lambda(x, y) = \lambda \sigma_\lambda(x, y)$, X üzerinde pseudomodülerdir. $B_{\lambda,1}(x) = B_{\lambda,\mu}^{\hat{\sigma}}(x) \subset U$ olacak şekilde

$$U \in \mathcal{T}(d_\sigma^*) \Leftrightarrow \forall x \in U \exists \lambda = \lambda(x) > 0$$

elde edilir.

Tanım 4.3.3 Kapalı kümeler: Bir $A \subset X_\sigma^*$ kümesi, eğer tümleyeni $A^c = X_\sigma^* \setminus A$ açık ise kapalıdır; başka bir deyişle $(A^c)^0 = A^c$ dir. Kapalı küme örnekleri $\emptyset$, $x \in X_\sigma^*$ merkezli r yarıçaplı kapalı küre:

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in X_\sigma^* : d_\sigma^0(x,y) \leq r\} = \{y \in X_\sigma^* : \sigma_{r+0}(x,y) \leq r\}$$

ve X_σ^* , X_σ^0 , X_σ^{fin} modüler uzaylarıdır. Bir $A \subset X_\sigma^*$ kümesinin kapanışı $\bar{A}$ ile gösterilir, A 'yı içeren en küçük kapalı kümedir.

$A \subset \bar{A}$ dir. $\bar{A} = ((A^c)^\circ)^c$ yazılır. A kapalı bir küme ise $\bar{A} = A$ dır. $\bar{A}$, X_σ^* deki $((A^c)^\circ)$ a ait olmayan noktalar kümesi olduğundan,

$$\bar{A} = \{x \in X_\sigma^* : \text{her } \mu > 0 \text{ için } A \cap B_{\mu,\mu}(x) \neq \emptyset\}$$

elde edilir. Ayrıca $\overline{B(x,r)} \subset \bar{B}(x,r)$ ve $B(x,r) \subset (\bar{B}(x,r))^\circ$ dir.

Teorem 4.3.4 $\emptyset \neq A \subset X_\sigma^*$ ve $x \in X_\sigma^*$ ise aşağıdaki önermeler denktir.

a) $x \in \bar{A}$

b) $\forall \lambda > 0$ için $\sigma_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $\{x_n\} \subset A$ dizisi vardır.

c) Her bir $\lambda > 0$ için $\sigma_\lambda(x_n(\lambda), x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $\{x_n(\lambda)\} \subset A$ dizisi vardır.

İspat 4.3.4 a) $\Leftrightarrow$ b) Teorem 4.2.1 den $x \in \bar{A}$ ise metrik yakınsaktır. Yani $\forall \lambda > 0$ için $d_\sigma^0(x_n, x) \rightarrow 0$ olacak şekilde sadece bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. Ayrıca b) den böyle yakınsak bir dizi varsa metrik yakınsaktır dolayısıyla $x \in \bar{A}$ dır.

b) $\Leftrightarrow$ c) Kabul edelim ki $\forall \lambda > 0$ için $\sigma_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $\{x_n\} \subset A$ dizisi olsun. Buradan her $\lambda > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_n(\lambda) = x_n$ alırsak, c) elde edilir.

Tersine Her bir $\lambda > 0$ için $\sigma_\lambda(x_n(\lambda), x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $\{x_n(\lambda)\} \subset A$ dizisi var olduğunu kabul edersek, $k \in \mathbb{N}$ verildiğinde $n \rightarrow \infty$ iken $\sigma_{1/k}(x_n(1/k), x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $\{x_n(1/k)\}_{n=1}^\infty \subset A$ dizisi vardır.

$\sigma_1(x_{n_1}(1), x) < 1$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ ve $n_2 > n_1$ ve $\sigma_{1/2}(x_{n_2}(1/2), x) < 1/2$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ seçelim.

İndeksiyon metodu ile eğer $k \geq 3$ için $n_{k-1} \in \mathbb{N}$ ve öyle bir $n_k \in \mathbb{N}$ seçelim ki $n_k > n_{k-1}$ ve $\sigma_{1/k}(x_{n_k}(1/k), x) < 1/k$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $y_k = x_{n_k}(1/k)$ tanımlanırsa $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset A$ olur. Buradan da Her $\lambda > 0$ için $k \rightarrow \infty$ iken $\sigma_\lambda(y_k, x)$ elde edilir. $\lambda > 0$ verildiğinde $k_0 > 1/\lambda$ için $k_0 = k_0(\lambda) \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman her $k \geq k_0$ için $1/k < \lambda$ bulunur ve böylece σ nın monotonluğu ile

$$\sigma_\lambda(y_k, x) \leq \sigma_{1/k}(y_k, x) \leq 1/k$$

elde edilir.

Not 4.3.3 X_σ^* ın tüm kapalı alt kümelerinin ailesi $\text{cl}(X_\sigma^*)$ ile gösterilmektedir.

Teorem 4.3.4 Eğer σ, X kümesi üzerinde bir pseudomodüler ise σ tarafından indüklenen $P(X)$ üzerinde Hausdorff pseudomodüler, $w, \text{cl}(X_\sigma^*)$ üzerinde bir modülerdir ve böylece $d_\sigma^0 = D_{d_\sigma^0}$, $\text{cl}(X_\sigma^*)$ üzerinde bir genişletilmiş metriktir.

