



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



HARMONİK HORADAM SAYILARI VE
UYGULAMALARI

Zarife TAMER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Zarife TAMER
31.01.2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HARMONİK HORADAM SAYILARI VE UYGULAMALARI

Zarife TAMER

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

2023, 31 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Doç. Dr. Melek ERDOĞDU

Bu tezde, ilk olarak harmonik Horadam sayıları tanımlanmıştır. Daha sonra, fark operatör yöntemi kullanılarak harmonik Horadam sayılarını içeren toplam formülleri elde edilmiştir. Ayrıca, elemanları harmonik Horadam sayıları olan circulant matrisler tanımlanmış ve bu matrislerin Euclidean, spektral, satır(sütun) normları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Circulant matrisler, Euclidean norm, Fark operatörü, Harmonik sayılar, Horadam sayıları, Satır(sütun) norm, Spektral norm.

ABSTRACT

MS THESIS

HARMONIC HORADAM NUMBERS AND APPLICATIONS

Zarife TAMER

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
MATHEMATIC**

Advisor: Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

2023, 31 Pages

Jury

Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

In this thesis, firstly the harmonic Horadam numbers are defined. Afterwards, sum formulas including harmonic Horadam numbers are obtained by using the difference operator method. In addition, circulant matrices with harmonic Horadam numbers are defined and Euclidean, spectral, row (column) norms of these matrices are obtained.

Keywords: Circulant matrices, Difference operatör, Euclidean norm, Harmonic numbers, Horadam numbers, Row(column) norm, Spectral norm.

ÖNSÖZ

Harmonik Horadam Sayıları ve Uygulamaları isimli bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tezin yazım sürecinin her aşamasında beni destekleyen, görüş ve önerileri ile çalışmanın içeriğini zenginleştiren ve yakından ilgilenen danışman hocam Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmamı yazarken beni daima destekleyen ve üzerimde emeği çok olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Zarife TAMER
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER.....	4
3. HARMONİK HORADAM SAYILARI	14
4. HARMONİK HORADAM SAYILARI İLE TANIMLI CİRCULANT MATRİSLER	21
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	28
6. KAYNAKLAR	29

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

Δ : Fark operatörü

Σ : Ters fark operatörü

H_n : n –inci Harmonik sayı

h_n : n –inci Horadam sayısı

$\mathbb{H}_n$: n –inci Harmonik Horadam sayısı

A^* : A matrisinin transpozunun eşleniği

$\binom{n}{k}$: Binom katsayısı

$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$: Birinci çeşit Stirling sayısı

$\|\cdot\|_1$: Sütun normu

$\|\cdot\|_\infty$: Satır normu

$\|\cdot\|_E$: Euclidean normu

$\|\cdot\|_2$: Spektral normu

F_n : n – inci Fibonacci sayısı

L_n : n – inci Lucas sayısı

P_n : n – inci Pell sayısı

Q_n : n – inci Pell Lucas sayısı

J_n : n – inci Jacobsthal sayısı

j_n : n – inci Jacobsthal-Lucas sayısı

T_n : n – inci Tagiuri sayısı

x^n : x ’in n azalan kuvveti

1. GİRİŞ

Harmonik sayıların özellikleri ve çeşitli genelleştirmeleri günümüze kadar birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu sayılar özellikle sayılar teorisinin çeşitli dallarında önemlidir. Örneğin; Riemann Zeta fonksiyonu gibi özel tanımlı fonksiyonlarla doğrudan ilişkili olarak kullanılmaktadır. Harmonik sayılar doğal logaritma fonksiyonuna yaklaşır bu nedenle bu sayılarla ilişkili harmonik seriler yavaş da olsa sınırsız büyür. Leonhard Euler, asalların sayısının sonsuz olduğunun farklı bir ispatı için bu serilerin ıraksaklığını kullanmıştır. Euler 'in bu çalışmasını kompleks düzleme Riemann 1859 yılında genişletmiş ve Riemann hipotezi olarak adlandırılan hipotezin temelini oluşturmuştur (Anonim, 2022).

Graham ve arkadaşları tarafından 1989 yılında yayınlanan Concrete Mathematics isimli kitapta, harmonik sayıları içeren birçok toplamsal ifade fark operatörleri kullanılarak gösterilmiştir (Graham, Knuth ve Patashnik, 1989).

Spivey ise bazı özel sayı dizileri için toplam formülleri elde etmiştir. Ayrıca, harmonik sayıların binomial dönüşümü ve alterne binomial dönüşümünü göstermiştir (Spivey, 2007).

Conway ve Guy, hiperharmonik sayıları tanımlamışlar ve bu sayıların harmonik sayılar cinsinden yazılabileceğini göstermişlerdir (Conway ve Guy, 1996).

Benjamin ve arkadaşları, hiperharmonik sayılar içeren toplamaları elde etmişlerdir (Benjamin, Gaebler D ve Gaebler R, 2003).

Cheon ve Mikkawy, genelleştirilmiş harmonik sayılar içeren bazı özdeşlikleri ve matris temsillerini elde etmişlerdir (Cheon ve Mikkawy, 2007).

Kronenburg, genelleştirilmiş harmonik sayıları tanımlayarak, bu sayılarla ilgili bazı özdeşlikler vermiştir (Kronenburg, 2011).

Kızılateş, doktora tezinde harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayılarını tanımlayarak özelliklerini incelemiştir. Ayrıca, harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayılarının matrislerdeki uygulamalarını ve bu uygulamaların nümerik sonuçlarını vermiştir (Kızılateş, 2016).

Tuğlu, Kızılateş ve Kesim, harmonik Fibonacci ve hiperharmonik Fibonacci sayıları tanımlayarak çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir (Tuğlu, Kızılateş ve Kesim, 2015).

Literatürde harmonik sayıların q - genelleştirmesi de mevcuttur. Dilcher, harmonik sayıların iki farklı q - benzerini tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir (Dilcher, 2008). Mezö, klasik harmonik sayıların üç farklı q - benzerini tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir (Mezö, 2011). Mansour ve arkadaşları ise harmonik sayılar içeren çeşitli toplamaların q - benzerini elde etmişlerdir (Mansour, Stattuck ve Song, 2012). Kızılateş ve Tuğlu, harmonik ve hiperharmonik sayıların q - benzerlerini göz önüne almış ve bu sayıların çeşitli toplamsal özelliklerini q - fark operatörünü kullanarak elde etmişlerdir (Kızılateş ve Tuğlu, 2015).

