



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



RİDGE TAHMİNİNE DAYALI
M-REGRESYONUNUN ETKİNLİĞİNİN
İNCELENMESİ

Abdullah YURTASLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Şubat-2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Abdullah YURTASLAN

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RİDGE TAHMİNİNE DAYALI M-REGRESYONUNUN ETKİNLİĞİNİN İNCELENMESİ

Abdullah YURTASLAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ERİŞOĞLU

2022, 47 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Murat ERİŞOĞLU

Prof. Dr. İsmail KINACI

Dr. Öğr. Üyesi Aydın KARAKOCA

Bu çalışmada, çoklu doğrusal regresyon analizinde çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem veya hataların normal dağılım göstermemesi problemlerinin bir arada olması durumunda ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri önerilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin parametre tahmini için tekrarlı yenilenen ağırlıklı ridge algoritmasının tanımlanmıştır. Önerilen tahmin edicinin tahmin performansı simülasyon çalışması ve gerçek veri seti üzerinde gösterilmiştir. Çalışma sonuçlarına göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerinin, çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem veya hataların normal dağılım göstermemesi problemlerinin bir arada olması durumunda EKK, ridge ve geleneksel M tahmin edicilerden daha başarılı bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Aykırı Gözlem, Çoklu Doğrusal Bağlantı, Hata Kareler Ortalaması, M Regresyonu, Ridge Regresyonu, Sağlam İstatistik

ABSTRACT

MS THESIS

**INVESTIGATION OF THE EFFECTIVENESS OF M-REGRESSION BASED
ON RIDGE ESTIMATION**

Abdullah YURTASLAN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN STATISTICS**

Advisor: Prof. Dr. Murat ERİŞOĞLU

2022, 47 Pages

Jury

Prof. Dr. Murat ERİŞOĞLU

Prof. Dr. İsmail KINACI

Asst. Prof. Dr. Aydın KARAKOCA

In this study, M estimators based on ridge estimation are proposed in case of a combination of multiple linear regression and outlier observations or non-normal distribution of errors in multiple linear regression analysis. For parameter estimation of the proposed estimators, iteratively reweighted ridge algorithm is defined. The estimation performance of the proposed estimator is shown on the simulation study and the real dataset. According to the results of the study, M estimators based on the ridge estimation were found to be more successful than the ridge and traditional M estimators when the problems of multicollinearity and outlier observations or errors did not show normal distribution.

Keywords: Outlier, Multicollinearity, Mean Squares of Error, M Regression, Ridge Regression, Robust Statistics

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hayata geçirilmesi sürecinde bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, araştırmanın her bir aşamasında görüşleriyle beni destekleyen, samimiyetini her zaman hissettiren ve beni doğru yönde yönlendiren danışman hocam Prof. Dr. Murat ERİŞOĞLU'na, ayrıca çalışmamda benden desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen değerli eşim ve çocuklarıma teşekkür ederim.

Abdullah YURTASLAN
KONYA-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	8
3.1. M- Regresyonu	8
3.1.1. M Tahmin Edicileri.....	9
3.1.1.1. Huber'in M tahmini	9
3.1.1.2. Fair'in M tahmini.....	11
3.1.1.3. Hampel'in M tahmini.....	12
3.1.1.4. Tukey'in M tahmini	13
3.1.1.5. Andrew'in M tahmini	13
3.1.1.6. Welsch'in M tahmini	14
3.1.1.7. Cauchy'nin M tahmini	15
3.1.1.8. Talwar'in M tahmini.....	16
3.1.1.9. Ramsay'in M tahmini	16
3.1.1.10. Geman-McClure'nin M tahmini	17
3.1.2. M-Regresyonunda Parametre Tahmini	18
3.2. Ridge Regresyonu.....	19
3.3. Ridge Tahminine Dayalı M Tahminleri.....	22
4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI VE UYGULAMA	23
4.1. Simülasyon Çalışması.....	23
4.2. Gerçek Veri Uygulaması	38
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	42
6. KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	47

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

- y : Bağımlı değişkene ait gözlem vektörü
 β : Bilinmeyen parametreler vektörünü
 X : Tasarım matrisi
 ε : Rassal hata vektörünü ifade etmektedir.
 L : Olabilirlik fonksiyonu
 $\ln L$: Olabilirlik fonksiyonunun doğal (e tabanında) logaritması
 $\rho(\cdot)$: Amaç fonksiyonu
 $\psi(\cdot)$: Etki fonksiyonu
 $\omega(\cdot)$: Ağırlık fonksiyonu
 $\hat{\beta}$: Bilinmeyen parametreler vektörünün EKK tahmini
 $\hat{\beta}_M$: Bilinmeyen parametreler vektörünün M tahmini
 $\hat{\beta}_R$: Bilinmeyen parametreler vektörünün ridge tahmini
 $\hat{\beta}_{MR}$: Bilinmeyen parametreler vektörünün ridge tahminine dayalı M tahmini

Kısaltmalar

- EKK : En Küçük Kareler
LAD : En Küçük Mutlak Sapmalar
ML : En Çok Olabilirlik
BLUE : En İyi Lineer
CN : Koşul Sayısı
CI : Koşul İndeksi
MSE : Hata Kareler Ortalaması
MR : Ridge Tahminine Dayalı M Tahmin Edicisi

1. GİRİŞ

Değişkenler arasındaki ilişkilerin incelendiği çoğu çalışmada, istatistiksel analizler içerisinde en çok bilinen analizlerden biri olan regresyon analizi kullanılmaktadır. İlgilenilen değişken ile bu değişkendeki değişime etki eden faktörler arasındaki ilişkinin fonksiyonel olarak modellenmesini sağlayan regresyon analizi, basitliği ve etkinliği bakımından istatistiksel analizler arasında en yaygın kullanılan analizlerden biridir. İlgilenilen değişken için açıklanan, sonuç, cevap, çıktı ve bağımlı değişken, benzer şekilde ilgilenilen değişkeni etkilediği düşünülen faktörler için de açıklayıcı, sebep, girdi ve bağımsız değişken olmak üzere farklı terimler kullanılmaktadır. Bu çalışmada ilgilenilen değişken için bağımlı değişken, faktörler için ise bağımsız değişkenler terimleri kullanılacaktır.

Bağımlı değişken Y ve bağımlı değişkendeki değişimi açıklamada kullanılacak p tane bağımsız değişken X_1, X_2, \dots, X_p olmak üzere bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişki,

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_p) + \varepsilon \quad (1.1)$$

regresyon modeli ile tanımlanır. Regresyon modelinde yer alan ε gösterimi; modele dahil edilemeyen bağımlı değişkendeki değişimde etkili olan diğer bağımsız değişkenleri, bağımlı değişkendeki değişimin nedenlerinden biri olan rassallığı ve bunlara bağlı olarak bağımlı değişkendeki açıklanamayan değişime karşı gelen rassal hata terimini ifade etmektedir. Regresyon modelinde yer alan $f(X_1, X_2, \dots, X_p)$ fonksiyonu deterministik kısmı, ε ise stokastik kısmı oluşturmaktadır. Regresyon modelleri içerisinde yaygın olarak bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal kabul edildiği doğrusal regresyon modeli kullanılır. Doğrusal regresyon modeli, bağımlı değişkeni açıklamada tek bir bağımsız değişken kullanıldığında basit doğrusal regresyon modeli, birden fazla bağımsız değişken kullanıldığında ise çoklu doğrusal regresyon modeli olarak isimlendirilir. Bağımlı değişken Y ve bağımsız değişkenler X_1, X_2, \dots, X_p arasındaki çoklu doğrusal regresyon modeli

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon \quad (1.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. Çoklu doğrusal regresyon modelinde yer alan $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ regresyon katsayıları veya bilinmeyen parametreler olarak isimlendirilir. Bağımlı değişkenin herhangi bir gözlem değeri için çoklu doğrusal regresyon modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i \quad (1.3)$$

olarak ifade edildiğinde $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere çoklu doğrusal regresyon modeli matris notasyonu ile

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.5)$$

şeklinde oluşur. Çoklu doğrusal regresyon modelinde \mathbf{y} ; bağımlı değişkene ait gözlem vektörünü, $\boldsymbol{\beta}$; bilinmeyen parametreler vektörünü, \mathbf{X} ; tasarım matrisini ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ gösterimi ise rassal hata vektörünü ifade etmektedir.

Çoklu doğrusal regresyon modelinde bilinmeyen parametreler vektörünün tahmininde, hata terimlerinin kareleri toplamını en küçüklemeyi amaçlayan en küçük kareler (EKK) tahmin edicisi kullanılmaktadır. Çoklu doğrusal regresyon modelinde bilinmeyen parametreler vektörünün EKK tahminleri

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right) = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta})^2 \right) \quad (1.6)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (1.7)$$

eşitliği ile elde edilir. Çoklu doğrusal regresyon modelinde hata terimleri; bağımsız, sıfır ortalamalı ve sabit varyanslı rassal değişkenler olarak kabul edilir. Çoklu doğrusal regresyon analizindeki temel varsayımlardan biri de bağımsız değişkenler arasında bağlantı olmaması başka bir ifade ile çoklu bağlantı (doğrusallık) olmaması varsayımdır. Hata terimlerinin sabit varyansı σ^2 olarak tanımlandığında, bilinmeyen parametre vektörünün EKK tahmini $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ için varyans-kovaryans matrisi

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(X'X)^{-1} \quad (1.8)$$

eşitliği ile elde edilir.

Çoklu doğrusal regresyon modelinde bilinmeyen parametreler vektörünün en çok olabilirlik (ML) tahmini için hata terimlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\rho(\varepsilon_i)$ olmak üzere

$$L = \prod_{i=1}^n \rho(\varepsilon_i) = \prod_{i=1}^n \rho(y_i - \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}) \quad (1.9)$$

eşitliği ile tanımlanan olabilirlik fonksiyonu en büyüklenir. Hata terimlerinin bağımsız, sıfır ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılım gösteren rassal değişkenler olduğu varsayıldığında olabilirlik fonksiyonu

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta})^2\right) \quad (1.10)$$

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta})^2\right) \quad (1.11)$$

olur. Olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması alındığında

$$\ln L = -n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta})^2 \quad (1.12)$$

elde edilir. Negatif işareti ortadan kaldırmak için, bir fonksiyonu en büyükleme ile o fonksiyonu negatif olarak en küçükleme aynı olduğundan

$$-\ln L = n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta})^2 \quad (1.13)$$

dönüşümü gerçekleştirilsin. Elde edilen eşitlikte, $\boldsymbol{\beta}$ içermeyen sabitleri kaldırmak çözümü değiştirmeyeceğinden dolayı çoklu doğrusal regresyon modelinde bilinmeyen parametreler vektörünün ML tahmini içinde,

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta})^2$$

eşitliği ile gösterilen fonksiyon en küçüklenir. Hataların normal dağıldığı varsayımı altında çoklu doğrusal regresyon modeli için EKK tahminleri ile ML tahminleri aynıdır.

Doğrusal regresyon modelinde parametrelerin tahmininde yaygın olarak kullanılan EKK tahminleri, normal dağılım varsayımı ve model varsayımları geçerli olduğunda yansızlık ve etkinlik gibi cazip özelliklere sahiptir. Model varsayımlarının veya normallik varsayımının sağlanmadığı durumda EKK tahmin edicileri yansızlık özelliğini korurken en küçük varyansa sahip olma özelliğini yani etkinlik özelliğini kaybederler. Bu nedenle farklı birçok alanda kullanılan regresyon analizinde varsayımlardan sapma durumlarına karşı daha sağlam istatistiklere ihtiyaç duyulmaktadır. Sağlam istatistiksel yöntemler, geleneksel istatistiksel yöntemleri taklit eden ancak aykırı gözlemlerden veya referans alınan istatistiksel dağılım modelinden sapmalara karşı daha az etkilenen yöntemlerdir. Literatürde en yaygın kullanılan sağlam tahmin edicilerinden biri de en çok olabilirlik tahmin edicilerin genelleştirilmesi olan M tahmin edicileridir. M-regresyonu, normal dağılım varsayımı açısından sağlam olması için Peter Huber tarafından 1964 yılında geliştirilmiştir.

Bağımsız değişkenler arasında tam ilişki olması durumunda $X'X$ matrisi, determinantı sıfır olacağından tekil matris olur ve tersi alınamaz. Bu durumda çoklu doğrusal regresyon analizinde bilinmeyen parametre vektörünün EKK tahminleri elde edilemez. Bağımsız değişkenler arasında tam ilişki değil de yüksek ilişki olması durumunda $X'X$ matrisi tekil olmayan bir matris olur ve EKK tahminleri hesaplanabilir. Ancak bu durumda da EKK tahminlerinin en küçük varyansa sahip olma özelliği yani etkinlik özelliği geçerli olmaz. EKK tahminlerinin varyansının yüksek olması parametrelerin bireysel anlamlılık testlerinin sonuçlarının güvenilirliğini bozar. Bağımsız değişkenler arasında tam veya yüksek anlamlı ilişkilerin olması çoklu doğrusal bağlantı problemi olarak ifade edilir. Çoklu doğrusal bağlantı problemi durumunda EKK tahminlerine alternatif olarak literatürde önerilen birçok yöntem mevcuttur. Bu yöntemlerden en popüler olanı Hoerl ve Kennard (1970) tarafından önerilen ridge regresyonudur.

Bu çalışmada çoklu doğrusal regresyon modelinde, çoklu bağlantı problemi ve aykırı gözlem probleminin aynı anda olması durumu için ridge regresyonu ile M-regresyonunun bir arada kullanılmasının EKK tahminlerine karşı etkinliği incelenecektir. Çalışmada M-regresyonu, ridge regresyonu ve ridge regresyonuna dayalı M-regresyonu incelendikten sonra gerçek veri seti uygulamaları ve simülasyon çalışması ile ridge regresyonuna dayalı M-regresyonunun, EKK tahminleri karşısındaki performansı detaylı olarak araştırılacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Çoklu doğrusal regresyon modelinde bağımsız değişkenler arasında çoklu doğrusal bağıntının olması durumunda EKK tahmin edicisi yansızlık özelliğini korurken yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahip olma özelliğini kaybeder. EKK tahmin edicisinin varyansının büyük olması durumunda parametrelerin anlamlılık testi sonuçları güvenilir olmaz ve parametrelerin yorumlanması zorlaşır. Çoklu doğrusal bağlantı probleminde EKK tahmin edicisi kötü performans gösterir. Çoklu bağlantı probleminin çözümü için ilk olarak Hoerl ve Kennard (1970a) tarafından ridge regresyonu önerilmiştir. Hoerl ve Kennard (1970a), $X'X$ matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanlarına pozitif küçük bir değer olan k yanlılık parametresinin eklenmesi durumunda koşul sayısının küçüleceğini ve bağımsız değişkenler arasındaki çoklu doğrusal bağlantı probleminin olumsuz etkilerinin giderilebileceğini ifade etmişlerdir. Çalışmalarında ayrıca her bir bağımsız değişken için farklı yanlılık parametresinin kullanıldığı genelleştirilmiş ridge regresyon yöntemini önerdiler.

Çoklu doğrusal bağlantı problemi durumunda en yaygın kullanılan yöntemlerden biri olan ridge regresyonunda ridge tahmin edicisinin tahmin performansı yanlılık parametresi k 'nin tahminine bağlı olduğundan dolayı literatürde k 'nin tahminine yönelik çok sayıda çalışma mevcuttur. Hoerl ve Kennard (1970b) daha önceki çalışmalarında genelleştirilmiş ridge regresyon yöntemi için önerdikleri yanlılık parametre tahminlerinden EKK tahminlerinin kanonik formundaki en büyük parametre tahminine dayalı olarak elde edilen yanlılık parametresini ridge regresyonu için önermişlerdir. Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975), yanlılık parametresinin yeterince küçük seçilmesi durumunda ridge tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının EKK tahmin edicisinin hata kareler ortalamasından daha küçük olacağını ifade ederek Hoerl ve Kennard (1970b) tarafından önerilen yanlılık parametresine dayalı olarak yeni bir yanlılık parametresi önermişlerdir. Lawless ve Yang (1976), Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975) tarafından önerilen tahmin edicinin yanlılığını azaltarak ridge regresyonu için yeni bir yanlılık parametresi tahmini önermişlerdir. Hocking, Speed ve Lynn (1976) ridge regresyon yöntemi için önerilen birçok yanlılık parametresini genelleyerek temel bileşenler regresyonuna dayalı yeni bir yanlılık parametre tahmini önermişlerdir.