İspat 4.3.4 A ve B boştan farklı kümeler olmak üzere, $A, B \subset X_\sigma^*$ verildiğinde her $\lambda > 0$ için

$$E_\lambda(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \bar{B} \quad (1)$$

elde edilir. Eğer her $\lambda > 0$ için $A, B \in \text{cl}(X_\sigma^*)$ ve

$$W_\lambda(A, B) = 0 \text{ ise } E_\lambda(A, B) = E_\lambda(B, A) = 0$$

dir. Yani $A \subset \bar{B} = B$ ve $B \subset \bar{A} = A$ ise $A = B$ dir.

$\Rightarrow$ Eğer $\lambda > 0$ için $E_\lambda(A, B) = 0$ ise $x \in A$ ile birlikte $\inf_{y \in B} \sigma_\lambda(x, y) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla her $\lambda > 0$ için $n \rightarrow \infty$ olmak üzere $\sigma_\lambda(x, y_n(\lambda)) \rightarrow 0$ olacak şekilde x ' e bağlı olan bir $\{y_n(\lambda)\} \subset B$ dizisi vardır. Öyleki, Teorem 4.3.3 $x \in \bar{B}$ yazılır. Böylelikle $A \subset \bar{B}'$ dir.

$(\Leftarrow)$ $A \subset \bar{B}$ olsun. $x \in A$ verildiğinde $x \in \bar{B}$ elde edilir ve böylece her $\lambda > 0$ için $n \rightarrow \infty$ olmak üzere $\sigma_\lambda(x, y_n) \rightarrow 0$ olmak üzere $\{y_n\} \subset B$ dizisi vardır. $n \rightarrow \infty$ olmak üzere $\inf_{y \in B} \sigma_\lambda(x, y) \leq \sigma_\lambda(x, y_n) \rightarrow 0$ olduğu zaman $\inf_{y \in B} \sigma_\lambda(x, y) = 0$ elde edilir. Bu da her $\lambda > 0$ için $E_\lambda(A, B) = 0$ elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

4.4. Modüler Yakınsaklık

Modüler yakınsaklık, modüler formların bir serisinin veya serisinin bir limitinin varlığına işaret eden bir matematik terimidir. Özellikle sayı teorisi ve modüler form teorisi gibi alanlarda kullanılır. Modüler yakınsaklık, bir modüler formun belirli bir serisinin veya serisinin bir limitinin varlığı anlamına gelir. Yani, bu serilerin veya serilerin bir sınıra doğru yaklaştığı durumu ifade eder. Bu durum, matematiksel analizlerde ve sayı teorisi problemlerinde önemli bir rol oynar.

Tanım 4.4.1 σ, X üzerinde bir pseudomodüler olsun. Teorem 4.3 de görüldüğü gibi X_σ^* deki metrik yakınsaklık her $\lambda > 0$ parametresi için σ modülerindeki yakınsaklığa eşdeğerdir. Sadece bazı $\lambda > 0$ için 4.3.1 in sağ tarafı geçerli ise genel veya zayıf yakınsamadan daha fazlasını elde ederiz. Devamında, $B_{\lambda, \mu}(x)$ modüler çevreleri açık ve kapalı topların metrik topoloji için yaptığı gibi önemli bir rol oynar.

Burada çevreler ne açık ne de kapalı olabileceği unutulmamalıdır.

Tanım 4.4.2 $X \neq \emptyset$ ve $\{x_n\}$ de X kümesinde bir dizi olsun. Her $\lambda_0 > 0$ için, $\sigma_{\lambda_0}(x_n, x) \rightarrow 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X'$ e σ – yakınsak veya modülerdir. $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ şeklinde gösterilir. Bu şekildeki $\{x_n\}$ dizisinin σ – limiti x ’tir denir. Her $\lambda \geq \lambda_0$ için σ ’ nin monotonluğu ile $\sigma_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ olur.

Not 4.4.3 Metrik yakınsaklık modüler yakınsaklık anlamına da denir.

Örnek 4.4.4 (X, d) bir metrik uzay olsun.

1. $p \geq 0$ için $\sigma_\lambda(x, y) = d(x, y)/\lambda^p$ bir modüler olsun.

$$X_\sigma^* = X \text{ ve } d_\sigma^0(x, y) = \sqrt[p+1]{d(x, y)}$$

olduğunda, X_σ^* daki metrik yakınsaklık ve modüler yakınsaklık X deki bilinen d –metrik yakınsaklığına eşdeğerdir.

2. σ bir modüler olsun. Bu durumda,

$0 < \lambda < d(x, y)$ ise $\sigma_\lambda(x, y) = \infty$ ve $\lambda \geq d(x, y)$ ise $\sigma_\lambda(x, y) = 0$ dır. Böylece $X_\sigma^* = X_\sigma^0 = X$ ve $d_\sigma^* = d_\sigma^0 = d$ elde edilir.