Klasik Fibonacci ve Lucas dizilerinin çeşitli genelleştirmeleri birçok araştırmacının çalışma konusu olmuştur. Bunlardan en önemlisi Horadam tarafından tanımlanmıştır ve günümüzde Horadam dizisi olarak anılmaktadır (Horadam, 1965). Yazar, $W_n(a, b; p, q)$ şeklinde gösterdiği bu dizinin bazı önemli özelliklerini diğer bir çalışmada yer vermiştir (Horadam, 1967). Horadam dizileri ile ilgili birçok çalışma olmakla birlikte bazılarında bahsedilecektir.

Udrea, Horadam dizisini göz önüne alarak bu dizinin bazı özelliklerini ifade etmiştir (Udrea, 1996). Mansour, Horadam sayılarının kuvvetleri için üreteç fonksiyonu vermiştir (Mansour, 2004). Čerin, Horadam sayılarının çarpımları için çeşitli toplamalar elde etmiştir (Čerin, 2009).

Haukkanen ise Horadam sayılarının lineer kombinasyonlarını ve iki Horadam dizisi için üreteç fonksiyonunu göstermiştir (Haukkanen, 2002). Horzum ve Koçer, Horadam polinom dizisini tanımlamış ve bu polinomların bazı özelliklerini incelemiştir (Horzum ve Koçer, 2009).

Circulant matrislerin matris teoride önemli bir yeri olmakla birlikte bu matrislerin sayısal analiz, kontrol teori ve matematiksel istatistik gibi alanlarda da çok sayıda uygulaması vardır. Circulant matrislerle ilgili en önemli kaynak Davis tarafından 1979 yılında yayınlanmıştır (Davis, 1979).

Karner ve arkadaşları, sağ circulant, sol circulant, ters sağ circulant ve ters sol circulant matrislerin dört tipi için singüler değer ayrışımını ve spektral ayrışımını incelemiştir (Karner, Schneid ve Ueberhuber, 2003).

Daha sonraki yıllarda elemanları sayı dizileri olan circulant matrisler tanımlanmıştır ve bu matrislerin özellikleri araştırılmıştır. Şimdi, bu çalışmaların bazılarını verelim.

Solak, elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olan circulant matrislerin spektral ve Euclidean normları için bazı sınırlar vermiştir (Solak, 2005).

Bahşi ve Solak, elemanları aritmetik diziler olan circulant matrislerin normlarını göstermişlerdir (Bahşi ve Solak, 2010a). Yazarlar diğer bir çalışmalarında ise elemanları harmonik sayılar olan matrislerin normlarını elde etmişlerdir (Bahşi ve Solak, 2010b).

Tuğlu ve Kızılateş, elemanları harmonik Fibonacci sayıları olan circulant matrisleri göz önüne almış ve bu matrislerin normlarını incelemişlerdir (Tuğlu ve Kızılateş, 2015).

Koçer ve arkadaşları, elemanları Horadam sayıları olan circulant ve semicirculant matrislerin normları, özdeğerleri ve determinantlarını araştırmışlardır (Koçer, Mansour ve Tuğlu, 2007).

Bu çalışmada, literatürde yapılan tüm bu çalışmalar ışığında üçüncü bölümde harmonik Horadam sayıları tanımlanmış ve bu sayıların özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, elemanları harmonik Horadam sayıları olan circulant matrisler göz önüne alınmıştır. Daha sonra bu matrislerin Euclidean, spektral, satır(sütun) normları elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, fark operatörleri harmonik sayılar, Horadam sayıları ve circulant matrislerin genel tanım ve özellikleri verilecektir. İlk olarak harmonik sayıların tanım ve özellikleri ifade edilecektir.

Tanım 2.1. $n \geq 0$ olmak üzere

$$H_0 = 0 \text{ ve } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (2.1)$$

ile gösterilen H_n sayısına n -inci harmonik sayı denir (Graham, Knuth ve Patashnik, 1989).

Harmonik sayıların ilk birkaç elemanı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
H_n	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$

Tablo 2.1.

Harmonik sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$H_x = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

şeklinde verilmiştir (Bahsi ve Solak, 2010b)

Graham ve arkadaşları harmonik sayıları içeren toplam formüllerini

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n \quad (2.2)$$

$n^2 = n(n-1)$ ve m negatif olmayan tamsayı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1} \left(H_n - \frac{1}{m+1} \right) \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k H_k = n^2 \left(H_n - \frac{1}{2} \right) \quad (2.4)$$

şeklinde elde etmişlerdir (Graham, Knuth ve Patashnik, 1989).

Spivey, kombinatoryal toplamaları kullanarak farklı bir yaklaşımla

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k = 2^n \left(H_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 2^k} \right) \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} H_k = 2^{n-1} \left(H_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 2^{k-1}} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n 2^{n-1}} \right) \quad [n \geq 1] \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k+1} H_k = 2^{n-1} \left(H_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 2^{k-1}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n 2^{n-1}} \right) \quad [n \geq 1] \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k H_k = -\frac{1}{n} \quad (2.8)$$

toplamalarını elde etmiştir (Spivey, 2007).

Tanım 2.2. n ve k negatif olmayan tamsayılar ve $k < n$ olmak üzere, n elemanlı bir küme üzerinde tanımlı k tane ayrık devrin çarpımından oluşan permütasyonların sayısına birinci çeşit Stirling sayısı denir ve $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ şeklinde gösterilir (Murray, 1961).

Örnek 2.1. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde tanımlı 2 ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonlar

$$\alpha_1 = (1)(23), \alpha_2 = (2)(13), \alpha_3 = (3)(12)$$

şeklinde dir.

Böylece 3 elemanlı A kümesi üzerinde tanımlı 2 ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısı $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$ olur.

Murray tarafından birinci çeşit Stirling sayılarının bazı özellikleri

i) $k > n$ ise $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ dır.

ii) $k = 0, n = 0$ ise $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ dir.

iii) $n > 0, k = 0$ ise $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ dır.

iv) $k = 1$ ise $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ dir.

v) $k = n$ ise $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ dir.

vi) $n > 0, k = 2$ ise $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ dır.

şeklinde verilmiştir (Murray, 1961).

Teorem 2.1. n, k pozitif tamsayılar olmak üzere birinci çeşit Stirling sayıları için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

dır (Mond ve Krammer, 2004).

Teorem 2.2. n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$

dir (Mond ve Krammer, 2004).