Kibria (2003), genelleştirilmiş ridge regresyonu için Hoerl ve Kennard (1970a) tarafından önerilen yanlılık parametre tahminlerinin aritmetik, geometrik, harmonik ve bağımsız değişken sayısının 3 ve daha fazla olduğu durumlar için medyan değerlerini kullanarak yeni yanlılık parametre tahminleri tanımlamıştır. Khalaf ve Shukur (2005) ridge regresyonunda yanlılık parametresinin seçimi ile ilgili yapmış oldukları çalışmada $X'X$ matrisinin en büyük özdeğerine dayalı olarak yeni bir yanlılık parametre tahmini önermişlerdir.

Çoklu bağlantı probleminin çözümünde yaygın kullanılan ridge regresyon yönteminde yanlılık parametresinin tahmini ile ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan bazıları şunlardır; Alkhamisi ve ark. (2006), Tutz ve Binder (2007), Alkhamisi ve Shukur (2007), Özkale (2008), Al-Hassan (2008), Muniz ve Kibria (2009), Li ve Yang (2010), Asar ve ark. (2013), Dorugade (2014), Arashi ve Valizadeh (2015), Lukman ve Ayinde (2017), Asar ve Genç (2017) ile Kibria ve Banik (2019).

Hataların normal dağılmaması veya aykırı gözlem durumunda çoklu doğrusal regresyon modelinde parametrelerin bireysel anlamlılık testlerinin sonuçları güvenilir değildir. Bundan dolayı hataların normal dağılım göstermesi varsayımından sapmalara karşı sağlam istatistiklere ihtiyaç duyulmuştur. Huber (1964) hataların normal dağılım varsayımını sağlamadığı durumlar için ML tahmin edicilerinin bir genellemesi olan M tahmin edicilerini önermiştir. Huber (1964), çoklu doğrusal regresyon modelinde hata kareler toplamını en küçükmek yerine hatalar sıfır değerine yakın iken hata kareler toplamına, hatalar sıfırdan uzaklaştıkça hataların mutlak toplamına yakınsayan yeni bir amaç fonksiyonunu en küçükmeyi önermiştir. Huber (1964)'in önerdiği bu yaklaşımda EKK ve amaç fonksiyonu hataların toplamını en küçükmek olan en küçük mutlak sapmalar (LAD) tahmin edicileri bir arada kullanılarak aykırı gözlemlere karşı daha sağlam bir tahmin edici ortaya konmuştur.

M tahmin edicileri aslında veri setinde normallik varsayımını bozan aykırı gözlemlere daha az ağırlık vererek aykırı gözlemlerin parametre tahmini üzerindeki etkisini azaltmaktadır. Literatürde farklı amaç fonksiyonları tanımlanarak farklı ağırlık fonksiyonlarının önerildiği birçok çalışma vardır. De Menezes ve ark (2021) tarafından doğrusal regresyon analizinde M tahmin edicileri üzerine yapılan inceleme çalışmasında 48 farklı M tahmin edici değerlendirilmiştir.

Literatürde hataların normal dağılım varsayımından sapmalara karşı daha sağlam olarak önerilen M tahmin edicileri monoton ve yeniden azalan M tahmin edicileri olmak üzere iki farklı sınıfta incelenebilir. Monoton M tahmin ediciler arasında en yaygın kullanılan tahmin ediciler Huber (1964) ve Fair (1974) tarafından önerilen M tahmin edicilerdir. Yeniden azalan M tahmin ediciler arasında Hampel (1974) tarafından üç sabit ile dört parçalı olarak önerilen M tahmin edicisi, Tukey tarafından önerilen iki ağırlıklı M tahmin edicisi, Andrew (1974) tarafından önerilen sinüs fonksiyonuna dayalı M tahmin edicisi, Welsch'in M tahmin edicisi, Cauchy'nin M tahmin edicisi, Talwar'ın M tahmin edicisi, Ramsay (1977) tarafından önerilen M tahmin edicisi ve Geman-McClure (1987) tarafından önerilen M tahmin edicisi en yaygın kullanılan M tahmin ediciler olarak gösterilebilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. M- Regresyonu

Çoklu doğrusal regresyon modelinde bilinmeyen parametrelerinin EKK tahmini aslında bağımsız değişkenlerin değerlerinin bilinmesi durumunda bağımlı değişkenin beklenen değerine karşılık gelmektedir. Yani EKK tahminlerini elde etmek için koşullu ortalama kullanılmaktadır. Koşullu ortalama kullanışlı ve yararlı birçok özelliğe sahip olmasına karşın aykırı gözlemlere karşı oldukça duyarlıdır. Aykırı gözlemlerin olması durumuna ortalama uygun bir merkezi eğilim ölçüsü olmadığı için regresyon analizinde koşullu ortalamaya dayalı bir tahmin edici olan EKK tahmin edicisinin kullanımı da uygun olmaz.

Hataların normal dağılım göstermemesi durumunda EKK tahminlerine alternatif olarak sağlam istatistiksel yöntemlerden biri olan M tahminleri kullanılabilir. M tahminleri ilk defa Huber (1964) tarafından önerilmiştir. Hataların dağılımı belirli bir dağılıma uyduğunda olabirlik fonksiyonunun doğal logaritmasının negatif işaretlisi amaç fonksiyonu alındığından M tahminciler ML tahmincilerini kapsar (Yıldırım, 2012). Yani M tahminleri, ML tahminlerinin bir genellemesidir.

M tahmininde amaç fonksiyonu $\rho(\cdot)$;

- $\rho(0) = 0$
- $\rho(\varepsilon) \geq 0$ (Pozitif tanımlılık)
- $\rho(\varepsilon) = \rho(-\varepsilon)$ (Simetrik özelliği)
- $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ olmak üzere $\rho(\varepsilon_1) < \rho(\varepsilon_2)$
- $\rho(\varepsilon)$ Sürekli ve türevlenebilir

özelliklerine sahip olmalıdır (Maronna ve ark., 2006).

Amaç fonksiyonu $\rho(\varepsilon)$ 'nin ε 'na göre türevlenmesi ile etki fonksiyonu elde edilir. Etki fonksiyonu verinin parametre tahmin edicisi üzerindeki marjinal etkisini ölçmektedir (Toy, 2014).

$$\psi(\varepsilon) = \frac{d\rho(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (3.1)$$

Etki fonksiyonu $\psi(\cdot)$;

- $\varepsilon \geq 0$ için $\psi(\varepsilon) \geq 0$
- $\psi(-\varepsilon) = -\psi(\varepsilon)$
- $\psi'(0) = 1$
- $\psi''(0) = 0$
- $\psi'''(0) < 0$
- $\psi(\varepsilon)$ Sürekli ve parçalı türevlenebilir

özelliklerini sağlamalıdır (Bell, 1980).

M tahminlerinde önemli bir diğer fonksiyon da etki fonksiyonunun ε 'na bölünmesi ile elde edilen ağırlık fonksiyonudur.

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\psi(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (3.2)$$

3.1.1. M Tahmin Edicileri

Literatür incelendiğinde aykırı gözlem durumu için önerilen çok sayıda M tahmin edicisi bulunmaktadır. De Menezes ve ark. (2021) tarafından regresyon analizinde sağlam M tahmin ediciler üzerine yapılan inceleme çalışmasında, 48 farklı M tahmin edicisi değerlendirilmiştir. M tahmin edicileri monoton ve yeniden azalan M tahmin edicileri olarak iki sınıfta incelenebilir. Monoton M tahmin ediciler, belirli bir noktaya kadar doğrusal azalan ağırlık, belirli bir noktadan sonra ise ya sabit ağırlık veren ya da çok az artışlarla ağırlık veren tahmin edicilerdir. Yeniden azalan M tahmin edicileri orijinden uzaklaştıkça ağırlığın azaldığı tahmin edicilerdir (Yıldırım, 2012).

Bu bölümde literatürde yaygın kullanımı olan birkaç M tahmin edicisi için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonları incelenecektir. Monoton M tahmin edicilerden Huber'in ve Fair'in M tahmin edicileri, yeniden azalan M tahmin edicilerden Hampel, Tukey, Andrew, Welsch, Cauchy, Talwar, Ramsay ve Geman-McClure'nin M tahmin edicileri incelenecektir.

3.1.1.1. Huber'in M tahmini

Huber (1964), aykırı gözlemlerin varlığında ya da hataların normal dağılmadığı durumlarda hataların kareleri ile mutlak değerleri arasında uygunluk sağlayan bir fonksiyonun kullanılmasının daha uygun olduğunu ifade etmiştir. Huber (1964) hataların

kareleri toplamını en küçükleme ile mutlak hataların toplamını en küçükleme fikrini birleştirerek, hata terimi sifıra yakın olduğunda ε^2 'ye ve sifirdan uzak olduğunda $|\varepsilon|$ 'na eşit olan $\rho(\varepsilon)$ fonksiyonunu en küçüklemeyi önermiştir. Huber (1964) tarafından önerilen amaç fonksiyonu

$$\rho(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{2}, & -k \leq \varepsilon \leq k \\ k|\varepsilon| - \frac{k^2}{2}, & \varepsilon < -k \text{ veya } \varepsilon > k \end{cases} \quad (3.3)$$

eşitliği ile tanımlanır. Huber (1964), eşitlikte yer alan k değeri için hata terimlerinin standart sapmasının tahmini $\hat{\sigma}$ olmak üzere $k = 1.5\hat{\sigma}$ değerini önermiştir. Mutlak hataların medyanı MAD olmak üzere $\hat{\sigma} = 1.4826MAD$ olarak hesaplanmaktadır. (Birkes ve Dodge, 2011).

Huber'in M tahmini için etki fonksiyonu,

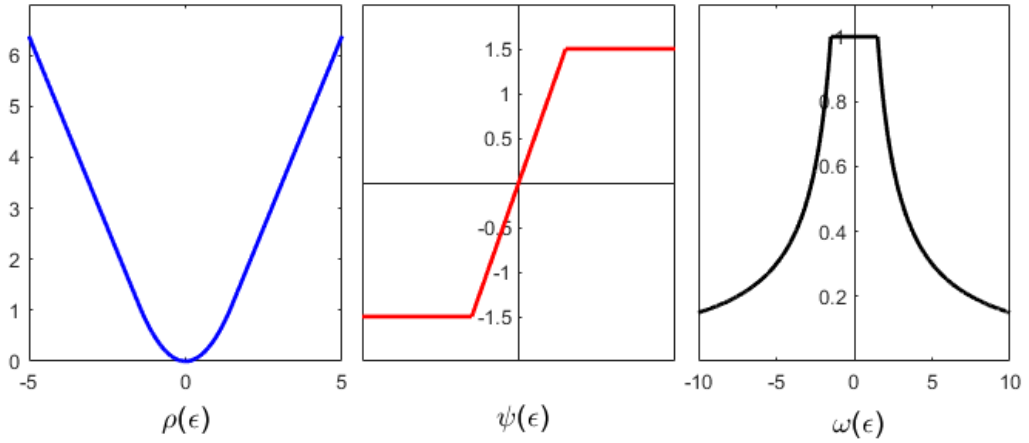
$$\psi(\varepsilon) = \frac{d\rho(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon, & -k \leq \varepsilon \leq k \\ k \text{sign}(\varepsilon), & \varepsilon < -k \text{ veya } \varepsilon > k \end{cases} \quad (3.4)$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.2)'de yer alan $\text{sign}(\cdot)$ gösterimi hata terimi negatif olduğunda -1 , pozitif olduğunda 1 değerini alan işaret fonksiyonudur.

Huber'in M tahmini için ağırlık fonksiyonu

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\psi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \begin{cases} 1, & -k \leq \varepsilon \leq k \\ \frac{k}{|\varepsilon|}, & \varepsilon < -k \text{ veya } \varepsilon > k \end{cases} \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. Huber'in M tahminleri için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri $\sigma = 1$ ve $k = 1.5$ için Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3. 1. Huber'in M tahmininde amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.1.2. Fair'in M tahmini

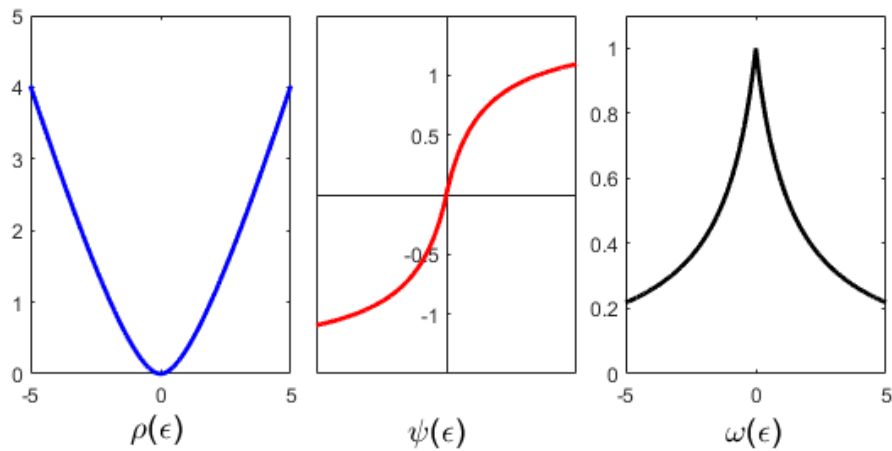
Fair'in M tahmin edicisi için amaç, ağırlık ve etki fonksiyonları sırasıyla

$$\rho_F(\varepsilon) = k_F^2 \ln \left(\frac{|\varepsilon|}{k_F} - \ln \left(1 + \frac{|\varepsilon|}{k_F} \right) \right), \quad |\varepsilon| < \infty \quad (3.6)$$

$$\psi_F(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{|\varepsilon|}{k_F}} \quad (3.7)$$

$$\omega_F(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \frac{|\varepsilon|}{k_F}} \quad (3.8)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Fair, 1974). Eşitlikte yer alan k_F sabiti için 1.3998 değeri kullanılmaktadır. Fair'in M tahmin edicisinde $k_F = 1.3998$ olmak üzere amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2. Fair'in M tahmini için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.1.3. Hampel'in M tahmini

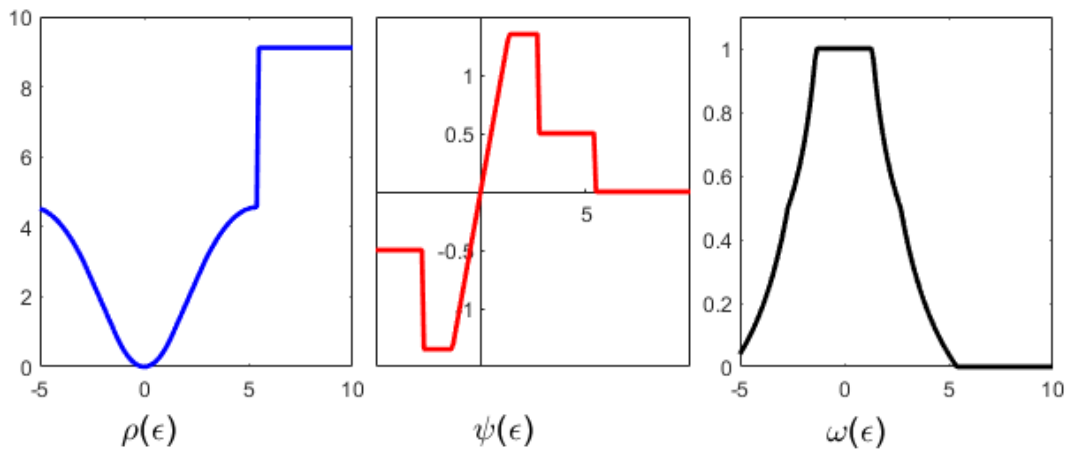
Hampel'in üç sabitli, dört parçalı M tahmin edicisi için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonları sırasıyla,

$$\rho_H(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{2} & |\varepsilon| \leq a \\ a|\varepsilon| - \frac{a^2}{2} & a < |\varepsilon| \leq b \\ ab - \frac{a^2}{2} + \frac{a(c-b)}{2} \left[1 - \left(\frac{c-|\varepsilon|}{c-b} \right)^2 \right] & b < |\varepsilon| \leq c \\ ab - \frac{a^2}{2} + \frac{a(c-b)}{2} & |\varepsilon| > c \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\psi_H(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon & |\varepsilon| \leq a \\ a \operatorname{sign}(\varepsilon) & a < |\varepsilon| \leq b \\ \frac{a \operatorname{sign}(\varepsilon)(c-|\varepsilon|)}{c-b} & b < |\varepsilon| \leq c \\ 0 & |\varepsilon| > c \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\omega_H(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & |\varepsilon| \leq a \\ \frac{a}{|\varepsilon|} & a < |\varepsilon| \leq b \\ \frac{a(c-|\varepsilon|)}{|\varepsilon|(c-b)} & b < |\varepsilon| \leq c \\ 0 & |\varepsilon| > c \end{cases} \quad (3.11)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Hampel, 1974). Özyurt ve Pike (2004) çalışmalarında $a = 1.35$ olmak üzere $b = 2.7$ ve $c = 5.4$ değerleri kullanılmışlardır. İlgili sabit değerler için Hampel'in M tahmininde amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği Şekil 3.3'de verilmiştir.