Bir $\{x_n\} \subset X_\sigma^*$ dizisi $d_\sigma^0 = d$ metriğinde yakınsak ise (X, d) içinde sınırlıdır, fakat tersi daima geçerli değildir. Diğer taraftan $\{x_n\} \subset X_\sigma^*$ in σ –yakınsaması (X, d) içinde $\{x_n\}$ nin sınırlılığın eşdeğeridir. Aslında bazı $\lambda_0 > 0$ için $n > n_0$ ve $\sigma_{\lambda_0}(x_n, x) < 1$ ise $\lambda_0 \geq d(x_n, x)$ ile eşdeğer olacak şekilde $x_n \xrightarrow{\sigma} x \in X$, $\sigma_{\lambda_0}(x_n, x) \rightarrow 0$ dır ve böylece $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla

$$r_0 = \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_{n_0}, x), \lambda_0\} \text{ iken } \{x_n\} \subset \bar{B}(x, r_0)$$

olur. Tersine eğer bazı $x \in X$ ve $r > 0$ için $\{x_n\} \subset \bar{B}(x, r)$, her $y \in X$ için de $x_n \xrightarrow{\sigma} y$ ise: $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda_0 = r + d(x, y)$ için

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y) \leq \lambda_0$$

olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma_{\lambda_0}(x_n, y) = 0$ elde edilir.

Not 4.4.5 $\lambda > 0$ iken $\sigma_\lambda(x, y) = 0$. $x, y \in X$ ve i_s aksiyomu verildiğinde $x, y \in X$ elemanlarının σ -eşit veya modüler eşittir denir.

$$x \stackrel{\sigma}{=} y \text{ denktir } x = y \Leftrightarrow \sigma \text{ kesindir.}$$

$$\text{Her } x, y \in X \text{ için } x \stackrel{\sigma}{=} y \text{ elde edilir.}$$

Bir $A \subset X$ kümesinin $\{x_n\} \subset A, x_n \xrightarrow{\sigma} x \in X, x \in A$ verildiğinde modüler yakınsama açısından kapalı olduğu söylenebilir.

Teorem 4.4.6

- a. X_σ^* ve X_σ^0 modüler uzayları $x^0 \in X$ civarında modüler yakınsama açısından kapalıdır. X_σ^{fin} ise genellikle kapalı değildir.
- b. X_σ^* dan modüler yakınsak bir σ dizisi d_σ^0 metriğinde sınırlıdır, tüm modüler limitler σ -eşittir, ve eğer σ, X üzerinde bir tam modüler ise en fazla bir modüler limiti vardır.

İspat 4.4.6

- a. $\{x_n\} \subset X$ ve $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ olsun. Bu durumda, bazı $\lambda_0 > 0$ için $\sigma_{\lambda_0}(x_n, x) \rightarrow 0$ dır. Böylece $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \geq n_0$ için $\sigma_{\lambda_0}(x_n, x) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Modüler metrik uzayların (iii) aksiyomundan $\lambda_1 > 0$ ise,

$$\sigma_{\lambda_0+\lambda_1}(x, x^0) \leq \sigma_{\lambda_0}(x, x_{n_0}) + \sigma_{\lambda_1}(x_{n_0}, x^0) \leq \varepsilon + \sigma_{\lambda_1}(x_{n_0}, x^0). \quad (1)$$

elde edilir.

$\{x_n\} \subset X_\sigma^*$ olsun. $x_{n_0} \in X_\sigma^*$ olduğundan bazı $\lambda_1 > 0$ için $\sigma_{\lambda_1}(x_{n_0}, x^0) < \infty$ olur ve böylece (1) den $\sigma_{\lambda_0+\lambda_1}(x, x^0)$ anlamına gelir. Yani $x \in X_\sigma^*$ elde edilir.

Eğer $\{x_n\} \subset X_\sigma^0$ ve $x_{n_0} \in X_\sigma^0$ ise bu durumda. $\lambda \rightarrow \infty$ için $\sigma_\lambda(x_{n_0}, x^0) \rightarrow 0$ dır. Ayrıca $\sigma_{\lambda_1}(x_{n_0}, x^0) \leq \varepsilon$ olmak üzere $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) > 0$ dır. Dolayısıyla, eğer $\lambda \geq \lambda_0 + \lambda_1$ ise, (1) den $\sigma_\lambda(x, x^0) \leq \sigma_{\lambda_0+\lambda_1}(x, x^0) \leq 2\varepsilon$ yazılabilir. Yani $\lambda \rightarrow \infty$ olduğunda $\sigma_\lambda(x, x^0) \rightarrow 0$ ve $x \in X_\sigma^0$ elde edilir.

b. $\{x_n\} \subset X_\sigma^*$ ve $x_n \xrightarrow{\sigma} x \in X$ olsun. (a) özdeşliğinden her $n > n_0$ için $\sigma_{\lambda_0}(x_n, x) \leq \lambda_0$ olacak şekilde $x \in X_\sigma^*$ ve $n_0 \in N$ vardır, ki bu da $d_\sigma^0(x_n, x) \leq \lambda_0$ anlamına gelir. d_σ^0 , X_σ^* 'in eleman çiftleri üzerinde sonlu değerler varsayar ve böylece $\{x_n\} \subset \bar{B}(x, r)$ dir. Buradan,

$$r = \max\{d_\sigma^0(x_1, x), \dots, d_\sigma^0(x_{n_0}, x), \lambda_0\}$$

elde edilir.