Graham ve arkadaşları tarafından harmonik sayılar ile birinci çeşit Stirling sayısı arasındaki ilişki incelenmiştir. $n \geq 0$ ve H_n , n -inci harmonik sayı olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n!H_n \quad (2.9)$$

dır (Graham, Knuth ve Patashnik, 1989).

A. F. Horadam tarafından tanımlanan $\{W_n(a, b; p, q)\}$ şeklinde gösterilen ve kendi adıyla anılan Horadam dizisi ve özellikleri incelenecektir. Çalışmamızda Horadam dizisi $\{h_n(a, b; p, q)\}$ ile temsil edilecektir.

Tanım 2.3. $n \geq 2$ ve $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$, $p^2 + 4q \neq 0$ olmak üzere;

$$h_n(a, b; p, q) = ph_{n-1}(a, b; p, q) + qh_{n-2}(a, b; p, q) \quad (2.10)$$

rekürans bağıntısı ve $h_0(a, b; p, q) = a$ ve $h_1(a, b; p, q) = b$ başlangıç şartları ile tanımlanan $\{h_n(a, b; p, q)\}$ dizisine Horadam dizisi denir (Horadam, 1965).

(2.10) bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0 \quad (2.11)$$

dir. (2.11) denkleminin reel kökleri α ve β olmak üzere Horadam dizisinin Binet formülü

$$h_n = A\alpha^n + B\beta^n = A\left(\frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}\right)^n + B\left(\frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}\right)^n$$

dir. Burada $A = \frac{b-a\beta}{\sqrt{p^2+4q}}$ ve $B = \frac{a\alpha-b}{\sqrt{p^2+4q}}$ dır (Horadam,1965).

Teorem 2.3. $\{h_n(a,b;p,q)\}$ Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu

$$h(t) = \frac{a+t(b-ap)}{1-pt-qt^2}$$

dir (Horadam,1965).

Horadam dizisinin ilk birkaç elemanı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.2.

n	$h_n(a,b;p,q)$
0	a
1	b
2	$pb+qa$
3	$p^2b+pqa+qb$
4	$p^3b+p^2qa+2pqb+q^2a$
5	$p^4b+p^3qa+3p^2qb+2pq^2a+q^2b$
6	$p^5b+p^4qa+4p^3qb+3p^2q^2a+3pq^2b+q^3a$
7	$p^6b+p^5qa+5p^4qb+4p^3q^2a+6p^2q^2b+3pq^3a+q^3b$
8	$p^7b+p^6qa+6p^5qb+5p^4q^2a+10p^3q^2b+6p^2q^3a+4pq^3b+q^4a$

$h_n(a,b;p,q)$, n -inci Horadam sayısı olup bu sayı için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

1) $a=0, b=1; p=q=1$ için $h_n(0,1;1,1) = F_n$ dir. F_n , n -inci Fibonacci sayısıdır.

- 2) $a = 2, b = 1; p = q = 1$ için $h_n(2, 1; 1, 1) = L_n$ dir. L_n , n –inci Lucas sayısıdır.
- 3) $a = 0, b = 1; p = 2, q = 1$ için $h_n(0, 1; 2, 1) = P_n$ dir. P_n , n –inci Pell sayısıdır.
- 4) $a = 2, b = 2; p = 2, q = 1$ için $h_n(2, 2; 2, 1) = Q_n$ dir. Q_n , n –inci Pell Lucas sayısıdır.
- 5) $a = 0, b = 1; p = 1, q = 2$ için $h_n(0, 1; 1, 2) = J_n$ dir. J_n , n –inci Jacobsthal sayısıdır.
- 6) $a = 2, b = 1; p = 1, q = 2$ için $h_n(2, 1; 1, 2) = j_n$ dir. j_n , n –inci Jacobsthal-Lucas sayısıdır.
- 7) $p = 1, q = 1$ için $h_n(a, b; 1, 1) = T_n$ dir. T_n , n –inci Tagiuri sayısıdır.

Teorem 2.4. $n \geq 1$, $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$ ve h_n , n –inci Horadam sayısı olmak üzere

$$h_n = a \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} p^{n-2k} q^k + (b - pa) \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} p^{n-1-2k} q^k$$

dir (Haukkanen, 2002).

Teorem 2.5. h_n , n –inci Horadam sayısı ve $p + q \neq 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_k = \frac{1}{p + q - 1} (h_n + qh_{n-1} + pa - a - b) \quad (2.12)$$

dir (Koçer, Mansour ve Tuğlu, 2007).

Şimdi de çalışmamızın esas kısmında kullanacağımız sonlu fark operatörler ile ilgili genel bilgi verilecektir. Vereceğimiz tüm tanım ve özellikler Graham, Knuth ve Patashnik tarafından hazırlanan Concrete Mathematics isimli kitaptan alınmıştır (Graham, Knuth ve Patashnik, 1989).

Tanım 2.4. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için sonlu fark operatörü

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \quad (2.13)$$

dır (Graham, Knuth ve Patashnik, 1989).

Tanım 2.5. $m \geq 0$ tamsayı ve x 'in m azalan kuvveti

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)$$

dır.

(2.13) eşitliğinde fark operatörü tanımı kullanılırsa

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = m(x)^{\underline{m-1}}$$

elde edilir. Ayrıca $m > 0$ için

$$x^{-\underline{m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}$$

olup, harmonik sayılar için

$$x^{-1} = \frac{1}{x+1} = \Delta H(x)$$

bulunur (Graham, Knuth ve Patashnik, 1989).

Teorem 2.6. n, k negatif olmayan tamsayılar ve $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ birinci çeşit Stirling sayısı olmak üzere

$$(x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

dir (Murray, 1961).

Teorem 2.7. Δ operatörünün ters fark operatörü Σ olsun. $\Delta f(x) = g(x)$ ise $b \geq a$ için

$$\sum_a^b g(x) \delta_x = \sum_a^{b-1} g(x) = f(b) - f(a) \quad (2.14)$$

dir.

Graham ve arkadaşları tarafından ters fark operatörü için bazı özellikler

$$\sum_a^b x^m \delta_x = \begin{cases} \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_a^b, & m \neq -1 \\ H_x \Big|_a^b, & m = -1 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\sum_{0 \leq k < n} k = \frac{n^2}{2} \quad (2.16)$$

$$\sum_{0 \leq k < n} k^2 = \frac{n^2(2n-1)}{6} \quad (2.17)$$

$$\sum_{a \leq k < b} c^k = \sum_a^b c^x \delta_x = \frac{c^b - c^a}{c - 1} \quad [c \neq 1] \quad (2.18)$$

$$\sum_a^b u(x) \Delta v(x) \delta_x = u(x) v(x) \Big|_a^b - \sum_a^b v(x+1) \Delta u(x) \delta_x \quad (2.19)$$

şeklinde verilmiştir (Graham, Knuth ve Patashnik, 1989).