Şekil 3.3. Hampel'in M tahmininde amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.1.4. Tukey'in M tahmini

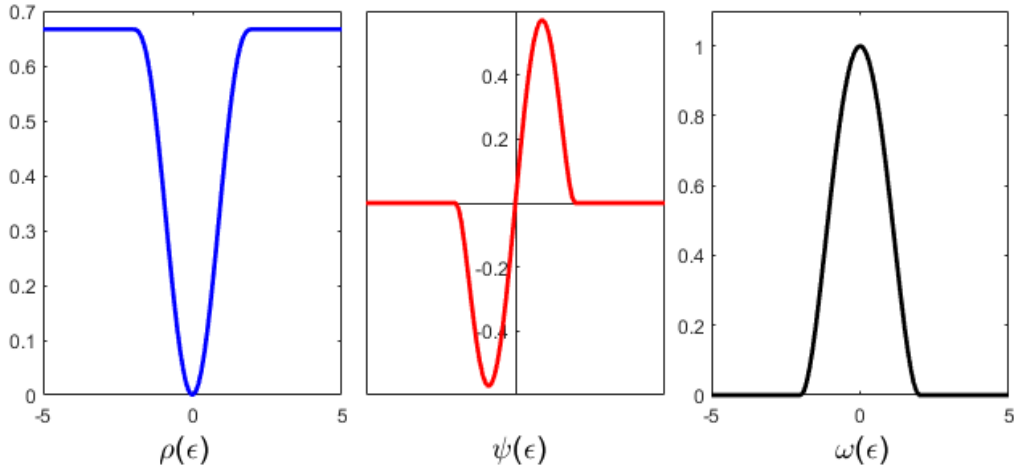
Tukey'in iki ağırlıklı M tahmin edicisi için k_T pozitif bir sayı olmak üzere amaç, etki ve ağırlık fonksiyonları sırasıyla

$$\rho_T(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{k_T^2}{6} (1 - \{1 - (\varepsilon/k_T)^2\}^3) & |\varepsilon| \leq k_T \\ \frac{k_T^2}{6} & |\varepsilon| > k_T \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\psi_T(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon(1 - (\varepsilon/k_T)^2)^2 & |\varepsilon| \leq k_T \\ 0 & |\varepsilon| > k_T \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\omega_T(\varepsilon) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{k_T}\right)^2\right)^2 & |\varepsilon| \leq k_T \\ 0 & |\varepsilon| > k_T \end{cases} \quad (3.14)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Beaton ve Tukey, 1974). Eşitliklerde yer alan k_T sabiti için en yaygın kullanılan değerler 2 ve 4.6851 değerleridir (Kutlu, 2019). Bu çalışmada k_T sabiti için 2 değeri tercih edilmiştir. Tukey'in iki ağırlıklı M tahmin edicisi için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği Şekil 3.4'de verilmiştir.



Şekil 3.4. Tukey'in M tahmininde amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.1.5. Andrew'in M tahmini

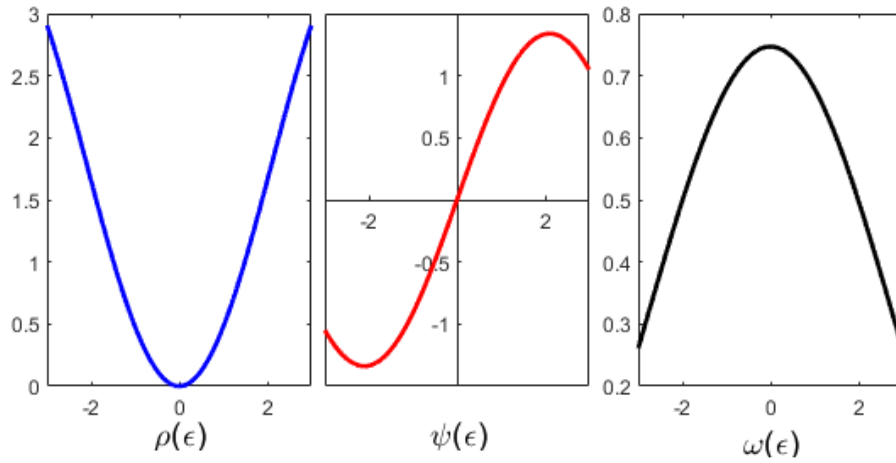
Andrew'in sinüs dalgası M tahmin edicisi için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonları sırasıyla

$$\rho_A(\varepsilon) = \begin{cases} k_A^2 \left\{1 - \cos\left(\frac{\varepsilon}{k_A}\right)\right\} & |\varepsilon| \leq k_A\pi \\ 2k_A^2 & |\varepsilon| > k_A\pi \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\psi_A(\varepsilon) = \begin{cases} k_A \sin\left(\frac{\varepsilon}{k_A}\right) & |\varepsilon| \leq k_A \pi \\ 0 & |\varepsilon| > k_A \pi \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\omega_A(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{k \sin\left(\frac{\varepsilon}{k_A}\right)}{\varepsilon} & |\varepsilon| \leq k_A \pi \\ 0 & |\varepsilon| > k_A \pi \end{cases} \quad (3.17)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Andrew, 1974). Eşitliklerde yer alan k sabiti için genellikle 1.339 değeri kullanılmaktadır. Andrew'ın sinüs dalgası M tahmin edicisi için $k = 1.339$ olmak üzere amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.5'de verilmiştir.



Şekil 3.5. Andrew'ın M tahmininde amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.1.6. Welsch'in M tahmini

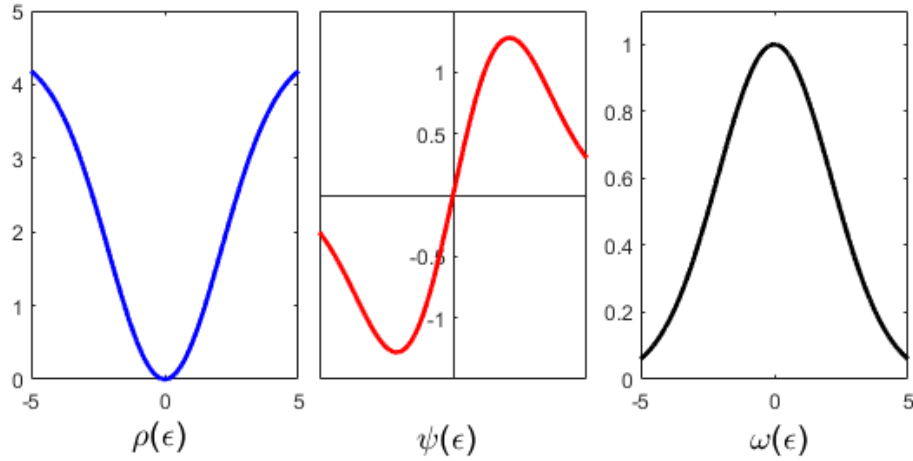
Welsch'in M tahmin edicisi için amaç, ağırlık ve etki fonksiyonları sırasıyla

$$\rho_W(\varepsilon) = \frac{k_W^2}{2} \left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon}{k_W}\right)^2} \right), \quad |\varepsilon| < \infty \quad (3.18)$$

$$\psi_W(\varepsilon) = \varepsilon e^{-\left(\frac{\varepsilon}{k_W}\right)^2} \quad (3.19)$$

$$\omega_W(\varepsilon) = e^{-\left(\frac{\varepsilon}{k_W}\right)^2} \quad (3.20)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Holland ve Welsch, 1977) . Eşitlikte yer alan k_W sabiti için yaygın olarak 2.9846 değeri kullanılmaktadır (Rey, 1983). Welsch'in M tahmin edicisinde $k_W = 2.9846$ olmak üzere amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.6'da verilmiştir.



Şekil 3.6. Welsch'in M tahmini için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.1.7. Cauchy'nin M tahmini

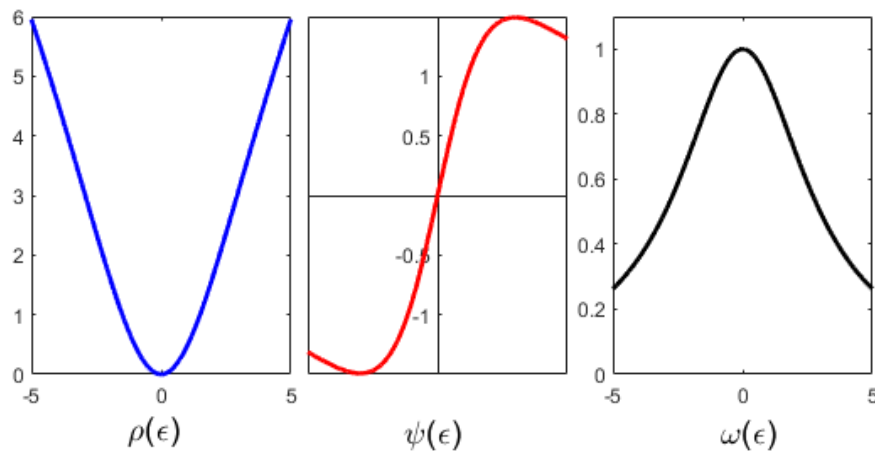
Cauchy'nin M tahmin edicisi için amaç, ağırlık ve etki fonksiyonları sırasıyla

$$\rho_C(\varepsilon) = \frac{k_C^2}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{k_C} \right)^2 \right), \quad |\varepsilon| < \infty \quad (3.21)$$

$$\psi_C(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{k_C} \right)^2} \quad (3.22)$$

$$\omega_C(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{k_C} \right)^2} \quad (3.23)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Stigler, 1974). Eşitlikte yer alan k_C sabiti için 2.3849 değeri kullanılmaktadır. Cauchy'nin M tahmin edicisinde $k_C = 2.3849$ olmak üzere amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.7'de verilmiştir.



Şekil 3.7. Cauchy'nin M tahmini için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.1.8. Talwar'ın M tahmini

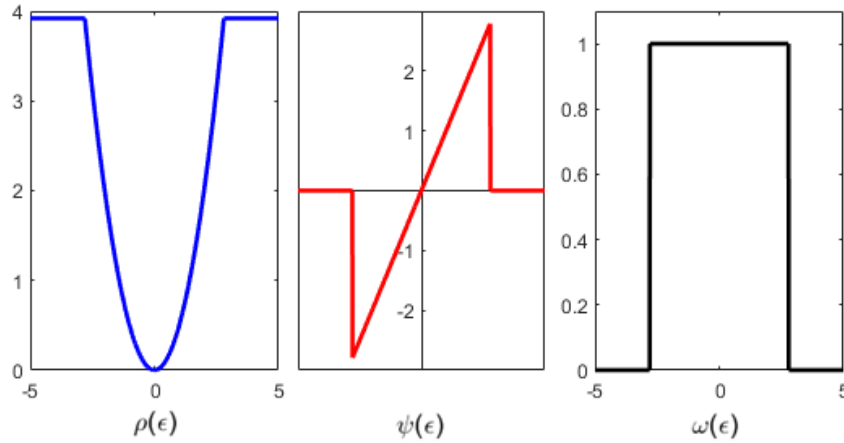
Talwar'ın M tahmin edicisi için amaç, ağırlık ve etki fonksiyonları sırasıyla

$$\rho_F(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{2} & |\varepsilon| \leq k_{TW} \\ \frac{k_{TW}^2}{2} & |\varepsilon| > k_{TW} \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\psi_F(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon & |\varepsilon| \leq k_{TW} \\ 0 & |\varepsilon| > k_{TW} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\omega_F(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & |\varepsilon| \leq k_{TW} \\ 0 & |\varepsilon| > k_{TW} \end{cases} \quad (3.26)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Hinich ve Talwar, 1975). Eşitlikte yer alan k_{TW} sabiti için 2.7955 değeri kullanılmaktadır (Holland ve Welsch, 1977). Talwar'ın M tahmin edicisinde $k_{TW} = 2.7995$ olmak üzere amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.8'de verilmiştir.



Şekil 3.8. Talwar'ın M tahmini için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.1.9. Ramsay'in M tahmini

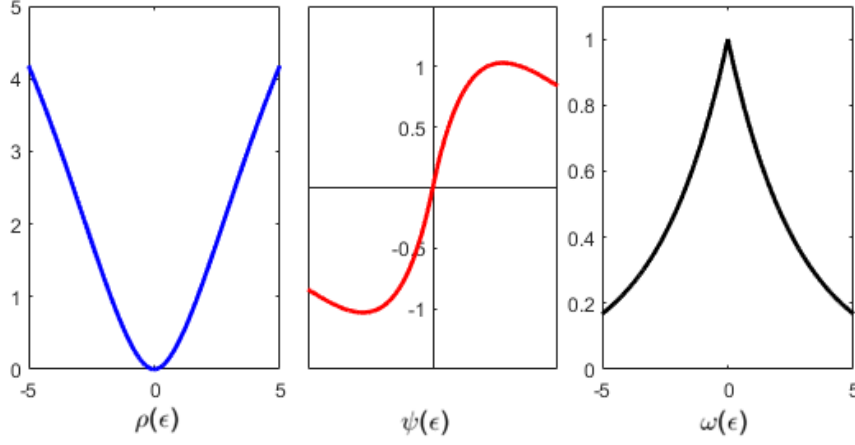
Ramsay'in M tahmin edicisi için amaç, ağırlık ve etki fonksiyonları sırasıyla

$$\rho_F(\varepsilon) = \frac{1 - (1 + k_R|\varepsilon|)e^{-k_R|\varepsilon|}}{k_R^2}, \quad |\varepsilon| < \infty \quad (3.27)$$

$$\psi_F(\varepsilon) = \varepsilon e^{-k_R|\varepsilon|} \quad (3.28)$$

$$\omega_F(\varepsilon) = e^{-k_R|\varepsilon|} \quad (3.29)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Ramsay, 1977). Eşitlikte yer alan k_R sabiti için 0.3569 değeri kullanılmaktadır (Menezes ve ark., 2021). Ramsay'ın M tahmin edicisinde $k_R = 0.3569$ olmak üzere amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.9. Ramsay'ın M tahmini için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.1.10. Geman-McClure'nin M tahmini

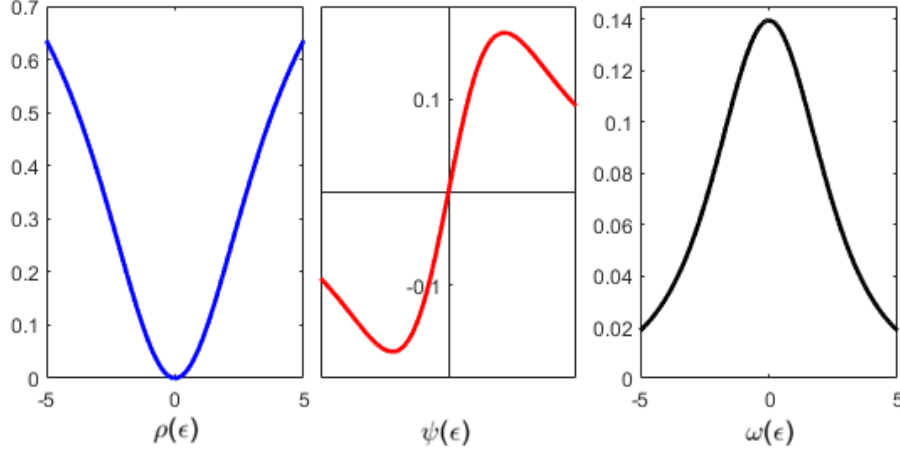
Geman-McClure'nin M tahmin edicisi için amaç, ağırlık ve etki fonksiyonları,

$$\rho_F(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{k_{GM}^2 + \varepsilon^2}, \quad |\varepsilon| < \infty \quad (3.30)$$

$$\psi_F(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon k_{GM}^2}{(k_{GM}^2 + \varepsilon^2)^2} \quad (3.31)$$

$$\omega_F(\varepsilon) = \frac{2k_{GM}^2}{(k_{GM}^2 + \varepsilon^2)^2} \quad (3.32)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Geman ve McClure, 1987). Eşitlikte yer alan k_{GM} sabiti için 3.787376 değeri kullanılmaktadır (Menezes ve ark., 2021). Ramsay'ın M tahmin edicisinde $k_R = 3,787376$ olmak üzere amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.10'da verilmiştir.