Eğer $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ ve $x_n \xrightarrow{\sigma} y$ ise bazı $\lambda, \mu > 0$ için $\sigma_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ ve $\sigma_\mu(x_n, y) \rightarrow 0$ dır. Modüler metrik uzayların (iii) aksiyomu ile

$$\sigma_{\lambda+\mu}(x, x^0) \leq \sigma_\lambda(x, x_n) + \sigma_\mu(x_n, y) \rightarrow 0$$

yazılır ve böylelikle $\sigma_{\lambda+\mu}(x, y) = 0$ elde edilir. Böylece $x \underset{\sigma}{=} y$ ve eğer σ kesin ise $x = y$ olur.

Teorem 4.4.7

a. X üzerindeki σ –yakınsaması metrik yakınsamaya eşdeğerdir ancak ve ancak σ, X üzerinde Δ_2 dir.

b. σ pseudomodüleri X üzerinde Δ_2 değildir $\Leftrightarrow x \in X$ ve $\varepsilon_0 > 0 \forall n \in N$ için $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ ve $d_\sigma^0(x_n, x) \geq \varepsilon_0$ olacak şekilde $\{x_n\} \subset X$ dizisi vardır.

c. Eğer σ, X üzerinde kesin olmayan bir modüler ise σ, X üzerinde Δ_2 değildir.

İspat 4.4.7

a) : $\Rightarrow \{x_n\} \subset X, x \in X$ ve $\lambda_0 > 0$ için $\sigma_{\lambda_0}(x_n, x) \rightarrow 0$ olsun. $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ ve böylelikle hipotezden $d_0^\sigma(x_n, x) \rightarrow 0$ dir. Buradanda $\sigma_{\lambda_0/2}(x_n, x) \rightarrow 0$ olduğundan σ, X üzerinde Δ_2 dir.

$\Leftarrow$: Biz burada σ –yakınsamasının metrik yakınsama olduğunu gösterilmeliyiz. $\{x_n\} \subset X$ ve $x_n \xrightarrow{\sigma} x \in X$ olsun. Bu durumda bazı $\lambda_0 > 0$ için $\sigma_{\lambda_0}(x_n, x) \rightarrow 0$ olur, böylece Δ_2 koşulu ile $\sigma_{\lambda_0/2}(x_n, x) \rightarrow 0$ elde edilir. İndiksiyon metodu ile her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $\sigma_{\lambda_0/2^k}(x_n, x) \rightarrow 0$ dir.

$\lambda > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ verildiğinde $\lambda > \lambda_0/2^k$ elde edilir. σ ’nin monotonlundan $n \rightarrow \infty$ için $\sigma_\lambda(x_n, x) \leq \sigma_{\lambda_0/2^k}(x_n, x) \rightarrow 0$ olur. Böylece her $\lambda > 0$ için $\sigma_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ ile $x_n \rightarrow x$ yani $d_0^\sigma(x_n, x) \rightarrow 0$ dir.

b. Eğer σ, Δ_2 değilse σ –yakınsaması d_0^σ –yakınsaması ile eşdeğer değildir. Bu nedenle $y_k \xrightarrow{\sigma} x$ ve $y_k \not\xrightarrow{\sigma} x$ şeklinde $x \in X, \{y_k\} \subset X$ dizisi vardır. Dolayısıyla bazı $\lambda_0 > 0$ ve $\varepsilon_0 > 0$ için $\sigma_{\lambda_0}(y_k, x) \rightarrow 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d_0^\sigma(y_{k_n}, x) \rightarrow 0$ şeklinde $\{k_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ artan dizisi vardır. $\{x_n\} = \{y_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ dizisi istenen özelliklere sahiptir.

Tersine σ –yakınsama ile metrik yakınsamasına eşdeğer olmayıp bu nedenle (a) ile σ, X üzerinde Δ_2 değildir denir.

c. (i_s) koşulunun değillenmesi ile $x, y \in X, x \neq y$ için $\sigma_{\lambda_0}(x, y) = 0$ olacak şekilde $\lambda_0 > 0$ vardır. Eğer $\mu = \inf\{\lambda > 0: \sigma_\lambda(x, y) = 0\}$ ise, modüler metrik uzayların (i) aksiyomu $\mu > 0$ anlamına gelir. Aksi takdirde $\mu = 0$ ise $x = y$ elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x$ ve $\lambda = 3\mu/2$ olduğunda $\sigma_\lambda(x_n, y) = \sigma_\lambda(x_n, x) \leq \sigma_{3\mu/2}(x, y) = 0$ olur. Böylelikle $x_n \xrightarrow{\sigma} y$, aynı zamanda her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma_{\lambda/2}(x_n, y) = \sigma_{3\mu/4}(x, y) \neq 0$ olur.

Teorem 4.4.8 $x \in X$ verildiğinde $x \in X_\sigma^*$ ancak ve ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} (d(x_n, x_n^0))^{1/n} = 0$ dir.