Örnek 2.2. $u(k) = H_k$ ve $\Delta v(k) = k$ olarak alınırsa $\Delta u(k) = \frac{1}{k+1} = k^{-1}$ ve $v(k) = \frac{k^2}{2}$, $v(k+1) = \frac{(k+1)^2}{2}$ olur. Burada (2.19) ifadesinden

$$\sum_{k=0}^n k H_k \delta_k = \frac{k^2}{2} H_k \Big|_0^n - \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)^2}{2} k^{-1} \delta_k$$

olup, (2.14) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_0^{n-1} k H_k = \frac{n^2}{2} \left(H_n - \frac{1}{2} \right) \quad (2.20)$$

elde edilir (Graham, Knuth ve Patashnik, 1989).

Şimdi, matris teorisinde çok önemli yeri olan circulant matrislerin tanım ve özelliklerini verilecektir.

Tanım 2.6. $a \in \mathbb{R}^n$ ve $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$ olsun. $n \times n$ tipindeki circulant matris $C(a)$ ile gösterilir ve

$$C(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Davis, 1979).

Circulant matrislerde her satırda aynı elemanlar vardır. Satırlar arasındaki tek fark elemanların sağa doğru bir adım kaymasıdır. Bundan dolayı tüm circulant matrisler ilk satır veya sütun tarafından tanımlanabilir. Yani kısaca circulant matrisler $C(a) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ şeklinde gösterilebilir (Davis, 1979).

$C(a) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ circulant matrisin özdeğerleri, w birimin n -inci primitif kökü ve $j = 0, 1, \dots, n-1$ olmak üzere

$$\lambda_j(C(a)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (w^j)^k \quad (2.21)$$

dir (Kra ve Simanca, 2012).

$C(a) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ circulant matrisinin determinantı, w birimin n -inci primitif kökü ve $j = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$\det(C(a)) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j (w^i)^j \right)$$

dir (Davis, 1979).

Şimdi, matris normları ile ilgili bilinen bazı tanım ve teoremleri verelim. $A = (a_{ij})$ $n \times n$ bir matris olsun. A matrisi için bazı norm çeşitleri

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{Sütun normu})$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{Satır normu})$$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Euclidean normu})$$

$$\|A\|_2 = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^*A) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Spektral normu})$$

şeklindedir (Horn ve Johnson, 1991).

Teorem 2.8. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun. A matrisinin normal matris olması için gerek ve yeter şart AA^* matrisinin özdeğerlerinin $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2$ olmasıdır (Taşcı, 2005).



3. HARMONİK HORADAM SAYILARI

Bu bölümde harmonik sayılar ve Horadam sayılarının özelliklerinden yararlanarak harmonik Horadam sayıları tanımlanacaktır. Daha sonra fark operatörleri kullanılarak harmonik Horadam sayılarını içeren toplam formülleri elde edilecektir.

Tanım 3.1. $n \geq 1$ ve h_n , n –inci Horadam sayısı olmak üzere

$$\mathbb{H}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{H}_n$ sayısına n –inci harmonik Horadam sayısı denir.

$\{\mathbb{H}_n\}$ harmonik Horadam dizisinin ilk birkaç elemanı aşağıdaki tabloda görülebilir.

Tablo 3.1.

n	$\mathbb{H}_n(a, b; p, q)$
1	$\frac{1}{b}$
2	$\frac{1}{b} + \frac{1}{pb + qa}$
3	$\frac{1}{b} + \frac{1}{pb + qa} + \frac{1}{p^2b + pqa + qb}$
4	$\frac{1}{b} + \frac{1}{pb + qa} + \frac{1}{p^2b + pqa + qb} + \frac{1}{p^3b + p^2qa + 2pqb + q^2a}$
5	$\frac{1}{b} + \frac{1}{pb + qa} + \frac{1}{p^2b + pqa + qb} + \frac{1}{p^3b + p^2qa + 2pqb + q^2a} + \frac{1}{p^4b + p^3qa + 3p^2qb + 2pq^2a + q^2b}$

$\mathbb{H}_n(a, b; p, q)$, n –inci harmonik Horadam sayısı olmak üzere, bu sayı için özel durumlar aşağıda gösterilmiştir.

1) $a = 0, b = 1; p = q = 1$ için $\mathbb{H}_n(0, 1; 1, 1) = \mathbb{F}_n$ dir. $\mathbb{F}_n$, n –inci harmonik Fibonacci sayıdır (Kızılateş, 2016).

2) $a = 2, b = 1; p = q = 1$ için $\mathbb{H}_n(2, 1; 1, 1) = \mathbb{L}_n$ dir. $\mathbb{L}_n$, n –inci harmonik Lucas sayıdır.

3) $a = 0, b = 1; p = 2, q = 1$ için $\mathbb{H}_n(0, 1; 2, 1) = \mathbb{P}_n$ dir. $\mathbb{P}_n$, n –inci harmonik Pell sayıdır.

4) $a = 2, b = 2; p = 2, q = 1$ için $\mathbb{H}_n(2, 2; 2, 1) = \mathbb{Q}_n$ dir. $\mathbb{Q}_n$, n –inci harmonik Pell- Lucas sayıdır.

5) $a = 0, b = 1; p = 1, q = 2$ için $\mathbb{H}_n(0, 1; 1, 2) = \mathbb{J}_n$ dir. $\mathbb{J}_n$, n –inci harmonik Jacobsthal sayıdır.

6) $a = 2, b = 1; p = 1, q = 2$ için $\mathbb{H}_n(2, 1; 1, 2) = \mathcal{J}_n$ dir. $\mathcal{J}_n$, n –inci harmonik Jacobsthal- Lucas sayıdır.

Teorem 3.1. $\mathbb{H}_n$, n –inci harmonik Horadam sayısı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k = n\mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}} \quad (3.2)$$

dir.

İspat. (2.19) ifadesinde $u(k) = \mathbb{H}_k$ ve $\Delta v(k) = 1$ olarak alınırsa $\Delta u(k) = \frac{1}{h_{k+1}}$, $v(k) = k$ ve $v(k+1) = k+1$ olup,

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{H}_k \delta_k = k\mathbb{H}_k \Big|_0^n - \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{h_{k+1}} \delta_k$$

olur. Burada (2.14) ifadesi kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k = n\mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}}$$

elde edilir.