Şekil 3.10. Geman-McClure'in M tahmini için amaç, etki ve ağırlık fonksiyonlarının grafiği

3.1.2. M-Regresyonda Parametre Tahmini

M regresyonunda parametre tahminleri için yaygın olarak tekrarlı yenilenen ağırlıklı EKK algoritması kullanılmaktadır. Tekrarlı yenilenen ağırlıklı EKK algoritmasında parametre vektörünün başlangıç tahmini için EKK tahmin edicisi kullanılabilir. W diyagonal ağırlık matrisi olmak üzere parametre vektörünün başlangıç tahmini için EKK tahminlerini elde etmek için $\mathbf{1}$ gösterimi bir vektörü olmak üzere $W = \text{diag}(\mathbf{1})$ alınır. Parametre vektörünün başlangıç tahmini $\hat{\beta}^0$,

$$\hat{\beta}^0 = (X'WX)^{-1}X'W\mathbf{y} \quad (3.33)$$

eşitliği ile elde edilir. Parametre vektörünün başlangıç tahmini $\hat{\beta}^0$ 'a göre hata terimlerinin tahminleri $\hat{\varepsilon}_i$ hesaplanır. M tahmin edicisi için tanımlı ağırlık fonksiyonu ve hata terimlerinin tahminleri $\hat{\varepsilon}_i$ değerlerine göre ağırlıklar yenilenir. Yenilenen diyagonal ağırlık matrisi ile parametre vektörünün tahmini

$$\hat{\beta}^{\text{yeni}} = (X'W^{\text{yeni}}X)^{-1}X'W^{\text{yeni}}\mathbf{y} \quad (3.34)$$

eşitliği ile yenilenir. Algoritmanın sonlandırılması için yakınsama koşulu

$$\sum_{i=0}^p |\hat{\beta}_i^{\text{yeni}} - \hat{\beta}_i^0| \leq 10^{-4} \quad (3.35)$$

kontrol edilir. Yakınsama koşulu sağlanırsa elde edilen $\hat{\beta}^{\text{yeni}}$ vektörü parametre vektörü için M tahmin vektörü $\hat{\beta}_M$ kabul edilir ve algoritma sonlandırılır. Aksi takdirde $\hat{\beta}^{\text{yeni}}$ parametre tahmin vektörü, $\hat{\beta}^0$ başlangıç parametre tahmin vektörü kabul edilir ve ağırlıklar yenilenerek işlemler tekrarlanır.

3.2. Ridge Regresyonu

Çoklu doğrusal regresyon modelinde bağımsız değişkenlerin arasında bağlantı olmaması varsayılır. Fakat uygulamada genellikle bağımsız değişkenler aralarında ilişkilidir ve bu çoklu doğrusal bağlantı problemine neden olur (Özkale,2007). X matrisinde j . sütun vektörü \mathbf{x}_j olmak üzere $\sum_{j=1}^p t_j \mathbf{x}_j = 0$ eşitliğini sağlayan hepsi sıfır olmayan t_1, t_2, \dots, t_p sabitler varsa $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ vektörleri lineer bağımlıdır. $\sum_{j=1}^p t_j \mathbf{x}_j = 0$ eşitliği tam olarak sağlanıyorsa tam çoklu bağlantı vardır (Silvey, 1969). $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ vektörleri için ilgili çarpımlar toplamı sıfır değil de sıfıra yakınsa yani $\sum_{j=1}^p t_j \mathbf{x}_j \approx 0$ ise bu durum çoklu doğrusal bağlantı problemi olarak ifade edilir.

Bağımsız değişkenler arasında tam ilişki olması durumunda $X'X$ matrisi, determinantı sıfır olacağından tekil matris olur ve tersi alınamaz. Bu durumda çoklu doğrusal regresyon analizinde bilinmeyen parametre vektörünün EKK tahminleri elde edilemez. Bağımsız değişkenler arasında tam ilişki değil de yüksek ilişki olması durumunda $X'X$ matrisi tekil olmayan bir matris olur ve EKK tahminleri hesaplanabilir. Ancak bu durumda da EKK tahminlerinin en küçük varyansa sahip olma özelliği yani etkinlik özelliği geçerli olmaz (Marquardt ve Snee, 1975). Çoklu doğrusal bağlantı problemi, parametre tahminlerinin varyansının büyük olmasına ve buna bağlı olarak istatistiksel çıkarımların yanlış sonuçlar üretmesine neden olmaktadır (Pfaffenberger ve Dielman, 1990).

Çoklu doğrusal bağlantı probleminin belirlenmesinde, bağımsız değişkenler arasındaki korelasyon matrisinin özdeğerlerine dayalı olarak hesaplanan koşul sayısı ve koşul indeksinin kullanımı yaygındır. Bağımsız değişkenler arasındaki korelasyon matrisinin en büyük özdeğeri λ_{enb} ve en küçük özdeğeri λ_{enk} olmak üzere koşul sayısı (CN) ve koşul indeksi (CI)

$$CN = \frac{\lambda_{enb}}{\lambda_{enk}} \quad (3.36)$$

$$CI = \sqrt{\frac{\lambda_{enb}}{\lambda_{enk}}} \quad (3.37)$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Koşul indeksi değerinin 10 ile 30 arasında olması durumunda orta şiddetli çoklu bağlantı problemi, 30'dan büyük olması durumunda yüksek şiddetli ciddi çoklu doğrusal bağlantı problemi olduğu kabul edilir (Gujarati, 1995).

Çoklu doğrusal bağlantı probleminin çözümünde ilk olarak Hoerl ve Kennard (1970) tarafından önerilen yanlı tahmin edicilerden ridge tahminleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Hoerl ve Kennard (1970), çoklu doğrusal bağlantı durumunda $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına $k > 0$ olmak üzere k yanlılık (ridge) parametresi ekleyerek koşul sayısını küçültmeyi ve parametre tahmininin varyansını küçültmeyi amaçlamıştır. Ridge tahmin edicisi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R = (X'X + kI)^{-1}X'\mathbf{y} \quad (3.38)$$

eşitliği tanımlanır. Ridge tahmin edicisi yanlı bir tahmin edicidir. Ridge tahmin edicisinin yanı, $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) = E((X'X + kI)^{-1}X'\mathbf{y}) = (X'X + kI)^{-1}X'E(\mathbf{y}) = (X'X + kI)^{-1}X'X\boldsymbol{\beta}$ olmak üzere

$$Yan(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) = E(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)) - \boldsymbol{\beta} = -k(X'X + kI)^{-1}\boldsymbol{\beta} \quad (3.39)$$

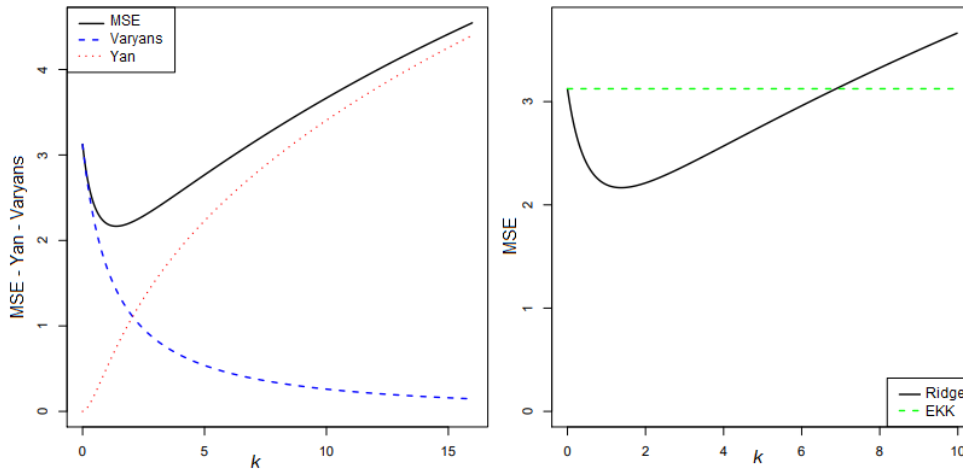
olarak tanımlanır. Ridge tahmin edicisinin varyansı

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) = \sigma^2 (X'X + kI)^{-1}X'X (X'X + kI)^{-1} \quad (3.40)$$

olarak elde edilir. Ridge tahmin edicisinin skaler hata kareler ortalaması, $X'X$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ olmak üzere

$$SMSE(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) = \sum_{j=1}^p \frac{\sigma^2 \lambda_j}{(\lambda_j + k)^2} + k^2 \boldsymbol{\beta}'(X'X + kI)^{-2}\boldsymbol{\beta} \quad (3.41)$$

olarak tanımlanır. Eşitliğin ilk parçası toplam varyans, ikinci parçası ise yanlılığın karesinin toplamıdır. Yanlılık parametresi k değerlerine göre ridge tahmini için MSE değerinin yan ve varyans bakımından grafiksel gösterimi ile ridge ve EKK tahminlerini MSE değerlerinin karşılaştırılması Şekil 3.11'de verilmiştir



Şekil 3.11. Ridge ve EKK tahminlerinin MSE karşılaştırılması

Ridge tahmininin optimum k değeri, EKK tahmincisinden daha küçük olan hata kareler ortalamasının bulunmasını sağlayan değerdir ve burada k 'nin tercihi, ridge tahmin edicisinin performansını etkiler. Bu nedenle yanlılık parametresi k 'nin seçimi oldukça önemlidir (Suhail ve Kibria, 2019). Literatürde yanlılık parametresi k 'nin seçimi için birçok yöntem önerilmiştir. Yanlılık parametresi k 'nin seçimi için önerilen yöntemler EKK tahmin edicisinin kanonik formuna dayalıdır. EKK tahmin edicisinin kanonik formu D ortogonal bir matris ve $D'D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ olmak üzere $\alpha = D'\beta$ olur. Literatürde önerilen bazı yanlılık parametresi tahmin değerleri Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1. Literatürde önerilen bazı yanlılık parametresi tahmin değerleri

$\hat{k}_{HK} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_{enb}^2}$	Hoerl ve Kennard (1970b)
$\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i^2}$	Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975)
$\hat{k}_{LW} = \frac{p\sigma^2}{\sum_{i=1}^p \lambda_i \hat{\alpha}_i^2}$	Lawless ve Wang (1976)
$\hat{k}_{HSL} = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum_{i=1}^p (\lambda_i \hat{\alpha}_i)^2}{(\sum_{i=1}^p \lambda_i \hat{\alpha}_i^2)^2}$	Hocking, Speed ve Lynn (1976)
$\hat{k}_{AO} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_i^2}$	Kibria (2003)
$\hat{k}_{GO} = \frac{\hat{\sigma}^2}{(\prod_{i=1}^p \hat{\alpha}_i^2)^{\frac{1}{p}}}$	Kibria (2003)
$\hat{k}_{MED} = \text{Medyan} \left\{ \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_i^2} \right\}, i = 1, \dots, p$	Kibria (2003)
$\hat{k}_{KS} = \frac{\lambda_{max} \hat{\sigma}^2}{(n-p)\hat{\sigma}^2 + \lambda_{max} \hat{\alpha}_{max}^2}$	Khalaf ve Shukur (2005)

Burada $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - p)$ ve $\hat{\alpha}_{enb}$ gösterimi en büyük $\hat{\alpha}_i$ değerini göstermektedir.

3.3. Ridge Tahminine Dayalı M Tahminleri

Çoklu doğrusal bağlantı problemi ve aykırı gözlem, hataların normal dağılmaması durumunda M tahminleri ile ridge tahmininin bir arada kullanılabilir. Ridge tahminine dayalı M tahmini elde edilmesinde tekrarlı yenilenen ağırlıklı EKK algoritması ridge tahminine dayalı düzenlenerek kullanılabilir. Tekrarlı yenilenen ağırlıklı ridge algoritması olarak isim algoritmasında parametre vektörünün başlangıç tahmini için ridge tahmin edicisi kullanılır. W diyagonal ağırlık matrisi olmak üzere parametre vektörünün başlangıç tahmini için ridge tahminlerini elde etmek için $\mathbf{1}$ gösterimi bir vektörü olmak üzere $W = \text{diag}(\mathbf{1})$ alınır ve parametre vektörünün başlangıç tahmini $\hat{\beta}_{MR}^0$,

$$\hat{\beta}_{MR}^0 = (X'WX + \hat{k}I)^{-1} X'W\mathbf{y} \quad (3.42)$$

eşitliği ile elde edilir. Eşitlikte yer alan \hat{k} ridge tahmininde yanlılık parametresinin tahminini göstermektedir. Parametre vektörünün başlangıç tahminine göre hata terimlerinin tahminleri hesaplanır. M tahmin edicisi için tanımlı ağırlık fonksiyonu ve hata terimlerinin tahminlerine göre ağırlıklar yenilenir. Yenilenen diyagonal ağırlık matrisi ile parametre vektörünün tahmini

$$\hat{\beta}_{MR}^{yeni} = (X'W^{yeni}X + \hat{k}I)^{-1} X'W^{yeni}\mathbf{y} \quad (3.43)$$

eşitliği ile yenilenir. Algoritmanın sonlandırılması için yakınsama koşulu

$$\sum_{i=0}^p |\hat{\beta}_{MR,i}^{yeni} - \hat{\beta}_{MR,i}^0| \leq 10^{-4} \quad (3.44)$$

kontrol edilir. Yakınsama koşulu sağlanırsa elde edilen $\hat{\beta}_{MR}^{yeni}$ vektörü, parametre vektörü için ridge tahminine dayalı M tahmin vektörü $\hat{\beta}_{MR}$ kabul edilir ve algoritma sonlandırılır. Aksi takdirde $\hat{\beta}_{MR}^{yeni}$ parametre tahmin vektörü, başlangıç parametre tahmin vektörü $\hat{\beta}_{MR}^0$ kabul edilerek ağırlıklar yenilenir ve işlemler tekrarlanır.

4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI VE UYGULAMA

Bu bölümde çoklu doğrusal regresyon modelinde, çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem probleminin aynı anda olması durumunda ridge tahminine dayalı m tahmin edicilerin performansı simülasyon ve gerçek veri seti üzerinde incelenecektir.

4.1. Simülasyon Çalışması

Simülasyon çalışmasında, aynı anda çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem problemi içeren yapay veri setleri oluşturulmuştur. Bağımsız değişkenler aralarında çoklu doğrusal bağlantı olacak şekilde $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, p$ olmak üzere

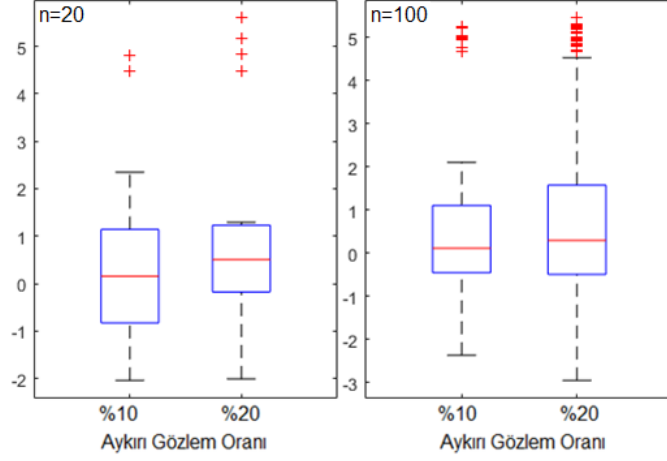
$$x_{ij} = (1 - r^2)^{1/2} z_{ij} + \rho z_{ip} \quad (4.1)$$

eşitliği ile üretilmiştir (McDonald ve Galarneau, 1975). Eşitlikte yer alan r bağımsız değişkenler arasındaki korelasyon katsayısını, z_{ij} ise standart normal dağılımından üretilen rassal değeri göstermektedir. Bağımsız değişkenler $X'X$ matrisi, bağımsız değişkenler arasındaki korelasyon matrisi olacak şekilde standartlaştırılmıştır. Bilinmeyen parametreler vektörü β , $X'X$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen özvektör olarak seçilmiştir (Kibria, 2003). Bağımlı değişkeninin değerleri

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i \quad (4.2)$$

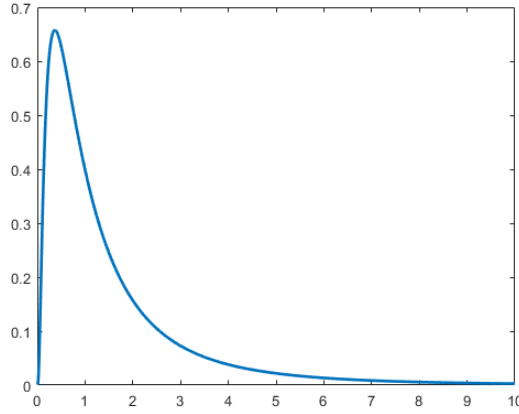
eşitliği ile oluşturulmuştur. Veri setinde aykırı gözlem problemi oluşturmak için hata terimlerinin bir kısmı aykırı gözlem oranına göre ortalaması 5, standart sapması 0.1 olan normal dağılımdan geri kalan kısmı ise ortalaması 0, standart sapması 1 olacak şekilde üretilmiştir. Veri setinde aykırı gözlemlerin oranı %10 ve %20 olacak şekilde iki farklı durum göz önünde tutulmuştur. Simülasyon çalışmasında örneklem hacmi $n = 20$ ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki $r^2 = 0.99$ ve 0.999 için koşul indeksi sırasıyla 41.7282 ve 39.8439, örneklem hacmi 100 ve $r^2 = 0.99$ ve 0.999 değerleri için ise sırasıyla 130.1736 ve 127.2314 olarak hesaplanmıştır.