İspat 4.4.8 $x \in X_\sigma^0(x^0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lambda \rightarrow \infty$ iken $\sigma_\lambda(x, x^0) \rightarrow 0$ olur ve böylece her $\varepsilon > 0$ için

$$\sigma_{\lambda_0}(x, x^0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{d(x_n, x_n^0)}{\lambda_0} \right)^{1/n} \leq \varepsilon \quad (1)$$

olacak şekilde $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon) > 0$ vardır. Bu eşitsizlik şu anlama gelir:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } (d(x_n, x_n^0))^{1/n} \leq (\lambda_0)^{1/n} \cdot \varepsilon \quad (2)$$

$n \rightarrow \infty$ üst sınırını alırsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (d(x_n, x_n^0))^{1/n} \leq \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ ın keyfiliği sebebiyle $n \rightarrow \infty$ iken $(d(x_n, x_n^0))^{1/n} \rightarrow 0$ olur.

$n \rightarrow \infty$ iken $(d(x_n, x_n^0))^{1/n} \rightarrow 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $n > n_0$ için $(d(x_n, x_n^0))^{1/n}$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$$\lambda_1(\varepsilon) = \max\{1, 1/\varepsilon^{n_0}\} \cdot \max_{1 \leq n \leq n_0} d(x_n, x_n^0)$$

olacak şekilde alırsak,

$$1 \leq n \leq n_0 \text{ için } d(x_n, x_n^0) = \frac{d(x_n, x_n^0)}{\varepsilon^n} \cdot \varepsilon^n \leq \lambda_1(\varepsilon) \cdot \varepsilon^n$$

yazılır. $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon) = \max\{1, \lambda_1(\varepsilon)\}$ seçersek (2) yi elde ederiz.

Dolayısıyla eşitsizliğini her $\lambda \geq \lambda_0$ için $\sigma_\lambda(x, x^0) \leq \sigma_{\lambda_0}(x, x^0) \leq \varepsilon$ şeklinde ifade edebiliriz. Bu da $\lambda \rightarrow \infty$ iken $\sigma_\lambda(x, x^0) \rightarrow 0$ anlamına gelir.

Örneğin, $x \in X_\sigma^0(x^0)$, d_σ^0 metriği $X_\sigma^*(x^0)$ modüler uzayında $x, y \in X_\sigma^*(x^0)$ olmak üzere şu şekilde verilir:

$$d_\sigma^0(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (d(x_n, y_n))^{1/(n+1)}$$

σ nin konveks olmadığını göz önünde bulundurarak $d_\sigma^*(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} d(x_n, y_n)$ in sadece bir $X_\sigma^*(x^0)$ ve X üzerinde genişletilmiş metrik olduğuna dikkat edilmelidir. Ancak d_σ^* , M deki tüm sınırlandırılmış kümeler üzerinde bir metriktir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n^0) = 0$ ise $x = \{x_n\} \in c(x^0)$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} d(x_n, x_n^0) < \infty$ ise $x = \{x_n\} \in l_\infty(x^0)$ yazarsak,

$$X_\sigma^0(x^0) \subset c(x^0) \subset l_\infty(x^0) \subset X_\sigma^{fin}(x^0) = X_\sigma^*(x^0)$$

elde edilir.

Not 4.4.9 σ , X üzerinde bir pseudomodüler ise $\forall x, y \in X$ olmak üzere,

$$a. \quad X_{\sigma^+}^* = X_{\sigma}^* = X_{\sigma^-}^*$$

$$b. \quad d_{\sigma^+}^0(x, y) = X_{\sigma}^0(x, y) = d_{\sigma^-}^0(x, y) \text{ dir.}$$

Not 4.4.10 (M, d) metrik uzayında $\lambda > 0, x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X = M^{\mathbb{N}}$ ve $\sigma_{\lambda}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (d(x_n, y_n)/\lambda)^{1/n}$ bir modüler olsun. $\mu > 0$ ve $x, y \in X$ için σ^+ doğru ters modülleri şöyle ifade edilir:

$$\sigma_{\mu}^+ = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{d(x_n, y_n)}{\mu^n}$$

Örnek 4.4.11 (1) $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $u > 0$, $\varphi(\infty) = \infty$ için $\varphi(+0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ elde edilir. O zaman her $u \geq 0$ için eğer $\varphi(2u) \leq c\varphi(u)$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti varsa φ , Δ_2 koşulunu sağlar. Örneğin, $\varphi(u) = u^p$ ($p > 0$) ve $\varphi(u) = (1 + |\log u|)u^p$ ($p \geq 1$) fonksiyonları Δ_2 – koşulunu sağlar, $\varphi(u) = \exp(u^p) - 1$ ($p \geq 1$) fonksiyonu ise sağlamaz.

Eğer φ, Δ_2 koşulunu sağlıyorsa, σ modülleri her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için $h(\lambda) = \lambda$ ve $X = M^{\mathbb{N}}$ üzerinde $\sigma_{\lambda 2}(x, y) \leq c\sigma_{\lambda}(x, y)$ eşitsizliğinin bir sonucu olarak Δ_2 'dir.

(2) $\lambda > 0$ ve $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X = M^{\mathbb{N}}$ verildiğinde, elde edilen

$$\sigma_{\lambda}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{d(x_n, y_n)}{\lambda} \right)^{1/n}$$

modülleri $X = M^{\mathbb{N}}$ üzerinde Δ_2 'dir ve $\sigma_{\lambda 2}(x, y) \leq 2\sigma_{\lambda}(x, y)$ elde edilir.