Teorem 3.2. $\mathbb{H}_n$, n -inci harmonik Horadam sayısı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k^2 = n\mathbb{H}_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}} \left(2\mathbb{H}_k + \frac{1}{h_{k+1}} \right) \quad (3.3)$$

dir.

İspat. (2.19) ifadesinde $u(k) = \mathbb{H}_k^2$ ve $\Delta v(k) = 1$ olarak seçilirse

$$\Delta u(k) = \frac{1}{h_{k+1}} \left(2\mathbb{H}_k + \frac{1}{h_{k+1}} \right), \quad v(k) = k \text{ ve } v(k+1) = k+1 \text{ olup,}$$

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{H}_k^2 \delta_k = k\mathbb{H}_k^2 \Big|_0^n - \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{h_{k+1}} \left(2\mathbb{H}_k + \frac{1}{h_{k+1}} \right) \delta_k$$

olur. (2.14) ifadesinden

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k^2 = n\mathbb{H}_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}} \left(2\mathbb{H}_k + \frac{1}{h_{k+1}} \right)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.3. $\mathbb{H}_n$, n -inci harmonik Horadam sayısı ve m negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{m} \mathbb{H}_k = \binom{n}{m+1} \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+1}{m+1} \frac{1}{h_{k+1}} \quad (3.4)$$

dir.

İspat. (2.19) ifadesinde $u(k) = \mathbb{H}_k$ ve $\Delta v(k) = \binom{k}{m}$ olarak seçilirse $\Delta u(k) = \frac{1}{h_{k+1}}$,

$$v(k) = \binom{k}{m+1} \text{ ve } v(k+1) = \binom{k+1}{m+1} \text{ olup}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} \mathbb{H}_k \delta_k = \binom{k}{m+1} \mathbb{H}_k \Big|_0^n - \sum_{k=0}^n \binom{k+1}{m+1} \frac{1}{h_{k+1}} \delta_k$$

olur. Burada (2.14) ifadesi kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{m} \mathbb{H}_k = \binom{n}{m+1} \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+1}{m+1} \frac{1}{h_{k+1}}$$

elde edilir.

Teorem 3.4. $\mathbb{H}_n$, n -inci harmonik Horadam sayısı ve m negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m \mathbb{H}_k = \frac{n^{m+1}}{m+1} \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^{m+1}}{m+1} \frac{1}{h_{k+1}} \quad (3.5)$$

dir.

İspat. (2.19) ifadesinde $u(k) = \mathbb{H}_k$ ve $\Delta v(k) = k^m$ olarak seçilirse $\Delta u(k) = \frac{1}{h_{k+1}}$,
 $v(k) = \frac{k^{m+1}}{m+1}$ ve $v(k+1) = \frac{(k+1)^{m+1}}{m+1}$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n k^m \mathbb{H}_k \delta_k = \frac{k^{m+1}}{m+1} \mathbb{H}_k \Big|_0^n - \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)^{m+1}}{m+1} \frac{1}{h_{k+1}} \delta_k$$

olur. Burada (2.14) kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m \mathbb{H}_k = \frac{n^{m+1}}{m+1} \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^{m+1}}{m+1} \frac{1}{h_{k+1}}$$

elde edilir.

Burada (3.5) ifadesinde, $m=0$ seçilirse (3.2) eşitliği ve $m=1$ seçilirse (3.4) eşitliği elde edilir.

Teorem 3.5. $\mathbb{H}_n$, n – inci harmonik Horadam sayısı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \mathbb{H}_k = \frac{n^2(2n-1)}{6} \mathbb{H}_n - \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2(2k+1)}{h_{k+1}} \quad (3.6)$$

dir.

İspat. (2.19) ifadesinden $u(k) = \mathbb{H}_k$ ve $\Delta v(k) = k^2$ olarak alınırsa $\Delta u(k) = \frac{1}{h_{k+1}}$,

$v(k) = \frac{k^2(2k-1)}{6}$ ve $v(k+1) = \frac{(k+1)^2(2k+1)}{6}$ olur. Buradan

$$\sum_{k=0}^n k^2 \mathbb{H}_k \delta_k = \frac{k^2(2k-1)}{6} \mathbb{H}_k \Big|_0^n - \frac{1}{6} \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)^2(2k+1)}{h_{k+1}} \delta_k$$

olur. (2.14) ifadesi kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \mathbb{H}_k = \frac{n^2(2n-1)}{6} \mathbb{H}_n - \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2(2k+1)}{h_{k+1}}$$

elde edilir.

Teorem 3.6. $\mathbb{H}_n$, n – inci harmonik Horadam sayısı ve $c \neq 1$ sabit bir sayı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} c^k \mathbb{H}_k = \frac{1}{c-1} \left[c^n \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c^{k+1}}{h_{k+1}} \right] \quad (3.7)$$

dir.

İspat. (2.19) ifadesinde $u(k) = \mathbb{H}_k$ ve $\Delta v(k) = c^k$ olarak seçilirse $\Delta u(k) = \frac{1}{h_{k+1}}$,

$v(k) = \frac{c^k}{c-1}$ ve $v(k+1) = \frac{c^{k+1}}{c-1}$ olup

$$\sum_{k=0}^n c^k \mathbb{H}_k \delta_k = \frac{c^k}{c-1} \mathbb{H}_k \Big|_0^n - \frac{1}{c-1} \sum_{k=0}^n \frac{c^{k+1}}{h_{k+1}} \delta_k$$

olur. Burada (2.14) kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} c^k \mathbb{H}_k = \frac{1}{c-1} \left[c^n \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c^{k+1}}{h_{k+1}} \right]$$

bulunur.

Teorem 3.7. $\mathbb{H}_n$, n -inci harmonik Horadam sayısı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_{k-1} \mathbb{H}_k = \frac{1}{p+q-1} \left[\mathbb{H}_n (h_{n-1} + qh_{n-2} + pa - a - b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k + qh_{k-1} + pa - a - b}{h_{k+1}} \right] \quad (3.8)$$

dir.