Simülasyon çalışması örneklem hacmi $n = 20$ ve 100 , bağımsız değişkenler arasındaki ilişki $r^2 = 0.99$ ve 0.999 olacak şekilde 5000 tekrar ile gerçekleştirilmiştir. Simülasyon çalışmasında üretilen bağımlı değişken değerlerine ait örnek bir gösterim için, rassal olarak seçilen yapay veri setlerinde aykırı gözlem oranına göre bağımlı değişken değerlerine ait kutu grafikleri Şekil 4.1'de verilmiştir.



Şekil 4.1. Aykırı gözlem oranına göre bağımlı değişkene ait örnek kutu grafikleri

Simülasyon çalışmasında ayrıca hataların normal dağılım göstermemesi durumu için hatalar ortalaması 0, standart sapması 1 olan lognormal dağılımdan üretilerek tahmin edicilerin performansı karşılaştırılmıştır. Ortalaması 0 ve standart sapması 1 olmak üzere lognormal dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun eğrisi Şekil 4.2’de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Lognormal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu eğrisi

Simülasyon çalışmasında EKK, M, ridge ve ridge tahminine dayalı M-tahminlerinin performanslarının karşılaştırılmasında tekrar sayısı 5000 olmak üzere

$$sMSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{5000} \sum_{t=1}^{5000} \sum_{i=1}^p (\hat{\beta}_{i,t} - \beta)^2 \quad (4.3)$$

eşitliği ile hesaplanan tahmin edicilerin skaler MSE değeri göz önünde bulundurulmuştur.

Simülasyon çalışmasında $r^2 = 0.99$ ve örneklem hacmi 20 olmak üzere farklı aykırı gözlem oranları için elde edilen tahmin edicilerin skaler MSE değerleri Tablo 4.1 ve Tablo 4.2’de verilmiştir.

Tablo 4.1. Aykırı gözlem oranı %10, $n = 20$ ve $r^2 = 0.99$ için tahmin edicilerinin skaler MSE değerleri

EKK	1507.06	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		117.891	203.820	175.044	8.077	0.389	14.856	55.152	121.791		
M-Tahmin		M-Ridge Tahmin									
Huber	893.860	\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
Fair	943.136	65.026	105.234	92.032	4.379	0.353	7.331	27.022	67.014		
Hampel	836.801	38.283	57.969	53.438	2.584	0.355	3.023	14.198	39.404		
Tukey	1725.782	54.173	82.300	73.597	3.397	0.349	5.069	19.628	55.864		
Andrew	796.919	22.249	30.281	30.816	1.812	0.478	1.482	6.477	22.991		
Welsch	823.663	34.516	49.614	46.638	2.183	0.350	2.647	11.226	35.558		
Cauchy	883.687	48.872	73.823	66.670	3.091	0.3471	4.369	17.552	50.371		
Talwar	798.563	58.091	92.384	81.816	3.817	0.3469	5.739	23.240	59.837		
Ramsay	873.291	58.062	88.502	78.570	3.723	0.349	5.993	21.085	59.900		
Geman-McClure	838.096	42.236	64.156	58.646	2.781	0.350	3.506	15.571	43.483		
		3.511	4.043	4.623	0.620	0.533	0.365	1.089	3.496		

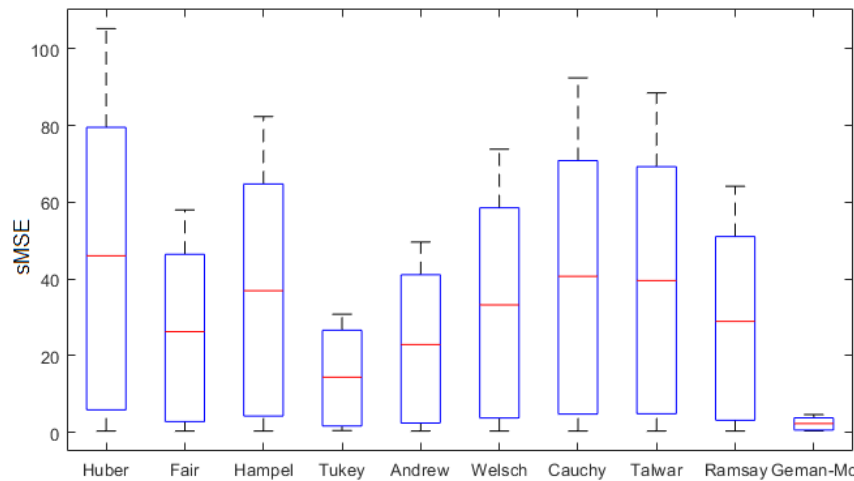
Tablo 4.2. Aykırı gözlem oranı %20, $n = 20$ ve $r^2 = 0.99$ için tahmin edicilerinin skaler MSE değerleri

EKK	4694.981	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		3023.756	1657.074	676.982	327.444	0.458	106.551	443.482	3031.023		
M-Tahmin		M-Ridge Tahmin									
Huber	3499.616	\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
Fair	3013.929	1599.733	637.071	251.808	128.696	0.435	28.668	147.896	1605.432		
Hampel	1905.393	1002.236	337.370	121.444	69.689	0.459	10.292	68.019	1006.376		
Tukey	2541.135	706.030	247.065	104.786	41.117	0.487	8.286	53.669	708.909		
Andrew	1689.642	286.908	68.632	27.276	15.501	0.574	2.080	13.644	288.771		
Welsch	1903.509	418.640	116.646	50.478	22.527	0.432	3.639	25.613	420.770		
Cauchy	2760.425	665.134	223.833	93.211	39.497	0.468	7.313	47.753	667.858		
Talwar	2636.496	1191.597	464.814	179.835	88.974	0.449	17.053	100.373	1195.715		
Ramsay	2493.603	1110.995	316.013	125.896	53.185	0.400	8.258	55.988	1114.771		
Geman-McClure	2105.865	857.939	289.901	109.017	56.928	0.469	8.972	58.796	861.333		
		86.130	13.987	4.905	4.436	0.722	0.614	2.669	86.714		

Küçük örneklem hacmi ve aykırı gözlem oranının %10 olduğu Tablo 4.1 incelendiğinde hem çoklu doğrusal bağlantı hem de aykırı gözlem probleminin olduğu durumunda en başarılı tahmin edici, en küçük skaler MSE değeri 0.3469 ile \hat{k}_{AO} yanlılık parametresinin kullanıldığı ridge tahmine dayalı Cauchy'nin M tahmin edicisi olmuştur. Tablo 4.1'de geleneksel M tahmin edicileri genel olarak EKK tahmin edicisinden daha düşük bir skaler MSE değerine sahip olmasına karşı 1725.782 skaler MSE değeri ile en kötü performans gösteren tahmin edici Tukey'in M tahmin edicisi olmuştur.

Çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem problemlerinin bir arada olduğu çoklu doğrusal regresyon modelinde parametre tahmininde skaler MSE ölçütüne göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri, geleneksel M tahmin edicilerinden daha başarılı olmuştur.

Tablo 4.1 incelendiğinde M tahmin ediciler arasında yer alan Geman-McClure'nin M tahmin edicisi, ridge tahminlerinde kullanılan yanlılık parametresinin seçiminden en az değişkenlik gösteren tahmin edici olmuştur. Ridge tahminine dayalı M tahmin ediciler arasında, farklı yanlılık parametresi k değerlerine göre elde edilen skaler MSE değerlerinin ortalaması alındığında en başarılı tahmin edici ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi olmuştur. Ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri için farklı yanlılık parametresi k değerlerine göre elde edilen skaler MSE değerlerine ait kutu grafikleri Şekil 4.3'de verilmiştir.



Şekil 4.3. Farklı yanlılık parametresi değerlerine göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerinin skaler MSE değerlerine ait kutu grafikleri

Ridge tahmine dayalı M tahmin edicileri genel olarak Kibria (2003) tarafından önerilen \hat{k}_{AO} yanlılık parametre tahmini ile en iyi performansı göstermiştir. Sadece ridge

tahminine dayalı Geman-McClure'nin M-tahmininde en başarılı yanlılık parametre tahmini Kibria (2003) tarafından önerilen k_{GO} olmuştur.

Tablo 4.1 incelendiğinde hem çoklu doğrusal bağlantı hem de aykırı gözlem probleminin olduğu durumda EKK, M ve ridge tahmin edicileri arasında ridge tahmin edicileri skaler MSE ölçütüne göre daha başarılı performans göstermiştir. Bu sonuca dayalı olarak, çoklu doğrusal bağlantı probleminin EKK tahmin edicisi üzerinde aykırı gözlem problemine göre daha fazla olumsuz etki yaptığı söylenebilir.

Aykırı gözlem oranının %20, diğer koşulların değişmediği durum için elde edilen Tablo 4.2 incelendiğinde tahmin edicilerin skaler MSE değerlerinin arttığı görülmektedir. Aykırı gözlem sayısının artması beklendiği gibi tahmin edicilerin MSE performansını kötüleştirmiştir. Aykırı gözlem oranının %20 olduğu Tablo 4.2 incelendiğinde hem çoklu doğrusal bağlantı hem de aykırı gözlem probleminin olduğu durumda en başarılı tahmin edici, en küçük skaler MSE değeri 0.400 ile \hat{k}_{AO} yanlılık parametresinin kullanıldığı ridge tahmine dayalı Talwar'ın M tahmin edicisi olmuştur.

Aykırı gözlem oranının %20 olduğu diğer koşulların değişmediği hem çoklu doğrusal bağlantı hem de aykırı gözlem probleminin olduğu durumda da skaler MSE ölçütüne göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri, geleneksel M tahmin edicilerinden daha başarılı olmuştur. Tablo 4.2'de, 4694.981 skaler MSE değeri ile en kötü performans gösteren tahmin edici EKK tahmin edicisi olmuştur. Aykırı gözlem oranının %20 olduğu diğer koşulların değişmediği hem çoklu doğrusal bağlantı hem de aykırı gözlem probleminin olduğu durumun içinde, ridge tahmine dayalı M tahmin edicileri genel olarak Kibria (2003) tarafından önerilen \hat{k}_{AO} yanlılık parametre tahmini ile en iyi performansı göstermiştir. Tablo 4.2 sonuçlarına göre de yanlılık parametre tahmininden en az etkilenen Geman-McClure'nin M tahmin edicisidir. Tablo 4.1'e benzer şekilde farklı yanlılık parametresi k değerlerine göre elde edilen skaler MSE değerlerinin ortalaması alındığında en başarılı tahmin edici ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi olmuştur.

Simülasyon çalışmasında $r^2 = 0.99$ ve örneklem hacmi 100 olmak üzere farklı aykırı gözlem oranları için elde edilen tahmin edicilerin skaler MSE değerleri Tablo 4.3 ve Tablo 4.4'de verilmiştir.

Tablo 4.3. Aykırı gözlem oranı %10, $n = 100$ ve $r^2 = 0.99$ için tahmin edicilerinin skaler MSE değerleri

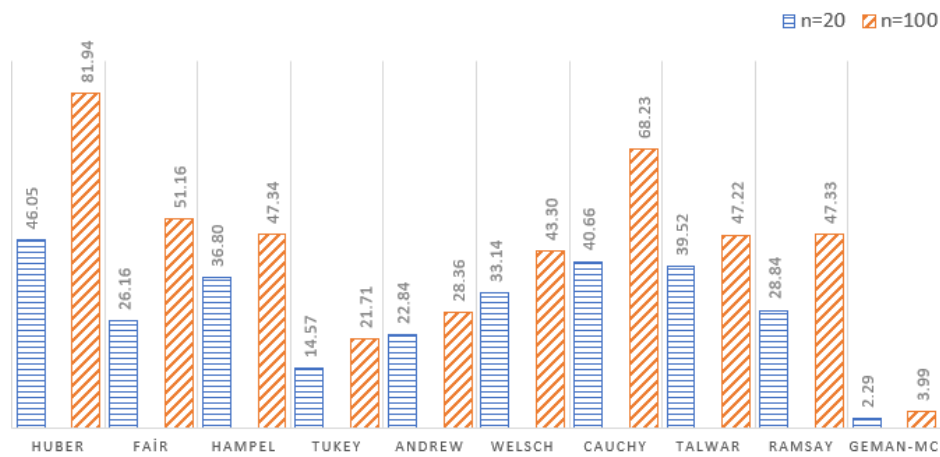
EKK	1900.100	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		258.580	486.807	407.134	6.339	3.333	107.302	222.727	321.897		
M-Tahmin		M-Ridge Tahmin									
Huber	891.006	\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
Fair	988.946	93.567	181.536	154.375	2.118	0.968	33.451	75.540	114.005		
Hampel	772.782	59.672	114.154	99.039	1.018	0.568	16.256	45.757	72.816		
Tukey	1492.272	54.855	107.133	93.165	1.088	0.581	16.220	37.948	67.716		
Andrew	662.853	25.028	48.464	46.163	0.591	0.513	5.186	16.207	31.567		
Welsch	744.195	33.579	63.891	57.262	0.624	0.403	8.336	21.429	41.319		
Cauchy	885.819	50.271	97.880	85.458	0.979	0.526	14.488	35.122	61.654		
Talwar	660.464	78.338	152.276	130.334	1.580	0.758	25.550	61.696	95.331		
Ramsay	856.196	54.922	106.275	91.784	1.178	0.633	17.414	37.127	68.444		
Geman-McClure	777.916	55.031	106.159	92.334	0.992	0.531	15.402	41.355	66.862		
		4.829	8.354	8.553	0.247	0.293	0.832	2.949	5.822		

Tablo 4.4. Aykırı gözlem oranı %20, $n = 100$ ve $r^2 = 0.99$ için tahmin edicilerinin skaler MSE değerleri

EKK	3140.552	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		226.692	811.123	874.977	9.332	7.970	181.913	294.674	359.045		
M-Tahmin		M-Ridge Tahmin									
Huber	1474.408	\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
Fair	1507.492	75.450	283.226	310.723	2.560	2.013	51.429	96.867	114.645		
Hampel	1189.339	35.669	152.533	178.194	1.234	1.104	20.904	46.666	54.648		
Tukey	1790.016	29.586	111.818	128.957	0.825	0.704	15.732	34.737	43.583		
Andrew	783.499	9.576	41.978	54.622	0.552	0.565	4.569	11.537	14.676		
Welsch	1070.609	15.158	56.914	67.810	0.465	0.440	7.418	17.193	22.266		
Cauchy	1352.270	26.181	99.490	114.792	0.736	0.628	13.944	31.093	38.397		
Talwar	778.506	50.324	196.219	219.783	1.574	1.280	31.148	64.321	75.687		
Ramsay	1287.711	27.514	99.066	111.324	0.802	0.689	15.950	31.236	40.935		
Geman-McClure	1120.644	31.230	127.685	147.766	0.970	0.842	17.486	39.782	46.736		
		1.808	7.754	11.174	0.198	0.269	0.910	2.177	2.587		

Aykırı gözlem oranının %10, örnekleme hacminin 100 birim olduğu Tablo 4.3 incelendiğinde skaler MSE ölçütüne göre en başarılı tahmin edici, 0.247 ile en küçük skaler MSE değerine sahip \hat{k}_{HSL} ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisidir. Tablo 4.3'de, 1900.1 skaler MSE değeri ile en kötü performans gösteren tahmin edici EKK tahmin edicisi olmuştur. Büyük örneklem hacminde de, çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem problemlerinin bir arada olduğu çoklu doğrusal regresyon modelinde parametre tahmininde skaler MSE ölçütüne göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri, geleneksel M tahmin edicilerinden daha başarılı olmuştur. Farklı yanlılık parametresi k değerlerine göre elde edilen skaler MSE değerlerinin ortalaması alındığında, büyük örneklem hacminde de en başarılı tahmin edici ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi olmuştur.