Bunun sağ tersinin X üzerinde Δ_2 olmayan σ^+ olduğu gösterilsin. Aşağıdaki özelliklerle birlikte bir $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset X_{\sigma^+}^{\text{fin}}$ dizisi gösterilecektir:

$k \rightarrow \infty$ iken $x^{(k)} \xrightarrow{\sigma^+} x \notin X_{\sigma^+}^{\text{fin}}$ dir. Bu da ki $X_{\sigma^+}^{\text{fin}}$ modüler uzayı σ^+ –yakınsamasına göre kapalı değildir anlamına gelir ve $k \rightarrow \infty$ iken $d_{\sigma^+}^0(x^{(k)}, x) \rightarrow 0$ olur ki bu σ^+ 'nın Δ_2 olmadığını gösterir.

$M = R$ olduğunda σ^+ şu formda olur:

$$\sigma_\mu^+(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{\mu^n}, \quad \mu > 0, \quad x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X = R^{\mathbb{N}}.$$

$x^0 = 0 = \{0\}_{n=1}^\infty$ merkezi için,

$$X_{\sigma^+}^{\text{fin}} = X_\sigma^0 \subset X_\sigma^* = X_{\sigma^+}^* = X_{\sigma^+}^0 = X_\sigma^{\text{fin}}$$

ve

$$X_{\sigma^+}^{\text{fin}} = X_\sigma^0 = \left\{ x = \{x_n\} \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} = 0 \right\} \subset X_{\sigma^+}^* = X_{\sigma^+}^0.$$

$k \in \mathbb{N}$ ise $x^{(k)} = \left(\frac{1}{k}, 1_2, 1_3, \dots, 1_k, 0, 0, \dots \right)$ olsun. Başka bir deyişle $2 \leq n \leq k$ iken $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ $x_1^{(k)} = 1/k, x_n^{(k)} = 1$, ve $n \geq k+1$ için $x_n^{(k)} = 0$ dır.

Bir σ^+ –yakınsak dizisinin koordinat olarak da yakınsadığını belirterek x limiti $\{x_n\}_{n=1}^\infty = (0, 1, 1, 1, \dots)$ ile tanımlansın. Açıkça görüldüğü üzere $X_{\sigma^+}^{\text{fin}}$ 'e ait tüm $x^{(k)}$ ler $x \in X_{\sigma^+}^* = X_\sigma^*$ ve $x \notin X_{\sigma^+}^{\text{fin}}$ elde edilir. $\mu = 2$ ise aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\left\{ \frac{|x_n^{(k)} - x_n|}{\mu^n} \right\}_{n=1}^\infty = \left(\frac{1}{2k}, 0_2, \dots, 0_k, \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+2}}, \frac{1}{2^{k+3}}, \dots \right).$$

$\frac{1}{2k} > \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2^{k+2}} > \dots$ olduğunda, $\sigma_2^+(x^{(k)}, x) = 1/2k$ elde edilir.

Örneğin, $x^{(k)} \xrightarrow{\sigma^+} x$ olsun. Diğer taraftan, $d_{\sigma^+}^0 = d_\sigma^0$ metriği ile her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d_{\sigma^+}^0(x^{(k)}, x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^{(k)} - x_n|^{1/n+1} = 1$$

yazılır. Buradanda $d_{\sigma^+}^0(x^{(k)}, x) \rightarrow 0$ elde edilir.

4.5. Modüler Topoloji

Modüler topoloji, modüler nesnelerin ve modüler grupların topolojik özelliklerini inceleyen bir matematik dalıdır. Bu alanda, modüler nesnelerin uzayları, bu uzaylardaki topolojik yapılar, modüler grupların topolojik özellikleri ve modüler formların analizi gibi konular incelenir. Modüler topoloji, genellikle sayı teorisi, cebirsel topoloji ve analiz gibi matematiksel disiplinlerle de sıkça ilişkilidir. Modüler uzaylar, genellikle modüler grupların üzerinde tanımlanan birçok farklı topolojik yapıya sahiptir. Bu uzaylar, modüler formların, q -serilerinin ve diğer modüler nesnelerin topolojik özelliklerini anlamak için kullanılır. Modüler topoloji, modüler uzaylarda açık kümeler, sürjektif, injektif ve bicontinuous fonksiyonlar gibi klasik topolojik kavramların modüler gruplar bağlamında genişletilmesini de içerir.

Tanım 4.5.1 (Modüler Açık Küme) Boş olmayan bir $U \subset X$ kümesinin her $x \in U$ ve $\lambda > 0$ için aşağıdaki durumlarda σ -açık veya modüler açık olduğu söylenir:

$\forall x \in U$ ve $\lambda > 0$ için $B_{\lambda, \mu}(x) \subset U$ olacak şekilde x ve λ 'ya bağlı olarak $\mu > 0$ vardır.