İspat. (2.19) ifadesinde $u(k) = \mathbb{H}_k$ ve $\Delta v(k) = h_{k-1}$ olarak alınırsa $\Delta u(k) = \frac{1}{h_{k+1}}$,

$$v(k) = \frac{h_{k-1} + qh_{k-2} + pa - a - b}{p+q-1} \text{ ve } v(k+1) = \frac{h_k + qh_{k-1} + pa - a - b}{p+q-1} \text{ olmak üzere,}$$

$$\sum_{k=0}^n h_{k-1} \mathbb{H}_k \delta_k = \left. \frac{\mathbb{H}_k (h_{k-1} + qh_{k-2} + pa - a - b)}{p+q-1} \right|_0^n - \frac{1}{p+q-1} \sum_{k=0}^n \frac{h_k + qh_{k-1} + pa - a - b}{h_{k+1}} \delta_k$$

olur. (2.14) ifadesi kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_{k-1} \mathbb{H}_k = \frac{1}{p+q-1} \left[\mathbb{H}_n (h_{n-1} + qh_{n-2} + pa - a - b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k + qh_{k-1} + pa - a - b}{h_{k+1}} \right]$$

elde edilir.

Şimdi, harmonik sayılar ve harmonik Horadam sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile ifade edilecektir.

Teorem 3.8. H_n , n –inci harmonik sayı, h_n , n –inci Horadam sayısı ve $\mathbb{H}_n$, n –inci harmonik Horadam sayısı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{H}_k}{k+1} = H_n \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_{k+1}}{h_{k+1}} \quad (3.9)$$

dir.

İspat. (2.19) ifadesinde $u(k) = \mathbb{H}_k$ ve $\Delta v(k) = \frac{1}{k+1}$ olarak alınırsa $\Delta u(k) = \frac{1}{h_{k+1}}$, $v(k) = H_k$ ve $v(k+1) = H_{k+1}$ olup

$$\sum_{k=0}^n \frac{\mathbb{H}_k}{k+1} \delta_k = H_k \mathbb{H}_k \Big|_0^n - \sum_{k=0}^n \frac{H_{k+1}}{h_{k+1}} \delta_k$$

olur. (2.14) ifadesinden

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{H}_k}{k+1} = H_n \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_{k+1}}{h_{k+1}}$$

bulunur.

Sonuç 3.1. $\mathbb{H}_n$, n –inci harmonik Horadam sayısı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{H}_k}{k+1} = \frac{\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}}{n!} \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\begin{bmatrix} k+2 \\ 2 \end{bmatrix}}{(k+1)! h_{k+1}} \quad (3.10)$$

dir.

İspat. (3.9) ifadesinde, harmonik sayılar ve birinci çeşit Stirling sayıları arasındaki ilişkiyi gösteren (2.9) ifadesi alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{H}_k}{k+1} = \frac{\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}}{n!} \mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\begin{bmatrix} k+2 \\ 2 \end{bmatrix}}{(k+1)! h_{k+1}}$$

elde edilir.

4. HARMONİK HORADAM SAYILARI İLE TANIMLI CİRCULANT MATRİSLER

Bu bölümde, elemanları harmonik Horadam sayıları olan circulant matrisler ele alınmıştır. Daha sonra, bu matrislerin satır(sütun), Euclidean ve spektral normları elde edilmiştir.

Tanım 4.1. $\mathbb{H}_n$, n -inci harmonik Horadam sayısı olmak üzere harmonik Horadam sayıları ile tanımlı circulant matris

$$C = \begin{pmatrix} \mathbb{H}_0 & \mathbb{H}_1 & \mathbb{H}_2 & \dots & \mathbb{H}_{n-1} \\ \mathbb{H}_{n-1} & \mathbb{H}_0 & \mathbb{H}_1 & \dots & \mathbb{H}_{n-2} \\ \mathbb{H}_{n-2} & \mathbb{H}_{n-1} & \mathbb{H}_0 & \dots & \mathbb{H}_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{H}_1 & \mathbb{H}_2 & \mathbb{H}_3 & \dots & \mathbb{H}_0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

dir.

Teorem 4.1. (4.1) ile tanımlanan matrisin sütun(satır) normu

$$\|C\|_1 = \|C\|_\infty = n\mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}} \quad (4.2)$$

dır.

İspat. Bir matrisin sütun normunun tanımından ve circulant matrislerde bütün sütunlar aynı elemanlardan oluştuğu için

$$\|C\|_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k$$

dir. (3.2) ifadesi kullanılırsa

$$\|C\|_1 = n\mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde satır normu da

$$\|C\|_{\infty} = n\mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.1. 3×3 tipinde harmonik Horadam sayıları ile tanımlı circulant matris

$$C = \begin{pmatrix} \mathbb{H}_0 & \mathbb{H}_1 & \mathbb{H}_2 \\ \mathbb{H}_2 & \mathbb{H}_0 & \mathbb{H}_1 \\ \mathbb{H}_1 & \mathbb{H}_2 & \mathbb{H}_0 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu matrisin sütun (satır) normu

$$\begin{aligned} \|C\|_1 &= \|C\|_{\infty} = 3\mathbb{H}_3 - \sum_{k=0}^2 \frac{k+1}{h_{k+1}} \\ &= 3 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{pb+qa} + \frac{1}{p^2b+pqa+qb} \right) - \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{pb+qa} + \frac{3}{p^2b+pqa+qb} \right) \\ &= \frac{2}{b} + \frac{1}{pb+qa} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.2. (4.1) ile tanımlanan matrisin Euclidean normu

$$\|C\|_E = \left[n^2 \mathbb{H}_n^2 - n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}} \left(2H_k + \frac{1}{h_{k+1}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

dir.

İspat. Bir matrisin Euclidean normunun tanımından

$$\|C\|_E^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k^2$$

dir. (3.3) ifadesinden faydalanarak

$$\|C\|_E^2 = n \left[n \mathbb{H}_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}} \left(2\mathbb{H}_k + \frac{1}{h_{k+1}} \right) \right]$$

olur. Buradan

$$\|C\|_E = \left[n^2 \mathbb{H}_n^2 - n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}} \left(2\mathbb{H}_k + \frac{1}{h_{k+1}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Örnek 4.2. 3×3 tipinde harmonik Horadam sayıları ile tanımlı circulant matris

$$C = \begin{pmatrix} \mathbb{H}_0 & \mathbb{H}_1 & \mathbb{H}_2 \\ \mathbb{H}_2 & \mathbb{H}_0 & \mathbb{H}_1 \\ \mathbb{H}_1 & \mathbb{H}_2 & \mathbb{H}_0 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu matrisin Euclidean normu

$$\begin{aligned} \|C\|_E^2 &= 9\mathbb{H}_3^2 - 3 \sum_{k=0}^2 \frac{k+1}{h_{k+1}} \left(2\mathbb{H}_k + \frac{1}{h_{k+1}} \right) \\ &= 9 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{pb+qa} + \frac{1}{p^2b+pqa+qb} \right)^2 \\ &\quad - 3 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2}{pb+qa} \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{pb+qa} \right) + \frac{3}{p^2b+pqa+qb} \left(\frac{2}{b} + \frac{2}{pb+qa} + \frac{1}{p^2b+pqa+qb} \right) \right) \\ &= \frac{6}{b^2} + \frac{3}{(pb+qa)^2} + \frac{6}{b(pb+qa)} \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\|C\|_E = \left(\frac{6}{b^2} + \frac{3}{(pb+qa)^2} + \frac{6}{b(pb+qa)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

olur.