Örneklem hacminin artırılması ile elde edilen Tablo 4.3 ve 4.4'deki sonuçlar ile küçük örneklem hacminde elde edilen Tablo 4.1 ve 4.2'deki sonuçlar karşılaştırıldığında çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem probleminin olduğu veri setlerinde örneklem hacminin artması durumunda tahmin edicilerin skaler MSE değerleri arttığı görülmüştür. Tablo 4.1 ve Tablo 4.3'deki değerlere göre farklı yanlılık parametresi k değerlerine göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri için elde edilen skaler MSE değerlerinin ortalamalarının karşılaştırılması Şekil 4.4'de verilmiştir.

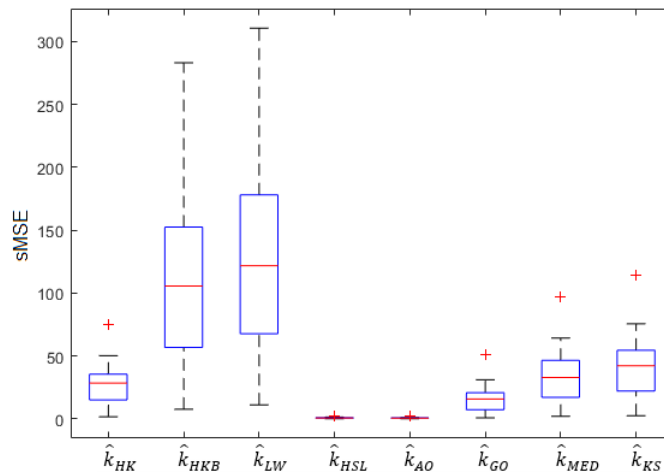


Şekil 4.4. Farklı örneklem hacimlerinde, farklı yanlılık parametresi değerlerine göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerinin skaler MSE değerlerine ait ortalama değerlerinin karşılaştırılması

Aykırı gözlem oranının %20, örnekleme hacminin 100 birim olduğu Tablo 4.4 incelendiğinde skaler MSE ölçütüne göre en başarılı tahmin edici, 0.198 ile en küçük skaler MSE değerine sahip \hat{k}_{HSL} ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin

edicisidir. Tablo 4.4’de, 3140.552 skaler MSE değeri ile en kötü performans gösteren tahmin edici EKK tahmin edicisi olmuştur. Aykırı gözlem oranının %20, örnekleme hacminin 100 birim olduğu durum içinde ridge tahminine dayalı M tahmin ediciler, geleneksel M tahmin edicilerden daha iyi performans göstermiştir.

Aykırı gözlem oranı %20 ve örnekleme hacminin 100 olduğu durum için ridge tahminine dayalı M tahmin ediciler skaler MSE ölçütüne göre Kibria (2003) tarafından önerilen k_{AO} ve Hocking, Speed ve Lynn (1976) tarafından önerilen k_{HSL} yanlılık parametre tahminleri ile en başarılı performansı göstermişlerdir. Farklı yanlılık parametre tahminlerine göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerin skaler MSE değerlerine ait kutu grafiği Şekil 4.5’de verilmiştir.



Şekil 4.5. Farklı yanlılık parametresi değerlerine göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerinin skaler MSE değerlerine kutu grafikleri

Küçük örnekleme hacminde aykırı gözlem oranı arttığında tahmin edicilerin skaler MSE değerleri artış gösterirken, büyük örnekleme hacminde aykırı gözlem oranı arttığında Hoerl ve Kennard (1970b) tarafından önerilen yanlılık parametre tahmini k_{HK} ile Khalaf ve Shukur (2005) tarafından önerilen yanlılık parametresi k_{HKB} ile gerçekleştirilen ridge tahminine dayalı M tahmin edicilere ait skaler MSE değerleri genel olarak küçülmüştür.

Büyük örnekleme hacminde çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem problemlerinin bir arada olduğu veri setlerinde EKK, M ve ridge tahmin edicileri arasında en başarılı tahmin edici ridge tahmin edicisi olmuştur.

Simülasyon çalışmasında $r^2 = 0.999$ ve örnekleme hacmi 20 olmak üzere farklı aykırı gözlem oranları için elde edilen tahmin edicilerin skaler MSE değerleri Tablo 4.5 ve Tablo 4.6’da verilmiştir.

Tablo 4.5. Aykırı gözlem oranı %10, $n = 20$ ve $r^2 = 0.999$ için tahmin edicilerinin skaler MSE değerleri

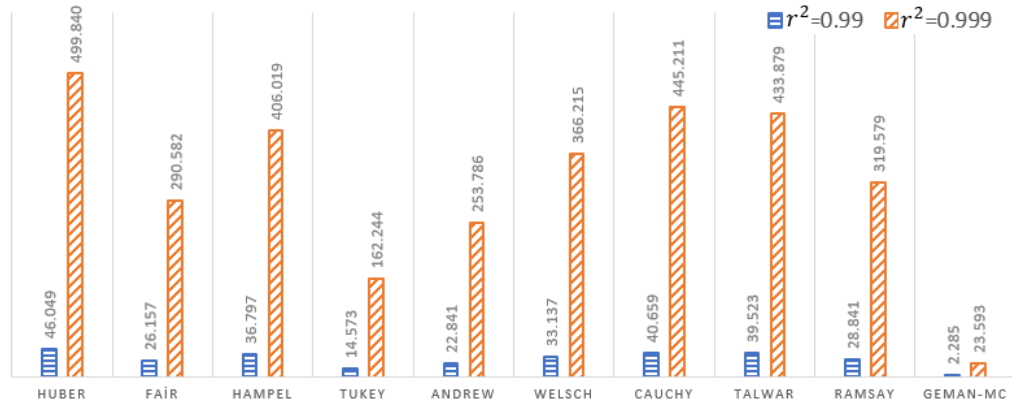
EKK	Ridge	\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}
		14807.131	2068.689	1999.721	706.270	21.945	0.300	56.045	543.728
M-Tahmin		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}
Huber	8764.191	1111.019	1031.415	439.101	11.680	0.303	27.145	264.628	1113.431
Fair	9249.708	688.926	566.519	221.816	7.872	0.320	9.988	138.747	690.468
Hampel	8199.155	911.395	806.542	397.144	9.601	0.309	17.856	191.799	913.506
Tukey	16930.813	400.689	292.637	133.467	4.608	0.453	3.838	60.458	401.800
Andrew	7813.175	588.172	484.797	243.485	6.487	0.318	8.721	108.747	589.560
Welsch	8071.554	830.188	723.092	348.570	8.912	0.310	15.163	171.399	832.089
Cauchy	8662.866	1006.607	905.638	380.991	10.934	0.305	20.375	228.035	1008.800
Talwar	7831.714	957.074	867.037	449.919	9.688	0.302	21.840	205.884	959.290
Ramsay	8559.872	744.164	627.712	266.277	8.316	0.316	11.811	152.213	745.821
Geman-McClure	8213.268	62.305	37.282	16.202	1.275	0.485	0.608	8.142	62.445

Tablo 4.6. Aykırı gözlem oranı %20, $n = 20$ ve $r^2 = 0.999$ için tahmin edicilerinin skaler MSE değerleri

EKK	Ridge	\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}
		47401.887	31219.846	16777.823	21574.414	510.123	0.297	387.819	3709.695
M-Tahmin		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}
Huber	35046.937	16614.515	6433.902	9701.346	203.245	0.383	100.656	1201.710	16620.019
Fair	30145.911	10515.510	3417.909	5621.556	120.061	0.411	32.969	542.742	10519.477
Hampel	18720.207	7303.376	2496.267	3983.442	64.521	0.470	26.347	428.332	7306.089
Tukey	25115.230	3072.891	694.490	1377.559	29.169	0.546	5.185	102.614	3074.634
Andrew	16616.234	4398.887	1184.785	2131.911	37.422	0.403	11.202	203.191	4400.891
Welsch	18732.179	6903.999	2264.845	3692.730	62.878	0.446	23.223	380.758	6906.578
Cauchy	27512.585	12372.348	4701.652	7178.307	146.249	0.411	56.566	809.476	12376.232
Talwar	26024.879	11460.867	3189.382	5901.231	90.671	0.374	28.123	442.991	11463.500
Ramsay	24797.853	8964.764	2935.818	4811.464	95.923	0.434	28.542	468.760	8967.998
Geman-McClure	20833.458	943.263	138.798	339.125	7.597	0.684	1.123	17.713	943.858
M-Ridge Tahmin		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}
Huber	16614.515	6433.902	9701.346	203.245	0.383	100.656	1201.710	16620.019	
Fair	10515.510	3417.909	5621.556	120.061	0.411	32.969	542.742	10519.477	
Hampel	7303.376	2496.267	3983.442	64.521	0.470	26.347	428.332	7306.089	
Tukey	3072.891	694.490	1377.559	29.169	0.546	5.185	102.614	3074.634	
Andrew	4398.887	1184.785	2131.911	37.422	0.403	11.202	203.191	4400.891	
Welsch	6903.999	2264.845	3692.730	62.878	0.446	23.223	380.758	6906.578	
Cauchy	12372.348	4701.652	7178.307	146.249	0.411	56.566	809.476	12376.232	
Talwar	11460.867	3189.382	5901.231	90.671	0.374	28.123	442.991	11463.500	
Ramsay	8964.764	2935.818	4811.464	95.923	0.434	28.542	468.760	8967.998	
Geman-McClure	943.263	138.798	339.125	7.597	0.684	1.123	17.713	943.858	

Çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem problemlerinin bir arada olduğu durum için bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin $r^2 = 0.999$, aykırı gözlem oranının %10 ve örnekleme hacminin 20 birim olduğu Tablo 4.5 incelendiğinde skaler MSE ölçütüne göre en başarılı tahmin edici, 0.302 ile en küçük skaler MSE değerine sahip \hat{k}_{AO} ridge tahminine dayalı Talwar'ın M tahmin edicisidir. Bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin $r^2 = 0.999$, örneklem hacminin 20 birim olduğu durum içinde skaler MSE ölçütüne göre ridge tahminine dayalı M tahmin ediciler, geleneksel M tahmin edicilerden daha iyi performans göstermiştir. Farklı yanlılık parametresi k değerlerine göre elde edilen skaler MSE değerlerinin ortalaması alındığında, en başarılı tahmin edici ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi olmuştur.

Bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin artması durumunda tahmin edicilerin skaler MSE ölçütüne göre performansları kötüleşmiştir. Tablo 4.1 ve Tablo 4.5'de farklı yanlılık parametresi k değerlerine göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerin skaler MSE değerlerinin ortalamalarının karşılaştırılması Şekil 4.6'da verilmiştir.



Şekil 4.6. Bağımsız değişkenler arasındaki farklı r^2 değerlerine göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerinin farklı yanlılık parametresi ile elde edilen ortalama skaler MSE değerlerinin karşılaştırılması

Çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem problemlerinin bir arada olduğu durum için bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin $r^2 = 0.999$, aykırı gözlem oranının %20 ve örnekleme hacminin 20 birim olduğu Tablo 4.6 incelendiğinde skaler MSE ölçütüne göre en başarılı tahmin edici, 0.374 ile en küçük skaler MSE değerine sahip \hat{k}_{AO} ridge tahminine dayalı Talwar'ın M tahmin edicisidir.

Simülasyon çalışmasında $r^2 = 0.999$ ve örneklem hacmi 100 olmak üzere farklı aykırı gözlem oranları için elde edilen tahmin edicilerin skaler MSE değerleri Tablo 4.7 ve Tablo 4.8'de verilmiştir.

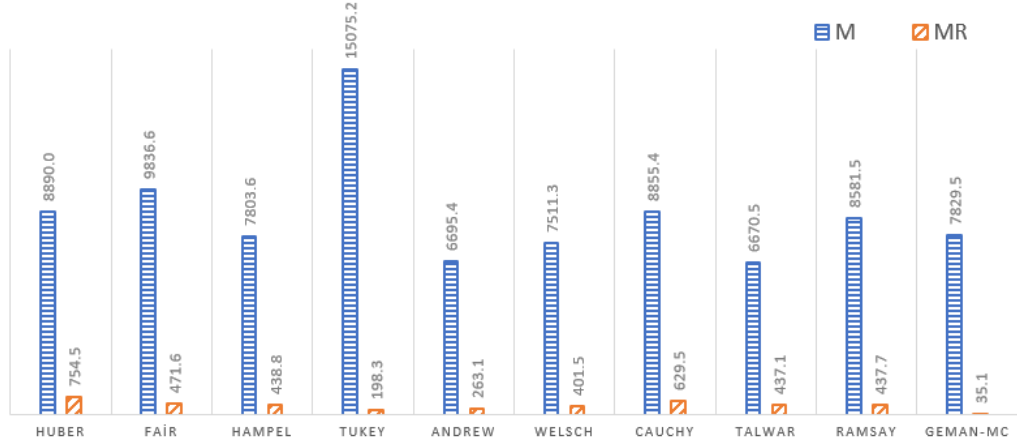
Tablo 4.7. Aykırn gözlem oranı %10, $n = 100$ ve $r^2 = 0.999$ için tahmin edicilerinin skaler MSE değerleri

EKK	18517.999	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		2504.533	4706.645	4097.869	1.899	1.235	467.179	2140.604	2560.969		
M-Tahmin		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
Huber	8890.015	910.818	1762.354	1564.003	0.669	0.443	139.555	729.165	928.705		
Fair	9836.618	577.118	1101.013	1006.757	0.419	0.386	60.238	438.211	588.751		
Hampel	7803.645	536.871	1042.389	949.718	0.405	0.333	64.471	368.317	547.574		
Tukey	15075.198	239.013	462.022	470.656	0.438	0.458	16.656	152.421	244.621		
Andrew	6695.389	327.636	619.131	584.560	0.303	0.283	31.200	207.327	334.089		
Welsch	7511.262	491.194	951.042	870.874	0.379	0.316	56.855	340.229	500.762		
Cauchy	8855.387	761.912	1476.605	1322.699	0.532	0.398	102.518	594.711	776.775		
Talwar	6670.480	539.118	1037.643	935.352	0.429	0.323	72.074	361.953	550.108		
Ramsay	8581.543	534.111	1026.813	939.240	0.392	0.343	58.365	397.546	544.460		
Geman-McClure	7829.529	44.168	77.362	85.725	0.224	0.266	2.147	26.096	45.037		

Tablo 4.8. Aykırn gözlem oranı %20, $n = 100$ ve $r^2 = 0.999$ için tahmin edicilerinin skaler MSE değerleri

EKK	30238.893	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		2118.929	7749.269	8724.782	3.342	3.450	749.439	2715.282	2227.345		
M-Tahmin		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
Huber	14573.073	704.728	2705.611	3119.209	1.042	1.078	196.682	891.648	736.316		
Fair	14871.272	327.168	1439.940	1792.199	0.771	0.860	70.318	421.709	342.186		
Hampel	12033.327	277.873	1066.741	1307.909	0.420	0.445	56.344	321.465	288.670		
Tukey	18102.683	85.479	389.947	552.495	0.474	0.511	13.505	101.956	89.391		
Andrew	7924.098	141.920	540.689	688.279	0.291	0.313	25.735	158.922	147.372		
Welsch	10821.232	245.473	948.332	1162.733	0.378	0.406	49.678	287.261	254.978		
Cauchy	13458.812	468.079	1868.520	2210.937	0.752	0.801	112.682	589.157	488.358		
Talwar	7871.997	260.574	950.086	1129.894	0.343	0.360	61.100	291.902	270.608		
Ramsay	12868.287	288.666	1209.728	1489.077	0.558	0.621	59.709	362.044	300.966		
Geman-McClure	11272.675	13.782	67.987	109.560	0.186	0.243	2.080	16.860	14.357		
M-Ridge Tahmin		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
Huber	704.728	2705.611	3119.209	1.042	1.078	196.682	891.648	736.316			
Fair	327.168	1439.940	1792.199	0.771	0.860	70.318	421.709	342.186			
Hampel	277.873	1066.741	1307.909	0.420	0.445	56.344	321.465	288.670			
Tukey	85.479	389.947	552.495	0.474	0.511	13.505	101.956	89.391			
Andrew	141.920	540.689	688.279	0.291	0.313	25.735	158.922	147.372			
Welsch	245.473	948.332	1162.733	0.378	0.406	49.678	287.261	254.978			
Cauchy	468.079	1868.520	2210.937	0.752	0.801	112.682	589.157	488.358			
Talwar	260.574	950.086	1129.894	0.343	0.360	61.100	291.902	270.608			
Ramsay	288.666	1209.728	1489.077	0.558	0.621	59.709	362.044	300.966			
Geman-McClure	13.782	67.987	109.560	0.186	0.243	2.080	16.860	14.357			

Simülasyon çalışmasında $r^2 = 0.999$ ve örneklem hacmi 100 olmak üzere %10 aykırı gözlem oranı için elde edilen Tablo 4.7 incelendiğinde 0.224 en küçük skaler MSE değeri ile \hat{k}_{HSL} ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi en başarılı tahmin edici olmuştur. Diğer koşullarda olduğu gibi $r^2 = 0.999$ ve örneklem hacmi 100 olmak üzere %10 aykırı gözlem oranında skaler MSE ölçütüne göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri geleneksel M tahmin edicilerine göre daha başarılı olmuştur. Geleneksel M tahmin edicileri ile farklı ridge parametrelerinde ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri için elde edilen skaler MSE değerlerinin ortalamalarının karşılaştırılması Şekil 4.7'de verilmiştir.