Eğer $x \in X_{\sigma}^*(x^0)$ ise, her $\lambda, \mu > 0$ için $B_{\lambda, \mu}(x) \subset X_{\sigma}^*(x^0)$ olur. Yani merkezi $x^0 \in X$ olan X_{σ}^* 'in σ -açık altkümeleri için:

$$U \subset X \text{ } \sigma\text{-açıktır} \Leftrightarrow \forall x^0 \in X \text{ için } U \cap X_{\sigma}^*(x^0) \text{ } \sigma\text{-açıktır.}$$

Tanım 4.5.2 (Modüler Topoloji) X_{σ}^* 'in tüm σ -açık altkümelerinin ailesini $\tau(\sigma)$ ile gösterelim. $\tau(\sigma)$ 'nin X_{σ}^* üzerinde bir topoloji olduğu açıktır. Yani $\tau(\sigma)$, $\emptyset$ ve X_{σ}^* içerir ve keyfi birleşmeler ve sonlu kesişmeler altında kapalıdır. X_{σ}^* üzerinde σ -topolojisi veya modüler topoloji olarak adlandırılır.

Teorem 4.5.3 $x \in X_{\sigma}^*$ ve $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ bir fonksiyon olmak üzere $U_{\varphi}(x) = \bigcup_{\lambda > 0} B_{\lambda, \varphi(\lambda)}(x)$ olsun, dur. Bu durumda $U_{\varphi}(x) \in \tau(\sigma)$, aşağıdaki iki özdeşlikten birini sağlar.

- φ , $(0, \infty)$ üzerinde azalmayandır.
- σ konvektir ve $\lambda \rightarrow \lambda\varphi(\lambda)$, $(0, \infty)$ üzerinde azalmayandır.

İspat 4.5.3 Her iki durumda da $y \in U_\varphi(x)$ ve $\lambda > 0$ verildiğinde, $\mu = \mu(y, \lambda) > 0$ olacak şekilde $B_{\lambda, \mu}(y) \subset U_\varphi(x)$ dır. Öyleki $y \in U_\varphi(x)$ olduğunda, $y \in B_{\lambda_0, \varphi(\lambda_0)}(x)$ olacak şekilde $\lambda_0 = \lambda_0(y) > 0$ vardır, örneğin, $\sigma_{\lambda_0}(x, y) < \varphi(\lambda_0)$.

- a. $\mu = \mu(y, \lambda) = \varphi(\lambda_0 + \lambda) - \sigma_{\lambda_0}(x, y)$ kümesi, φ, μ nin monotonluğu ile, iyi tanımlıdır, yani $\mu \geq \varphi(\lambda_0) - \sigma_{\lambda_0}(x, y) > 0$ dır.

Şimdi $z \in B_{\lambda, \mu}(y)$ olsun. Bu durumda $\sigma_\lambda(y, z) < \mu$ ve modüler metrik uzayların (iii) aksiyomu ile,

$$\sigma_{\lambda_0 + \lambda}(x, z) \leq \sigma_{\lambda_0}(x, y) + \sigma_\lambda(y, z) < \sigma_{\lambda_0}(x, y) + \mu = \varphi(\lambda_0 + \lambda)$$

bulunur ve böylece $z \in B_{\lambda_0 + \lambda, \varphi(\lambda_0 + \lambda)}(x) \subset U_\varphi(x)$ tir. Bu da $B_{\lambda, \mu}(y) \subset U_\varphi(x)$ olduğunu gösterir.

- b. $\lambda \rightarrow \lambda\varphi(\lambda)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında azalmayan bir fonksiyon olduğundan $(\lambda_0 + \lambda)\varphi(\lambda_0 + \lambda) - \lambda_0\sigma_{\lambda_0}(x, y) \geq \lambda_0\varphi(\lambda_0) - \lambda_0\sigma_{\lambda_0}(x, y) > 0$

elde ederiz ve bundan dolayı aşağıdaki ifade pozitifdir.

$$\mu = \mu(y, \lambda) = \frac{(\lambda_0 + \lambda)\varphi(\lambda_0 + \lambda) - \lambda_0\sigma_{\lambda_0}(x, y)}{\lambda}$$

Eğer $z \in B_{\lambda, \mu}(y)$ ise $\sigma_\lambda(y, z) < \mu$ olduğunda modüler metrik uzayların (iv) konvekslik aksiyomu ile,

$$\sigma_{\lambda_0 + \lambda}(x, z) \leq \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda} \sigma_{\lambda_0}(x, y) + \frac{\lambda}{\lambda_0 + \lambda} \sigma_\lambda(y, z) < \frac{\lambda_0\sigma_{\lambda_0}(x, y) + \lambda\mu}{\lambda_0 + \lambda} = \varphi(\lambda_0 + \lambda)$$

olur. Böylece $z \in B_{\lambda_0 + \lambda, \varphi(\lambda_0 + \lambda)}(x) \subset U_\varphi(x)$ olur ki bu da $B_{\lambda, \mu}(y) \subset U_\varphi(x)$ olduğunu kanıtlar.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

"Modüler uzaylar ve topolojik yapılar arasındaki ilişkiyi inceleyen bu tez, asıl olarak, modüler uzaylar ve sabit nokta teoremi üzerinde yoğunlaşmışken, sonraki çalışmalara temel teşkil etmesi için modüler uzaylar üzerindeki topolojiyi incelemeye evrilmiştir. Modüler uzaylar, belirli bir özdeşlikler ile bir araya getirilen matematiksel nesnelerden oluşan alanlar olarak tanımlanabilir. Bu çalışma, modüler uzayların topolojik yapılarla olan etkileşimini anlamak ve bu etkileşimin topoloji teorisine olan katkısını değerlendirmek amacıyla gerçekleştirilmiştir.