Teorem 4.3. (4.1) ile tanımlanan matrisin spektral normu

$$\|C\|_2 = n\mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}} \quad (4.4)$$

dır.

İspat. Bir matrisin spektral normunun tanımından

$$\|C\|_2 = \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} \lambda_i(C^*C) \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Bu matrisin özdeğerleri λ_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) olmak üzere (2.21) ifadesinden

$$\lambda_i(C) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k (w^i)^k$$

dir. Bu ifadede $i = 0$ için

$$\lambda_0(C) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k$$

olur ve (3.2) eşitliğinden

$$\lambda_0(C) = n\mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}} \quad (4.5)$$

olur. $1 \leq i \leq n-1$ için

$$|\lambda_i| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k (w^i)^k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k \right| |(w^i)^k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{H}_k \quad (4.6)$$

dir. C matrisi normal matris olduğundan ve Teorem 2.8 den

$$\|C\|_2 = \max_{0 \leq i \leq n-1} |\lambda_i| = \max(|\lambda_0|, \max_{1 \leq i \leq n-1} |\lambda_i|) \quad (4.7)$$

olur. Burada (4.5) , (4.6) ve (4.7) eşitliklerinden

$$\|C\|_2 = n\mathbb{H}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{h_{k+1}}$$

elde edilir.

Örnek 4.3. 4×4 tipinde harmonik Horadam sayıları ile tanımlı circulant matris

$$C = \begin{pmatrix} \mathbb{H}_0 & \mathbb{H}_1 & \mathbb{H}_2 & \mathbb{H}_3 \\ \mathbb{H}_3 & \mathbb{H}_0 & \mathbb{H}_1 & \mathbb{H}_2 \\ \mathbb{H}_2 & \mathbb{H}_3 & \mathbb{H}_0 & \mathbb{H}_1 \\ \mathbb{H}_1 & \mathbb{H}_2 & \mathbb{H}_3 & \mathbb{H}_0 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu matrisin spektral normu

$$\begin{aligned} \|C\|_2 &= 4\mathbb{H}_4 - \sum_{k=0}^3 \frac{k+1}{h_{k+1}} \\ &= 4 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{pb+qa} + \frac{1}{p^2b+pqa+qb} + \frac{1}{p^3b+p^2qa+2pqb+q^2a} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{pb+qa} + \frac{3}{p^2b+pqa+qb} + \frac{4}{p^3b+p^2qa+2pqb+q^2a} \right) \\ &= \frac{3}{b} + \frac{2}{pb+qa} + \frac{1}{p^2b+pqa+qb} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.4. $n \times n$ tipinde circulant matris

$$C_h = \begin{pmatrix} h_{-1}\mathbb{H}_0 & h_0\mathbb{H}_1 & h_1\mathbb{H}_2 & \dots & h_{n-2}\mathbb{H}_{n-1} \\ h_{n-2}\mathbb{H}_{n-1} & h_{-1}\mathbb{H}_0 & h_0\mathbb{H}_1 & \dots & h_{n-3}\mathbb{H}_{n-2} \\ h_{n-3}\mathbb{H}_{n-2} & h_{n-2}\mathbb{H}_{n-1} & h_{-1}\mathbb{H}_0 & \dots & h_{n-4}\mathbb{H}_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0\mathbb{H}_1 & h_1\mathbb{H}_2 & h_2\mathbb{H}_3 & \dots & h_{-1}\mathbb{H}_0 \end{pmatrix}$$

olsun. C_h matrisinin spektral normu

$$\|C_h\|_2 = \frac{1}{p+q-1} \left[\mathbb{H}_n (h_{n-1} + qh_{n-2} + pa - a - b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k + qh_{k-1} + pa - a - b}{h_{k+1}} \right] \quad (4.8)$$

dir.

İspat. Bir matrisin spektral normunu tanımından

$$\|C_h\|_2 = \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} \lambda_i(C_h^* C_h) \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir. C_h matrisinin özdeğerleri λ_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) olmak üzere (2.21) ifadesinden

$$\lambda_i(C_h) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{k-1} \mathbb{H}_k(w^i)^k$$

dir. Burada $i = 0$ için

$$\lambda_0(C_h) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{k-1} \mathbb{H}_k$$

olur. (3.8) ifadesinden

$$\lambda_0(C_h) = \frac{1}{p+q-1} \left[\mathbb{H}_n(h_{n-1} + qh_{n-2} + pa - a - b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k + qh_{k-1} + pa - a - b}{h_{k+1}} \right] \quad (4.9)$$

dir. $1 \leq i \leq n-1$ için

$$|\lambda_i| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} h_{k-1} \mathbb{H}_k(w^i)^k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} h_{k-1} \mathbb{H}_k \right| |(w^i)^k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} h_{k-1} \mathbb{H}_k \quad (4.10)$$

dir. C_h matrisi normal matris olduğundan ve Teorem 2.8 den

$$\|C_h\|_2 = \max_{0 \leq i \leq n-1} |\lambda_i| = \max(|\lambda_0|, \max_{1 \leq i \leq n-1} |\lambda_i|) \quad (4.11)$$

olur. Burada (4.9) , (4.10) ve (4.11) ifadeleri kullanılırsa

$$\|C_h\|_2 = \frac{1}{p+q-1} \left[\mathbb{H}_n(h_{n-1} + qh_{n-2} + pa - a - b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k + qh_{k-1} + pa - a - b}{h_{k+1}} \right]$$

elde edilir.