Şekil 4.7. Ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri (MR) ile M tahmin edicilerin skaler MSE değerlerinin karşılaştırılması

Simülasyon çalışmasında $r^2 = 0.999$ ve örneklem hacmi 100 olmak üzere %20 aykırı gözlem oranı için elde edilen Tablo 4.8 incelendiğinde 0.186 en küçük skaler MSE değeri ile \hat{k}_{HSL} ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi en başarılı tahmin edici iken EKK tahmin edicisi 30238.893 skaler MSE değeri ile en kötü performans gösteren tahmin edici olmuştur. Daha önceki durumlarda olduğu gibi burada da ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri arasında genel olarak Geman-McClure'nin M tahmin edicisi en başarılı tahmin edici olmuştur.

Simülasyon çalışmasında son olarak hataların sağa çarpık bir dağılım gösteren lognormal dağılımdan üretilmesi durumunda tahmin edicilerin skaler MSE ölçütüne göre performansları karşılaştırılmıştır. Örneklem hacmi 20 için hataların 0 ortalama ve 1 standart sapma ile lognormal dağılımdan üretilmesi durumu için $r^2 = 0.99$ ve 0.999 değerleri için elde edilen tahmin edicilerin skaler MSE değerleri Tablo 4.9 ve 4.10'da verilmiştir.

Tablo 4.9. Hataların lognormal dağılıma sahip olması durumunda $n = 20$ ve $r^2 = 0.99$ için tahmin edicilerin skaler MSE değerleri

EKK	3394.857	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		916.252	603.731	599.784	37.128	1.277	41.289	114.869	923.979		
M-Tahmin		M-Ridge Tahmin									
Huber	1162.188	192.488	89.897	98.023	8.009	0.442	4.535	16.129	194.639		
Fair	870.719	56.820	19.709	23.938	2.026	0.435	0.941	3.327	57.369		
Hampel	1569.666	65.604	25.721	30.567	2.646	0.397	1.206	4.050	66.543		
Tukey	7023.009	53.023	14.939	19.346	2.260	0.693	0.975	2.382	53.898		
Andrew	1857.532	49.237	16.610	21.006	1.975	0.448	0.765	2.504	49.894		
Welsch	1449.204	55.090	20.680	25.154	2.233	0.404	0.961	3.236	55.842		
Cauchy	657.616	53.355	23.447	25.361	2.451	0.381	1.237	4.320	54.083		
Talwar	1647.434	109.115	48.123	53.427	4.316	0.438	2.546	8.368	110.804		
Ramsay	720.429	33.217	12.415	14.805	1.386	0.407	0.622	2.124	33.619		
Geman-McClure	924.968	3.387	0.809	1.191	0.549	0.674	0.260	0.372	3.320		

Tablo 4.10. Hataların lognormal dağılıma sahip olması durumunda $n = 20$ ve $r^2 = 0.999$ için tahmin edicilerin skaler MSE değerleri

EKK	33306.964	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		8997.876	5948.933	4765.248	104.566	1.083	162.260	1206.539	9005.269		
M-Tahmin		M-Ridge Tahmin									
Huber	11407.251	1887.833	881.303	843.324	25.901	0.402	15.669	160.412	1889.963		
Fair	8550.317	550.887	191.837	194.284	5.752	0.405	2.707	31.811	551.423		
Hampel	15477.152	637.706	250.228	252.280	8.641	0.362	3.724	39.164	638.621		
Tukey	70204.772	506.971	137.156	156.075	5.348	0.667	2.064	18.025	507.562		
Andrew	18307.094	475.212	160.095	167.463	5.641	0.414	2.086	23.054	475.849		
Welsch	14280.645	534.852	200.797	204.341	7.167	0.369	2.873	30.971	535.587		
Cauchy	6459.583	514.559	228.322	238.338	7.214	0.347	3.905	41.604	515.262		
Talwar	16168.063	1042.757	469.180	483.516	14.245	0.397	7.998	81.662	1044.302		
Ramsay	7079.695	320.713	120.290	127.999	3.859	0.374	1.738	19.700	321.104		
Geman-McClure	9098.966	30.482	6.632	7.986	0.689	0.636	0.205	0.983	30.427		

Hataların 0 ortalama ve 1 standart sapma ile lognormal dağılımdan üretildiği örneklem hacminin 20 ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki $r^2 = 0.99$ değerinde elde edilen skaler MSE değerleri incelendiğinde en başarılı tahmin edici 0.260 skaler MSE değeri ile k_{GO} ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi olmuştur. Ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri ile geleneksel M tahmin edicilerinin performans karşılaştırılmasında ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerin daha başarılı olduğu görülmüştür. Ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri en başarılı performansları ridge tahmininde seçili yanlılık parametre tahmin edicileri arasından \hat{k}_{AO} yanlılık parametre tahmin edicisi ile göstermiştir. Hataların 0 ortalama ve 1 standart sapma ile lognormal dağılımdan üretildiği örneklem hacminin 20 ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki $r^2 = 0.99$ değerinde elde edilen skaler MSE değerleri incelendiğinde tahmin ediciler arasında en kötü performansı en büyük skaler MSE değerine sahip olan Tukey'in M tahmin edicisi göstermiştir.

Hataların 0 ortalama ve 1 standart sapma ile lognormal dağılımdan üretildiği örneklem hacminin 20 ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki $r^2 = 0.999$ değerinde elde edilen skaler MSE değerleri incelendiğinde 0.205 skaler MSE değeri ile k_{GO} ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi en başarılı tahmin edici olmuştur. Farklı yanlılık parametre tahmin değerleri için ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerin skaler MSE değerlerinin ortalamasına göre en başarılı tahmin edici ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi olmuştur.

Örneklem hacmi 100 için hataların 0 ortalama ve 1 standart sapma ile lognormal dağılımdan üretilmesi durumu için $r^2 = 0.99$ ve 0.999 değerleri için elde edilen tahmin edicilerin skaler MSE değerleri Tablo 4.11 ve 4.12'de verilmiştir.

Tablo 4.11. Hataların lognormal dağılıma sahip olması durumunda $n = 100$ ve $r^2 = 0.99$ için tahmin edicilerin skaler MSE değerleri

EKK	2591.635	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		573.003	448.774	413.554	102.524	1.180	26.348	88.479	629.044		
M-Tahmin		M-Ridge Tahmin									
Huber	551.834	\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
Fair	397.395	80.668	51.510	48.476	9.118	0.440	2.737	9.414	90.462		
Hampel	423.251	29.977	15.077	15.355	3.252	0.463	0.668	2.580	33.079		
Tukey	3245.259	29.755	17.699	18.068	3.317	0.422	0.846	2.862	34.648		
Andrew	513.681	36.679	13.949	16.491	3.707	0.790	0.907	2.166	40.897		
Welsch	397.044	23.992	12.479	13.303	2.506	0.481	0.561	1.868	27.491		
Cauchy	336.273	24.905	14.398	14.920	2.771	0.430	0.673	2.276	28.891		
Talwar	742.333	30.534	17.975	17.966	3.347	0.406	0.897	3.131	34.839		
Ramsay	298.564	63.221	38.948	39.548	7.171	0.476	1.927	6.432	73.963		
Geman-McClure	314.456	17.229	9.359	9.892	1.915	0.439	0.450	1.534	19.699		
		2.236	0.775	1.022	0.576	0.725	0.264	0.364	2.344		

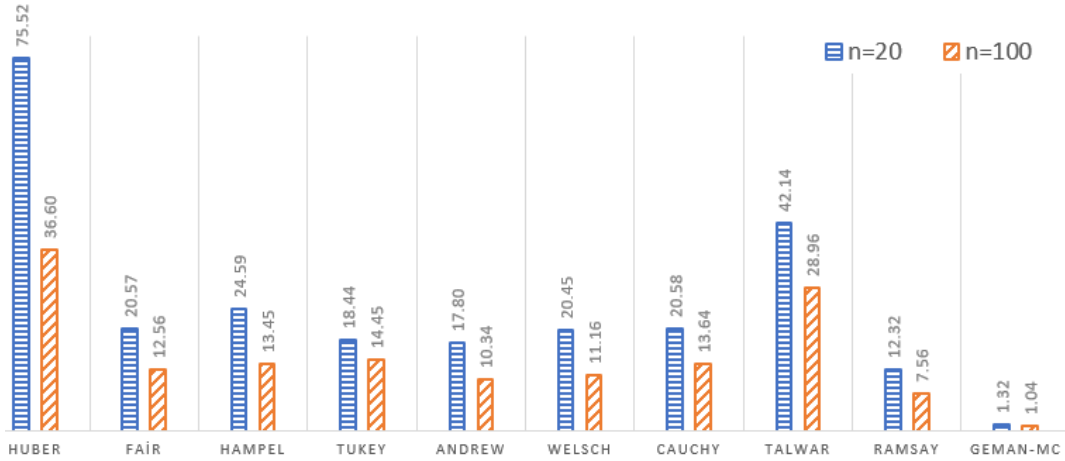
Tablo 4.12. Hataların lognormal dağılıma sahip olması durumunda $n = 100$ ve $r^2 = 0.999$ için tahmin edicilerin skaler MSE değerleri

EKK	26187.711	Ridge									
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
		5765.011	4521.224	4171.784	363.889	1.006	100.677	886.798	5813.761		
M-Tahmin		M-Ridge Tahmin									
Huber	5573.883	\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}		
Fair	4014.625	812.268	517.892	487.361	25.690	0.397	9.624	93.055	820.752		
Hampel	4273.551	300.611	150.789	153.540	10.356	0.430	1.866	24.279	303.397		
Tukey	32900.989	297.335	177.075	180.812	9.781	0.382	2.597	27.063	301.513		
Andrew	5184.126	362.298	133.322	160.017	11.241	0.772	1.675	15.586	366.051		
Welsch	4009.178	238.865	124.184	132.466	7.460	0.441	1.471	16.755	241.894		
Cauchy	3398.437	248.654	143.897	149.126	7.927	0.391	1.976	21.212	252.068		
Talwar	7500.811	306.533	180.189	180.040	9.248	0.370	2.842	30.068	310.248		
Ramsay	3017.670	633.598	390.162	394.856	22.666	0.429	6.276	61.806	642.454		
Geman-McClure	3177.000	172.115	93.414	98.636	5.096	0.401	1.217	13.926	174.256		
		20.322	6.647	8.365	0.931	0.685	0.173	0.812	20.436		

Hataların 0 ortalama ve 1 standart sapma ile lognormal dağılımdan üretildiği örneklem hacminin 100 ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki $r^2 = 0.99$ olduğu durum için elde edilen skaler MSE değerleri incelendiğinde en başarılı tahmin edici 0.264 skaler MSE değeri ile k_{GO} ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi olmuştur.

Hataların 0 ortalama ve 1 standart sapma ile lognormal dağılımdan üretildiği örneklem hacminin 100 ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki $r^2 = 0.999$ değerinde elde edilen skaler MSE değerleri incelendiğinde 0.173 skaler MSE değeri ile k_{GO} ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi en başarılı tahmin edici olmuştur.

Hataların 0 ortalama ve 1 standart sapma ile lognormal dağılımdan üretildiği simülasyon çalışmasında aykırı gözlem durumundan farklı olarak örneklem hacminin artırılması durumunda tahmin edicilerin performansı genel olarak artmış ve skaler MSE değerleri küçülmüştür. Bağımsız değişkenler arasındaki ilişki $r^2 = 0.99$ olduğu durum için ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerin farklı yanlılık parametre değerlerine göre elde edilen skaler MSE değerlerinin ortalamalarının farklı örneklem hacimlerinde karşılaştırılması Şekil 4.8'de verilmiştir.

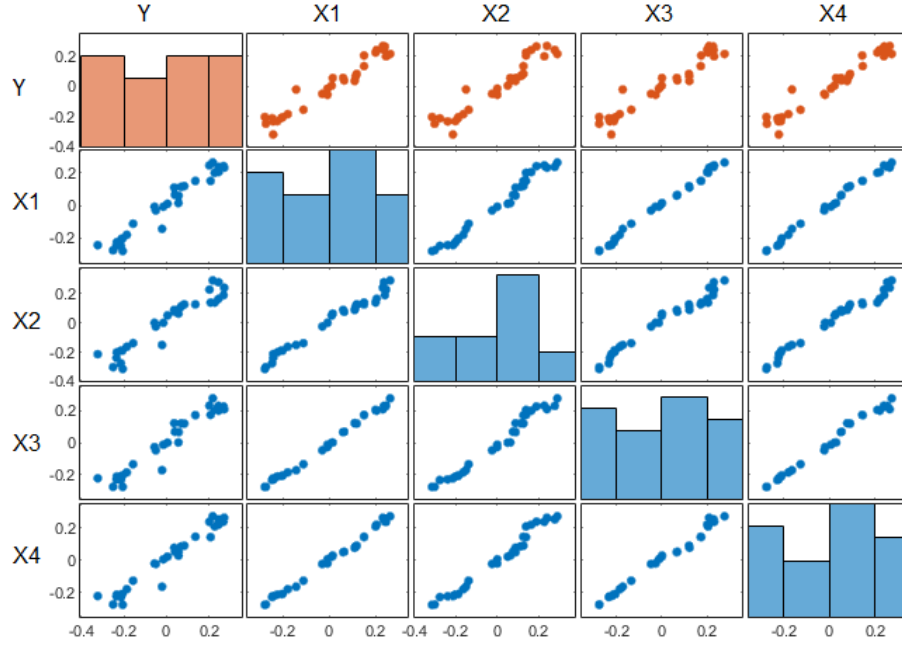


Şekil 4.8. Ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerin skaler MSE değerlerinin farklı örneklem hacimlerinde karşılaştırılması

4.2. Gerçek Veri Uygulaması

Tobacco verisi çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı değer problemi taşıyan bir veri setidir (Myers, 1990). Tobacco verisi bir bağımlı değişken ve dört bağımsız değişken ile 30 birimden oluşan bir veri setidir. Uygulamada veri seti merkezîleştirilip, genel kareler

toplamlarının kareköküne oranlanarak standartlaştırılmıştır. Standartlaştırılmış veri seti için matris saçılım grafiği Şekil 4.9’da verilmiştir.



Şekil 4.9. Standartlaştırılmış Tobacco veri seti için matris saçılım grafiği

Şekil 4.9 incelendiğinde veri setinin aykırı gözlem ve çoklu doğrusal bağlantı problemi içerdiği görülmektedir. Standartlaştırılmış Tobacco veri setinde bağımsız değişkenler arasındaki koşul indeksi 43.0758 olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan koşul indeksine göre veri setinde yüksek şiddetli çoklu doğrusal bağlantı problemi vardır. Bu veri setinde EKK, ridge, M ve ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerinin performansı tekrarlı r katmanlı çapraz doğrulama tekniği ile karşılaştırılacaktır.