Araştırma sonuçları, modüler uzayların topolojik yapılar üzerinde çeşitli etkileri olduğunu göstermektedir. Modüler uzaylar, özellikle cebirsel topoloji bağlamında, homoloji teorisi ve izomerlik problemleri gibi konularda önemli bir rol oynayabilir. Modüler uzayların topolojik özellikleri, bu alanda yeni teoremlerin geliştirilmesine ve mevcut teorilerin genişletilmesine olanak tanıyabilir.

Modüler uzayların topolojik veri analizi ve özellikle de öbek analizi gibi uygulamalarda kullanılabilirliği. Modüler uzaylar, veri setlerini daha iyi anlamamıza ve topolojik özelliklerini çıkarmamıza yardımcı olarak bilgi çıkarma süreçlerini geliştirebilir. Bu, özellikle biyoinformatik, nöroloji ve diğer bilimsel alanlarda topolojik veri analizi uygulamalarında potansiyel avantajlar sunabilir.

Ancak, bu çalışmanın sınırlamaları ve gelecekteki çalışmalara yönelik öneriler de bulunmaktadır. Modüler uzaylar ve topoloji arasındaki ilişkiyi daha derinlemesine anlamak için daha fazla matematiksel teorik çalışma ve uygulama odaklı araştırmalara ihtiyaç vardır. Ayrıca, modüler uzayların topolojik özelliklerinin özellikle büyük veri setleri için nasıl ele alınabileceği konusunda daha fazla metodolojik geliştirme yapılmalıdır.

Sonuç olarak, bu tez, modüler uzayların topolojik yapılarla etkileşimi üzerine temel teşkil etmesi amaçlanmıştır. Bu alandaki ilerlemeler, matematiksel teorilerin genişlemesine ve topolojik veri analizi uygulamalarının gelişmesine olanak tanıyacaktır."



Kaynaklar

- Ando, M., Hopkins, M. J. and Rezk. C. (2010). Multiplicative orientations of KO- theory and of the spectrum of topological modular forms.
- Banach, S. (1922). Sur lesopérations dans lesensemblesabstraits et leursapplications. *Fund. Math.* 3, 133-181.
- Banach, S. (1932). Théorie des opérations linéaires. *MonografieMatematyczne* 1.
- Brouwer, L.E.J. (1912). Uber abbildung von mannigfaltigkeiten. *MathematischeAnnalen*, 71, 97-115.
- Chistyakov, V. (2006). Metric modulars and their application. *Dokl. Akad. Nauk* 406, 2, 165-168.
- Chistyakov, V. (2008). Modölar metric sapaces generated by F-Modulars. *FoliaMathematica*. 15,1. 3-24.
- Chistyakov, V. (2010), Modular metric spaces, I: basic concepts. *Nonlinear Analysis*, 72, 1-14.
- Chistyakov, V. (2010), Modular metric spaces, II: Application to superposition operators. *Nonlinear Analysis*, 72, 15-30.
- Chistyakov, V. (2011), A fixed point theorem for contractions in modular metric spaces. *Preprint submitted* arXiv:1112.5561, 1-31.
- Chistyakov, V. (2015), Metric modular spaces theory and applications. *Springer*.
- Frechet, M. (1906). Sur guelgues points ducalculfunctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo*.22(1), 1-72.
- Hausdorff, F. (1914). Grundzüge der mengenlehre. *VeitandCompany*.
- J. Musielak and W. Orlicz , (1959) On modular spaces, *Studia Math.* 18, p. 49-65.
- Khamsi, M., & Kozłowski, W. (2015). Fixed point theory in modular function spaces. *Birkhäuser*.
- Kirk, W., & Sims, B. (Ed). (2001). Handbook of metric fixed point theory. *KluwerAcad. Publ.*
- Kefeng L. (1991) Modular forms and topology, *Mathematics Subject Classification*. 55P35, 55N91, 58G10
- Kozłowski, W.M. 1988. Modular function spaces, Series of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 122. Cilt, Dekker, New York (Base).

- Kreyszig, E. (1978). Introductory functional analysis with applications. *John Wiley&Sons*.
- Kuratowski, K. (1966). Topology, Vol. 1, *AcademicPress*.
- Mazur, S., & Orlicz, W. (1958). On some classes of linear spaces. *Studia Math.* 17, 97-119.
- Meggison, R.E. (1998). An introduction to Banach space theorey. *Springer-Verlag*.
- Musielac, J., & Orlicz, W. (1959). On modular spaces. *Studia Math*, 49-65.
- Musielak, J., & Orlicz W. (1983). Spaces and modular spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1034.
- Nakano, H. (1950). Modular semi-ordered spaces. *Maruzen*.
- Nakano, H. (1951) Topology of linear topological spaces. *Maruzen*.
- Orlicz, W. (1988). Collected papers. vols. I, II, *PWN*.
- Rolewicz, S. (1985). Metric linear spaces. *PWN-Reidel*.
- Wang Sheng-Wang, (1963) Convex functions of several variables and vectorvalued Orlicz spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. et Phys.* 11, p. 279-284.