Örnek 4.4. 3×3 tipindeki C_h circulant matrisi

$$C_h = \begin{pmatrix} h_{-1}\mathbb{H}_0 & h_0\mathbb{H}_1 & h_1\mathbb{H}_2 \\ h_1\mathbb{H}_2 & h_{-1}\mathbb{H}_0 & h_0\mathbb{H}_1 \\ h_0\mathbb{H}_1 & h_1\mathbb{H}_2 & h_{-1}\mathbb{H}_0 \end{pmatrix}$$

olsun. C_h matrisinin spektral normu

$$\begin{aligned} \|C_h\|_2 &= \frac{1}{p+q-1} \left[\mathbb{H}_3(h_2 + qh_1 + pa - a - b) - \sum_{k=0}^2 \frac{h_k + qh_{k-1} + pa - a - b}{h_{k+1}} \right] \\ &= \frac{1}{p+q-1} \mathbb{H}_3(h_2 + qh_1 + pa - a - b) \\ &\quad - \frac{1}{p+q-1} \left(\frac{h_0 + qh_{-1} + pa - a - b}{h_1} + \frac{h_1 + qh_0 + pa - a - b}{h_2} + \frac{h_2 + qh_1 + pa - a - b}{h_3} \right) \\ &= \frac{1}{p+q-1} \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{pb+qa} + \frac{1}{p^2b+pqa+qb} \right) (pb+qa+qb+pa-a-b) \right] \\ &\quad - \frac{1}{p+q-1} \left(\frac{a+b-pa+pa-a-b}{b} + \frac{b+qa+pa-a-b}{pb+qa} + \frac{pb+qa+qb+pa-a-b}{p^2b+pqa+qb} \right) \\ &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{pb+qa} \end{aligned}$$

dir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde harmonik sayılar, Horadam sayıları ve circulant matrislerle ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler gösterilmiştir. Üçüncü bölümde harmonik Fibonacci sayılarının bir genelleştirmesi olan harmonik Horadam sayıları tanımlanmış ve fark operatörleri kullanılarak bu sayıları içeren toplam formülleri elde edilmiştir. Son bölümde ise elemanları harmonik Horadam sayıları olan circulant matrislerin sütun(satır), Euclidean ve spektral normları elde edilmiştir.

Harmonik Horadam sayılarına benzer olarak başka diziler kullanılarak harmonik sayılar tanımlanıp özellikleri incelenebilir. Ayrıca elemanları bu sayılar olan özel tipteki matrislerin normları, özdeğerleri ve determinantları incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

- Anonim, 2022, https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_number [Ziyaret Tarihi: 01 Kasım 2022]
- Bahsi, M. and Solak, S., 2010a, On the circulant matrices with arithmetic sequence, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5(25), 1213-1222.
- Bahsi, M. and Solak, S., 2010b, On the matrices with harmonic numbers, *Gazi University Journal of Science*, 23(4), 445-448.
- Benjamin, A. T., Gaebler, D. and Gaebler, R., 2003, A combinatorial approach to hyperharmonic numbers, *Integers: The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 3, 1-9.
- Čerin, Z., 2009, On sums of products of Horadam numbers, *Kyungpook Mathematical Journal*, 49(3), 483-492.
- Cheon, G. S. and Mikkawy, M.E.A., 2007, Generalized harmonic number identities and a related matrix representation, *J. Korean Math. Soc.*, 44, 487–498.
- Conway, J.H. and Guy, R.K., 1996, *The Book of Numbers*, Springer, New York.
- Davis, P. J., 1979, *Circulant Matrices*, A Wiley-Interscience Publication, New York.
- Dilcher, K., 2008, Determinant expressions for q-harmonic congruences and degenerate Bernoulli numbers, *Electron. J. Combin.*, 15, R63.
- Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O., 1989, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley.
- Haukkanen, P., 2002, A note on Horadam's sequence, *The Fibonacci Quarterly*, 40, 358-361.
- Horadam, A. F., 1965, Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 3, 161-176.
- Horadam, A. F., 1967, Special properties of the sequence $W_n(a, b; p, q)$, *The Fibonacci Quarterly*, 5, 424-434.
- Horn, R. A. and Johnson, C. R., 1991, *Topics in Matrix Analysis*, New York, Cambridge University Press, Cambridge.
- Horzum, T. and Kocer, E.G., 2009, On some properties of Horadam polynomials, *International Mathematical Forum*, 4(25), 1243-1252.
- Karner, H., Schneid, J. and Ueberhuber, C. W., 2003, Spectral decomposition of real circulant matrices, *Linear Algebra and Its Applications*, 367, 301-311.

- Kızılates, C. and Tuglu, N., 2015, Some combinatorial identities of q – harmonic and q – hyperharmonic numbers, *Communications in Mathematics and Applications*, 6(2), 33-40.
- Kızılates, C., 2016, Harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayıları ve uygulamaları, Doktora Tezi, Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Zonguldak.
- Kra, I. and Simanca, S. R., 2012, On circulant matrices, *Notices of the American Mathematical Society*, 59(3), 368-377.
- Kronenburg, M. J., 2011, Some generalized harmonic number identities, Arxiv:1103.5430.
- Kocer, E. G., Mansour, T. and Tuglu, N., 2007, Norms of circulant and semicirculant matrices with Horadam's numbers, *Ars Combinatoria*, 85, 353-359.
- Mansour, T., 2004, A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence, *Australasian Journal of Combinatorics*, 30, 207-212.
- Mansour, T., Shattuck, M. and Song, C., 2012, q – Analogs of identities involving harmonic numbers and binomial coefficients, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, 7(1), 22-36.
- Mezö, I., 2011, Some possible q – generalizations of harmonic numbers, Arxiv:1106.5029.
- Mond, D. ve Krammer, D., 2004, *Combinatorics Lecture Notes*, Warwick Mathematics Institute.
- Murray, R.S., 1961, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Different Equations*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Spivey, M.Z., 2007, Combinatorial sums and finite differences, *Discrete Math.*, 307, 3130-3146.
- Solak, S., 2005, On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computation*, 160(1), 125-132.
- Taşcı, D., 2005, *Lineer Cebir*, Gazi Kitabevi, Ankara.
- Tuglu, N. and Kızılates, C., 2015, On the norms of some special matrices with the harmonic Fibonacci numbers, *Gazi University Journal of Science GU J Sci*, 28(3), 497-501.
- Tuglu, N., Kızılates, C. and Kesim, S., 2015, On the harmonic and hyperharmonic Fibonacci numbers, *Advances in Difference Equations*, 2015(1), 297.
- Udrea, G., 1996, A note on the sequence $(W_n)_{n \geq 0}$ of A.F. Horadam, *Portugaliae Mathematica*, 53(2), 143-155.