Tekrarlı r katmanlı çapraz doğrulama tekniğinde, veri seti rassal olarak r parçaya bölünür ve bölünen her parça sırayla test verisi, geri kalan $r - 1$ parçadan oluşan veri seti de eğitim verisi olur. Eğitim verisi ile model parametreleri tahmin edilir ve elde edilen parametre tahminlerine göre test verisinde toplam hata değeri hesaplanır. Verinin parçalanmasındaki rassallığın etkisini azaltmak için işlemler tekrarlanarak tekrarlı r katmanlı çapraz doğrulama gerçekleştirilmiş olur. Veri seti r parçaya bölündükten sonra her parçadaki gözlem sayısı m olmak üzere test verisindeki toplam hata değeri

$$E_i = \sum_{j=1}^m (y_{j,test} - \hat{y}_{j,test})^2 \quad (4.4)$$

eşitliği ile elde edilir. Tekrar sayısı T olmak üzere her tekrarda her parçanın ortalama hata değerlerinin toplamı

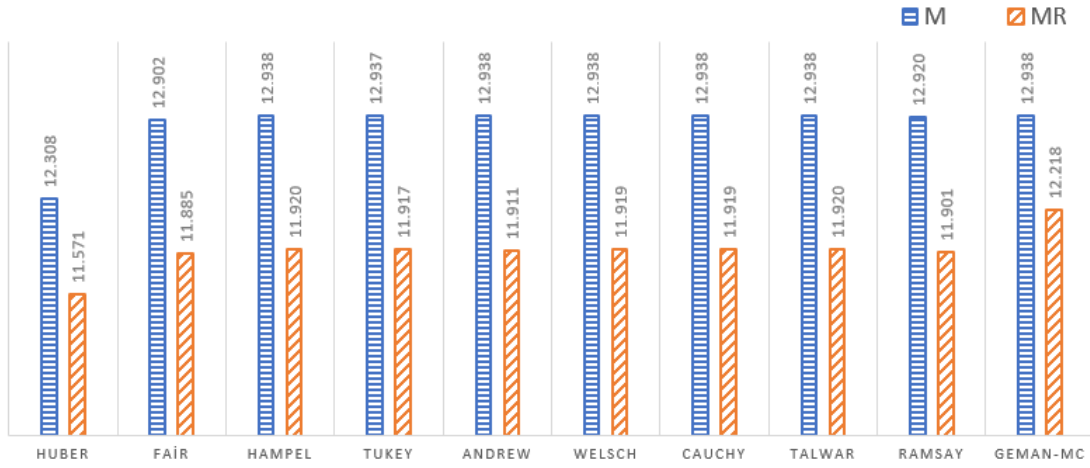
$$SME = \sum_{t=1}^T \frac{1}{m} \sum_{j=1}^r E_{t,j} \quad (4.5)$$

eşitliği ile elde edilir. Elde edilen değerin küçük olması parametre tahmin yönteminin performansının iyi olduğu anlamına gelir. Tekrarlı r katmanlı çapraz doğrulama tekniğinde $r = 5$ ve $T = 1000$ olmak üzere incelenen tahmin ediciler için elde edilen toplam hata değerleri Tablo 4.13’de verilmiştir.

Şekil 4.13. Tobacco veri setinde tahmin ediciler için tekrarlı r katmanlı çapraz doğrulama tekniği ile elde edilen toplam hata değerleri

EKK		Ridge								
12.938		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}	
		12.003	11.664	13.370	11.658	11.530	11.572	11.555	12.006	
M-Tahmin		M-Ridge Tahmin								
		\hat{k}_{HK}	\hat{k}_{HKB}	\hat{k}_{LW}	\hat{k}_{HSL}	\hat{k}_{AO}	\hat{k}_{GO}	\hat{k}_{MED}	\hat{k}_{KS}	
Huber	12.308	Huber	11.397	11.262	13.283	11.467	11.265	11.247	11.249	11.399
Fair	12.902	Fair	11.945	11.615	13.385	11.644	11.497	11.530	11.515	11.948
Hampel	12.938	Hampel	12.003	11.664	13.370	11.658	11.530	11.572	11.555	12.006
Tukey	12.937	Tukey	12.000	11.661	13.370	11.656	11.528	11.569	11.552	12.002
Andrew	12.938	Andrew	11.859	11.578	13.597	11.788	11.544	11.532	11.529	11.862
Welsch	12.938	Welsch	12.003	11.664	13.370	11.658	11.530	11.571	11.554	12.005
Cauchy	12.938	Cauchy	12.003	11.664	13.370	11.658	11.530	11.571	11.554	12.005
Talwar	12.938	Talwar	12.003	11.664	13.370	11.658	11.530	11.572	11.555	12.006
Ramsay	12.920	Ramsay	11.973	11.639	13.377	11.650	11.513	11.550	11.534	11.976
GemanMc	12.938	GemanMc	11.602	11.954	12.938	12.878	12.387	12.162	12.223	11.601

Tablo 4.13 incelendiğinde tekrarlı r katmanlı çapraz doğrulama tekniğindeki toplam hata ölçütüne göre 11.247 ile en küçük toplam hata değerinin elde edildiği \hat{k}_{GO} ridge parametre tahminine dayalı Huber’in M tahmin edicisi en başarılı tahmin edici olmuştur. Tekrarlı r katmanlı çapraz doğrulama tekniğindeki toplam hata ölçütüne göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri daha küçük toplam hata değerleri ile geleneksel M tahmin edicilerden daha iyi bir performans göstermiştir. Farklı yanlılık parametresi değerlerine göre ridge tahminine dayalı M tahmin ediciler için elde edilen toplam hata değerlerinin ortalamasının geleneksel M tahmin edicilerin toplam hata değerleri ile karşılaştırılması Şekil 4.10’da verilmiştir.



Şekil 4.10. Tekrarlı r katmanlı çapraz doğrulama tekniğinde toplam hata ölçütüne göre ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerin (MR) ile M tahmin edicilerin karşılaştırılması

Tablo 4.13’de ridge tahmin ediciler ile ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerinin toplam hata ölçütüne göre karşılaştırılmasında genel olarak ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerin daha başarılı olduğu görülmüştür.

Uygulama verisinin analizinde de simülasyon çalışmasındakine benzer olarak hem çoklu doğrusal bağlantı hem de aykırı gözlem probleminin var olduğu durumda ridge tahmin edicileri, M tahmin edicilerden daha başarılı bir performans göstermiştir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, istatistiksel analizler içerisinde en fazla bilinen ve en yaygın kullanılan çoklu doğrusal regresyon analizinde hem çoklu doğrusal bağlantı problemi hem de aykırı gözlem probleminin bir arada olduğu durumlar için ridge tahminine dayalı M tahmin ediciler önerilmiştir. Çoklu doğrusal regresyon modelinde çoklu doğrusal bağlantı problemi durumunda EKK tahmin edicisine alternatif olarak kullanılan ridge tahmin ediciler ile hataların normal dağılım göstermemesi ve aykırı gözlem durumunda EKK tahmin edicisine alternatif olarak kullanılan M tahmin ediciler incelendikten sonra, her iki problemin bir arada olduğu durumlar için önerilen ridge tahminine dayalı M tahmin edicilerin parametre tahmini için tekrarlı yenilenen ağırlıklı ridge tahmin algoritması tanımlanmıştır.

Çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem probleminin bir arada olduğu durum için önerilen ridge tahminine dayalı M tahmin ediciler EKK, ridge ve M tahmin edicileri ile simülasyon çalışmasında skaler MSE değeri bakımından karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışmasında EKK tahmin edicisi, literatürde yaygın bir kullanıma sahip olan 10 M tahmin edicisi, 8 ridge tahmin edicisi ve 8 ridge tahmin edici ile 10 M tahmin edicinin birlikte kullanıldığı 80 ridge tahmine dayalı M tahmin edicisi olmak üzere toplam 99 tahmin edicinin performansı karşılaştırılmıştır.

Farklı örneklem hacmi, farklı çoklu doğrusal bağlantı şiddeti ve farklı aykırı gözlem oranlar ile gerçekleştirilen simülasyon çalışması sonucunda ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri skaler MSE ölçütü bakımından EKK, ridge ve geleneksel M tahmin edicilerden daha iyi bir performans göstermiştir. Hataların lognormal dağılım göstermesi durumu için gerçekleştirilen simülasyon çalışmasında da ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri skaler MSE ölçütü bakımından EKK, ridge ve geleneksel M tahmin edicilerden daha başarılı olmuştur. Ridge tahminine dayalı M tahmin ediciler arasında yanlılık parametresinin farklı değerleri karşısında performansı en az etkilenen tahmin edici ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisidir. Simülasyon çalışması sonucunda farklı yanlılık parametresi k değerlerine göre elde edilen skaler MSE değerlerinin ortalaması alındığında en başarılı tahmin edici ridge tahminine dayalı Geman-McClure'nin M tahmin edicisi olmuştur.

Simülasyon çalışması sonuçlarına göre ridge tahminine dayalı M tahmin ediciler arasında Kibria (2003) tarafından önerilen \hat{k}_{AO} yanlılık parametresine dayalı olarak tanımlanan M tahmin ediciler daha başarılı bulunmuştur.

Simülasyon çalışması sonuçları göre; EKK, ridge ve M tahmin ediciler arasında skaler MSE ölçütüne göre çoklu doğrusal bağlantı ve aykırı gözlem probleminin bir arada olduğu durumlarda ridge tahmin edicileri daha iyi bir performans göstermiştir.

Çoklu doğrusal bağlantı problemi ve aykırı gözlem probleminin bir arada olduğu Tobacco veri setinde EKK, M, ridge ve ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri tekrarlı r katmanlı çapraz doğrulama tekniği ile karşılaştırılmış ve karşılaştırma sonucunda ridge tahminine dayalı M tahmin edicileri daha başarılı bulunmuştur.

Bu çalışma kapsamında çoklu doğrusal regresyon modelinde aykırı gözlem ve çoklu doğrusal bağlantı probleminin bir arada olduğu durumlarda ridge tahmine dayalı M tahmin edicisi önerilmiş ve önerilen tahmin edicinin performansının EKK, ridge ve M tahmin edicilerinden daha iyi olduğu gösterilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda aykırı gözlem ve çoklu doğrusal bağlantı probleminin bir arada olduğu durumlar için M tahmin ediciler ile çoklu doğrusal bağlantı probleminde kullanılan diğer yanlı tahmin edicilerin birlikte kullanımı ile elde edilecek tahmin edicilerin performansı incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

- Alkhamisi, M., Khalaf, G., Shukur, G., 2006. Some modifications for choosing ridge parameters. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 35(11), 2005–2020.
- Al-Hassan, Y. M., 2008. A Monte Carlo evaluation of some ridge estimators. *Jordan Journal of Applied Science*, 10(2), 101-110.
- Alkhamisi, M. A., Shukur, G., 2007. A monte carlo study of recent ridge parameters. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 36(3), 535–547.
- Andrews, D.F., 1974. A robust method for multiple linear regression, *Technometrics*, 16, 523-531
- Arashi, M., Valizadeh, T., 2015. Performance of Kibria's methods in partial linear ridge regression model. *Statistical Papers*, 56(1), 231-246.
- Asar Y., Karaibrahimoglu, A., Genç, A., 2013. Modified ridge regression parameters: a comparative Monte Carlo study. *Hacettepe J Math Stat.* 43(5):827-841.
- Asar, Y., Genç, A., 2017. A note on some new modifications of ridge estimators. *Kuwait Journal of Science*, 44(3), 75-82.
- Beaton, A. E., Tukey, J. W. 1974. The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data. *Technometrics*, 16(2), 147-185.
- Bell, R. M., 1980. An adaptive choice of the scale parameter for M-estimators. Stanford Univ Ca Dept of Statistics.
- Birkes, D., Dodge, Y., 2011. *Alternative methods of regression* (Vol. 190). John Wiley & Sons.
- De Menezes, D. Q. F., Prata, D. M., Secchi, A. R., & Pinto, J. C. 2021. A review on robust M-estimators for regression analysis. *Computers & Chemical Engineering*, 107254.
- Dorugade, A. V., 2014. New ridge parameters for ridge regression. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 15, 94-99.
- Fair, R. C., 1974. On the robust estimation of econometric models. *Annals of Economic and Social Measurement*, 3(4), 667-677.
- Geman, S., McClure D.E., (1987). Statistical methods for tomographic image reconstruction. *Bull. Int. Stat. Inst*, 4, 5-21.
- Gujarati D.N., 1995. *Basic econometrics*, 3rd. ed., New York, MCGraw-Hill, Inc.
- Hampel, F. R., 1974. The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of the american statistical association*, 69(346), 383-393.

- Hinich, M. J., Talwar, P. P., 1975. A simple method for robust regression. *Journal of the American Statistical Association*, 70(349), 113-119.
- Hocking, R. R., Speed, F. M., & Lynn, M. J, 1976. A class of biased estimators in linear regression. *Technometrics*, 18(4), 425–437.
- Hoerl, A. E., Kennard, R. W., 1970a. Ridge Regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12(1), 55–67.
- Hoerl, A. E., Kennard, R. W., 1970b. Ridge Regression: Applications to nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12(1), 69–82.
- Hoerl AE, Kennard RW, Baldwin KF 1975. Ridge Regression: Some simulations. *communications in statistics- Theory and Methods*. 1975;4:105-123.
- Holland, P. W., Welsch, R. E., 1977. Robust regression using iteratively reweighted least-squares. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 6(9), 813-827.
- Huber, P. J., (1964). Robust estimation of a location parameter, *Ann. Math. Stat.*, 35 (1), 73-101
- Khalaf, G., Shukur, G., 2005. Choosing ridge parameter for regression problems. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 34(5), 1177–1182.
- Kibria, B. M. G., 2003. Performance of some new ridge regression estimators. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*. 2003;32(2):419-435.
- Kibria, G., Banik, S., 2019. A Simulation Study on the Size and Power Properties of Some Ridge Regression Tests. *Applications & Applied Mathematics*, 14(2), 741-761.
- Kutlu, M.N., (2019). R programlama ile doğrusal olmayan regresyonda M tahmin edicileri ve etki fonksiyonları, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Konya.
- Lawless JF, Wang P, 1976. A Simulation Study of Ridge and other Regression Estimators. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, 14:1589-1604
- Li, Y., Yang, H., 2010. A new stochastic mixed ridge estimator in linear regression model. *Statistical Papers*, 51(2), 315-323.
- Lukman, A. F., Ayinde, K., 2017. Review and classifications of the ridge parameter estimation techniques. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(5), 953-967.
- Maronna R., Martin D., Yohai V., 2006, *Robust Statistics Theory and Methods*, John Wiley.
- Marquardt, D. W., Snee, R. D., 1975. Ridge regression in practice. *The American Statistician*, 29(1), 3-20.

- McDonald, G. C., Galarneau, D. I., 1975. A monte carlo evaluation of some ridge-type estimators. *Journal of the American Statistical Association*, 70(350), 407.
- Muniz, G., Kibria, B. M. G., 2009. On some ridge regression estimators: An empirical comparisons. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 38(3), 621–630.
- Özkale, M. R., 2007. Çoklu İç İlişki İle İlgili Problemler. Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı Doktora Tezi, Adana.
- Özkale, M. R., 2008. A jackknifed ridge estimator in the linear regression model with heteroscedastic or correlated errors. *Statistics & probability letters*, 78(18), 3159-3169.
- Özyurt, D. B., Pike, R. W. 2004. Theory and practice of simultaneous data reconciliation and gross error detection for chemical processes. *Computers & chemical engineering*, 28(3), 381-402.
- Pfaffenberger, R. C., Dielman, T. E. (1990). A comparison of regression estimators when both multi collinearity and outliers are present. Edit by: Arthur.
- Ramsay, J. O., 1977. A comparative study of several robust estimates of slope, intercept, and scale in linear regression. *Journal of the American Statistical Association*, 72(359), 608-615.
- Rey, W. J., 1983. Introduction to robust and quasi-robust statistical methods. Springer Science & Business Media.
- Silvey, S. D., 1969. Multicollinearity and imprecise estimation. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 31(3), 539-552.
- Stigler, S. M., 1974. Studies in the History of Probability and Statistics. XXXIII Cauchy and the witch of Agnesi: An historical note on the Cauchy distribution. *Biometrika*, 375-380.
- Toy, A., 2014. Sağlam regresyon tahmin edicilerinin incelenmesi ve bir uygulama, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, Elazığ.
- Tutz, G., Binder, H., 2007. Boosting ridge regression. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(12), 6044-6059.
- Yıldırım, V., 2012. Doğrusal regresyon modeli için M-tahmincilerin incelenmesi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir.